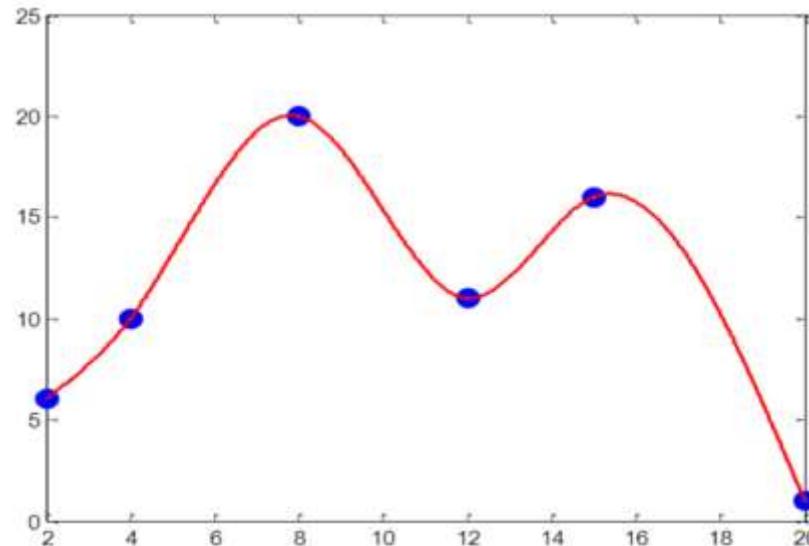


Cálculo Numérico Computacional

Unidade III

Interpolação Polinomial

. Forma de Lagrange



Cálculo Numérico Computacional

Roteiro

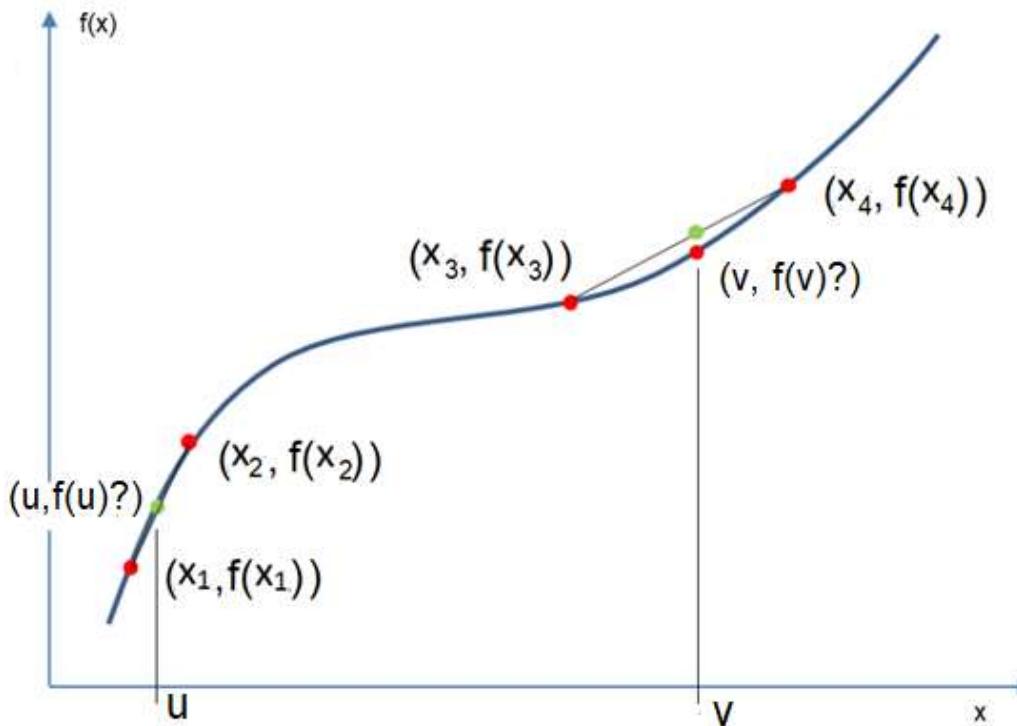
- Interpolação Linear
- Interpolação Polinomial
 - Introdução
 - Forma de Lagrange
 - Exemplos de Aplicações
 - Erros



Ótimo estudo!

Cálculo Numérico Computacional

• Interpolação Linear



$$f(u) = f(x_1) + (u - x_1) \cdot \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$f(v) = f(x_3) + (v - x_3) \cdot \frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3}$$

Cálculo Numérico Computacional

- **Interpolação Linear**

- **Exemplo 1**

- Dada tabela calcule os valores aproximados para cada y desconhecido (valores em branco na tabela).

| X | Y |
|----|----|
| -5 | |
| -4 | 2 |
| -3 | |
| -2 | -2 |
| -1 | |
| 0 | 2 |
| 1 | |
| 2 | 14 |
| 3 | ? |
| 4 | 34 |
| 5 | |

$$f(u) = f(x_1) + (u - x_1) \cdot \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$f(x) = 14 + (x - 2) \cdot \frac{34 - 14}{4 - 2}$$

$$f(3) = 24 \quad \checkmark$$



Cálculo Numérico Computacional

- **Interpolação Polinomial**
 - **Introdução**

- Dado um conjunto de pontos $\{x_i, f(x_i)\}, i=0, \dots, i=n$ como na tabela:

| | x_0 | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|
| x_i | 0 | 1.5 | 3.0 | 4.5 | 6.0 |
| $f(x_i)$ | 0.001 | 0.016 | 0.028 | 0.046 | 0.057 |

$f(x_0)$ $f(x_1)$ $f(x_2)$ $f(x_3)$ $f(x_4)$

- Interpolar um ponto x_k a um conjunto $\{x_i, f(x_i)\}$, significa calcular o valor de $f(x_k)$, sem conhecer a equação de $f(x)$!



Cálculo Numérico Computacional

- **Interpolação Polinomial**
 - **Introdução**

- A interpolação polinomial consiste em se obter um polinômio $p(x)$ que passe por todos os $(n+1)$ pontos do conjunto tabelado $\{x_i, f(x_i)\}$,
- $i=0, \dots, i=n$, isto é:

$$p(x_0) = f(x_0)$$

$$p(x_1) = f(x_1)$$

$$p(x_2) = f(x_2)$$

.....

$$p(x_n) = f(x_n)$$



Cálculo Numérico Computacional

- **Interpolação Polinomial**

- **Introdução**

- **Teorema 1**

- Existe **um único** polinômio $p(x)$ de grau menor ou igual a n que passa por todos os $(n+1)$ pontos do conjunto $\{x_i, f(x_i)\}, i=0, \dots, i=n$.



Cálculo Numérico Computacional

- Interpolação Polinomial

- Forma de Lagrange

- Seja

$$p(x) = L_0(x) \cdot f(x_0) + L_1(x) \cdot f(x_1) + \cdots + L_n(x) \cdot f(x_n)$$

e $L_k(x_i) = \delta_{ki}$

com $\delta_{ki} = \begin{cases} 0 & se \quad k \neq i \\ 1 & se \quad k = i \end{cases}$

- **Obs:** $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ são os valores tabelados!



Cálculo Numérico Computacional

- Interpolação Polinomial
 - Forma de Lagrange

Pontanto:

$$p(x_0) = L_0(x_0) \cdot f(x_0) + L_1(x_0) \cdot f(x_1) + \cdots + L_n(x_0) \cdot f(x_n)$$

$$p(x_0) = 1 \cdot f(x_0) + 0 \cdot f(x_1) + \cdots + 0 \cdot f(x_n)$$

$$p(x_0) = f(x_0)$$

$$p(x_1) = L_0(x_1) \cdot f(x_0) + L_1(x_1) \cdot f(x_1) + \cdots + L_n(x_1) \cdot f(x_n)$$

$$p(x_1) = 0 \cdot f(x_0) + 1 \cdot f(x_1) + \cdots + 0 \cdot f(x_n)$$

$$p(x_1) = f(x_1)$$

...

...

Assim:



$$p(x_i) = f(x_i)$$

Cálculo Numérico Computacional

- Interpolação Polinomial
 - Forma de Lagrange

Seja então:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) \cdot f(x_i)$$

e escolhendo:

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdots (x - x_{k-1}) \cdot (x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \cdot (x_k - x_1) \cdots (x_k - x_{k-1}) \cdot (x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)}$$

ou:

$$L_i(x) = \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x - x_j)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)}$$

temos que:

$$L_k(x_k) = 1 \quad \text{se} \quad i = k \quad \text{e}$$

$$L_k(x_i) = 0 \quad \text{se} \quad i \neq k$$



Cálculo Numérico Computacional

• Interpolação Polinomial

- Forma de Lagrange

Aplicação da forma para **2** pontos tabelados: x_0, x_1

$$P(x) = \sum_{i=0}^1 L_i(x) \cdot f(x_i)$$

$$P(x) = \sum_{i=0}^1 L_i(x) \cdot f(x_i) = L_0(x) \cdot f(x_0) + L_1(x) \cdot f(x_1)$$

e escrevendo os produtos tal que $i \neq j$

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdots (x - x_{k-1}) \cdot (x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \cdot (x_k - x_1) \cdots (x_k - x_{k-1}) \cdot (x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)}$$

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad \text{e} \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$



$$P(x) = \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right) \cdot f(x_0) + \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right) \cdot f(x_1)$$

Cálculo Numérico Computacional

- **Interpolação Polinomial**
 - **Forma de Lagrange**

Aplicação da forma para **3** pontos tabelados: x_0 , x_1 , x_2

$$p(x) = \sum_{i=0}^2 L_i \cdot f(x_i) = L_0 \cdot f(x_0) + L_1 \cdot f(x_1) + L_2 \cdot f(x_2)$$

$$L_0 = \frac{(x - x_1) \cdot (x - x_2)}{(x_0 - x_1) \cdot (x_0 - x_2)} \quad L_1 = \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_2)}{(x_1 - x_0) \cdot (x_1 - x_2)} \quad L_2 = \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_1)}{(x_2 - x_0) \cdot (x_2 - x_1)}$$

$$p(x) = \frac{(x - x_1) \cdot (x - x_2)}{(x_0 - x_1) \cdot (x_0 - x_2)} \cdot f(x_0) + \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_2)}{(x_1 - x_0) \cdot (x_1 - x_2)} \cdot f(x_1) + \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_1)}{(x_2 - x_0) \cdot (x_2 - x_1)} \cdot f(x_2)$$



Cálculo Numérico Computacional

• Interpolação Polinomial

- Forma de Lagrange
 - Exemplo 2

Encontre o Polinômio Interpolador p para a seguinte tabela e calcule o valor $p(3)$.

| x | x_0 | x_1 |
|--------|----------|----------|
| $f(x)$ | 2 | 4 |
| | $f(x_0)$ | $f(x_1)$ |

Solução:

$$p(x) = \sum_{i=0}^1 L_i(x).f(x_i) = L_0(x).f(x_0) + L_1(x).f(x_1)$$

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \text{ e } L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

$$p(x) = \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right) f(x_0) + \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right) f(x_1)$$

$$p(x) = \left(\frac{x - 4}{2 - 4} \right) 3.1 + \left(\frac{x - 2}{4 - 2} \right) 5.6 = -1.55 (x - 4) + 2.8 (x - 2)$$

$$p(x) = 1.25x + 0.6$$



$$p(3) = 1.25(3) + 0.6 = 4.35$$



Cálculo Numérico Computacional

• Interpolação Polinomial

◦ Forma de Lagrange

• Exemplo 3

Encontre o Polinômio Interpolador p para a tabela abaixo (quatro pontos) e calcule o valor $p(3)$

| | x_0 | x_1 | x_2 | x_3 |
|--------|----------|----------|----------|----------|
| x | 1 | 2 | 4 | 7 |
| $f(x)$ | 3 | 6 | 8 | 12 |
| | $f(x_0)$ | $f(x_1)$ | $f(x_2)$ | $f(x_3)$ |

Solução:

$$p(x) = \sum_{i=0}^3 L_i \cdot f(x_i) = L_0 \cdot f(x_0) + L_1 \cdot f(x_1) + L_2 \cdot f(x_2) + L_3 \cdot f(x_3)$$



Cálculo Numérico Computacional

• Interpolação Polinomial

- Forma de Lagrange
 - Exemplo 3 (cont.)

| x_0 | x_1 | x_2 | x_3 | |
|-------|-------|-------|-------|---|
| x | 1 | 2 | 4 | 7 |

$$L_0 = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} \cdot \frac{x - x_3}{x_0 - x_3}$$

$$L_0 = \frac{x - 2}{1 - 2} \cdot \frac{x - 4}{1 - 4} \cdot \frac{x - 7}{1 - 7}$$

$$L_1 = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \cdot \frac{x - x_3}{x_1 - x_3}$$

$$L_1 = \frac{x - 1}{2 - 1} \cdot \frac{x - 4}{2 - 4} \cdot \frac{x - 7}{2 - 7}$$

$$L_2 = \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x - x_3}{x_2 - x_3}$$

$$L_2 = \frac{x - 1}{4 - 1} \cdot \frac{x - 2}{4 - 2} \cdot \frac{x - 7}{4 - 7}$$

$$L_3 = \frac{x - x_0}{x_3 - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_3 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_3 - x_2}$$

$$L_3 = \frac{x - 1}{7 - 1} \cdot \frac{x - 2}{7 - 2} \cdot \frac{x - 4}{7 - 4}$$

$$L_0 = \frac{(x - 2)(x - 4)(x - 7)}{-18}$$

$$L_1 = \frac{(x - 1)(x - 4)(x - 7)}{10}$$

$$L_2 = \frac{(x - 1)(x - 2)(x - 7)}{-18}$$

$$L_3 = \frac{(x - 1)(x - 2)(x - 4)}{90}$$



Cálculo Numérico Computacional

- Interpolação Polinomial
 - Forma de Lagrange
 - Exemplo 3 (cont.)

| x | x_0 | x_1 | x_2 | x_3 |
|--------|----------|----------|----------|----------|
| $f(x)$ | 1 | 2 | 4 | 7 |
| | $f(x_0)$ | $f(x_1)$ | $f(x_2)$ | $f(x_3)$ |

Assim:

$$P(x) = L_0 \cdot f(x_0) + L_1 \cdot f(x_1) + L_2 \cdot f(x_2) + L_3 \cdot f(x_3)$$

$$P(x) = 3 L_0(x) + 6 L_1(x) + 8 L_2(x) + 12 L_3(x)$$

$$P(x) = 3 \frac{(x-2)(x-4)(x-7)}{-18} + 6 \frac{(x-1)(x-4)(x-7)}{10} + \\ 8 \frac{(x-1)(x-2)(x-7)}{-18} + 12 \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{90}$$



Cálculo Numérico Computacional

- Interpolação Polinomial
 - Forma de Lagrange
 - Exemplo 3 (conclusão)

| x | x_0 | x_1 | x_2 | x_3 |
|------|----------|----------|----------|----------|
| f(x) | 3 | 6 | 8 | 12 |
| | $f(x_0)$ | $f(x_1)$ | $f(x_2)$ | $f(x_3)$ |

Cálculo de $P(3)$

$$P(3) = 3 \cdot (3-2)(3-4)(3-7)/(-18) + 6 \cdot (3-1)(3-4)(3-7)/10 + \\ 8 \cdot (3-1)(3-2)(3-7)/(-18) + 12 \cdot (3-1)(3-2)(3-4)/90$$

$$P(3) = -12/18 + 48/10 + 64/18 - 24/90$$

P(3) = 7.422



Cálculo Numérico Computacional

• Interpolação Polinomial

◦ Forma de Lagrange

• Considerações sobre o Erro

Teorema 2 (Erro na Interpolação Polinomial)

Considere $n + 1$ pontos $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, com $n \geq 0$. Seja f uma função com derivadas até ordem $n + 1$ contínuas no intervalo $[x_0, x_n]$. Se p_n é o polinômio que interpola f nos pontos x_0, \dots, x_n , então

$$f(x) - p_n(x) = \prod_{k=0}^n (x - x_k) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \quad \forall x \in [x_0, x_n],$$

em que $x_0 \leq \xi \leq x_n$.



Obs1: $x_k = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ são os valores tabelados!

Obs2: na prática o valor ξ é desconhecido!

Cálculo Numérico Computacional

• Interpolação Polinomial

◦ Forma de Lagrange

• Considerações sobre o Erro

Teorema 3 (Estimativa do Erro na Interpolação Polinomial)

Suponha que exista uma contante M tal que $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ para $\forall x \in (a, b)$. Então:

$$|E(x)| = |f(x) - P_n(x)| = \prod_{k=0}^n |(x - x_k)| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

$$|E(x)| \leq \prod_{k=0}^n |(x - x_k)| \frac{M}{(n+1)!}$$



Obs1: $x_k = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ são os valores tabelados!

Obs2: na prática podemos obter um M e estimar o erro!

Cálculo Numérico Computacional

• Interpolação Polinomial

◦ Forma de Lagrange

• Considerações sobre o Erro

- Em geral, quando calculamos o Polinômio Interpolador não conhecemos a função verdadeira ou suas derivadas.
- Assim, no caso geral, a estimativa do erro do Polinômio Interpolador fica inviável.



Cálculo Numérico Computacional

- **Interpolação Polinomial**

- **Forma de Lagrange**

- **Exemplo 4**

- a) Encontre o Polinômio Interpolador p para a tabela seguinte e calcule o valor $p(1.45)$.
 - b) Sabendo que os dados tabelados são da função $f(x) = e^x$ calcule uma estimativa para o erro (Teorema 3).

| | x_0 | x_1 | x_2 | x_3 |
|--------|----------|----------|----------|----------|
| x | 1.0 | 1.2 | 1.4 | 1.6 |
| $f(x)$ | 2.718 | 3.320 | 4.055 | 4.953 |
| | $f(x_0)$ | $f(x_1)$ | $f(x_2)$ | $f(x_3)$ |



Cálculo Numérico Computacional

• Interpolação Polinomial

◦ Forma de Lagrange

• Exemplo 4 (cont.)

| | x_0 | x_1 | x_2 | x_3 |
|--------|----------|----------|----------|----------|
| x | 1.0 | 1.2 | 1.4 | 1.6 |
| $f(x)$ | 2.718 | 3.320 | 4.055 | 4.953 |
| | $f(x_0)$ | $f(x_1)$ | $f(x_2)$ | $f(x_3)$ |

$$L_k(x) = \prod_{\substack{j=0, \\ j \neq k}}^3 \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

Solução:

$$P_3(x) = \sum_{i=0}^3 f_i L_i(x) = 2,718 L_0(x) + 3,320 L_1(x) + 4,055 L_2(x) + 4,953 L_3(x)$$

$$L_0(x) = \frac{(x-1,2)(x-1,4)(x-1,6)}{(1-1,2)(1-1,4)(1-1,6)} = \frac{(x-1,2)(x-1,4)(x-1,6)}{(-0,2)(-0,4)(-0,6)} = \frac{(x-1,2)(x-1,4)(x-1,6)}{-0,048}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-1)(x-1,4)(x-1,6)}{(1,2-1)(1,2-1,4)(1,2-1,6)} = \frac{(x-1)(x-1,4)(x-1,6)}{(0,2)(-0,2)(-0,4)} = \frac{(x-1)(x-1,4)(x-1,6)}{0,016}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-1)(x-1,2)(x-1,6)}{(1,4-1)(1,4-1,2)(1,4-1,6)} = \frac{(x-1)(x-1,2)(x-1,6)}{(0,4)(0,2)(-0,2)} = \frac{(x-1)(x-1,2)(x-1,6)}{-0,016}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-1)(x-1,2)(x-1,4)}{(1,6-1)(1,6-1,2)(1,6-1,4)} = \frac{(x-1)(x-1,2)(x-1,4)}{(0,6)(0,4)(0,2)} = \frac{(x-1)(x-1,2)(x-1,4)}{0,048}$$



Cálculo Numérico Computacional

• Interpolação Polinomial

◦ Forma de Lagrange

• Exemplo 4 (cont.)

$$P_3(x) = 2,718 \left(\frac{(x - 1,2)(x - 1,4)(x - 1,6)}{-0,048} \right) + 3,320 \left(\frac{(x - 1)(x - 1,4)(x - 1,6)}{0,016} \right)$$

$$4,055 \left(\frac{(x - 1)(x - 1,2)(x - 1,6)}{-0,016} \right) + 4,953 \left(\frac{(x - 1)(x - 1,2)(x - 1,4)}{0,048} \right)$$

$$\begin{aligned} P_3(1.45) &= 2,718 \{ [(1,45 - 1,2)(1,45 - 1,4)(1,45 - 1,6)] / -0,048 \} + \\ &\quad 3,320 \{ [(1,45 - 1)(1,45 - 1,4)(1,45 - 1,6)] / 0,016 \} + \\ &\quad 4,055 \{ [(1,45 - 1)(1,45 - 1,2)(1,45 - 1,6)] / -0,016 \} + \\ &\quad 4,953 \{ [(1,45 - 1)(1,45 - 1,2)(1,45 - 1,4)] / 0,048 \} = 4,26306 \end{aligned}$$



Cálculo Numérico Computacional

• Interpolação Polinomial

◦ Forma de Lagrange

• Exemplo 4 (cont.)

• Estimativa para o Erro Polinomial (Teorema 3)

i) Passo 1: Cálculo da constante M

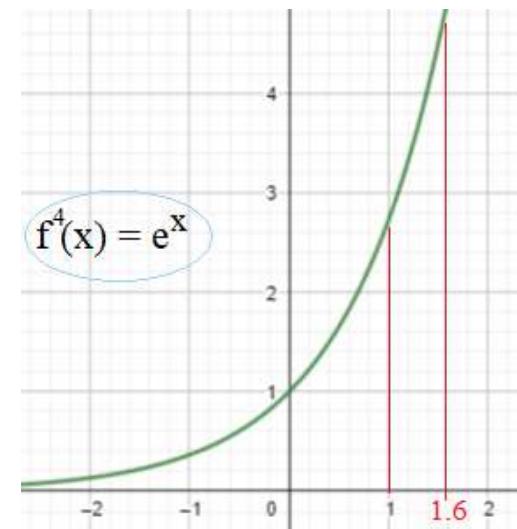
$$f^{(n+1)}(x) = f^{(3+1)}(x) = f^{(4)}(x) = e^x$$

Buscamos por:

$$|e^x| \leq M \text{ para } \forall x \in (1, 1.6) \text{ aberto!}$$

$$\text{pelo gráfico, seja } x = 1.6 \rightarrow |e^{1.6}| = 4.953$$

Adotamos então $M \geq 4.953$



Cálculo Numérico Computacional

• Interpolação Polinomial

◦ Forma de Lagrange

• Exemplo 4 (conclusão)

- Estimativa para o Erro Polinomial (Teorema 3)

ii) Passo 2: Cálculo do Erro

$$|E| \leq \prod_{k=0}^{n=3} |(x - x_k)| \frac{M}{(n+1)!}$$

| x | x_0 | x_1 | x_2 | x_3 |
|------|----------|----------|----------|----------|
| f(x) | 2.718 | 3.320 | 4.055 | 4.953 |
| | $f(x_0)$ | $f(x_1)$ | $f(x_2)$ | $f(x_3)$ |

$$|E| \leq |(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)| \cdot \frac{M}{(3+1)!}$$

$$|E| \leq |(1.45 - 1)(1.45 - 1.2)(1.45 - 1.4)(1.45 - 1.6)| \frac{4.953}{4!}$$

$$|E| \leq 0,00017$$

Conclusão: o valor $p(1.45)=4.26306$ é uma aproximação para $e^{1.45}$ com erro $\leq 0.00017 !!!$



Cálculo Numérico Computacional

• Interpolação Polinomial

◦ Forma de Lagrange

• Exemplo 4 (conclusão)

• Erro Real

$$E_{\text{real}} = | e^{1.45} - P(1.45) | = |4.26311 - 4.26306|$$

$$E_{\text{real}} = 0.00005 !!!$$



Cálculo Numérico Computacional

Obrigado pela Atenção!



Fique atento e focado! Vem ai a lista de atividades dessa unidade!

Livro Texto:

RUGGIERO,M.A.G.; LOPES,V.L.R.

Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais,
Makron Books, 2^a. Edição, 1997.