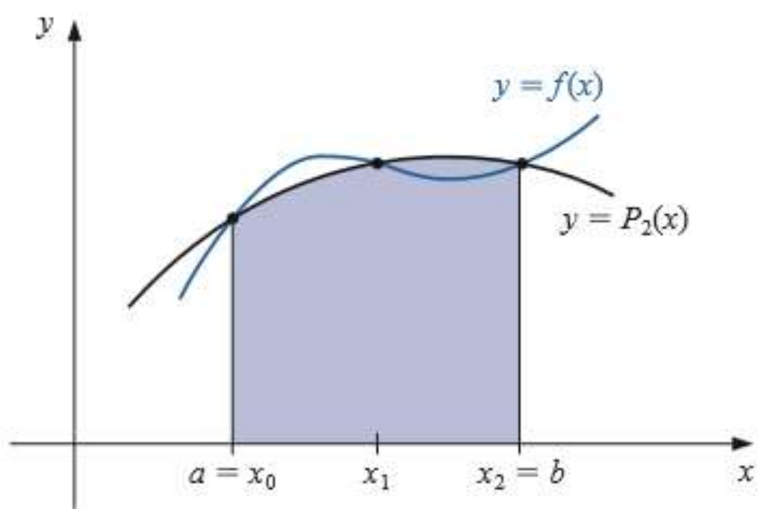
Cálculo Numérico Computacional
Unidade IV

Integração Numérica

. Regra dos Trapézios

. Regra 1/3 de Simpson



Roteiro

- Regra dos Trapézios
  - Simples
    - Erro
  - Composta
    - Erro

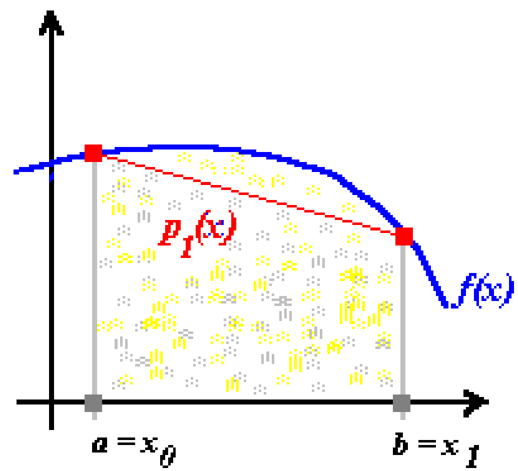
- Regra 1/3 de Simpson
  - Simples
    - Erro
  - Composta
    - Erro

Ótimo estudo!

Cálculo Numérico Computacional

- **Regra dos Trapézios – Simples**

  - A função f(x) é aproximada por uma função linear p(x).



  - Considerando apenas dois pontos $x_0 = a$ e $x_1 = b$, pela Forma de Lagrange temos que:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{1} L_i(x).f(x_i) = L_0(x).f(x_0) + L_1(x).f(x_1)$$

Cálculo Numérico Computacional

- **Regra dos Trapézios – Simples**

  - Porém:

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \qquad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

  - Fazendo $x_1 - x_0 = h$ (amplitude do intervalo)
  - Temos também: $-h = x_0 - x_1$
  - Assim:

$$\boxed{p(x) = \left(\frac{x - x_1}{-h}\right) \cdot f(x_0) + \left(\frac{x - x_0}{h}\right) \cdot f(x_1)}$$

Cálculo Numérico Computacional

- **Regra dos Trapézios – Simples**

  - Integrando:

$$\text{Area} = \mathrm{I}(p) = \int_{xo}^{x1} \boxed{p(x)}\, dx$$

$$\text{Area} = \int_{xo}^{x1} \boxed{\left(\left(\frac{x - x_1}{-\,h}\right) \cdot f(x_0) + \left(\frac{x - x_0}{h}\right) \cdot f(x_1) \right)} dx$$

$$\boxed{\text{Area} = h/2\,[f(x_0) + f(x_1)]}$$

  - Erro real na aproximação:

$$\text{Erro} = \mathrm{I}(f) - \mathrm{I}(p_n)$$

Cálculo Numérico Computacional

- **Regra dos Trapézios – Simples**

  - **Teorema 1**:

Seja $f \in C^2([a,b])$. Então

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] - \frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta), \qquad \eta \in (a,b)$$

fazendo h = b - a

$$\int_a^b f(x)dx = \underbrace{\boxed{\frac{h}{2}[f(a)+f(b)]}}_{\text{Regra do Trapézio}} - \overbrace{\boxed{\frac{(h)^3}{12} f''(\eta)}}^{\text{Erro}}, \qquad \eta \in (a,b)$$

- **Regra dos Trapézios – Simples**

  - **Erro**:

    - Na prática substituímos f ''(η) pelo *max*|f '' (x)| em [a,b] para obter o erro:

$$\|E_t\| \leq \frac{h^3}{12} \cdot \max\left|f''(x)\right| \quad x \in [a, b].$$

Cálculo Numérico Computacional

- **Regra dos Trapézios – Simples**

Exemplo 1:

Dada $f(x) = \dfrac{1}{x}$ Calcular a integral $\displaystyle\int_3^{3,6} f(x)dx = \int_3^{3,6} \frac{1}{x}\, dx$

Solução:

Temos: $x_0 = 3$, $x_1 = 3,6$ e $h = x_1 - x_0 = 0,6$

$$\int_3^{3,6} \frac{dx}{x} \approx \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] = \frac{0,6}{2}\left[\frac{1}{3,0} + \frac{1}{3,6}\right] = 0,18333$$

Cálculo Numérico Computacional

- **Regra dos Trapézios – Simples**
  - Exemplo 1 – cont.
    - Cálculo do Erro

$$\|E_t\| \leq \frac{h^3}{12} \cdot \max\left|f''(x)\right| \quad x \in [a, b].$$

Temos que:

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad f'(x) = \frac{-1}{x^2} \quad \text{e} \quad \boxed{f''(x) = \frac{2}{x^3}}$$

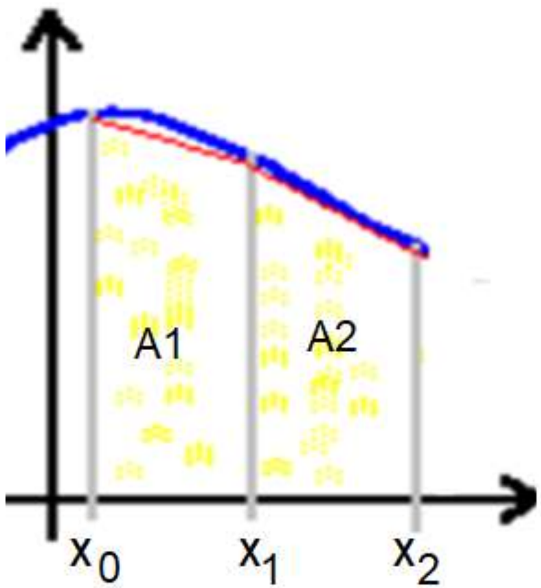
Para $x \in [3,\ 3.6]$ o valor $\max\left|f''(x)\right| = \frac{2}{3^3} = \frac{2}{27}$

portanto:

$$\|E_t\| \leq \frac{0{,}6^3}{12} \cdot \frac{2}{27} = 0{,}00133$$

Cálculo Numérico Computacional

- **Regra dos Trapézios – Composta**



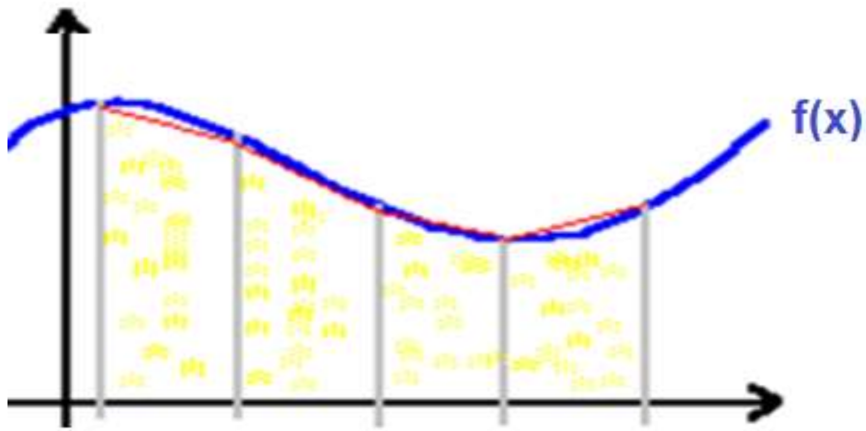
A = A1 + A2

$$A = \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] + \frac{h}{2}[f(x_1) + f(x_2)]$$

$$\boxed{A = \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + f(x_2)]}$$

Cálculo Numérico Computacional

- **Regra dos Trapézios – Composta**
  - **Caso Genérico**



$x_0 = a$ $x_1, \ldots$ $, x_i, \ldots$ $x_N = b$

Particionado $[a, b]$ em N subintervalos, de igual amplitude,

sendo $x_i = a + ih \quad (i = 0, 1, \ldots, N)$ para $h = \dfrac{b-a}{N}$.

Temos:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{N} \boxed{\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx} \qquad \textbf{(1)}$$

Regra dos Trapézios – Composta

Caso Genérico

Aplicando a regra do trapézio a cada um dos integrais do somatório em (1) :

$$\boxed{\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx} \approx \frac{h}{2}\left[f(x_{i-1}) + f(x_i)\right],\ i = 1,2,\ldots, N\ ,$$

Temos a regra do trapézio composta:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left[f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{N-2} + 2f_{N-1} + f_N\right]}$$

Em que escrevemos $f(x_i) \equiv f_i$, para simplificar a notação.

Regra dos Trapézios – Composta

- **Teorema 2**

Seja $f \in C^2[a,b]$ e $x_i = a + ih \quad (i = 0,1,\ldots,N)$ com $h = \dfrac{b-a}{N}$. Então

$$\int_a^b f(x)dx = \underbrace{\boxed{\frac{h}{2}\left[f_0 + 2f_1 + \cdots + 2f_{N-1} + f_N\right]}}_{\text{Regra trapézio composta}} - \underbrace{\boxed{\frac{h^2}{12}(b-a)f''(\eta)}}_{\text{Errro}}, \quad \eta \in (a,b)$$

- **Regra dos Trapézios – Composta**

  - **Erro**

Na prática substituímos $f''(\eta)$ por $max|f''(x)|$ em [a,b] para obter o erro:

$$\boxed{\|E_t\| \leq \frac{h^2}{12}(b-a)\ max|f''(x)|} \qquad x \in [a,b]$$

$$\text{com } h = \frac{b-a}{N}$$

- **Regra dos Trapézios – Composta**
  - **Exemplo 2**

Dada $f(x) = \dfrac{1}{x}$ Calcular a integral $\int_{3}^{3,6} f(x)dx = \int_{3}^{3,6} \frac{1}{x}\, dx$

utilizando a Regra do Trapézio Composta por 6 subintervalos.

Solução:

$$h = (b - a)/N = (3.6 - 3.0)/6 = 0.6/6 = 0.1$$

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x	3.0	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6
f(x) = 1/x	0.333333	0.322581	0.312500	0.303030	0.294118	0.285714	0.277778
	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$f(x_4)$	$f(x_5)$	$f(x_6)$

$$A = \int_{3,0}^{3,6} \frac{1}{x}\, dx \approx \boxed{\frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + 2f(x_4) + 2f(x_5) + f(x_6)]}$$

$$\boxed{A \approx 0{,}182350}$$

Cálculo Numérico Computacional

- **Regra dos Trapézios – Composta**
  - **Exemplo 2 – cont.**
    - **Cálculo do Erro**

$$\boxed{\|E_t\| \leq \frac{h^2}{12}(b-a)\ max|f''(x)|} \qquad x \in [a,b] \qquad \text{com } h = \frac{b-a}{N}$$

Solução:

h = (b - a)/N = (3.6 - 3.0)/6 = 0.6/6 = 0.1

Para $f(x) = \frac{1}{x}$, temos $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$ e $\boxed{f''(x) = \frac{2}{x^3}}$.

Para $x \in [3, 3.6]$ temos $max|f''(x)|$ em x = 3

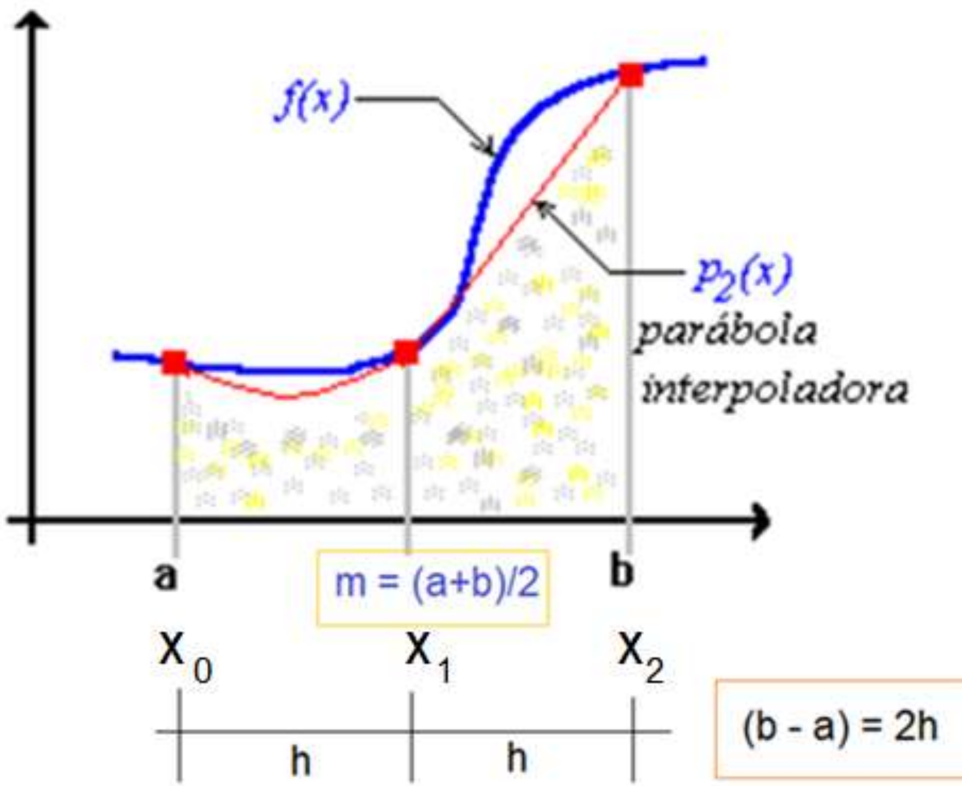
Assim: $\max|f''(x)| = \frac{2}{3^3} = \frac{2}{27}$

Portanto:

$$\|E_t\| \leq \frac{(0.1)^2}{12}(3.6 - 3.0)\ \frac{2}{27} = 0.00003704$$

Cálculo Numérico Computacional

- **Regra 1/3 de Simpson – Simples**



A fórmula de Simpson aproxima

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b p(x)\,dx$$

Regra 1/3 de Simpson - Simples

Considerando três pontos pela Forma de Lagrange :

$$p(x) = \sum_{i=0}^{2} L_i \cdot f(x_i) = L_0 \cdot f(x_0) + L_1 \cdot f(x_1) + L_2 \cdot f(x_2)$$

Fazendo $x_0 = a$ $x_1 = m = (a+b)/2$ $x_2 = b$

$$\boxed{p(x) = f(a)\frac{(x-m)(x-b)}{(a-m)(a-b)} + f(m)\frac{(x-a)(x-b)}{(m-a)(m-b)} + f(b)\frac{(x-a)(x-m)}{(b-a)(b-m)}}$$

Integrando:

$$\boxed{\int_a^b \boxed{p(x)}\, dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]}$$

Se h é a amplitude do intervalo então: (b-a)/6 = 2h/6 = h/3

$$\boxed{\int_a^b \boxed{p(x)}\, dx = \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]}$$

Fórmula de Simpson Simples

- **Regra 1/3 de Simpson – Simples**
  - **Teorema 3**

Seja $f \in C^4[a,b]$. Então

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\frac{1}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(4)}(\eta), \quad \eta \in (a,b)$$

fazendo (b - a) = 2h

$$\int_a^b f(x)dx = \underbrace{\frac{h}{3}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]}_{\text{Simpson}} - \underbrace{\frac{1}{90}\left(h\right)^5 f^{(4)}(\eta)}_{\text{Erro}} \quad \eta \in (a,b)$$

- **Regra 1/3 de Simpson – Simples**
  - **Erro**

Na prática substituimos $f^{(4)}(\eta)$ por $max|f^{(4)}(x)|$ em $[a,b]$ para obter o erro:

$$\boxed{\|E\| \leq \frac{1}{90}\left(h\right)^5 max|f^{(4)}(x)|}$$

para $(b - a) = 2h$

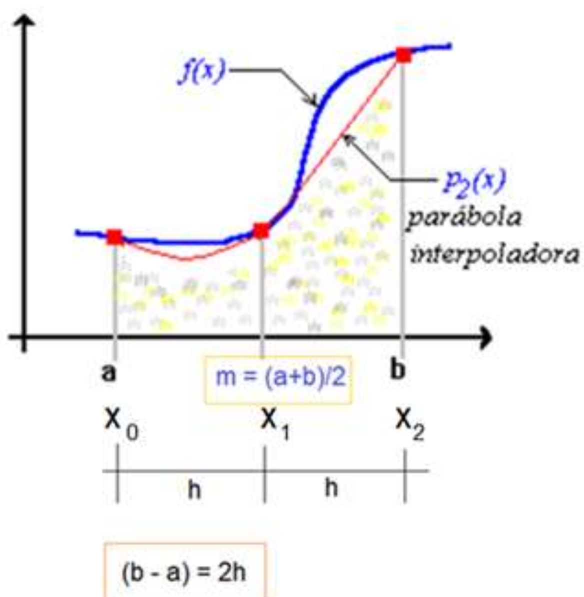
Cálculo Numérico Computacional

- **Regra 1/3 de Simpson – Simples**
  - **Exemplo 3**

Dada $f(x) = \dfrac{1}{x}$ Calcular a integral $\int_{3}^{3,6} f(x)dx = \int_{3}^{3,6} \dfrac{1}{x}\, dx$

utilizando a Regra de Simpson - Simples.

Solução:



$$A = \int_{3,0}^{3,6} \frac{1}{x} dx \approx \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

$$A = \int_{3,0}^{3,6} \frac{1}{x} dx \approx \boxed{\frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right]}$$

Importante: A Regra de Simpson requer um número impar de pontos tabelados!

Cálculo Numérico Computacional

- **Regra 1/3 de Simpson – Simples**
  - **Exemplo 3 – cont.**

Dada $f(x) = \frac{1}{x}$ Calcular a integral $\int_{3}^{3,6} f(x)dx = \int_{3}^{3,6} \frac{1}{x}\, dx$

utilizando a Regra de Simpson - Simples.

Solução:

	x_0 a	x_1 m	x_2 b
x	3	3.3	3.6
f(x)=1/x	0.333333	0.303030	0.277778
	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$

(b - a) = 2h
(3.6 - 3) = 2h
0.6 = 2h
0.6/2 = h
$\boxed{0.3 = h}$

$$A = \int_{3,0}^{3,6} \frac{1}{x} dx \approx \boxed{\frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right]} = \frac{0,3}{3}\left[0,333333 + 4 \cdot 0,303030 + 0,277778\right]$$

$$\boxed{A \approx 0.182323}$$

Cálculo Numérico Computacional

- **Regra 1/3 de Simpson – Simples**

  - **Exemplo 3 – cont.**
    - **Cálculo do Erro**

$$|E| \le \frac{h^5}{90} \cdot \max\left|f^{(IV)}(x)\right| \quad x \in [\text{a} \ , \ \text{b}]$$

Em que (b - a) = 2h ou (3.6 - 3) = 2h ou 2h = 0.6 $\Longrightarrow$ $\boxed{h = 0.3}$

Para $f(x) = \frac{1}{x}$, temos: $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$, $f''(x) = \frac{2}{x^3}$,

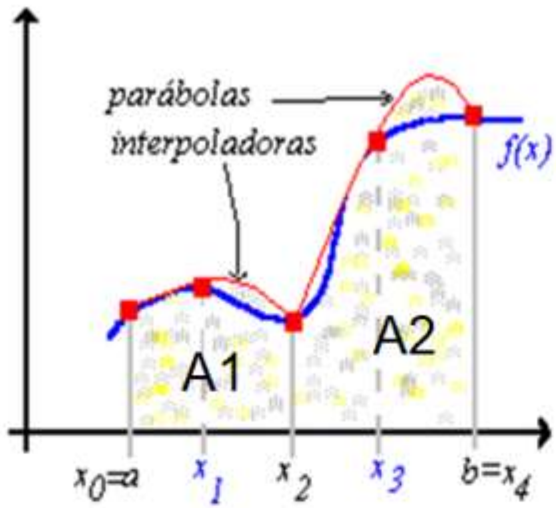
$$f'''(x) = \frac{-6}{x^4} \quad \text{e} \quad \boxed{f^{(IV)}(x) = \frac{24}{x^5}}$$

Para $x \in [3, \ 3.6]$ o $\max\left|f^{(IV)}(x)\right|$ ocorre em x = 3,

assim $\max\left|f^{(IV)}(x)\right| = \frac{24}{3^5} = \frac{24}{243}$,

Então: $|E| \le \frac{0{,}3^5}{90} \cdot \frac{24}{243} = 0.000002666$

- **Regra 1/3 Simpson – Composta**



Regra de Simpson aplicada a dois sub-intervalos.

A = A1 + A2

$$A=\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)]+\frac{h}{3}[f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)]$$

A1 A2

$$A=\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)]$$

Índices impares

Índices pares

- **Regra 1/3 Simpson – Composta**
  - **Caso Genérico**

Particionando $[a,b]$ num $\boxed{\underline{\text{número par de subintervalos}}}$ de igual amplitude, $[x_{i-1}, x_i]\,(i = 1,2,\ldots,N)$, N é par!!

sendo $x_i = a + ih$ e $\boxed{h = \dfrac{b-a}{N}}$

Aplicando a regra de Simpson em cada "duplo intervalo"

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1}\right], (i = 1,3,5,\ldots, N-1)$$

Extremos

Temos a regra de Simpson composta:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{N-2} + 4f_{N-1} + f_N\right]}$$

Índices pares

Índices Impares

- **Regra 1/3 de Simpson – Composta**

  - Teorema 4

Seja $f \in C^4[a,b]$ e $x_i = a + ih$ $(i = 0,1,\ldots,N)$ com $h = \dfrac{b-a}{N}$. Então

para algum $\eta \in (a,b)$

$$\int_a^b f(x)dx = \underbrace{\boxed{\frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{N-2} + 4f_{N-1} + f_N\right]}}_{\text{Simpson composta}} - \underbrace{\boxed{\frac{h^4}{180}(b-a)f^{(4)}(\eta)}}_{\text{Erro}}$$

- **Regra 1/3 de Simpson – Composta**

  - **Erro**

Na prática substituímos $f^{(4)}(\eta)$ por $max|\, f^{(4)}(x)\,|$ em [a,b] para obter o erro:

$$\boxed{|E| \leq \frac{h^4}{180}(b-a)\, max|\, f^{(4)}(x)\,|} \quad x \in [a,b]$$

com $h = \dfrac{b-a}{N}$

Regra 1/3 de Simpson – Composta

Exemplo 4

Dada $f(x) = \dfrac{1}{x}$ Calcular a integral $\displaystyle\int_{3}^{3,6} f(x)dx = \int_{3}^{3,6} \frac{1}{x}\,dx$

utilizando a Regra de Simpson Composta por 6 subintervalos.

Solução:

h = (b - a)/N = (3.6 - 3.0)/6 = 0.6/6 = 0.1

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x	3.0	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6
f(x) = 1/x	0.333333	0.322581	0.312500	0.303030	0.294118	0.285714	0.277778
	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$f(x_4)$	$f(x_5)$	$f(x_6)$

Extremos

Índices pares

$$A = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[\boxed{f(x_0)} + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + 4f(x_5) + \boxed{f(x_6)}]$$

Índices pares

$$A \approx \frac{0.1}{3}(0.333333 + 4 \cdot 0.322581 + 2 \cdot 0.3125 + 4 \cdot 0.30303 + 2 \cdot 0.294118 + 4 \cdot 0.285714 + 0.277778)$$

$$\boxed{A \approx 0.182322}$$

Regra 1/3 de Simpson – Composta

Exemplo 4 – cont.

Cálculo do Erro

$$\boxed{|E| \leq \frac{h^4}{180}(b-a)\, max|\, f^{(4)}(x)\,|}$$ $x \in [a,b]$ com $h = \dfrac{b-a}{N}$

Solução:

h = (b - a)/N = (3.6 - 3.0) /6 = 0.6/6 = 0.1 Para $f(x) = \dfrac{1}{x}$,

temos: $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$, $f''(x) = \dfrac{2}{x^3}$, $f'''(x) = \dfrac{-6}{x^4}$ e $\boxed{f^{(IV)}(x) = \dfrac{24}{x^5}}$

Para $x \in [3,\ 3.6]$ o $\max\left|f^{(IV)}(x)\right|$ ocorre em x = 3, assim

$$\max\left|f^{(IV)}(x)\right| = \frac{24}{3^5} = \frac{24}{243}$$

$$\boxed{|E| \leq \frac{(0.1)^4}{180}(3.6 - 3.0)\frac{24}{243} = 0.0000000329218}$$

Cálculo Numérico Computacional

Obrigado pela Atenção!

Fique atento e focado! Vem ai a lista de atividades dessa unidade!

Livro Texto:
RUGGIERO,M.A.G.; LOPES,V.L.R.
Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais,
Makron Books, 2ª. Edição, 1997.