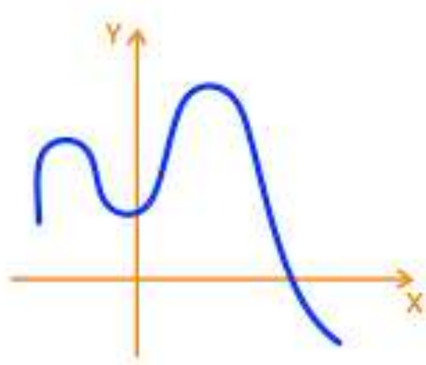
Cálculo Numérico Computacional

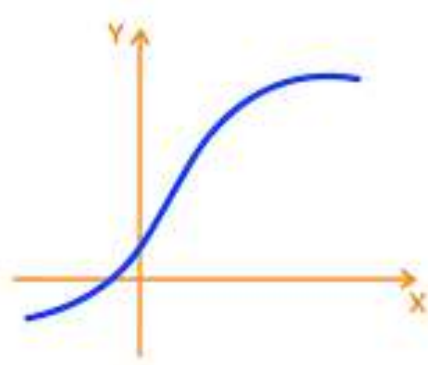
Unidade II

Zero Reais de Funções Reais

Parte I

.Técnicas e Teoremas
.Método da Bissecção





Roteiro

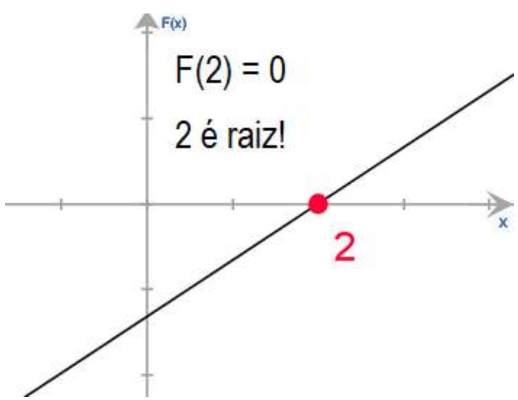
- Métodos Diretos (analíticos)
- Métodos Iterativos
  - Roteiros
  - Critérios de parada
  - Isolamento das raízes
- Método da Bissecção
  - Estratégia
  - Estimativa do erro
  - Quantidade de partições (k)
  - Condições de uso
  - Exemplo de Aplicação

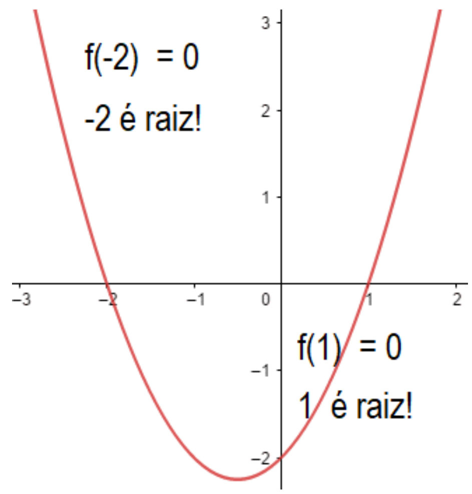
Ótimo estudo!

Cálculo Numérico Computacional

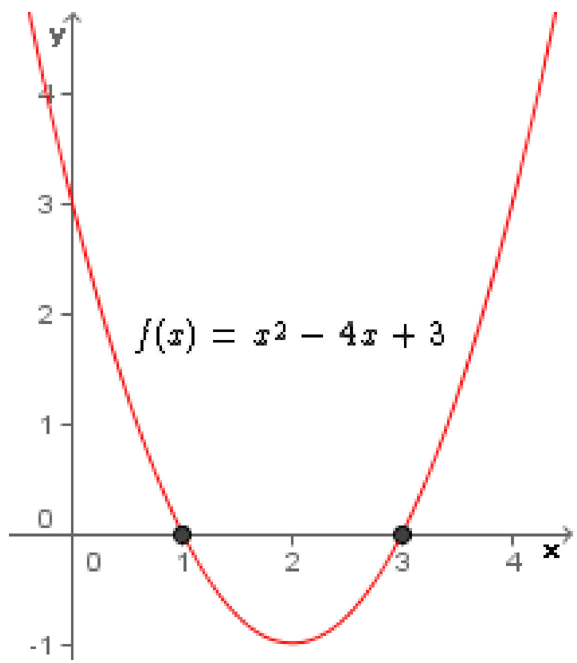
- **Zero Reais de Funções Reais**

  - O número $z \in \mathbb{R}$ é um **zero** da função f(x) ou uma ***raiz*** da equação f(x) = 0 se f(z) = 0





- **Zero Reais de Funções Reais**
  - **Métodos Diretos (analíticos)**
    - Para equações/funções polinomiais de grau reduzido é possível que existam fórmulas diretas para se encontrar as raízes.
      - Solução "exata".

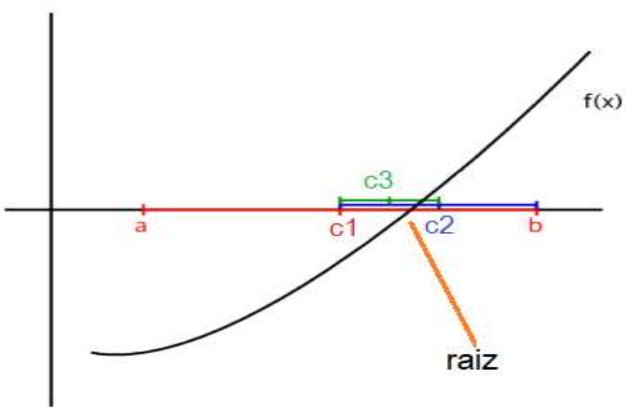


fórmula quadrática (método analítico):

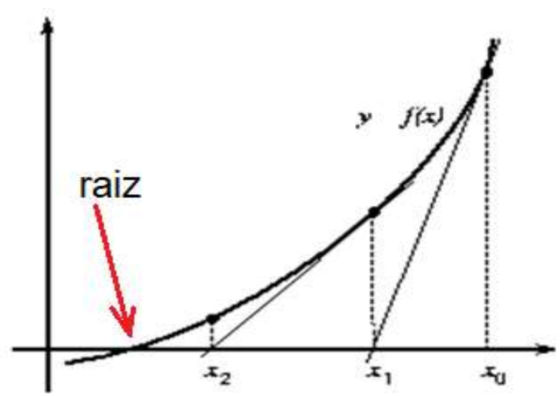
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Cálculo Numérico Computacional

- **Zero Reais de Funções Reais**
  - **Métodos Iterativos**
    - Para polinômios de grau elevado e no caso de funções complexas são utilizadas as técnicas numéricas de aproximações sucessivas(iterações).
      - Fórmulas/métodos Iterativos;
      - Critério de parada (erro ε prefixado);
      - Solução aproximada dentro da margem de erro.



c1, c2, c3, c4...
tende para a raiz!



x1, x2, x3, x4...
tende para a raiz!

Cálculo Numérico Computacional

- **Zero Reais de Funções Reais**

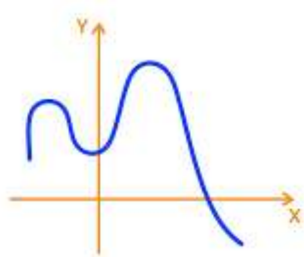
  - **Critérios de parada**

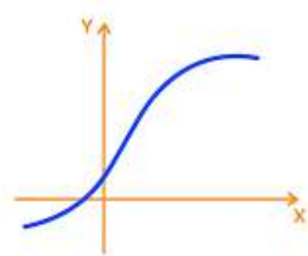
    - Dado o intervalo [a, b] se $|b - a| < \varepsilon$ então $\forall\, \mathbf{x_k} \in (a, b)$ implica $|\mathbf{x_k} - z| < \varepsilon$ (erro prefixado).
      - aqui z é a raiz isolada no intervalo [a, b].

    - Na prática o valor z não é conhecido, então a solução deve ser validada em relação ao erro prefixado (ε):
    - $Ea \leq \varepsilon$ e/ou;
    - $Er \leq \varepsilon$ e/ou;
    - $x_k \in (a, b)$ tal que $|f(x_k)| \leq \varepsilon$ e/ou
    - $x_k \in (a, b)$ tal que $|b - a| \leq \varepsilon$ e/ou
    - Estratégia definida pelo método utilizado.

Cálculo Numérico Computacional

- **Zero Reais de Funções Reais**
  - **Isolamento das raízes**
  - Teorema 1:
  - Seja f(x) uma função contínua num intervalo [a,b].
    - Se f(a).f(b) < 0, então existe um **zero** de f(x) entre **a** e **b**.
  - Teorema 2:
    - Se f'(x) existir e preservar o sinal em (a,b), então esse intervalo contém um único zero de f(x)





Cálculo Numérico Computacional

- **Zero Reais de Funções Reais**
  - **Roteiro dos Métodos Iterativos**

    - **Isolamento de uma raiz**
      - Determinar um intervalo inicial I = (a, b) que contenha apenas uma raiz;

    - Atribuir um valor inicial para a raiz (x_0);
    - Prefixar o valor do erro ε para os testes de parada;

    - Rodar a fórmula/método iterativo (refinamento)
      - Melhorar a aproximação do valor inicial (ou intervalo);

    - Fazer o teste de parada;
      - Ea <= ε e/ou
      - Er <= ε e/ou
      - $|f(x_k)|$ <= ε e/ou
      - | b - a | <= ε, e/ou outros
    - Aceitar o resultado → FIM; 
    - Ou continuar com o refinamento. 

Cálculo Numérico Computacional

- **Zero Reais de Funções Reais**
  - Roteiro dos Métodos Iterativos

Isolamento da Raíz I=(a, b) → x_0 (valor inicial) ε (erro prefixado)

→ Rodar Fórmula/Método Iterativo

→ Testes de parada

Se

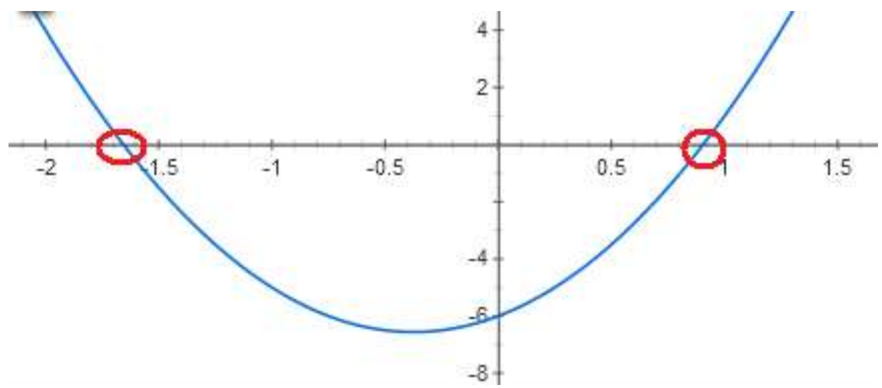
Ea <= ε
ou
Er <= ε
ou
$|f(x_k)| <= ε$
ou
|a - b| <= ε → Fim

Caso contrário

Nota: Os critérios de parada variam de acordo com o problema e com o método utilizado.

- **Zero Reais de Funções Reais**
  - **Isolamento das raízes**

  - Estratégia 1. Esboçar o gráfico da função f(x) e localizar as abscissas dos pontos onde a curva intercepta o eixo x e então selecionar o intervalo.



$z_1 \in I_1 = (-2, -1.5)$ e
$z_2 \in I_2 = (0.5, 1.0)$

Cálculo Numérico Computacional

- **Zero Reais de Funções Reais**
  - **Isolamento das raízes**

  - Estratégia 2. A partir da equação $f(x) = 0$, obter a equação equivalente $g(x) = h(x)$.

  - Esboçar os gráficos de $g(x)$ e $h(x)$ e localizar os pontos de intersecção das duas curvas, pois para algum z temos:
  - $$f(z) = 0 \leftrightarrow g(z) = h(z)$$

Cálculo Numérico Computacional

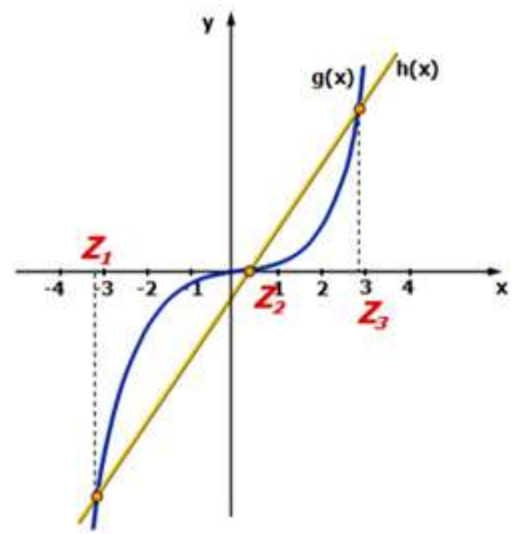
- **Zero Reais de Funções Reais**
  - **Isolamento das raízes**

  - Estratégia 2: $f(x) = 0 \leftrightarrow g(x) = h(x)$

    - Exemplo:
      - Encontrar os intervalos para os zeros da função $f(x) = x^3 - 9x + 3$

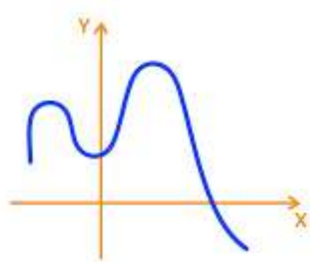
    - Fazendo
    - $x^3 - 9x + 3 = 0$
    - Temos:
    - $x^3 = 9x – 3$

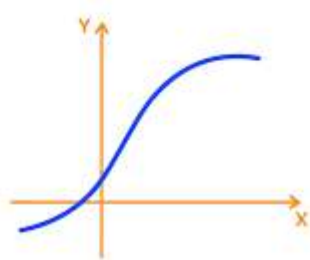
    - Seja então: $g(x) = x^3$
    - $h(x) = 9x – 3$



$Z_1 \in (-4, -3)$
$Z_2 \in (0, 1)$
$Z_3 \in (2, 3)$

- **Zero Reais de Funções Reais**
  - Métodos Usuais
    - **Método da Bissecção**
    - Método da Posição Falsa
    - Método do Ponto Fixo
    - **Método da Iteração Linear**
    - **Método de Newton-Raphson**
    - Método da Secante

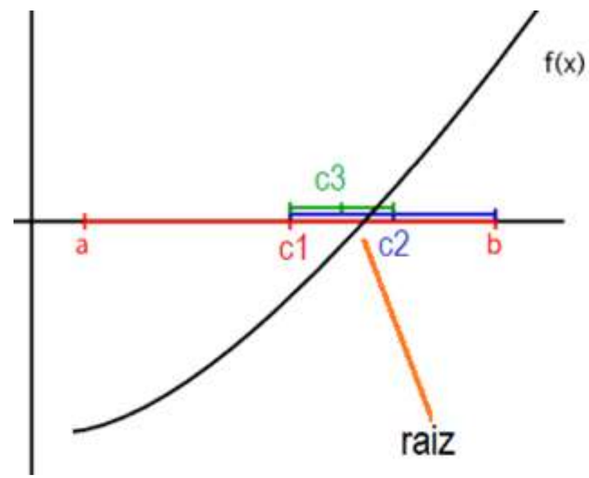




Cálculo Numérico Computacional

- **Zero Reais de Funções Reais**
  - **Método da Bissecção**

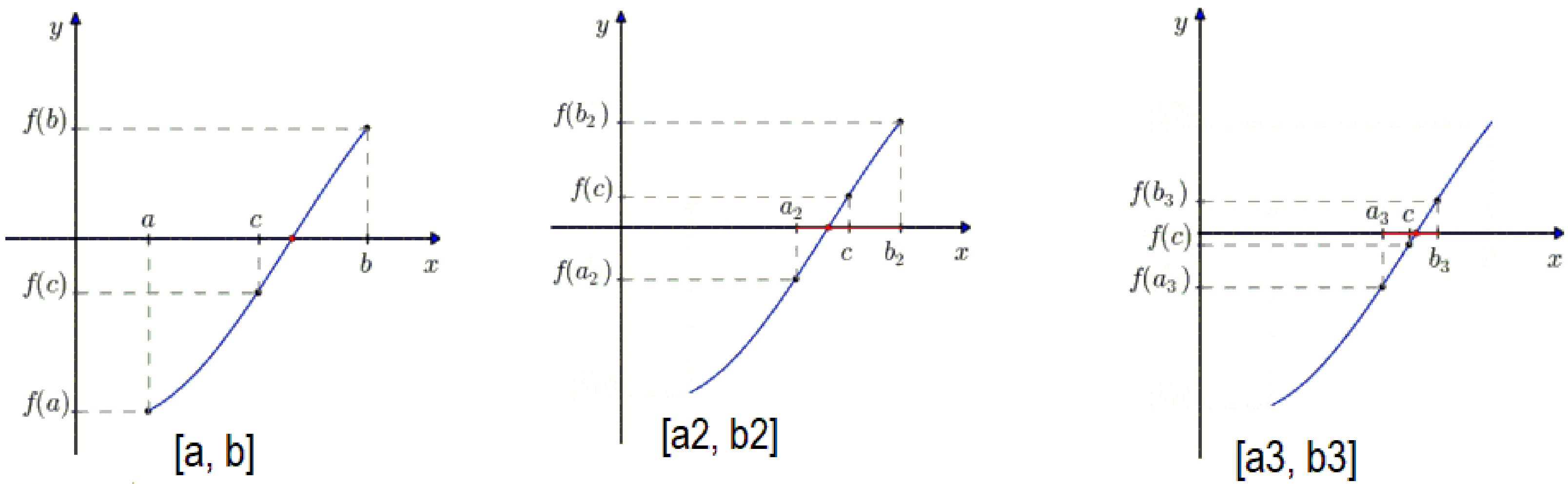
    - Para encontrar uma solução, a estratégia do método é reduzir a amplitude do intervalo que contém a raiz, isto é, fazer divisões sucessiva do intervalo [a,b] ao meio (c_1, c_2, c_3, ..., c_k), até que se alcance o critério de parada (erro prefixado).



    - Critérios de parada:
      - i) $|b - a| < \varepsilon$ e/ou
      - ii) $|f(x_k)| = f(c_k) < \varepsilon$ e/ou
      - Iii) critério do método $< \varepsilon$

Cálculo Numérico Computacional

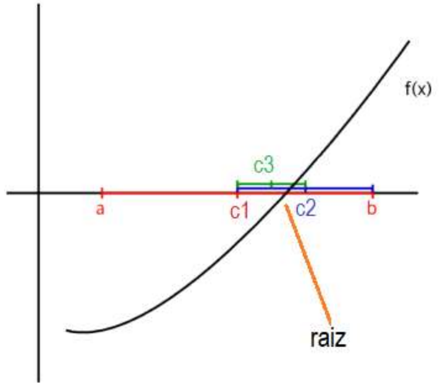
- ## Zero Reais de Funções Reais
  - ### Método da Bissecção
    - Estratégia: fazer a divisão sucessiva de [a,b] ao meio (c)



Observe que **c** tende para a raiz e
$|f(c)|$ e $|b_k - a_k|$ tendem para zero ao longo das iterações!

De fato, para alguma iteração k, teremos:
$|f(c)| < \varepsilon$ e/ou $|b_k - a_k| < \varepsilon$ e
então poderemos tomar o valor de **c**
como a raiz procurada!

- **Zero Reais de Funções Reais**
  - **Método da Bissecção**
    - Estratégia: fazer a divisão sucessiva de [a,b] ao meio (c)
    - Seja f(x) nas condições dos teoremas 1 e 2 , isto é:
      - i) f(x) contínua no intervalo [a,b]
      - ii) f(a).f(b) < 0, supondo que este intervalo contenha apenas uma única raiz.



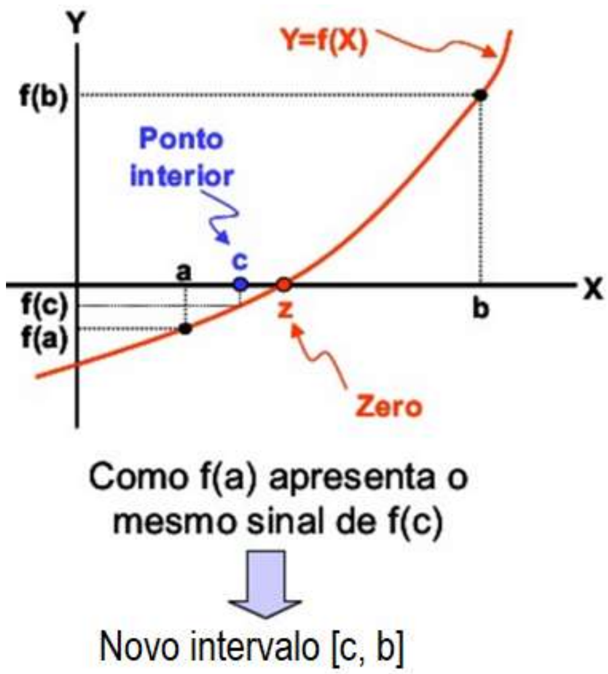
Cálculo Numérico Computacional

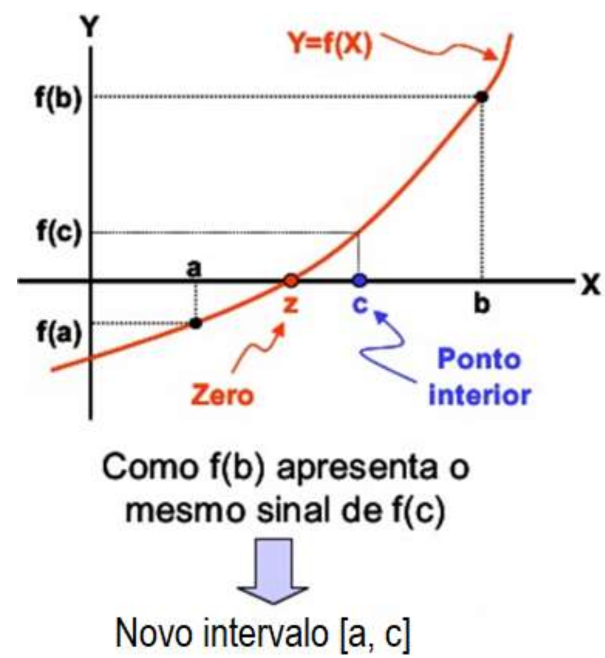
- **Zero Reais de Funções Reais**
  - **Método da Bissecção**
    - Estratégia: fazer a divisão sucessiva de [a,b] ao meio (c)
    - Uma vez que a função é contínua no intervalo [a, b], também será contínua em qualquer subintervalo menor, e assim fica garantida a definição [i];
    - Para garantir a definição [ii] basta escolher o ponto de partição **c** dentro do intervalo original [a, b].
    - Na prática escolhemos para **c** o valor do ponto médio do intervalo:

$$c = (a + b)/2$$

IMPORTANTE: O novo intervalo será escolhido a partir do ponto **c**, abandonando o lado extremo cujo sinal da função é o mesmo que no ponto **c**. Isto é, o novo intervalo será: ou [a, c] ou [c,b].

- **Zero Reais de Funções Reais**
  - **Método da Bissecção**
    - Estratégia: fazer a divisão sucessiva de [a,b] ao meio (c)





Cálculo Numérico Computacional

- **Zero Reais de Funções Reais**
  - **Método da Bissecção**
    - **Estimativa do Erro**

  - O erro no valor da raiz da função calculada pelo método da bissecção, será dado pela metade do comprimento (módulo) do intervalo em estudo: $|(b - a)/2|$;

  - Exemplo: seja z =1.75 a raiz calculada pelo método da bissecção no intervalo [1.5 , 2.0] então:
    - $z = 1.75 \pm |(2.0 - 1.5)/2|$
    - $z = 1.75 \pm 0.25$ (margem de erro = ±0.25 !)

    - ***Assim, para que o erro seja reduzido devemos particionar o intervalo repetidas vezes!***

Cálculo Numérico Computacional

- **Zero Reais de Funções Reais**
  - **Método da Bissecção**
    - Quantidade de Iterações/partições (k)

    - Dado o intervalo [a, b] é possível prever qual o menor numero de iterações/partições (k) para que o resultado fique dentro da margem de erro prefixado (ε).

$$k \geq \frac{\ln(b - a) - \ln(\varepsilon)}{\ln(2)}$$

Cálculo Numérico Computacional

- **Zero Reais de Funções Reais**
  - **Método da Bissecção**
    - Condições de uso
  - Vantagens
    - Facilidade de implementação;
    - Estabilidade e convergência para a solução procurada;
    - Desempenho regular e previsível;
    - O número de iterações é dependente da margem de erro prefixada.

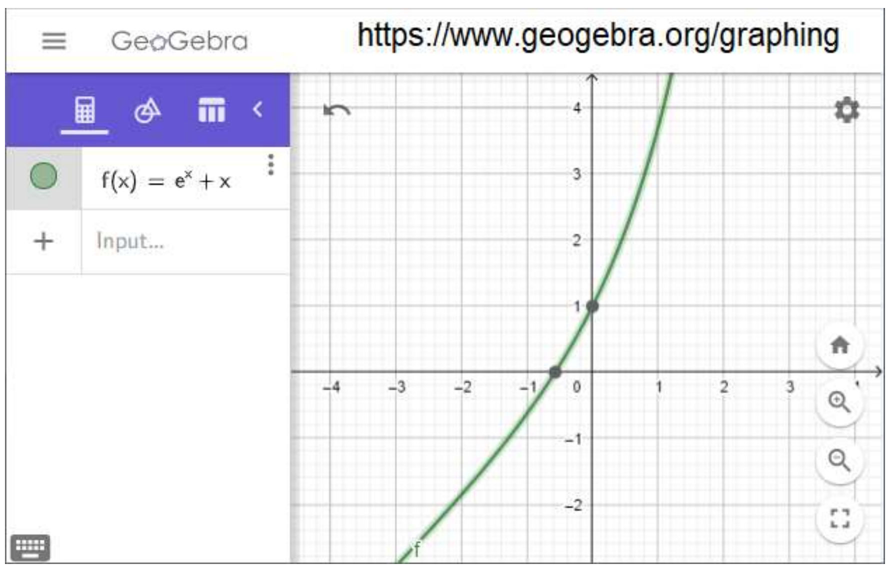
Cálculo Numérico Computacional

- **Zero Reais de Funções Reais**
  - **Método da Bissecção**
    - Condições de uso
  - Desvantagens
    - Lentidão do processo de convergência;
      - requer o (re)cálculo de f(x) em uma enorme quantidade de iterações;
    - Necessidade de conhecimento prévio da região na qual se encontra a raiz de interesse;
      - o que nem sempre é possível;
    - Complexidade da extensão do método para problemas com várias variáveis.

- **Zero Reais de Funções Reais**
  - Método da Bisseção
    - **Exemplo de Aplicação**
      - Encontre o valor da raiz de $f(x) = e^x + x$ com erro prefixado ε <= 0.050.

Cálculo Numérico Computacional

- **Zero Reais de Funções Reais**
  - Método da Bissecção
    - **Exemplo de Aplicação**
      - **Passo 1**: Isolamento da raiz (Estratégia 1)
        - Determinação do intervalo inicial [a, b]
        - Traçar o gráfico da função $f(x) = e^x + x$



A intersecção do gráfico de $f(x)$ com o eixo x ocorre no intervalo $[a, b] = [-1, 0]$.

Cálculo Numérico Computacional

- **Zero Reais de Funções Reais**
  - Método da Bissecção
    - **Exemplo de Aplicação**
      - **Passo 1**: Isolamento da raiz (Estratégia 2)
        - Equação Equivalente: $f(x) = 0 \leftrightarrow g(x) = h(x)$
          - Fazendo $f(x) = 0$
            - temos:

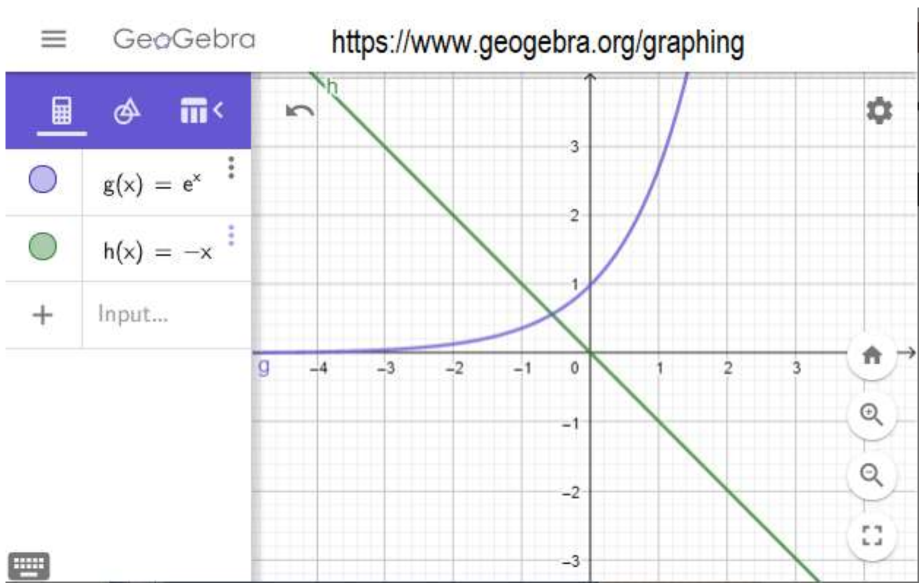
$$e^x + x = 0$$

$$\mathbf{e^x = -x}$$

- Seja então $g(x) = e^x$ e
  $h(x) = -x$

Cálculo Numérico Computacional

- **Zero Reais de Funções Reais**
  - Método da Bissecção
    - **Exemplo de Aplicação**
      - **Passo 1**: Isolamento da raiz (Estratégia 2)
        - Determinação do intervalo inicial [a, b]



A intersecção dos gráfico de $g(x) = e^x$ e $h(x) = -x$ ocorre no intervalo $[a, b] = [-1, 0]$.

Cálculo Numérico Computacional

- **Zero Reais de Funções Reais**
  - Método da Bissecção
    - **Exemplo de Aplicação**
      - Encontre uma estimativa para a raiz de $f(x) = f(x) = e^x + x$ com erro $\varepsilon <= 0{,}050$ no intervalo **[-1, 0]**.
      - **Passo 2**
        - Numero de Iterações/partições (k)
          - Calcular qual é o menor numero de iterações/partições (k) para que a precisão estabelecida (ε) seja alcançada.

$$k >= \frac{\ln(b - a) - \ln(\varepsilon)}{\ln(2)}$$

$$k >= \frac{\ln(0 - (-1)) - \ln(0.050)}{\ln(2)}$$

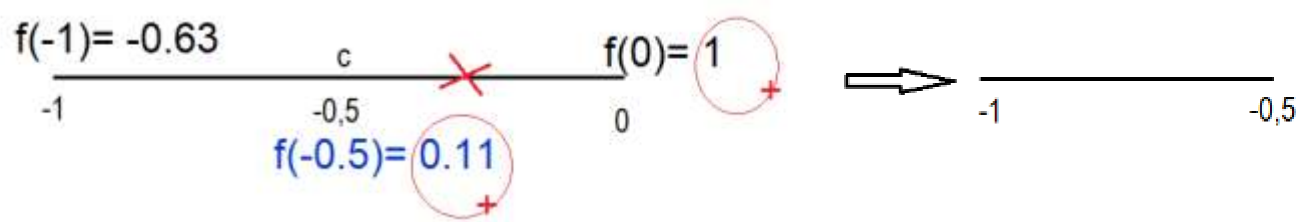
$$k >= 4.322 \Rightarrow \boxed{k >= 5}$$

Cálculo Numérico Computacional

- **Zero Reais de Funções Reais**
  - Método da Bissecção
    - **Exemplo de Aplicação**
      - **Passo 3**
        - Fazer o processo iterativo/partições [até k = 5]

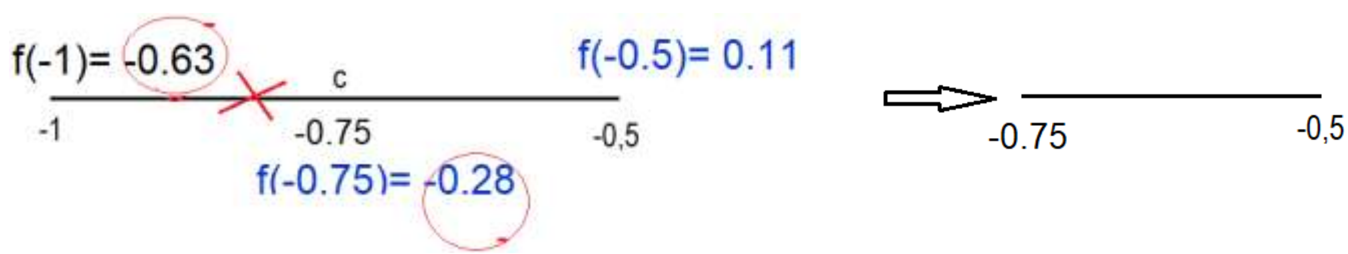
        - k = 1 (fazer a primeira partição)
          - intervalo [a. b] = [-1, 0] e
          - ponto médio c = (a + b) / 2 = (-1 + 0)/2 = -0.5

        - Calcular f(c)=f(-0.5), f(a)= f(-1) e f(b)=f(0); **f(x) = e^x + x**
          - Em seguida comparar o sinal de f(c) com o sinal dos extremos f(a) e f(b) e descartar o lado de mesmo sinal!



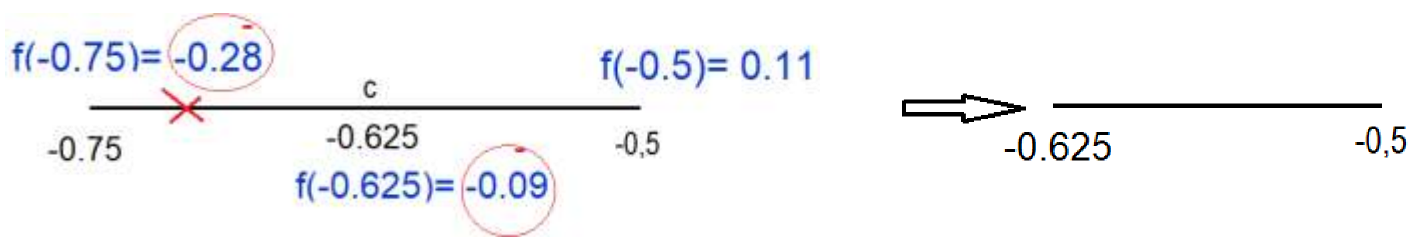
Cálculo Numérico Computacional

- **Zero Reais de Funções Reais**
  - Método da Bissecção
    - **Exemplo de Aplicação**
      - **Passo 3**
        - Fazer o processo iterativo
        - k = 2 (fazer a segunda partição)
        - c = (a+b)/2 = (-1 + (-0.5))/2 = (-1.5)/2 = -0.75
        - f(-.075)= ..., f(-1)=..., f(-0.5)= ... ; **f(x) = e^{x} + x**



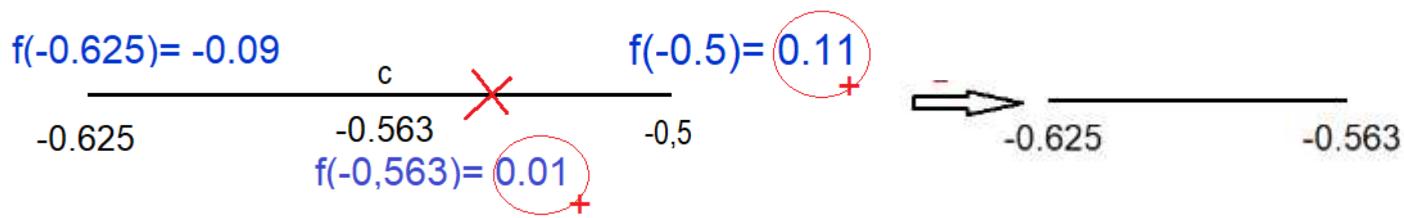
Cálculo Numérico Computacional

- **Zero Reais de Funções Reais**
  - Método da Bissecção
    - **Exemplo de Aplicação**
      - **Passo 3**
        - Fazer o processo iterativo
        - k = 3 (fazer a terceira partição)
        - c = (a+b)/2 = (-0.75 + (-0.5))/2 = (-1.25)/2 = -0.625
        - f(-0.625)= ..., f(-0.75)=..., f(-0.5)= ... ; **f(x) = e^{x} + x**



Cálculo Numérico Computacional

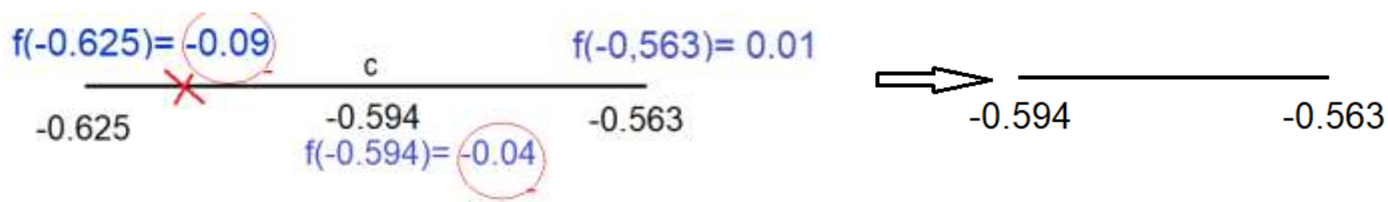
- **Zero Reais de Funções Reais**
  - Método da Bissecção
    - **Exemplo de Aplicação**
      - **Passo 3**
        - Fazer o processo iterativo
        - k = 4 (fazer a quarta partição)
        - c = (a+b)/2 = (-0.625 + (-0.5))/2 = (-1.125)/2 = -0.563
        - f(-0.563)= ..., f(-0.625)=..., f(-0.5)= ... ; **f(x) = e^{x} + x**



Cálculo Numérico Computacional

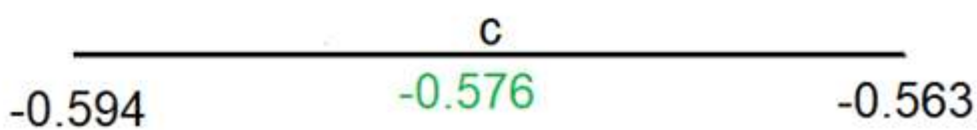
- ## Zero Reais de Funções Reais
  - Método da Bissecção
    - **Exemplo de Aplicação**
      - **Passo 3**
        - Fazer o processo iterativo

        - k = 5 (fazer a quinta e última partição!)
        - c = (a+b)/2 = (-0.625 + (-0.563))/2 = (-1.188)/2 = -0.594
        - f(- 0.594)= ..., f(-0.625)=..., f(- 0.563)= ... ; **f(x) = e^{x} + x**



Cálculo Numérico Computacional

- **Zero Reais de Funções Reais**
  - Método da Bissecção
    - **Exemplo de Aplicação**
    - **Passo 4**
      - Ponto médio da última partição ($k = 5$); $c = (a+b)/2$



Assim $x = -0.576$ é uma possível/provável solução para o valor da raiz da função $\mathbf{f(x) = e^x + x}$ no intervalo $[-1, 0]$.

A confirmação dependente dos critérios de parada!

Cálculo Numérico Computacional

- **Zero Reais de Funções Reais**
  - Método da Bissecção
    - **Exemplo de Aplicação**
    - **Passo 5**
      - **Critérios de parada (Verificação do erro)**
        - k = 5 (última partição realizada)
        - Erro prefixado ε <= 0.050
        - Último Intervalo (-0.594, -0.563)
        - Ponto médio c (raiz) = -0.576
        - f(-0.576) = (2.718)^(-0.576) - 0.576 = 0.562 - 0.576 = -0.014
      - i) Critério |f(x)| < ε
        - |f(-0.576)| = |-0.014| < 0.050 **ok!**
      - ii) Critério |b – a| < ε
        - |-0.563 – (-0.594)| = |0.031| < 0.050 **ok!**

IMPORTANTE: se i) ou ii) falhar?
Continue com mais partições!

Cálculo Numérico Computacional

- **Zero Reais de Funções Reais**
  - Método da Bissecção
    - **Exemplo de Aplicação**
    - **Passo 5**
      - **Critérios de parada (Verificação do erro) --cont.**
        - IMPORTANTE: se i) ou ii) ou iii) falhar?
          Continue com mais partições!

- iii) Critério do Método da Bissecção: $(|b - a|)/2 < \varepsilon$
- $-0.576 \pm |(-0.563 - (-0.594))/2| =$
  - $-0.576 \pm |(0.031)/2| =$
  - -0.576 ± 0.016 (margem de erro)
    - como $0.016 < 0.050$ **ok!**

- **Conclusão: $z = -0.576 \in IR$** é o **zero** da função ***f(x)* = $e^x + x$** no intervalo [-1, 0] com erro $\varepsilon <= 0.050$!

Notação: *O número* $z = -0.576 \in IR$ *é uma* ***raiz*** *da equação* ***f(x) = 0*** no intervalo [-1, 0] *com erro* $\varepsilon <= 0.050$*!*

Cálculo Numérico Computacional

Obrigado pela Atenção!

Fique atento e focado! Vem ai a lista de atividades dessa unidade!

Livro Texto:
RUGGIERO,M.A.G.; LOPES,V.L.R.
Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais, Makron Books, 2ª. Edição, 1997.