Cálculo Numérico Computacional
Unidade V

Sistemas de Equações Lineares

. Método de Gauss – Jacobi

.Método de Gauss – Seidel

Roteiro

- Método de Gauss - Jacobi
  - Processo Iterativo
    - Erro
    - Exemplo

- Método de Gauss - Seidel
  - Processo Iterativo
    - Erro
    - Exemplo

Ótimo estudo!

- **Sistemas de Equações Lineares**
  - **Quanto as soluções:**
    - Solução Única
    - Infinitas Soluções [variáveis livres]
    - Incompatível [não tem solução]

Cálculo Numérico Computacional

- **Sistemas de Equações Lineares**
  - Métodos
    - **Métodos Diretos**
      - Solução "exata" após um número finito de operações.
        - Regra de Cramer
        - Inversão da Matriz
        - Escalonamento da Matriz
        - Fatoração L.U

Cálculo Numérico Computacional

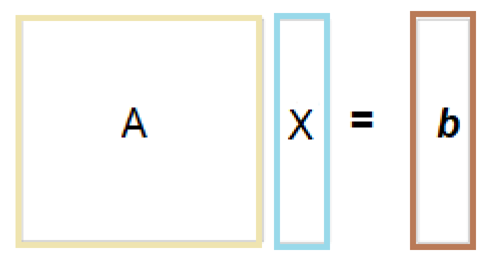
- **Sistemas de Equações Lineares**
  - Métodos
    - **Métodos Iterativos**
      - Processo de aproximação iterativa da solução.
      - A convergência é assegurada sob certas condições.
        - Método de Gauss – Jacobi
        - Método de Gauss – Seidel

Cálculo Numérico Computacional

- **Sistemas de Equações Lineares**
  - Método de Gauss – Jacobi
    - Dado o Sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots\dots\dots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots\dots\dots a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots\dots\dots a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad [S]$$

    - Em notação matricial: AX = ***b***
      - A é a matriz *nxn* dos coeficientes
      - X é o vetor coluna das variáveis
      - ***b*** é o vetor coluna dos termos independentes



Cálculo Numérico Computacional

- **Sistemas de Equações Lineares**
  - Método de Gauss – Jacobi
  - **Processo Iterativo**
    - Supondo $a_{ii} \neq 0$ (i= 1,2,3,... n) em [S] e isolando os elementos diagonais, o processo iterativo é dado por:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \dots\dots\dots - a_{1n}x_n^{(k)})$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \dots\dots\dots - a_{2n}x_n^{(k)})$$

$$\vdots$$

$$x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \dots\dots\dots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k)})$$

Cálculo Numérico Computacional

- **Sistemas de Equações Lineares**
  - Método de Gauss – Jacobi
    - Critérios de Parada

i) Máximo desvio absoluto:

$$\Delta^{(k)} = \max_{i=1,n} \left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right| < \varepsilon \quad \text{(erro)}$$

ii) Máximo desvio relativo:

$$\Delta_R^{(k)} = \frac{\Delta^{(k)}}{\max_{i=1,n} \left| x_i^{(k)} \right|} < \varepsilon \qquad \text{(erro)}$$

Cálculo Numérico Computacional

- **Sistemas de Equações Lineares**
  - Método de Gauss – Jacobi
    - Teorema 1 (suficiência)

Seja o sistema linear $AX = b$ e seja:

$$\alpha_k = \frac{\left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}| \right)}{|a_{kk}|}$$

Se $\alpha = \max_{k=1,n} \alpha_k < 1$, então o método Gauss-Jacobi gera uma sequência $\{X^{(k)}\}$ convergente para a solução do sistema dado, independentemente da escolha da aproximação inicial $X^{(0)}$.

- **Sistemas de Equações Lineares**
  - Método de Gauss – Jacobi
    - Exemplo 1
      - Verifique as condições do Teorema 1 para um sistema cuja matriz dos coeficiente é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{10} & 2 & 1 \\ 1 & \boxed{5} & 1 \\ 2 & 3 & \boxed{10} \end{bmatrix}$$

Solução:

$$\alpha_1 = \frac{(2+1)}{\boxed{10}} = 0{,}3 < 1 \qquad \alpha_2 = \frac{(1+1)}{\boxed{5}} = 0{,}4 < 1$$

$$\alpha_3 = \frac{(2+3)}{\boxed{10}} = 0{,}5 < 1$$

Cálculo Numérico Computacional

- **Sistemas de Equações Lineares**
  - Método de Gauss – Jacobi
    - Nota 1. Se as condições do Teorema 1 não são satisfeitas, não significa que o método não possa convergir.
    - Nota 2: Se as condições do Teorema 1 não são satisfeitas, fazemos novas tentativas permutando as linhas das equações (ou da matriz dos coeficientes).

Cálculo Numérico Computacional

- **Sistemas de Equações Lineares**
  - Método de Gauss – Jacobi
    - Exemplo 2
      - Dado o sistema abaixo verifique as condições do Teorema 1.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= -2 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 0x_1 + 6x_2 + 8x_3 &= -6 \end{aligned} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 5 & \boxed{2} & 2 \\ 0 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 = \frac{(3+1)}{1} = 4 > 1 \quad \text{FALHOU!!}$$

$$\alpha_2 = \frac{(5+2)}{\boxed{2}} = 3{,}5 > 1 \quad \text{FALHOU!!}$$

$$\alpha_3 = \frac{(0+6)}{8} = 0{,}75 < 1 \quad \text{OK !}$$

Permutando a primeira linha com a segunda temos:

$$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= -2 \\ 0x_1 + 6x_2 + 8x_3 &= -6 \end{aligned} \qquad A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 = \frac{(2+2)}{5} = 0{,}8 < 1 \quad \text{OK !}$$

$$\alpha_2 = \frac{(1+1)}{3} = 0{,}66 < 1 \quad \text{OK !}$$

$$\alpha_3 = \frac{(0+6)}{8} = 0{,}75 < 1 \quad \text{OK !}$$

Cálculo Numérico Computacional

- **Sistemas de Equações Lineares**
  - Método de Gauss – Jacobi
    - Exemplo 3

Resolver o sistema de equações lineares, pelo Método de Gauss-Jacobi com aproximação inicial $X^{(o)} = [0{,}7 \quad -1{,}6 \quad 0{,}6]^T$ e erro $\varepsilon \le 0{,}05$.

$$
\begin{aligned}
10x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7 \\
x_1 + 5x_2 + x_3 &= -8 \\
2x_1 + 3x_2 + 10x_3 &= 6
\end{aligned}
$$

Solução:

Passo 1 : Formulação do Processo Iterativo

Isolando os elementos diagonais, o processo iterativo é dado por:

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{10}(7 - 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)}) \\
x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{5}(-8 - x_1^{(k)} - x_3^{(k)}) \\
x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{10}(6 - 2x_1^{(k)} - 3x_2^{(k)})
\end{aligned}
$$

Cálculo Numérico Computacional

- **Sistemas de Equações Lineares**
  - Método de Gauss – Jacobi
    - Exemplo 3 – cont.

Passo 2: Processo Iterativo

$$\bar{X}^{(o)} = \begin{bmatrix} x_1^{(o)} \\ x_2^{(o)} \\ x_3^{(o)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 \\ -1.6 \\ 0.6 \end{bmatrix}$$

$\boxed{k = 0}$

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{10}(7 - 2x_2^{(o)} - x_3^{(o)}) = 0{,}96$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{5}(-8 - x_1^{(o)} - x_3^{(o)}) = -1{,}86$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{10}(6 - 2x_1^{(o)} - 3x_2^{(o)}) = 0{,}94$$

$$X^1 = \begin{bmatrix} 0{,}96 \\ -1{,}86 \\ 0{,}94 \end{bmatrix}$$

Cálculo Numérico Computacional

- **Sistemas de Equações Lineares**
  - Método de Gauss – Jacobi
    - Exemplo 3 – cont.

Passo 2: Cálculo do Erro

i) Máximo desvio absoluto

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,96 \\ -1,86 \\ 0,94 \end{bmatrix} \quad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.7 \\ -1.6 \\ 0.6 \end{bmatrix}$$

$$\left|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}\right| = \left|0,96 - 0,7\right| = 0,26$$

$$\left|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}\right| = \left|-1.86 - (-1.6)\right| = 0,26$$

$$\left|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}\right| = \left|0,94 - 0,6\right| = 0,34$$

Max > 0.05

Falhou!

ii) Máximo desvio relativo

$$\Delta_R^{(1)} = \frac{0,34}{\max\limits_{i=1,3} \left|x_i^{(1)}\right|} = \frac{0,34}{1,86} = 0,1828$$

> 0.05

Falhou!

- **Sistemas de Equações Lineares**
  - Método de Gauss – Jacobi
    - Exemplo 3 – cont.

Passo 2: Processo Iterativo - continua

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}96 \\ -1{,}86 \\ 0{,}94 \end{bmatrix}$$

$\boxed{k = 1}$

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{10}(7 - 2x_2^{(1)} - x_3^{(1)}) = 0{,}978$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{5}(-8 - x_1^{(1)} - x_3^{(1)}) = -1{,}98$$

$$x_3^{(2)} = \frac{1}{10}(6 - 2x_1^{(1)} - 3x_2^{(1)}) = 0{,}966$$

$$X^{(2)} = \begin{bmatrix} 0{,}978 \\ -1{,}98 \\ 0{,}966 \end{bmatrix}$$

Cálculo Numérico Computacional

- **Sistemas de Equações Lineares**
  - Método de Gauss – Jacobi
    - Exemplo 3 – cont.

Passo 2: Cálculo do Erro - continua

i) Máximo desvio absoluto

$$X^{(2)} - X^{(1)} = \begin{array}{l} \left|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}\right| = |0.978 - 0.96| = 0.018 \\ \left|x_2^{(2)} - x_2^{(1)}\right| = |-1.98 - (-1.86)| = 0.12 \\ \left|x_3^{(2)} - x_3^{(1)}\right| = |0.966 - 0.94| = 0.026 \end{array}$$

Max > 0.05

Falhou!

ii) Máximo desvio relativo

$$\Delta_R^{(2)} = \frac{0{,}12}{1{,}98} = 0{,}0606 > \varepsilon$$ Falhou!

- **Sistemas de Equações Lineares**
  - Método de Gauss – Jacobi
    - Exemplo 3 – cont.

Passo 2: Processo Iterativo - continua

$$X^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}978 \\ -1{,}98 \\ 0{,}966 \end{bmatrix}$$

$\boxed{k = 2}$

$$x_1^{(3)} = \frac{1}{10}(7 - 2x_2^{(2)} - x_3^{(2)}) = 0{,}9994$$

$$x_2^{(3)} = \frac{1}{5}(-8 - x_1^{(2)} - x_3^{(2)}) = -1{,}9888$$

$$x_3^{(3)} = \frac{1}{10}(6 - 2x_1^{(2)} - 3x_2^{(2)}) = 0{,}9984$$

$$X^{(3)} = \begin{bmatrix} 0{,}9994 \\ -1{,}9888 \\ 0{,}9984 \end{bmatrix}$$

Cálculo Numérico Computacional

- **Sistemas de Equações Lineares**
  - Método de Gauss – Jacobi
    - Exemplo 3 – cont.

Passo 2: Cálculo do Erro - continua

i) Máximo desvio absoluto

$$X^{(3)} - X^{(2)} = \begin{cases} \left|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}\right| = |0.9994 - 0.978| = 0.0214 \\ \left|x_2^{(3)} - x_2^{(2)}\right| = |-1.9888 - (-1.98)| = 0.0088 \\ \left|x_3^{(3)} - x_3^{(2)}\right| = |0.9984 - 0.966| = 0.0324 \end{cases}$$

Max < 0.05

OK !

ii) Máximo desvio relativo

$$\Delta_R^{(3)} = \frac{0{,}0324}{1{,}9888} = 0{,}0163 < \varepsilon$$

OK !!

- **Sistemas de Equações Lineares**
  - Método de Gauss – Jacobi
    - Exemplo 3 – cont.
      - **Passo 3: Conclusão**

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9994 \\ -1,9888 \\ 0,9984 \end{bmatrix}$$

É solução para o sistema

$$\begin{aligned} 10x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 &= -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 &= 6 \end{aligned}$$

com erro $\varepsilon \leq 0,05$.

- **Sistemas de Equações Lineares**
  - Método de Gauss – Seidel
    - O método de Gauss-Seidel atualiza os elementos do vetor na iteração (k+1), utilizando resultados já calculados nessa mesma iteração.

$$\boxed{x_1^{(k+1)}} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - a_{14}x_4^{(k)} - \ldots\ldots\ldots - a_{1n}x_n^{(k)})$$

$$\boxed{x_2^{(k+1)}} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}\boxed{x_1^{(k+1)}} - a_{23}x_3^{(k)} - a_{24}x_4^{(k)} \ldots\ldots\ldots - a_{2n}x_n^{(k)})$$

$$\boxed{x_3^{(k+1)}} = \frac{1}{a_{22}}(b_3 - a_{31}\boxed{x_1^{(k+1)}} - a_{32}\boxed{x_2^{(k+1)}} - a_{34}x_4^{(k)} - \ldots\ldots\ldots - a_{2n}x_n^{(k)})$$

$$\vdots$$

$$x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}\boxed{x_1^{(k+1)}} - a_{n2}\boxed{x_2^{(k+1)}} - a_{n3}\boxed{x_3^{(k+1)}} \ldots\ldots\ldots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)})$$

- **Sistemas de Equações Lineares**
  - Método de Gauss – Seidel
    - Exemplo 4

Determine uma solução para o sistema

$$\begin{cases} 10x_1 - 5x_2 = 0.1 \\ -5x_1 + 15x_2 = -0.2 \end{cases}$$

com valores iniciais $x_1^{(o)} = 0$ e $x_2^{(o)} = 1$

Solução:

Passo 1 : Formulação do Processo Iterativo

Isolando os elementos diagonais, o processo iterativo é dado por:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{10}(0.1 + 5x_2^{(k)})$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{15}(-0.2 + 5x_1^{(k+1)})$$

- **Sistemas de Equações Lineares**
  - Método de Gauss – Seidel
    - Exemplo 4 – cont.

Passo 2: Processo Iterativo

$$X^{(o)} = \begin{bmatrix} x_1^{(o)} \\ x_2^{(o)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{k = 0}$

$$\begin{cases} \boxed{x_1^{(1)}} = \dfrac{1}{10}\left(0.1 + 5x_2^{(0)}\right) \\ x_2^{(1)} = \dfrac{1}{15}\left(-0.2 + 5\boxed{x_1^{(1)}}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \dfrac{1}{10}\left(0.1 + 5x_2^{(0)}\right) = \dfrac{1}{10}\left(0.1 + 5 * 1\right) = 0.51 \\ x_2^{(1)} = \dfrac{1}{15}\left(-0.2 + 5 * 0.51\right) = 0.01611 \end{cases}$$

Cálculo Numérico Computacional

- **Sistemas de Equações Lineares**
  - Método de Gauss – Seidel
    - Exemplo 4 – cont.

Passo 2: Processo Iterativo

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.51 \\ 0.01611 \end{bmatrix}$$

$\boxed{k = 1}$

$$\begin{cases} \boxed{x_1^{(2)}} = \dfrac{1}{10}\left(0.1 + 5x_2^{(1)}\right) \\ x_2^{(2)} = \dfrac{1}{15}\left(-0.2 + 5\boxed{x_1^{(2)}}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boxed{x_1^{(2)}} = \dfrac{1}{10}\left(0.1 + 5x_2^{(1)}\right) = \dfrac{1}{10}\left(0.1 + 5 * 0.01611\right) = 0.01806 \\ x_2^{(2)} = \dfrac{1}{15}\left(-0.2 + 5\boxed{*0.01806}\right) = -0.00731 \end{cases}$$

Cálculo Numérico Computacional

- **Sistemas de Equações Lineares**
  - Método de Gauss – Seidel
    - Exemplo 4 – cont.

Passo 2: Processo Iterativo

$$X^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.01806 \\ -0.00731 \end{bmatrix}$$

$\boxed{k = 2}$

$$\begin{cases} \boxed{x_1^{(3)}} = \dfrac{1}{10}\left(0.1 + 5x_2^{(2)}\right) \\ x_2^{(3)} = \dfrac{1}{15}\left(-0.2 + 5\boxed{x_1^{(3)}}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boxed{x_1^{(3)}} = \dfrac{1}{10}\left(0.1 + 5 * (-0.00731)\right) = 0.00634 \\ x_2^{(3)} = \dfrac{1}{15}\left(-0.2 + 5 * \boxed{0.00634}\right) = -0.01122 \end{cases}$$

Cálculo Numérico Computacional

- **Sistemas de Equações Lineares**
  - Método de Gauss – Seidel
    - Exemplo 4 – cont.

Passo 2: Processo Iterativo

$$X^{(3)} = \begin{bmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00634 \\ -0.01122 \end{bmatrix}$$

$\boxed{k = 3}$

$$\begin{cases} \boxed{x_1^{(4)}} = \dfrac{1}{10}\left(0.1 + 5x_2^{(3)}\right) \\ x_2^{(4)} = \dfrac{1}{15}\left(-0.2 + 5\boxed{x_1^{(4)}}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boxed{x_1^{(4)}} = \dfrac{1}{10}\left(0.1 + 5 * (-0.01122)\right) = 0.00439 \\ x_2^{(4)} = \dfrac{1}{15}\left(-0.2 + 5 \boxed{*0.00439}\right) = -0.01187 \end{cases}$$

Cálculo Numérico Computacional

- **Sistemas de Equações Lineares**
  - Método de Gauss – Seidel
    - **Exemplo 5**

Resolver o sistema linear utilizando o Método Iterativo de Gauss – Seidel , com

$X^{o} = [0,0,0]^{T}$ e **erro** $\varepsilon \leq$ **0,05**

$$5x_1 + x_2 + x_3 = 5$$
$$3x_1 + 4x_2 + x_3 = 6$$
$$3x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0$$

Solução:

Passo 1 : Formulação do Processo Iterativo

Isolando os elementos diagonais, o processo iterativo é dado por:

$$\boxed{x_1^{(k+1)}} = \frac{1}{5}(5 - x_2^{(k)} - x_3^{(k)})$$

$$\boxed{x_2^{(k+1)}} = \frac{1}{4}(6 - 3\boxed{x_1^{(k+1)}} - x_3^{(k)})$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{6}(0 - 3\boxed{x_1^{(k+1)}} - 3\boxed{x_2^{(k+1)}})$$

Cálculo Numérico Computacional

- **Sistemas de Equações Lineares**
  - Método de Gauss – Seidel
    - Exemplo 5 – cont.

Passo 2: Processo Iterativo

$$X^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\boxed{k = 0}$

$$\boxed{x_1^{(1)}} = \frac{1}{5}(5 - x_2^{(0)} - x_3^{(0)}) = 1$$

$$\boxed{x_2^{(1)}} = \frac{1}{4}(6 - 3\boxed{x_1^{(1)}} - x_3^{(0)}) = 0.75$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{6}(0 - 3\boxed{x_1^{(1)}} - 3\boxed{x_2^{(1)}}) = -0.875$$

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,75 \\ -0,875 \end{bmatrix}$$

- **Sistemas de Equações Lineares**
  - Método de Gauss – Seidel
    - Exemplo 5 – cont.

Passo 2: Cálculo do Erro

i) Máximo desvio absoluto

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} \boxed{1} \\ 0,75 \\ -0,875 \end{bmatrix}$$

$$\left|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}\right| = |1,0 - 0| = \boxed{1,0}$$

$$\left|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}\right| = |0,75 - 0,0| = 0,75$$

$$\left|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}\right| = |-0,875 - 0| = 0,875$$

ii) Máximo desvio relativo

$$\Delta_R^{(1)} = \frac{\max\limits_{i=1,3} \Delta_i^{(1)}}{\max\limits_{i=1,3} \left|x_i^{(1)}\right|} = \frac{\boxed{1,0}}{\boxed{1,0}} = 1,0 > \varepsilon$$

Cálculo Numérico Computacional

- **Sistemas de Equações Lineares**
  - Método de Gauss – Seidel
    - Exemplo 5 – cont.

Passo 2: Processo Iterativo

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.75 \\ -0.875 \end{bmatrix}$$

$\boxed{k = 1}$

$$\boxed{x_1^{(2)}} = \frac{1}{5}(5 - x_2^{(1)} - x_3^{(1)}) = 1.0025$$

$$\boxed{x_2^{(2)}} = \frac{1}{4}(6 - 3\boxed{x_1^{(2)}} - x_3^{(1)}) = 0.95$$

$$x_3^{(2)} = \frac{1}{6}(0 - 3\boxed{x_1^{(2)}} - 3\boxed{x_2^{(2)}}) = -0.9875$$

$$X^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.0025 \\ 0.95 \\ -0.9875 \end{bmatrix}$$

Cálculo Numérico Computacional

- **Sistemas de Equações Lineares**
  - Método de Gauss – Seidel
    - Exemplo 5 – cont.

Passo 2: Cálculo do Erro

i) Máximo desvio absoluto

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.0025 \\ 0.95 \\ -0.9875 \end{bmatrix} \quad X^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,96 \\ -1,86 \\ 0,94 \end{bmatrix}$$

$$\left|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}\right| = |1.0025 - 0.96| = 0.0425$$

$$\left|x_2^{(2)} - x_2^{(1)}\right| = |0.95 - (-1.86)| = 2.81$$ Max > 0.05 !! Falhou !

$$\left|x_3^{(2)} - x_3^{(1)}\right| = |-0.9875 - 0.94| = 1.9275$$

> 0.05 !! Falhou !

ii) Máximo desvio relativo

$$\Delta_R^{(2)} = \frac{\max\limits_{i=1,3} \Delta_i^{(2)}}{\max\limits_{i=1,3} \left|x_i^{(2)}\right|} = \frac{2.81}{1.0025} = 2.803$$

> 0.05 !! Falhou !

Cálculo Numérico Computacional

- **Sistemas de Equações Lineares**
  - Método de Gauss – Seidel
    - Exemplo 5 – cont.

Passo 2: Processo Iterativo

$$X^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0025 \\ 0.95 \\ -0.9875 \end{bmatrix}$$

$\boxed{k = 2}$

$$\boxed{x_1^{(3)}} = \frac{1}{5}(5 - x_2^{(2)} - x_3^{(2)}) = 1.0075$$

$$\boxed{x_2^{(3)}} = \frac{1}{4}(6 - 3\boxed{x_1^{(3)}} - x_3^{(2)}) = 0.9912$$

$$x_3^{(3)} = \frac{1}{6}(0 - 3\boxed{x_1^{(3)}} - 3\boxed{x_2^{(3)}}) = -0.9993$$

$$X^{(3)} = \begin{bmatrix} 1,0075 \\ 0,9912 \\ -0,9993 \end{bmatrix}$$

Cálculo Numérico Computacional

- **Sistemas de Equações Lineares**
  - Método de Gauss – Seidel
    - Exemplo 5 – cont.

Passo 2: Cálculo do Erro

i) Máximo desvio absoluto

$$X^{(3)} = \begin{bmatrix} \boxed{1{,}0075} \\ 0{,}9912 \\ -0{,}9993 \end{bmatrix} \quad X^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.0025 \\ 0.95 \\ -0.9875 \end{bmatrix}$$

$$\left|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}\right| = |1{,}075 - 1{,}025| = 0{,}0175$$

$$\left|x_2^{(3)} - x_2^{(2)}\right| = |0{,}9912 - 0{,}95| = \boxed{0{,}0412}$$ Max < 0.05 **OK !**

$$\left|x_3^{(3)} - x_3^{(2)}\right| = |-0{,}9993 - (-0{,}9875)| = 0{,}0118$$

ii) Máximo desvio relativo

$$\Delta_R^{(3)} = \frac{\max\limits_{i=1,3} \Delta_i^{(3)}}{\max\limits_{i=1,3} \left|x_i^{(3)}\right|} = \frac{\boxed{0{,}0412}}{\boxed{1{,}0075}} = 0{,}0408 < \varepsilon$$ OK !!

- **Sistemas de Equações Lineares**
  - Método de Gauss – Seidel
    - Exemplo 5 – cont.
      - **Passo 3: Conclusão**

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}0075 \\ 0{,}9912 \\ -0{,}9993 \end{bmatrix}$$

É solução para o sistema

$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 &= 6 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

com erro $\varepsilon \leq 0{,}05$.

Cálculo Numérico Computacional

Obrigado pela Atenção!

Fique atento e focado! Vem ai a lista de atividades dessa unidade!

Livro Texto:
RUGGIERO,M.A.G.; LOPES,V.L.R.
Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais,
Makron Books, 2ª. Edição, 1997.