Aluno: Gabriel Gomes Marchesan
RGA: 202111722011

Prova 2

Questão 0:

$$C = 1{,}08 + [(D_{n-1} + D_n)/10]$$
$$C = 1{,}08 + [(1+1)/10]$$
$$C = 1{,}08 + 0{,}2$$
$$C = 1{,}28$$

Questão 1:

a)
$$\int_2^3 (\ln(X) + 1{,}28 \cdot X + 1{,}28)\,dx$$

Passo 1: $h = \frac{b-a}{N} = \frac{3-2}{10} = 0.1$

Passo 2: Cálculo dos valores da função $f(x)$

$f(x_0) = \ln(2) + 1.28 \times 2 + 1.28 \approx 2.386294 + 2.56 + 1.28 \approx 6.226294$
$f(x_1) = \ln(2.1) + 1.28 \times 2.1 + 1.28 \approx 2.312535 + 2.688 + 1.28 \approx 6.280535$
$f(x_2) = \ln(2.2) + 1.28 \times 2.2 + 1.28 \approx 2.240710 + 2.816 + 1.28 \approx 6.336711$
$f(x_3) = \ln(2.3) + 1.28 \times 2.3 + 1.28 \approx 2.170088 + 2.944 + 1.28 \approx 6.394088$
$f(x_4) = \ln(2.4) + 1.28 \times 2.4 + 1.28 \approx 2.100718 + 3.072 + 1.28 \approx 6.452718$

___/___/___

$f(x_5) = \ln(2.5) + 1.28 \times 2.5 + 1.28 \approx 2.032745 + 3.2 + 1.28 \approx 6.512745$

$f(x_6) = \ln(2.6) + 1.28 \times 2.6 + 1.28 \approx 1.966327 + 3.328 + 1.28 \approx 6.574327$

$f(x_7) = \ln(2.7) + 1.28 \times 2.7 + 1.28 \approx 1.901629 + 3.456 + 1.28 \approx 6.638629$

$f(x_8) = \ln(2.8) + 1.28 \times 2.8 + 1.28 \approx 1.838819 + 3.584 + 1.28 \approx 6.705819$

$f(x_9) = \ln(2.9) + 1.28 \times 2.9 + 1.28 \approx 1.777972 + 3.712 + 1.28 \approx 6.776972$

$f(x_{10}) = \ln(3) + 1.28 \times 3 + 1.28 \approx 1.098612 + 3.84 + 1.28 \approx 6.218612$

Passo 3:

$\frac{\Delta x}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + 4f(x_5) + 2f(x_6) + 4f(x_7)$
$+ 2f(x_8) + f(x_9) + f(x_{10})]$

$\frac{0.1}{3}[6.226294 + 4 \times 6.280535 + 2 \times 6.336711 + 4 \times 6.394088 + 2 \times 6.452718$
$+ 4 \times 6.512745 + 2 \times 6.574327 + 4 \times 6.638629 + 2 \times 6.705819 + 6.776972$
$+ 6.218612] \approx 6.71636$

b)

$|E| \leq \frac{h^4}{180} \cdot (b-a) \cdot \max|F^{(4)}(x)|$

$|E| \leq \frac{0.1^4}{180}(1) \cdot \max|F^{(4)}(x)|$

$|E| \leq \frac{0.1^4}{180} \cdot (1) \cdot \left|\frac{-3}{8}\right|$

$|E| \leq \frac{0.0001 \cdot (1)}{180} \cdot \left|\frac{3}{8}\right|$

$|E| \leq \frac{0.0003}{1440}$

$|E| \leq 0.0000002083333333$

$\max|f^{(4)}(x)|$

$\hookrightarrow \ln(x) + 1.28x + 1.28$

$f(x)' = \frac{1}{x} + 1.28$

$f(x)'' = \frac{-1}{x^2}$

$f(x)''' = \frac{2}{x^3}$

$f(x)'''' = \frac{-6}{x^4} = \frac{-6}{2^4} = \frac{-6}{16} = \frac{-3}{8}$

Questão 2:

Solução a

$$A=\begin{bmatrix} 3.71 & 2 & 1 \\ 1 & 2.56 & 1 \\ 2 & 1 & 3.84 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = \frac{2+1}{3.71} = 0.8086 < 1$$

$$a_2 = \frac{1+1}{2.56} = 0.7812 < 1$$

$$a_3 = \frac{2+1}{3.84} = 0.7812 < 1$$

Se $a = \max_{k=1,n} a < 1$, então o método de Gauss-Jacobi gera uma sequência $\{x^{(k)}\}$ convergente para a solução do sistema dado, independente da escolha da aproximação inicial $x^{(0)}$.

Solução b:

$\ast$ $\{k=0\}$

passo 1 = $X_1^{(1)} = \frac{1}{3{,}71}(4 - 2(0) - 1(0)) = 1{,}0781$

$X_2^{(1)} = \frac{1}{2.56}(1 - (1{,}0781) - 1(0)) = -0{,}0305$

$X_3^{(1)} = \frac{1}{3.84}(2 - 1{,}0781 - (-0{,}305)) = 0{,}3195$

Falhou! $\boxed{1{,}0781} > 0{,}0010$

Passo 2:

Cálculo do erro

Máximo Desvio absoluto

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} 1{,}0781 \\ -0{,}0305 \\ 0{,}3195 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} |X_1^{(1)} - X_1^{(0)}| &= |1{,}0781 - 0| = \boxed{1{,}0781} \\ |X_2^{(1)} - X_2^{(0)}| &= |-0{,}0305 - 0| = +0{,}0305 \\ |X_3^{(1)} - X_3^{(0)}| &= |0{,}3195 - 0| = 0{,}3195 \end{aligned}$$

Máximo Desvio relativo $\Delta_R^{(1)} = \frac{1{,}0781}{1{,}0781} = 1 > 0.0010$

Falhou!

__/__/__

* K=1

passo 1: $X_1^{(2)} = \frac{1}{3{,}71}(4-2(-0{,}0305)-1(0{,}3195)) = 1{,}0084$

$X_2^{(2)} = \frac{1}{2{,}56}(1-1{,}0084-0) = -0{,}0032$

$X_3^{(2)} = \frac{1}{3{,}84}(2-1{,}0084-(-0{,}0032)) = 0{,}2590$

Falhou! ↱ 0,0010

Passo 2:
Cálculo do erro: $X_2 = \begin{bmatrix} 1{,}0084 \\ -0{,}0032 \\ 0{,}2590 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} |X_1^{(2)} - X_1^{(1)}| = |1{,}0084 - 1{,}0781| = 0{,}0697 \\ |X_2^{(2)} - X_2^{(1)}| = |-0{,}0032 - 0{,}0305| = 0{,}0273 \\ |X_3^{(2)} - X_3^{(1)}| = |0{,}2590 - 0{,}3195| = 0{,}0605 \end{array}$

Máximo desvio absoluto

Máximo desvio relativo $\Delta_R^{(2)} = \frac{0{,}0697}{1{,}0084} = 0{,}0691 > 0{,}0010$

Falhou!

* K= 2

passo 1: $X_1^{(3)} = \frac{1}{3{,}71}(4-2(-0{,}0032)-1(0{,}2590)) = 1{,}0100$

$X_2^{(3)} = \frac{1}{2{,}56}(1-1{,}0100-0) = -0{,}0039$

$X_3^{(3)} = \frac{1}{3{,}84}(2-1{,}0100-(-0{,}0039)) = 0{,}2588$

Falhou! ↱ 0,0010

Passo 2:
Cálculo do erro: $X^{(3)} = \begin{bmatrix} 1{,}0100 \\ -0{,}0039 \\ 0{,}2588 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} |X_1^{(3)} - X_1^{(2)}| = |1{,}0100 - 1{,}0084| = 0{,}0016 \\ |X_2^{(3)} - X_2^{(2)}| = |-0{,}0039 - 0{,}0032| = 0{,}0007 \\ |X_3^{(3)} - X_3^{(2)}| = |0{,}2588 - 0{,}2590| = 0{,}0002 \end{array}$

Máximo desvio absoluto

Máximo desvio relativo: $\Delta_R^{(3)} = \frac{0{,}0016}{1{,}0100} = 0{,}0015 > 0{,}0010$ falhou!

*$\{K=3\}$

passo 1: $X_1^{(4)} = \frac{1}{3,71}(4-2(-0,0039)-1(0,2588)) = 1,0105$

$X_2^{(4)} = \frac{1}{2,56}(1-1,0105-0) = -0,0041$

$X_3^{(4)} = \frac{1}{3,84}(2-1,0105-(-0,0041)) = 0,2587$

OK! $<0,0010$

Passo 2:
Cálculo do erro: $X^{(4)} = \begin{bmatrix} 1,0105 \\ -0,0041 \\ 0,2587 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} |X_1^{(4)} - X_1^{(3)}| = |1,0105 - 1,0100| = 0,0005 \\ |X_2^{(4)} - X_2^{(3)}| = |0,0041 - 0,0039| = 0,0002 \\ |X_3^{(4)} - X_2^{(3)}| = |0,2587 - 0,2588| = 0,0001 \end{array}$
Máximo desvio absoluto

Máximo desvio relativo $\Delta_R^{(3)} = \frac{0,0005}{1,0105} = 0,0004 < 0.0010$ ok!

passo 3:
Conclusão:

$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0105 \\ -0,0041 \\ 0,2587 \end{bmatrix}$ é uma solução do sistema

$$\begin{cases} 3,71x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 4 \\ 1x_1 + 2,56x_2 + 1x_3 = 1 \\ 2x_1 + 1x_2 + 3,84x_3 = 2 \end{cases}$$

Com erro $E < 0,0010$ //