Lista 5

1)

a)

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$a1 = \frac{1+1}{4} = 0.5 < 1$ ok | $a2 = \frac{1+1}{4} = 0.5 < 1$ ok | $a3 = \frac{1+1}{5} = 0.4 < 1$ ok

$a1 = 0.5 < 1$ ok
$a2 = 0.5 < 1$ ok
$a3 = 0.4 < 1$ ok

Se $a = \max_{k=1,n} a_k < 1$, então o método de Gauss-Jacobi gera uma sequência $\{x^{(k)}\}$ convergente para a solução do sistema dado. Independente da escolha da aproximação inicial.

b) $x^0 = (0,0,0)$

$k=0$

Passo 1: $x_1^{m} = \frac{1}{4}(3 - 1x_2^{(0)} - 1x_3^{(0)}) \rightarrow \frac{1}{4}(3 - 1(0) - 1(0)) \rightarrow 0{,}75$

$x_2^{(0)} = \frac{1}{4}(0 - 1x_1^{(0)} - 1x_3^{(0)}) \rightarrow \frac{1}{4}(0 - 1(0) - 1(0)) \rightarrow 0$

$x_3^{(1)} = \frac{1}{5}(-4 - 1x_1^{(0)} - 1x_2^{(0)}) \rightarrow \frac{1}{5}(-4 - 1(0) - 1(0)) \rightarrow -.8$

___/___/____

Passo 2:

Cálculo do erro:

Máximo desvio absoluto $X^{(1)} - X^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.75 \\ 0 \\ -0.8 \end{bmatrix}$ $X^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{vmatrix} x_1^{(1)} - x_1^{(0)} \\ x_2^{(1)} - x_2^{(0)} \\ x_3^{(1)} - x_3^{(0)} \end{vmatrix}$ $\begin{array}{l} = |0.75 - 0| = 0.75 \\ = |0 - 0| = 0 \\ = |-0.8 - 0| = 0.8 > 0.0040 \end{array}$

Falhou!

Cálculo do erro: $\Delta_R^{(1)} = \dfrac{0.8}{\max_{i=1,3} |x_i^{(1)}|} = \dfrac{0.8}{0.8} = 1$ falhou!

Máximo desvio relativo

*Passo 1: $k = 1$

$x_1^{(2)} = \frac{1}{4}(3 - 0 - (-0.8)) \to 0.95$

$x_2^{(2)} = \frac{1}{4}(0 - 0.75 - (-0.8)) \to 0.0125$

$x_3^{(2)} = \frac{1}{5}(-4 - 0.75 - 0) \to -0.95$

Passo 2:

Cálculo do erro:

Máximo desvio absoluto $X^{(2)} - X^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.95 \\ 0.0125 \\ -0.95 \end{bmatrix}$ $X^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.75 \\ 0 \\ -0.8 \end{bmatrix}$ $\to$ $\begin{array}{l} |x_1^{(2)} - x_1^{(1)}| = |0.95 - 0.75| = 0.2 \\ |x_2^{(2)} - x_2^{(1)}| = |0.0125 - 0| = 0.0125 \\ |x_3^{(2)} - x_3^{(1)}| = |-0.95 + 0.8| = -0.15 \end{array}$

$\max 0.2 > 0.0040$

Falhou!

Cálculo do erro: $\Delta_R^{(1)} = \dfrac{0.2}{0.95} \to 0.2105 > 0.0040$

máximo desvio relativo

Falhou!

* K = 2

Passo 1 : $X_1^{(3)} = \frac{1}{4}(3 - 0.0125 - (-0.95)) \rightarrow 0.9844$

$X_2^{(3)} = \frac{1}{4}(0 - 0.95 - (-0.95) \rightarrow 0$

$X_3^{(3)} = \frac{1}{5}(-4 - 0.95 - 0.0125) \rightarrow -0.9925$

Passo 2

Cálculo do erro:

Máximo desvio absoluto $X^3 - X_2$

$$= \begin{bmatrix} X_1^3 - X_1^2 \\ X_2^3 - X_2^2 \\ X_3^3 - X_3^2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} |0.9844 - 0.95| = 0.0344 \\ |0 - 0.0125| = 0.0125 \\ |-0.9925 - (-0.95)| = 0.0425 \end{matrix}$$

$\hookrightarrow > 0.0040$

Falhou!

Cálculo do erro: $\Delta_R^{(1)} = \frac{0.0425}{0.9925} = 0.0428 > 0.0040$

Máximo desvio relativo

Falhou!

* K = 3

Passo 1. $X_1^{(4)} = \frac{1}{4}(3 - 0 - (-0.9925)) = 0.9981$

$X_2^{(4)} = \frac{1}{4}(0 - 0.9844 - (-0.9925)) = 0.0020$

$X_3^{(4)} = \frac{1}{5}(-4 - 0.9844 - 0) = -0.9969$

< 0.0040

Passo 2

Cálculo do erro:

Máximo desvio absoluto $X^{(4)} - X^{(3)}$

$$= \begin{bmatrix} X_1^{(4)} - X_1^{(3)} \\ X_2^{(4)} - X_2^{(3)} \\ X_3^{(4)} - X_2^{(3)} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} |0.9981 - 9844| = 0.0137 \\ |0.0020 - 0| = 0.0020 \\ |0.9969 + 0.9925| = 0.0044 \end{matrix}$$

Falhou!

___/___/___

Cálculo do erro: $\Delta^{(4)} = \dfrac{0.0137}{0.9981} \rightarrow 0.1373$ Falhou!

Máximo desvio relativo

* $k = 4$

Passo 1.

$$x_1^{(5)} = \frac{1}{4}(3 - 0.0020 - (-0.9969)) = 0.9987$$

$$x_2^{(5)} = \frac{1}{4}(0 \cdot 0.9981 - (-0.9969)) = -0.0003$$

$$x_3^{(5)} = \frac{1}{5}(-4 - 0.9981 - 0.0020) = -1.0000$$

Passo 2:

Cálculo do erro: $x^{(5)} - x^{(4)} = \begin{bmatrix} x_1^{(5)} - x_1^{(4)} \\ x_2^{(5)} - x_2^{(4)} \\ x_3^{(5)} - x_3^{(4)} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} |0.9987 - 0.9981| = 0.0006 \\ |-0.0003 - 0.0020| = 0.0023 \\ |-1 - (-0.9969)| = 0.0031 \end{matrix}$

Máximo desvio absoluto

< 0.0040

ok

Cálculo do erro: $\Delta^{(5)} = \dfrac{0.0031}{0.9987} = 0.0031$ ok

Máximo desvio relativo

Passo 3

Conclusão

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9987 \\ -0.0003 \\ -1.0000 \end{bmatrix}$$ é solução do sistema: $\begin{cases} 4x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 3 \\ 1x_1 + 4x_2 + 1x_3 = 0 \\ 1x_1 + 1x_2 + 5x_3 = -4 \end{cases}$

Com erro $\varepsilon < 0.0040$

___/___/___

2)

Solução a→

$$A = \begin{bmatrix} -9 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$a_1 = \frac{2+2}{-9} = -0.4444 < 1$

$a_2 = \frac{1}{3} = 0.3333 < 1$

$a_3 = \frac{-1+1}{3} = 0 < 1$

Se $a = \max_{K=1,n} a < 1$, então o método de Gauss-Jacobi gera uma sequência $\{x^{(K)}\}$ convergente para a solução do sistema dado, independente da escolha da aproximação inicial $x^{(0)}$.

Solução b:

* $\{K=0\}$

passo 1: $x_1^{(1)} = \frac{1}{-9}(-5-2(0)-2(0)) = 0.5556$

$x_2^{(1)} = \frac{1}{3}(4-0.5556-0) = 1.1481$

$x_3^{(1)} = \frac{1}{3}(3+0.5556-1.1481) = 0.8025$

passo 2:

Cálculo do erro. Máximo desvio absoluto

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.5556 \\ 1.1481 \\ 0.8025 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} |x_1^{(1)} - x_1^{(0)}| = |0.5556-0| = 0.5556 \\ |x_2^{(1)} - x_2^{(0)}| = |1.1481-0| = 1.1481 > \varepsilon \\ |x_3^{(1)} - x_3^{(0)}| = |0.8025-0| = 0.8025 \end{matrix}$$

falhou!

Cálculo do erro: Máximo desvio relativo

$\Delta_R^{(1)} = \frac{1.1481}{1.1481} = 1 > 0.0010$

Falhou!

* K=1

Passo 1: $X_1^{(2)} = \frac{1}{-9}\left(-5-2(1.1481)-2(0.8025)\right) = 0.9890$

$$X_2^{(2)} = \frac{1}{3}\left(4-0.9890-0\right) = 1.0037$$

$$X_3^{(2)} = \frac{1}{3}\left(3+0.9890-1.0037\right) = 0.9951$$

Falhou! $> \varepsilon$

Passo 2:
Cálculo do erro:
Máximo desvio absoluto

$$X^{2} = \begin{bmatrix} 0.9890 \\ 1.0037 \\ 0.9951 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} |x_1^{(2)} - x_1^{(1)}| = |0.9890 - 0.5556| = 0.4334 \\ |X_2^{(2)} - X_2^{(2)}| = |1.0037 - 1.1481| = 0.1444 \\ |X_3^{(2)} - X_3^{(2)}| = |0.9951 - 0.8025| = 0.1926 \end{array}$$

Cálculo do erro:
Máximo desvio relativo

$$\Delta_R^{(2)} = \frac{0.4334}{1.0037} = 0.4318 > 0.0010$$

falhou!

* K=2

Passo 1: $X_1^{(3)} = \frac{1}{-9}\left(-5-2(1.0037)-2(0.9951)\right) = 0.9997$

$$X_2^{(3)} = \frac{1}{3}\left(4-0.9997-0\right) = 1.0001$$

$$X_3^{(3)} = \frac{1}{3}\left(3+0.9997-1.0001\right) = 0.9999$$

falhou! $> \varepsilon$

Passo 2:
Cálculo do erro:
Máximo desvio absoluto

$$X^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.9997 \\ 1.0001 \\ 0.9999 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} |x_1^{(3)} - x_1^{(2)}| = |0.9997 - 0.9890| = 0.0107 \\ |X_2^{(3)} - X_2^{(2)}| = |1.0001 - 1.0037| = 0.0036 \\ |X_3^{(3)} - X_3^{(2)}| = |0.9999 - 0.9951| = 0.0039 \end{array}$$

Cálculo do erro:
Máximo desvio relativo

$$\Delta_R^{(3)} = \frac{0.0107}{1.0001} = 0.0107 > 0.0010$$

falhou!

* $k=3$

passo 1: $X_1^{(4)} = \frac{1}{-9} (-5 - 2(1.0001) - 2(0.9999)) = 1.0000$

$X_2^{(4)} = \frac{1}{3} (4 - 1.0000 - 0) = 1.0000$

$X_3^{(4)} = \frac{1}{3} (3 + 1.0000 - 1.0000) = 1.0000$

Ok!

Passo 2:
Cálculo do erro.
Máximo desvio absoluto

$$X^{(4)} = \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 1.0000 \\ 1.0000 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} |X_1^{(4)} - X_1^{(3)}| &= |1.0000 - 0.9997| = 0.0003 < \varepsilon \\ |X_2^{(4)} - X_2^{(3)}| &= |1.0000 - 1.0001| = 0.0001 \\ |X_3^{(4)} - X_3^{(3)}| &= |1.0000 - 0.9999| = 0.0001 \end{aligned}$$

Cálculo do erro:
Máximo desvio relativo $\Delta_R^{(4)} = \frac{0.0003}{1.0000} = 0.0003 < 0.0010$

Ok!

Passo 3:
Conclusão:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 1.0000 \\ 1.0000 \end{bmatrix}$$ é uma solução do sistema $$\begin{cases} -9x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -5 \\ 1x_1 + 3x_2 + 0x_3 = 4 \\ -1x_1 + 1x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$$

Com erro $\varepsilon < 0.0010$