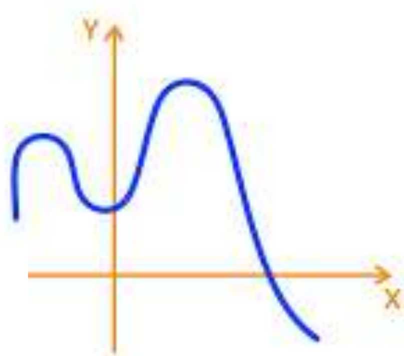
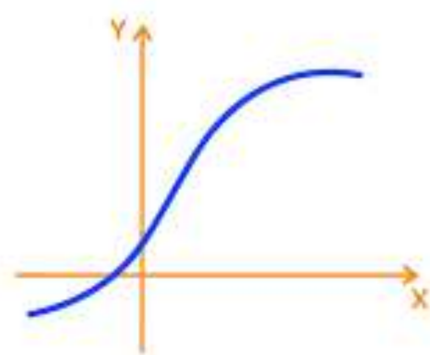
Cálculo Numérico Computacional
Unidade II

Zero Reais de Funções Reais
Parte 2

. Método da Iteração Linear (MIL)
. Método de Newton-Raphson



Cálculo Numérico Computacional

Roteiro

- Método da Iteração Linear (MIL)
  - Estratégia
  - Teorema da Convergência
  - Função de Iteração
  - Processo Iterativo
  - Critérios de parada
  - Exemplo de Aplicação
- Método de Newton-Raphson
  - Estratégia
  - Função de Iteração
  - Processo Iterativo
  - Interpretação Geométrica
  - Critérios de parada
  - Exemplo de Aplicação

Ótimo estudo!

Cálculo Numérico Computacional

- **Método da Iteração Linear**
  - **Estratégia**

  - Seja f(x) uma função contínua em um intervalo [a,b] que contenha uma raiz da f(x).

  - Seja L(x), tal que f(x) = L(x) – x, assim para **f(x) = 0** temos L(x) – x = 0 e então **x = L(x)**

  - De fato, **se** para **algum** z em [a, b], **z = L(z)** então z é uma raiz da função f(x)!

  - L(x) é chamada uma função de iteração para f(x).

Cálculo Numérico Computacional

- **Método da Iteração Linear**
  - **Teorema da Convergência**

Seja uma função *f(x)* contínua em um intervalo $[a, b]$ e z uma raiz de *f(x)* contida em $[a, b]$.

Seja $L(x)$ uma função de iteração obtida a partir de *f(x)*.

Se:

i) $L(x)$ e $L'(x)$ forem contínuas em $[a, b]$;

ii) $|L'(x)| < 1 \quad \forall\, x \in [a, b]$;

iii) $x_0 \in [a, b]$.

Então: $\lim_{n \to +\infty} x_n = z$

Cálculo Numérico Computacional

- **Método da Iteração Linear**
  - **Função de iteração**
  - **Exemplo**
  - Encontre uma função de iteração para $f(x) = x^2 - x - 2$.
  - **Solução:** **Fazendo f(x) = 0**
  - **temos** $\mathbf{x^2 - x - 2 = 0}$

  - **Tentativa 1**: seja $x = x^2 - 2$
  - então $\mathbf{L(x) = x^2 - 2}$
  - De fato, para $x = 2$, temos $L(2) = 2$ e, realmente, 2 é uma raiz da f(x)!
  - Porém note que $L'(x) = 2x$ e portanto $|L'(x)| > 1$ nas proximidades de $x=2$!

Cálculo Numérico Computacional

- **Método da Iteração Linear**
  - **Função de iteração**
  - **Exemplo**: $f(x) = x^2 - x - 2$
  - **Solução**: fazendo $f(x) = 0$
  - temos $x^2 - x - 2 = 0$

  - **Tentativa 2**: Seja $x^2 = x + 2$, logo

$x = \pm\sqrt{x+2}$. Seja então $L(x) = \sqrt{x+2}$, $L(2) = 2$!

Derivando: $L'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}$

Note agora que $|L'(x)| < 1$ nas proximidades de 2!

Cálculo Numérico Computacional

- **Método da Iteração Linear**
  - **Processo Iterativo**

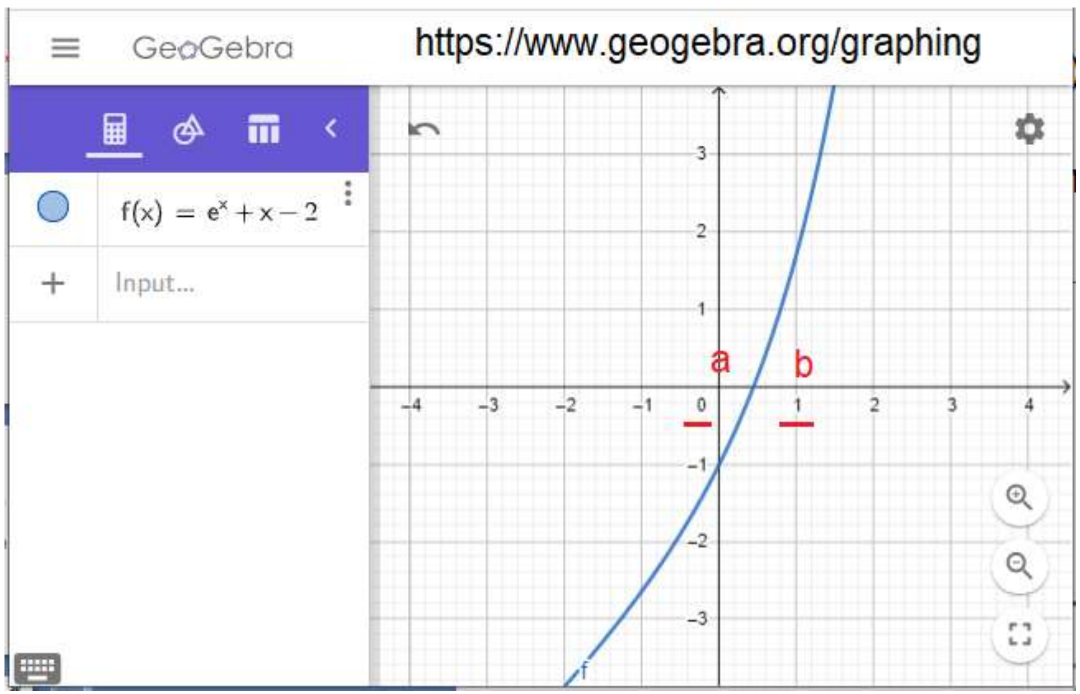
    - $x_{k+1} = L(x_k)$ como no M.I.L

  - **Critério de parada do método**
    - i) $|(x_k - x_{k-1})| / 2 < \varepsilon$ (erro prefixado)
  - Outros critérios
    - ii) $|f(x_k)| < \varepsilon$
    - iii) Numero de Iterações esgotado!

- **Método da Iteração Linear**
  - **Exemplo de Aplicação**
  - Determine um zero da $f(x) = e^x + x - 2$ com erro prefixado $\varepsilon < 0.\underline{000}050$

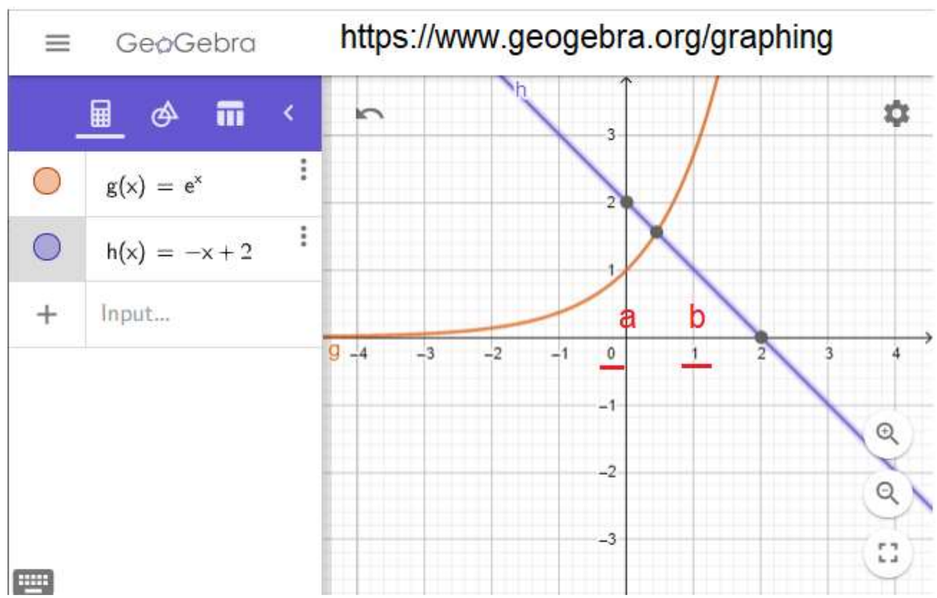
Cálculo Numérico Computacional

- **Método da Iteração Linear**
  - **Exemplo de Aplicação**
    - Determine um zero da $f(x) = e^x + x - 2$
  - **Passo 1**
    - Isolamento da Raiz [Estratégia 1]



Cálculo Numérico Computacional

- **Método da Iteração Linear**
  - **Exemplo de Aplicação**
    - Determine um zero da $f(x) = e^x + x - 2$
  - **Passo 1**
    - Isolamento da Raiz [Estratégia 2]
      - Seja $e^x + x - 2 = 0$ então $e^x = -x + 2$ assim:
      - $g(x) = e^x$ e $h(x) = -x + 2$



Cálculo Numérico Computacional

- **Método da Iteração Linear**
  - **Exemplo de Aplicação**
  - Determine um zero de $f(x) = e^x + x - 2$

    no intervalo **[0, 1]** com erro prefixado $\varepsilon < 0.000050$
  - **Passo 2**
    - Escolha da Função de Iteração L(x)

- **Tentativa 1**: Seja $e^x + x - 2 = 0$ então $x = 2 - e^x$
- **$L(x) = 2 - e^x$?**
- **Não!** Pois precisamos que $|L'(x)| < 1$ em **[0, 1]**

Cálculo Numérico Computacional

- **Método da Iteração Linear**
  - **Exemplo de Aplicação**
  - Determine um zero de $f(x) = e^x + x - 2$
    no intervalo **[0, 1]** com erro prefixado $\varepsilon < 0.000050$
  - **Passo 2**
    - Escolha da Função de Iteração L(x)

    - **Tentativa 2**: Seja $e^x + x - 2 = 0$ então $e^x = 2 - x$,
    - aplicando **ln** dos dois lados:
    - $\ln(e^x) = \ln(2 - x)$
    - $x*\ln(e) = \ln(2-x)$, porém $\ln(e)= 1$
    - logo **$x = \ln(2-x)$.**
    - Isto é, escolhendo **$L(x) = \ln(2-x)$**
      temos $|L'(x)| < 1$ em [0, 1] !!!

- **Método da Iteração Linear**
  - **Exemplo de Aplicação**
  - Determine um zero da $f(x) = e^x + x - 2$ no intervalo **[0, 1]** e função de iteração **$L(x) = \ln(2 - x)$**

    com erro prefixado $\varepsilon < 0.\underline{0000}50$
  - **Passo 3**
    - Processo Iterativo
      - $L(x) = \ln(2 - x)$
      - Seja $x_0 = (a+b)/2 = (0 + 1)/2 = 0.5$
      - $x_{k+1} = L(x_k) = \ln(2 - x_k)$

Cálculo Numérico Computacional

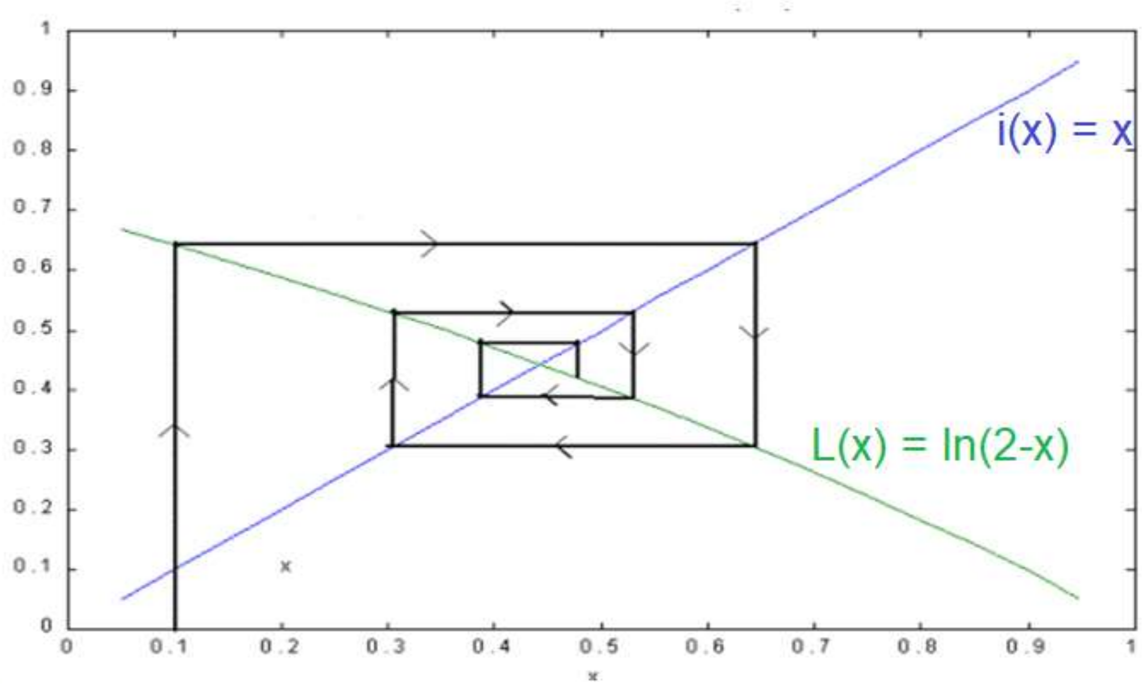
- ## Método da Iteração Linear
  - **Exemplo de Aplicação**
  - Determine um zero da $f(x) = e^x + x - 2$ no intervalo **[0, 1]** e função de Iteração **$L(x) = \ln(2 - x)$** com erro prefixado $\varepsilon < 0.\underline{0000}50$
  - **Passo 3**
    - Processo Iterativo

$$
\begin{aligned}
x1 &= L(x_o) = L(0.5) = \ln(2\text{-}0.5) = \ln(1.5) = \mathbf{0.405465} \\
x2 &= L(x1) = L(\mathbf{0.405465}) = 0.466582 \\
x3 &= L(x2) = L(0.466582) = 0.427499 \\
x4 &= L(x3) = L(0.427499) = 0.452667 \\
x5 &= L(x4) = L(0.452667) = 0.436533 \\
x6 &= L(x5) = L(0.436533) = 0.446906 \\
x7 &= L(x6) = L(0.446906) = 0.440313 \\
x8 &= L(x7) = L(0.440313) = 0.444485 \\
x9 &= L(x8) = L(0.444485) = 0.441807 \\
x10 &= L(x9) = L(0.441807) = 0.443527 \\
x11 &= L(x10) = L(0.443527) = 0.442422 \\
x12 &= L(x11) = L(0.442422) = 0.443132 \\
x13 &= L(x12) = L(0.443132) = 0.442676 \\
x14 &= L(x13) = L(0.442676) = 0.442969 \\
x15 &= L(x14) = L(0.442969) = 0.442781 \\
x16 &= L(x15) = L(0.442781) = 0.442902 \\
x17 &= L(x16) = L(0.442902) = \boxed{0.4428}24 \\
x18 &= L(x17) = L(\boxed{0.4428}24) = \boxed{0.4428}74 \\
x19 &= L(x18) = L(\boxed{0.4428}74) = \boxed{0.4428}42
\end{aligned}
$$

Cálculo Numérico Computacional

- **Método da Iteração Linear**
  - **Exemplo de Aplicação**
    - Determine um zero da $f(x) = e^x + x - 2$ no intervalo **[0, 1]** e função de iteração **$L(x) = \ln(2 - x)$**

  - **Representação gráfica do processo iterativo**



Cálculo Numérico Computacional

- ## Método da Iteração Linear
  - **Exemplo de Aplicação**
    - Determine um zero da $f(x) = e^x + x - 2$ no intervalo **[0, 1]** e função de iteração **$L(x) = \ln(2 - x)$** com erro prefixado $\varepsilon < 0.000050$

  - **Passo 4**
    - **Critérios de parada**

    - **i)** $|(x_k - x_{k-1})| / 2 < \varepsilon$?? (critério do método)
      $|(x_{19} - x_{18})| / 2 < \varepsilon$??
    - $|\ 0.442842 - 0.442874\ |/2 =$
      $0.000032/2 = 0.000016 < 0.000050$

Método da Iteração Linear

- **Exemplo de Aplicação**
  - Determine um zero da $f(x) = e^x + x - 2$ no intervalo **[0, 1]** e **$L(x) = \ln(2 - x)$** com erro prefixado $\varepsilon < 0.000050$

- **Passo 4**
  - **Critérios de parada**

  - **ii)** $|f(x_k)| < \varepsilon$??

    $f(x) = e^x + x - 2$

    $|f(x_{19})| = |f(0.442842)| = 0.000032 < 0.000050$

Cálculo Numérico Computacional

- **Método da Iteração Linear**
  - **Exemplo de Aplicação**
    - Determine um zero da $f(x) = e^x + x - 2$ no intervalo **[0, 1]** com erro prefixado $\varepsilon < 0.\underline{000}050$

- **Conclusão**

- $x = 0.\underline{\mathbf{4428}}42$ é zero de $f(x) = e^x + x - 2$ no intervalo **[0, 1]** com erro $\varepsilon < 0.\underline{000}050$

Cálculo Numérico Computacional

- **Método de Newton-Raphson**
  - **Estratégia**

  - A idéia do método de Newton-Raphson é escolher, no M.I.L, uma função L(x), tal que L'(z) = 0 para z raiz de f(x), no intervalo [a,b].

  - Assim |L'(x)| < 1 nas proximidades de z, pois L'(z) = 0

Cálculo Numérico Computacional

- **Método de Newton-Raphson**
  - **Função de Iteração**

  - Seja **L(x) = x + A(x).f(x)** [i] ,

$$L'(x) = 1 + A'(x).f(x) + A(x).f\,'(x) \qquad \text{(regra do produto)}$$

fazendo $L'(x) = 0$
(para garantir que $|L'(x)| < 1$ nas proximidades da raiz)

$$1 + A'(x).f(x) + A(x).f\,'(x) = 0 \quad [ii]$$

Cálculo Numérico Computacional

- **Método de Newton-Raphson**
  - **Função de Iteração**

para x = z em [ii] temos:

$$1 + A'(z).f(z) + A(z).f'(z) = 0 ,$$

porém f(z) = 0 (z é raiz!)

assim **$1 + A(z).f'(z) = 0$** ou

$A(z) = - 1/f'(z)$ [iii]

Com [iii] reescrevemos [i] para encontrar a função de de iteração L do método de Newton-Raphson:

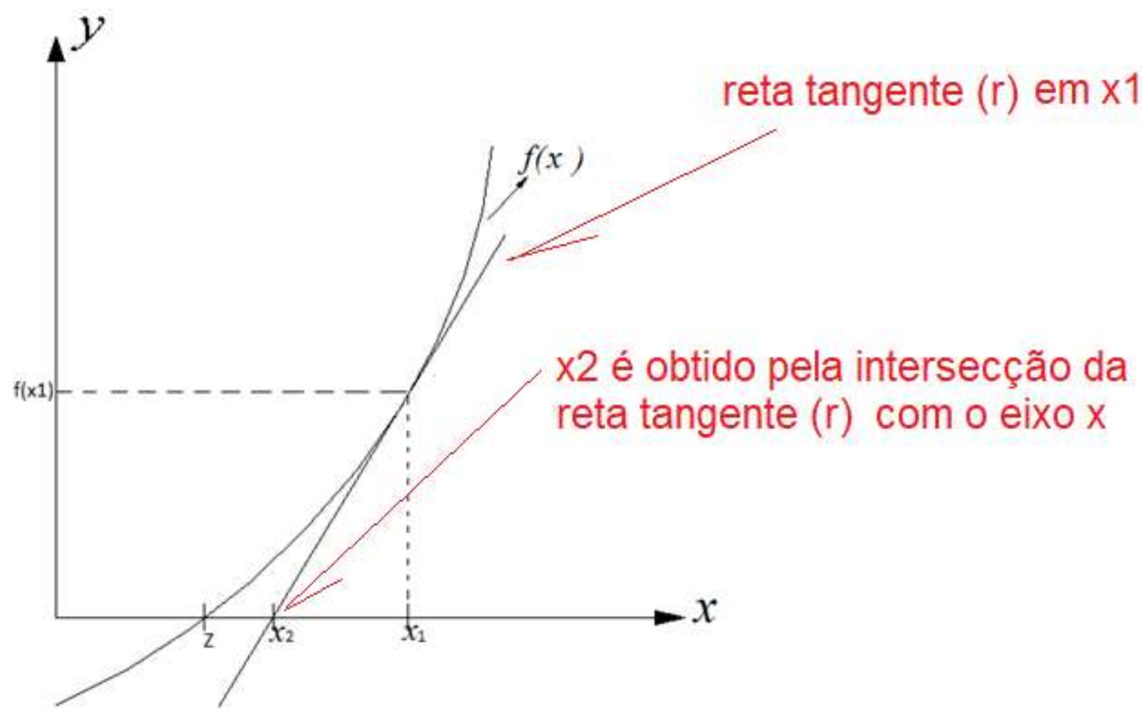
$$L(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)}$$

- **Método de Newton-Raphson**
  - **Processo de Iterativo**

$$x_{k+1} = L(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Cálculo Numérico Computacional

- **Método de Newton-Raphson**
  - **Interpretação Geométrica**
    - Dado x_k , o ponto x_{k+1} será obtido pela intersecção da reta tangente ao gráfico da f(x) em x_k com o eixo x.



Cálculo Numérico Computacional

- **Método de Newton-Raphson**
  - **Interpretação Geométrica**
    - O quociente

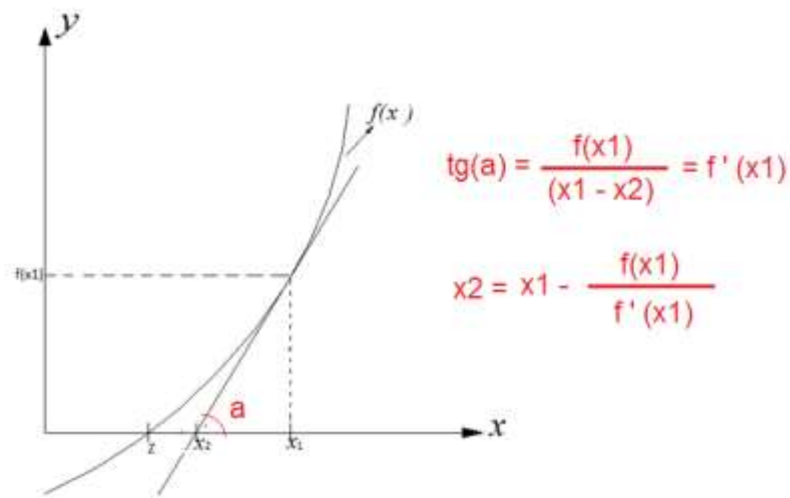
tg(a) = $f(x_k) / (x_k - x_{k+1})$ é a inclinação da reta tangente.

Assim:

$$\mathbf{f'(x_k)} = f(x_k) / (x_k - x_{k+1})$$

Daí resulta a fórmula de iteração do método:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$$



- **Método de Newton-Raphson**

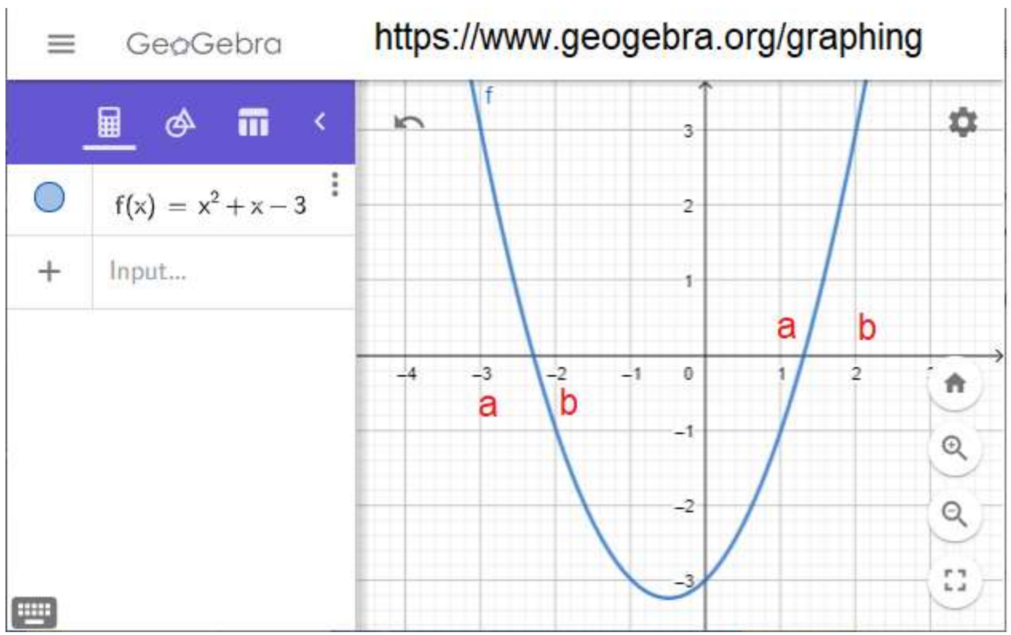
  - **Critérios de parada**

    - I) $|(x_k - x_{k-1})| / 2 < \varepsilon$ (erro prefixado)
    - II) $|f(x_k)| < \varepsilon$
    - III) Número de Iterações esgotado

Cálculo Numérico Computacional

- **Método de Newton-Raphson**
  - **Exemplo de Aplicação**
    - Calcule a(s) raiz(es) de $f(x) = x^2 + x - 3$ com erro $\varepsilon < 0.0050$

Passo 1: Isolamento das raízes



- **Método de Newton-Raphson**
  - **Exemplo de Aplicação para I = [-3, -2]**
    - Calcule a raiz de $f(x) = x^2 + x - 3$ com erro $\varepsilon < 0.0050$ no intervalo [-3, -2]

Passo 2: Cálculo da derivada da f(x)

$$f'(x) = 2x + 1$$

Passo 3: Processo Iterativo

i) seja $x_0 = (a+b)/2 = (-3+(-2))/2 = -5/2 = -2.5$

II) $x_{k+1} = L(x_k) = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$

$x_{k+1} = L(x_k) = x_k - (x_k^2 + x_k - 3)/(2x_k + 1)$

Cálculo Numérico Computacional

- **Método de Newton-Raphson**
  - **Exemplo de Aplicação para I = [-3, -2]**
    - Calcule a raiz de $f(x) = x^2 + x - 3$

      com erro $\varepsilon < 0.0050$ no intervalo [-3, -2]

Passo 3: Processo Iterativo

$x_0 = -2.5$

$x_1 = L(x_0) = x_0 - (x_0^2 + x_0 - 3)/(2x_0 + 1)$

$x_1 = L(-2.5) = (-2.5) - ((-2.5)^2 + (-2.5) - 3)/(2(-2.5) + 1) = -2.3125$

$x_2 = L(-2.3125) = -2.3028$

$x_3 = L(x_2) = ...$

Cálculo Numérico Computacional

- **Método de Newton-Raphson**
  - **Exemplo de Aplicação para I = [-3, -2]**
    - Calcule a raiz de $f(x) = x^2 + x - 3$

      com erro $\varepsilon < 0.0050$ no intervalo [-3, -2]

Passo 4: Critérios de parada

i) $|(x_k - x_{k-1})| / 2 < \varepsilon$

$|(x_2 - x_1)| / 2 = |(-2.3028 - (-2.3125))| / 2 =$

$= 0.0097/2 = 0.0049 < 0.0050$

Cálculo Numérico Computacional

- **Método de Newton-Raphson**
  - **Exemplo de Aplicação para I = [-3, -2]**
    - Calcule a raiz de $f(x) = x^2 + x - 3$
      com erro $\varepsilon < 0.0050$ no intervalo [-3, -2]

Passo 4: Critérios de parada

ii) $|f(x_k)| < \varepsilon$

$f(x) = x^2 + x - 3$

$|f(-2.3028)| = |(-2.3028)^2 + (-2.3028) - 3| = 0.0001 < 0.0050$

Conclusão:

$x = -2.3028$ é raiz de $f(x) = x^2 + x - 3$

no intervalo [-3, -2] com erro < 0.0050!

Cálculo Numérico Computacional

- **Método de Newton-Raphson**
  - **Exemplo de Aplicação para I = [1, 2]**
    - Calcule a raiz de $f(x) = x^2 + x - 3$ com erro $\varepsilon < 0.0050$ no intervalo **[1, 2]**

Passo 2: Derivada da f(x)

$$f'(x) = 2x + 1$$

Passo 3: Processo Iterativo

i) seja $x_0 = (a+b)/2 = (1+2)/2 = 3/2 = 1.5$

II) $x_{k+1} = L(x_k) = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$

$$x_{k+1} = L(x_k) = x_k - (x_k^2 + x_k - 3)/(2x_k + 1)$$

Cálculo Numérico Computacional

- **Método de Newton-Raphson**
  - **Exemplo de Aplicação para I = [1, 2]**
    - Calcule a raiz de $f(x) = x^2 + x - 3$

      com erro $\varepsilon < 0.0050$ no intervalo **[1, 2]**

Passo 3: Processo Iterativo

$x_0 = 1.5$

$x_1 = L(x_0) = x_0 - (x_0^2 + x_0 - 3)/(2x_0 + 1)$

$x_1 = L(1.5) = 1.5 - (1.5^2 + 1.5 - 3)/(2(1.5) + 1) = 1.3125$

$x_2 = L(1.3125) = 1.3028$

$x_3 = L(x_2) = ...$

Cálculo Numérico Computacional

- **Método de Newton-Raphson**
  - **Exemplo de Aplicação para i = [1, 2]**
    - Calcule a raiz de $f(x) = x^2 + x - 3$

      com erro $\varepsilon < 0.0050$ no intervalo **[1, 2]**

Passo 4: Critérios de parada

i) $|(x_k - x_{k-1})| / 2 < \varepsilon$

$|(x_2 - x_1)| / 2 = |1.3028 - 1.3125| / 2 =$

$= 0.0097/2 = 0.0049 < 0.0050$

Cálculo Numérico Computacional

- **Método de Newton-Raphson**
  - **Exemplo de Aplicação para I = [1, 2]**
    - Calcule a raiz de $f(x) = x^2 + x - 3$

      com erro $\varepsilon < 0.0050$ no intervalo **[1, 2]**

Passo 4: Critérios de parada

ii) $|f(x_k)| < \varepsilon$

$f(x) = x^2 + x - 3$

$|f(1.3028)| = |(1.3028)^2 + (1.3028) - 3| = 0.0001 < 0.0050$

Conclusão:

$x = 1.3028$ é raiz de $f(x) = x^2 + x - 3$

no intervalo [1, 2] com erro < 0.0050!

Cálculo Numérico Computacional

Obrigado pela Atenção!

Fique atento e focado! Vem ai a lista de atividades dessa unidade!

Livro Texto:
RUGGIERO,M.A.G.; LOPES,V.L.R.
Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais, Makron Books, 2ª. Edição, 1997.