Localización

Jaime Gabriel Melgar Castañeda

Noviembre 2019

Resumen

Se proporciona una introducción a la teoría de localización. Explicamos este formalismo con detalle para la localización representada por la categoría de fracciones. También demostramos que la localización de una categoría aditiva es aditiva. Después estudiamos la construcción de funtores de localización de Bousfield. La formulación de la localización de Bousfield no requiere ninguna noción categórica avanzada. La existencia de estas localizaciones es un problema sutil.

Índice

1. Introducción

La localización es una maquinaria para invertir formalmente los morfismos en una categoría. En este trabajo se trata el caso más general de localizar una categoría arbitraria. La localización de una categoría $\mathcal{C}$ en una clase de morfismos $\mathcal{W}$ es la solución universal para convertir los morfismos de $\mathcal{W}$ en isomorfismos en una nueva categoría. Esta solución universal, se encierra en el concepto de funtor de localización.

La localización es una técnica bien conocida en álgebra conmutativa y geometría algebraica. Por ejemplo, la construcción de anillos de fracciones y el proceso asociado de localización de módulos. El uso de las localizaciones en topología algebraica tiene sus orígenes en trabajos de Serre (1953) y Adams (1961).

Las teorías de homotópicas, las cuales son una herramienta fundamental en topología algebraica, fueron introducidas por Bousfield en los años setenta. La categoría de modelos, introducidas por Quillen en 1967, juegan un papel importante en la teoría abstracta de homotopía. No esta en el objetivo de este trabajo pero como motivación, se tiene que varias estructuras de categorías de modelos conocidas para espacios topológicos, son en efecto localizaciones.

Las fuentes de consulta para desarrollar estas notas, están The Stacks project [pro], Localizacion for Triangulated Categories [Kra], Bousfield Localization [Ara] y Calculus of fractions and homotopy theory [GZ67].

2. Cálculo de fracciones

Definición 2.1. Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $\mathcal{W} \subset \mathcal{C}$ una colección de morfismos. La *localización* de $\mathcal{C}$ por $\mathcal{W}$ es una categoría $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ y un funtor $Q\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ llamado *cociente de la localización*, tal que

- para todo $w \in \mathcal{W}$, Qw es un isomorfismo;
- dado un funtor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{X}$ tal que $(\forall\, w \in \mathcal{W})\, Fw$ es un isomorfismo, existe un único funtor $F'\colon \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}] \to \mathcal{D}$ tal que $F = F' \circ Q$.

Observación 2.2. Como consecuencia de la definición el funtor $[\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}], \mathcal{X}] \to [\mathcal{C}, \mathcal{X}]$ es fiel y pleno para toda categoría $\mathcal{X}$.

Observación 2.3 (Gabriel-Zisman). Para cada categoría $\mathcal{C}$ y cada clase $\mathcal{W}$ de morfismos existe una localización (posiblemente grande) $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$. Los objetos de $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ serán los mismos que los objetos de $\mathcal{C}$. Para definir los morfismos de $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$, el gráfico orientado con un conjunto de vértices $\mathrm{Ob}\mathcal{C}$ y con un conjunto de flechas la unión disjunta $\mathrm{Mor}\mathcal{C} \amalg \mathcal{W}^{-1}$, dónde $\mathcal{W}^{-1} = \{w^{-1}\colon b \to a \mid \mathcal{W} \ni w\colon a \to b\}$. Sea $\mathcal{P}$ el conjunto de caminos en esta gráfica (es decir, sucesiones finitas de flechas componibles), junto con la obvia composición que denotamos por $\circ_{\mathcal{P}}$. Definimos $\mathrm{Mor}\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ como el cociente de $\mathcal{P}$ módulo las siguientes relaciones:

- $g \circ_{\mathcal{P}} f = g \circ f \quad (\forall f, g \in \mathcal{C}$ composibles).
- $id_{\mathcal{P}} a = id_{\mathcal{C}} a \quad (\forall a \in \mathcal{C})$.
- $w^{-1} \circ_{\mathcal{P}} w$ y $w \circ_{\mathcal{P}} w^{-1}$ los respectivos morfismos identidad.

La composición en $\mathcal{P}$ induce la composición de morfismos en $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$. El funtor Q es la composición

$$\mathrm{Mor}\mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Mor}\mathcal{C} \amalg \mathcal{W}^{-1} \longrightarrow \mathcal{P} \longrightarrow \mathrm{Mor}\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}].$$

Definición 2.4. Un subconjunto de morfismos $\mathcal{W}$ de $\mathcal{C}$ ese dice *cerrado débilmente* si

- contiene los isomorfismos de $\mathcal{C}$,
- si contiene dos elementos de $\{f, g, gf\}$, entonces contiene el tercero.

Si además $\mathcal{W}$ es una subcategoría (es decir, cerrada bajo composición), a los morfismos de $\mathcal{W}$ les llamamos *equivalencias débiles*.

Dado un funtor F, el conjunto $\{f \mid Ff \text{ es un isomorfismo}\}$ es débilmente cerrado.

Observación 2.5. Dado que la definición de cerrado son condiciones cerradas en $\mathcal{W}$, para cualquier $\mathcal{W}$ podemos definir la noción de *cerradura débil* $\overline{\mathcal{W}}$ (también llamada *saturación* de $\mathcal{W}$), tomando la intersección de todas las clases de morfismos cerrados débilmente que contienen $\mathcal{W}$. El funtor $Q\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$, invertirá todos los morfismos en $\overline{\mathcal{W}}$, lo que básicamente demuestra que $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}] \simeq \mathcal{C}[\overline{\mathcal{W}}^{-1}]$. Por lo tanto, cuando hablamos de la localización se puede suponer que $\mathcal{W}$ es cerrado débilmente.

2.1. Categoría de Fracciones

Definición 2.6. Decimos que una clase de morfismos $\mathcal{W}$ admite un *cálculo de fracciones izquierdas* si:

F1. $\mathcal{W}$ contiene todas las identidades de $\mathcal{C}$ y es cerrada bajo composición.

F2. Cada diagrama $\bullet \xleftarrow{w} \bullet \xrightarrow{f} \bullet$ con $w \in \mathcal{W}$, puede completarse en $\mathcal{C}$ a un cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "f"] \arrow[d, "w"'] & \bullet \arrow[d, dashed, "w^* \in \mathcal{W}"] \\
\bullet \arrow[r, dashed, "f^*"] & \bullet
\end{tikzcd}$$

F3. Para $f, g \in \mathcal{C}$. $(\exists w \in \mathcal{W})\, fw = gw \Rightarrow (\exists v \in \mathcal{W})\, vf = vg$.

Una *fracción* es un diagrama $a \xrightarrow{f} \bullet \xleftarrow{w} b$ ($w \in \mathcal{W}$) y representara un morfismo $w^{-1}f\colon a \to b$. Cuando $w = 1$ respectivamente $f = 1$ denotamos la fracción simplemente por f y w^{-1}. En realidad las fracciones las tomamos como clases de equivalencia. Más precisamente, dos fracciones $w^{-1}f, v^{-1}g$ son iguales si existe una tercera $u^{-1}h$ y un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & \bullet \arrow[d] & \\
\bullet \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "g"'] & \bullet & \bullet \arrow[ul, "w"'] \arrow[l, "u"'] \arrow[dl, "v"] \\
 & \bullet \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Esto significa que las fracciones $w^{-1}f$ y $v^{-1}g$ pueden expandirse a la misma fracción. La reflexividad y simetría de esta relación son obvias, para probar la transitividad sean $w^{-1}f = v^{-1}g$ y $v^{-1}g = u^{-1}h$:

$$\begin{tikzcd}
& & \bullet \arrow[dll, "w"'] \arrow[dl] \arrow[d, "v"] \arrow[dr] \arrow[drr, "u"] & & \\
\bullet \arrow[r] & \bullet & \bullet \arrow[l, "g'"'] \arrow[r, "g''"] & \bullet & \bullet \arrow[l] \\
& & \bullet \arrow[ull, "f"] \arrow[ul] \arrow[u, "g"'] \arrow[ur] \arrow[urr, "h"'] & &
\end{tikzcd}$$

Se construye el siguiente diagrama: por F2 existen el par de morfismos que hacen el cuadrado conmutativo y el último morfismo es por F3 ya que v ecualiza

$$\begin{tikzcd}
& \bullet \arrow[dr, dashed] & & \\
\bullet \arrow[ur] \arrow[r, "v"] \arrow[dr] & \bullet \arrow[u, "g''"'] \arrow[d, "g'"] & \bullet \arrow[r, dashed] & \bullet \\
& \bullet \arrow[ur, dashed] & &
\end{tikzcd}$$

De estos morfismos es fácil construir una fracción común donde $w^{-1}f$ y $u^{-1}h$ se extienden.

La composición de dos fracciones $w^{-1}f \colon a \to b$ y $v^{-1}g \colon b \to c$ se obtiene de la siguiente manera:

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[rr, "w^{-1}f"] \arrow[dr, "f"'] & & b \arrow[rr, "v^{-1}g"] \arrow[dl, "w"] \arrow[dr, "g"'] & & c \arrow[dl, "v"] \\
& \bullet \arrow[dr, dashed, "g*"'] & & \bullet \arrow[dl, dashed, "w*"] & \\
& & \bullet & &
\end{tikzcd}$$

para ser $v^{-1}g \circ w^{-1}f = (w^* \circ v)^{-1} g^* \circ f$. No es difícil comprobar que esta composición está bien definida, es asociativa y por F1 las fracciones 1 son elementos neutros para la composición.

Se define la *categoría de fracciones* $\mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}$ con los mismos objetos que $\mathcal{C}$ y los morfismos son fracciones.

Si $\mathcal{W}$ admite cálculo de fracciones izquierdas, la localización $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ se puede puede representar por la categoría de fracciones $\mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}$. El funtor de localización $Q \colon \mathcal{C} \to \mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}$ se define como $Q(f) = f$. Si $w \in \mathcal{W}$, su inverso en $\mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}$ es w^{-1}, por lo que las imágenes de los morfismos en $\mathcal{W}$ bajo Q son invertibles. Si un funtor $F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{X}$ transforma elementos de $\mathcal{W}$ en isomorfismos, entonces se obtiene un funtor $F' \colon \mathcal{W}^{-1}\mathcal{C} \to \mathcal{X}$, por $F'(w^{-1}f) = (Fw)^{-1}Ff$ y es fácilmente de ver que este es único de manera que se obtiene una factorización de F sobre Q.

Observación 2.7. La dualización produce la noción de admitir un cálculo de fracciones derechas y, por lo tanto, una descripción de $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ usando fracciones derechas. Si $\mathcal{W}$ admite tanto un cálculo de fracciones izquierdas como un cálculo de fracciones derechas, la propiedad universal de la localización da como resultado que ambas descripciones de $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ por fracciones izquierda y derecha son canónicamente isomorfas.

Observación 2.8. A pesar de la simplicidad de la construcción, la localización $\mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}$ suele ser bastante difícil de identificar explícitamente. A menudo no es trivial decidir si $\mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}$ es (equivalente a) la categoría cero o no.

Definición 2.9. Un conjunto de morfismos se llama *sistema multiplicativo* si admite tanto cálculo de fracciones izquierda como derecha.

Lema 2.10. *Sea $\mathcal{W}$ un sistema multiplicativo. Un morfismo $f \in \mathcal{C}$ pertenece a $\overline{\mathcal{W}}$ si y solo si hay morfismos g y h tales que $gf, fh \in \mathcal{W}$.*

Demostración. $\Leftarrow$) Se sigue ya que $fg, gh \in \mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}$ son isomorfismos, entonces $g \in \mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}$ es un isomorfismo (ya que entonces g tiene un inverso izquierdo y otro derecho, por lo tanto es invertible), es dcir, $g \in \overline{\mathcal{W}}$.

$\Rightarrow$) Sea $w^{-1}g$ el morfismo inverso de f en $\mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}$. La relación $1 = w^{-1}gf$ significa que existe un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & \bullet \arrow[d, "g'"] & \\
a \arrow[ur, "gf"] \arrow[r] \arrow[dr, "1"'] & \bullet & a \arrow[ul, "w"'] \arrow[l, "v"'] \arrow[dl, "1"] \\
 & \bullet \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

De aquí $g'gf = v \in \mathcal{W}$. Y usando fracciones derechas para describir morfismos en $\mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}$, del mismo modo, usando $1 = fhu^{-1}$ se demuestra que $fhh' \in \mathcal{W}$ para alguno h'. Se concluye la demostración. $\square$

Observación 2.11. Sea $b \in \mathcal{C}$. Consideramos la categoría $\mathcal{W}_{b/}$, respectivamente $\mathcal{W}_{/b}$, cuyos objetos son morfismos en $\mathcal{W}$ con dominio b, respectivamente codominio b, y cuyos morfismos respectivamente son los diagramas conmutativos en $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd}
 & b \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "v"] & \\
\bullet \arrow[rr, "f"] & & \bullet
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "w"'] & & \bullet \arrow[dl, "v"] \\
 & b &
\end{tikzcd}$$

con $w, v \in \mathcal{W}$. De las propiedades F1, F2 y F3 se deduce inmediatamente que la categoría $\mathcal{W}_{b/}$ es filtrada:

- Para cada par de objetos $w, v \in \mathcal{W}_{b/}$, por F2 existe un objeto $w^*v \in \mathcal{W}_{b/}$ y morfismos $w \xrightarrow{v^*} w^*v$, $v \xrightarrow{w^*} w^*v$.
- Para cada par de objetos $w, v \in \mathcal{W}_{b/}$ y cada par de morfismos $f, g\colon w \to v \in \mathcal{W}_{b/}$, por F3 $\exists u \in \mathcal{W}$ (dado que $fw = gw = v$), entonces $u\colon v \to uv \in \mathcal{W}_{b/}$ es tal que $uf = ug$.

Similarmente si $\mathcal{W}$ admite cálculo de fracciones derechas, $\mathcal{W}_{/b}$ es cofiltrada.

Lema 2.12 (Gabriel-Zisman)**.** *Para morfismos $\mathcal{W} \subset \mathcal{C}$ que admiten cálculo de fracciones izquierda, se tiene*

$$\mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}(a, b) = \operatorname*{colim}_{b \xrightarrow{w} c \in \mathcal{W}_{b/}} \mathcal{C}(a, c) \tag{1}$$

Lema 2.13. *Una categoría $\mathcal{C}$ es filtrante si y solo para cualquier categoría finita $\mathcal{I}$ (i.e. tiene un número finito de morfismos) y funtor $F\colon \mathcal{C} \times \mathcal{I}^{op} \to \mathbf{Set}$, el morfismo natural*

$$\operatorname*{colim}_{\mathcal{C}} \operatorname*{lím}_{\mathcal{I}} F(a,i) \longrightarrow \operatorname*{lím}_{\mathcal{I}} \operatorname*{colim}_{\mathcal{C}} F(a,i)$$

es un isomorfismo.

Demostración. Ver Categories and Sheaves, Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, theorem 3.3.6. □

Lema 2.14. *Para un funtor de localización $Q\colon \mathcal{C} \to \mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}$ se tiene:*

- *Q conmuta con colímites finitos cuando $\mathcal{W}$ admite cálculo de fracciones izquierdas.*

Demostración. Sea I una categoría finita y $\mathcal{I} \to \mathcal{C}$, $i \mapsto a_i$ un fuctor cuyo colímite existe. Usando 2.12, el hecho de que $\mathcal{W}_{b/}$ es filtrada y Lemma 2.13 tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}(Q(\operatorname{colim} a_i), Qb) &= \operatorname*{colim}_{(w\colon b\to c)\in\mathcal{W}_{b/}} \mathcal{C}(\operatorname{colim} a_i, c) \\
&= \operatorname*{colim}_{(w\colon b\to c)\in\mathcal{W}_{b/}} \operatorname*{lím}_{i} \mathcal{C}(a_i, c) \\
&= \operatorname*{lím}_{i} \operatorname*{colim}_{(w\colon b\to c)\in\mathcal{W}_{b/}} \mathcal{C}(a_i, c) \\
&= \operatorname*{lím}_{i} \mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}(Q(a_i), Qc)
\end{aligned}$$

□

Lema 2.15. *Sea $\mathcal{W} \subset \mathcal{C}$ morfismos que admiten cálculo de fracciones izquierdas.*

1. *Sea $w_i^{-1} f_i\colon a_i \to b \quad i = 1,2$ dos fracciones. Entonces, existe un denominador común $w \in \mathcal{W}$ y $g_i \in \mathcal{C} \quad i = 1,2$ tal que $w_i^{-1} f_i = w^{-1} g_i \quad i = 1,2$.*
2. *Dos fracciones $w^{-1} f_i \quad i = 1,2$ son iguales si y solo si existe $g \in \mathcal{C}$ con $gw \in \mathcal{W}$ tal que $gf_1 = gf_2$.*
3. *Sean $f, f' \in \mathcal{C}$ y el siguiente diagrama conmutativo en $\mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}$*

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "a"'] \arrow[d, "f"'] & \bullet \arrow[d, "f'"] \\
\bullet \arrow[r, "b"] & \bullet
\end{tikzcd}$$

Entonces existe un morfismo $f'' \in \mathcal{C}$ y un diagrama conmutativo en $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "g"'] \arrow[d, "f"'] & \bullet \arrow[d, "f''"] & \bullet \arrow[l, "w"'] \arrow[d, "f'"] \\
\bullet \arrow[r, "h"] & \bullet & \bullet \arrow[l, "v"]
\end{tikzcd}$$

Donde $a = w^{-1} g$ y $b = v^{-1} h$

Demostración. (1): Hay que encontrar morfismos para $i = 1, 2$

$$\begin{tikzcd}
& \bullet \arrow[d, dashed, "f_i'"] & \\
a_i \arrow[ur, "f_i"] & \bullet & b \arrow[ul, "w_i"'] \arrow[l, dashed, "w"']
\end{tikzcd}$$

que hagan el diagrama conmutativo. Pero dado que la categoría $\mathcal{W}_{b/}$ es filtrada esto es posible (primer punto de la observación 2.11). Se tiene g_i como la composición $f_i' \circ f_i$.
(2): Para que las fracciones sean iguales, debe existe una tercera y un diagrama conmutativo para $i = 1, 2$

$$\begin{tikzcd}
& \bullet \arrow[d, "f_i'"] & \\
\bullet \arrow[ur, "f_i"] \arrow[r] & \bullet \arrow[d, dashed, "v"] & \bullet \arrow[ul, "w"'] \arrow[l] \\
& \bullet &
\end{tikzcd}$$

Por F4 (dado que $f_1' w = f_2' w$) existe $v \in \mathcal{W}$ tal que $v f_1' = v f_2'$. Estableciendo g igual a este valor común se demuestra la primer implicación. La otra implicación es inmediata.
(3): De los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "g"'] \arrow[d, "f"'] & \bullet \arrow[d, "f'^*"] & \bullet \arrow[l, "w"] \arrow[d, "f'"] \\
\bullet \arrow[dr, "h"] & \bullet & \bullet \arrow[l, "w^*"'] \arrow[dl, "v"'] \\
& \bullet &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[d, "v^*"'] & \bullet \arrow[l, "w^*"] \arrow[d, "v"] \\
\bullet & \bullet \arrow[l, "w^{**}"']
\end{tikzcd}$$

podemos definir f'' como la composición $v^* \circ f'^*$ y tener el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "g"'] \arrow[d, "f"'] & \bullet \arrow[d, "f''"] & \bullet \arrow[l, "w"] \arrow[d, "f'"] \\
\bullet \arrow[r, "w^{**} \circ h"] & \bullet & \bullet \arrow[l, "w^{**} \circ v"']
\end{tikzcd}$$

Redefiniendo $h \doteq w^{**} \circ h$, $v \doteq w^{**} \circ v$, obtenemos todo como en el lema, excepto que no sabemos que el cuadrado izquierdo del diagrama conmuta. La definición de composición en $\mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}$ muestra

$$v^{-1} h \circ f = v^{-1}(hf) \quad \text{y} \quad f' \circ w^{-1} g = v^{-1}(f'' g)$$

se tiene $v^{-1}(hf) = v^{-1}(f''g)$. Por el punto anterior existe g' tal que $g'v \in \mathcal{W}$ y $g'hf = g'f''g$. Por lo tanto, hacemos un reemplazo más $h \doteq g' \circ h$, $v \doteq g' \circ v$ y $f'' \doteq g' f''$, terminamos.

□

Proposición 2.16. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría que admite coproductos. Supongamos que el conjunto de morfismos $\mathcal{W}$ admite un cálculo de fracciones izquierda. Si $\amalg_i w_i \in \mathcal{W}$ para cada familia $(w_i) \in \mathcal{W}$, entonces la categoría $\mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}$ admite coproductos y el funtor cociente $Q \colon \mathcal{C} \to \mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}$ conserva coproductos.*

Demostración. Sea $(a_i)_i$ una familia de objetos en $\mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}$. Afirmamos que el coproducto $\amalg_i a_i$ en $\mathcal{C}$ también es el coproducto en $\mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}$. Por lo tanto, debemos mostrar que para cada objeto b, el morfismo canónico

$$\mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}(\amalg_i a_i, b) \longrightarrow \prod_i \mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}(a_i, b)$$

es biyectivo.

Para verificar la suryectividad, sea $w_i^{-1} f_i \colon a_i \to b$ una familia de fracciones. Obtenemos un diagrama conmutativo (por F2)

$$\begin{tikzcd}
\amalg_i a_i \arrow[r, "\amalg_i f_i"] & \amalg_i c_i \arrow[d, dashed] & \amalg_i b \arrow[l, "\amalg_i w_i"'] \arrow[d] \\
 & c & b \arrow[l, dashed, "w\in\mathcal{W}"']
\end{tikzcd}$$

Y se tiene $w^{-1} \amalg f_i \mapsto (w_i^{-1} f_i)_i$, como se demuestra en el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & & c_i \arrow[d] & & \\
a_i \arrow[urr, "f_i"] \arrow[r] & \amalg_i a_i \arrow[r, "\amalg f_i"] & \amalg_i c_i \arrow[d] & \amalg_i b \arrow[l] \arrow[r] & b \arrow[ull, "w_i"'] \arrow[dll, "w"] \\
 & & c & &
\end{tikzcd}$$

Para verificar la inyectividad, sean $w^{-1}f, w^{-1}g \in \mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}(\amalg_i a_i, b)$ (podemos elegirlas con denominador común) tal que $w^{-1}f_i = w^{-1}g_i$ para toda i, es decir, existe h_i tal que $h_i f_i = h_i g_i$ para cada i. Cada h_i pertenece a la saturación $\overline{\mathcal{W}}$ que también es cerrada al tomar coproductos. Además, $\overline{\mathcal{W}}$ admite un cálculo de fracciones y, por lo tanto, obtenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & \amalg_i c \arrow[r] \arrow[d, "\amalg h_i"] & c \arrow[d, dashed, "v"] & \\
\amalg a_i \arrow[ur] \arrow[r] & \amalg d_i \arrow[r] & \bullet & b \arrow[l] \arrow[ul, "w"']
\end{tikzcd}$$

con $v \in \overline{\mathcal{W}}$. Entonces $vw \in \overline{\mathcal{W}}$, y se tiene $w^{-1}f = w^{-1}g$ dado que $f = \amalg a_i \xrightarrow{f_i} \amalg c_i \longrightarrow c$ y $g = \amalg a_i \xrightarrow{g_i} \amalg c_i \longrightarrow c$. Esto completa la prueba. □

Lema 2.17. *Sea $\mathcal{A}$ categoría preaditiva (resp. aditiva) y $\mathcal{W}$ una clase de morfismos que admite un cálculo de fracciones. Existe una estructura preaditiva (resp. aditiva) canónica en $\mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}$ tal que el funtor de localización $\mathcal{A} \to \mathcal{W}^{-1}\mathcal{A}$ es aditivo.*

Demostración. Sean $\alpha, \beta \colon A \to B$ fracciones en $\mathcal{W}^{-1}\mathcal{A}$. Representamos respectivamente las fracciones α y β por $w^{-1}f, w^{-1}g$ (con denominador común w lema 2.15). Entonces

$$\alpha + \beta \doteq w^{-1}(f + g).$$

Hay que probar que es invariante a los representantes y que la composición es bilineal. Una vez hecho esto, está claro que Q es un funtor aditivo.

Supongamos que $(w')^{-1}f'$, $(w')^{-1}g'$ son una segunda representación de α, β. Se puede por, observación 2.11 encontramos un morfismo $w'' \in \mathcal{W}$ y morfismos h_1, h_2 de manera que los diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd}
& \bullet \arrow[d, "h_1"] & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[r] \arrow[dr, "f'"'] & \bullet & B \arrow[ul, "w"'] \arrow[l] \arrow[dl, "w'"] \\
& \bullet \arrow[u, "h_2"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& \bullet \arrow[d, "h_1"] & \\
A \arrow[ur, "g"] \arrow[r] \arrow[dr, "g'"'] & \bullet & B \arrow[ul, "w"'] \arrow[l] \arrow[dl, "w'"] \\
& \bullet \arrow[u, "h_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, vemos que $w^{-1}(f+g)$ es equivalente a

$$\begin{aligned}
(w \circ h_1)^{-1}(h_1 \circ (f+g)) &= (w \circ h_1)^{-1}(h_1 \circ f + h_1 \circ g) \\
&= (w' \circ h_2)^{-1}(h_2 \circ f' + h_2 \circ g') \\
&= (w' \circ h_2)^{-1}(h_2 \circ (f' + g'))
\end{aligned}$$

que es equivalente a $(w')^{-1}(f'+g')$.

Para mostrar que la composición es bilineal, sea $\gamma \colon B \to C \in \mathcal{W}^{-1}\mathcal{A}$, con representante $v^{-1}h$. Usando F3 elegimos morfismos w' y h'

$$\begin{tikzcd}
& & C \arrow[d, "v"] \\
& B \arrow[r, "h"] \arrow[d, "w"] & \bullet \arrow[d, dashed, "w'"] \\
A \arrow[r, "f,g"] & \bullet \arrow[r, dashed, "h'"] & \bullet
\end{tikzcd}$$

Entonces $\gamma\alpha = (w'v)^{-1}(h'f)$ y $\gamma\beta = (w'v)^{-1}(h'g)$. Por lo tanto, $\gamma\alpha + \gamma\beta$ está representado por $(w'v)^{-1}(h'f + h'g) = (w'v)^{-1}(h'(f+g))$ que representa $\gamma \circ (\alpha + \beta)$.

Finalmente, sea $\gamma \colon C \to A \in \mathcal{W}^{-1}\mathcal{A}$, con representante $v^{-1}h$. Usando F3 elegimos morfismos r_1', r_2' y f', g'

$$\begin{tikzcd}
& & B \arrow[d, "w"] & \\
& A \arrow[r, "f,g"] \arrow[d, "r"] & X \arrow[d, dashed, "r_1', r_2'"] \arrow[dr, dashed, "w'"] & \\
C \arrow[r, "h"] & \bullet \arrow[r, dashed, "f', g'"] & \bullet \arrow[r, dashed, "a,b"] & \bullet
\end{tikzcd}$$

Luego, usando que la categoría $\mathcal{W}_{X/}$ es filtrada, podemos encontrar w' y morfismos $a \colon r_1' \to w'$ y $b \colon r_2' \to w'$. En este punto, vemos que las composiciones $\alpha\gamma$ y $\beta\gamma$ están representadas por $(w'w)^{-1}af'h$ y $(w'w)^{-1}bg'h$. Por lo tanto, $\alpha\gamma + \beta\gamma$ está representado por $(w'w)^{-1}(af' + bg')h$ que, según el diagrama, es representante de $(\alpha+\beta)\gamma$.

Por último, si $\mathcal{W}$ admite cálculo de fracciones izquierdas (resp. derechas) dado que el functor Q conmuta con colímites finitos (resp. limites finitos) lema 2.14, concluimos que $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ tiene un objeto cero y sumas directas. $\square$

3. Localización

Para un funtor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ denotamos $\mathcal{W}_F$ al conjunto de F-isomorfismos, es decir, morfismos $w \in \mathcal{C}$ tal que Fw es un isomorfismo. La siguiente proposición, advierte condiciones para que F sea un cociente de la localización.

Proposición 3.1. *Sea $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{B}$. Supongamos que F tiene adjunto derecho G. Entonces, las siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *El funtor $\mathcal{C}[\mathcal{W}_F^{-1}] \to \mathcal{B}$ es una equivalencia.*
2. *El funtor G es fiel y pleno.*

Demostración. Las hipótesis presentan los siguientes datos

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "Q"'] & & \mathcal{B} \arrow[ll, bend right, "G"'] \\ & \mathcal{C}[\mathcal{W}_F^{-1}] \arrow[ur, "H"'] & \end{tikzcd}$$

(2) $\Rightarrow$ (1): La counidad es un isomorfismo natural $\epsilon\colon H(QG) \xrightarrow{\sim} 1$, lo que muestra que H tiene un cuasi-inverso derecho. Por otro lado, afirmamos que QG es cuasi-inverso izquierdo de H. Para ver esto, se tiene de la propiedad universal de Q la equivalencia

$$(QG)H \simeq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad QGHQ \simeq Q.$$

Deducimos de la igualdad triangular $F \xrightarrow{F\eta} FGF \xrightarrow{\epsilon F} F$, que $F\eta$ es un isomorfismo, pues ϵF es un isomorfismo e inverso derecho de $F\eta$. Esto implica que $\eta_a \in \mathcal{W}_F$ para toda a y por lo tanto $Q\eta_a$ es un isomorfismo para toda a; es decir $Q\eta\colon Q \to QGHQ$ es un isomorfismo.

(1) $\Rightarrow$ (2): El funtor $[\mathcal{B}, \mathcal{X}] \to [\mathcal{C}, \mathcal{X}]$ que induce F es fiel y pleno para cualquier categoría $\mathcal{X}$; pues es la composición de los funtores que inducen H y Q. Aplicando el siguiente lema al diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[dr, "F"'] & & \mathcal{B} \arrow[ll, "G"'] \\ & \mathcal{B} \arrow[ur, "1"'] & \end{tikzcd}$$

se tiene $1 \dashv GF$, es decir, $GF \cong 1$. Se deduce que G es fiel y pleno. $\square$

Lema 3.2. *Sean $GF \dashv H$ los funtores del diagrama*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[dr, "F"'] & & \mathcal{C} \arrow[ll, "H"'] \\ & \mathcal{B} \arrow[ur, "G"'] & \end{tikzcd}$$

Si para cada categoría $\mathcal{X}$ el funtor $[\mathcal{B}, \mathcal{X}] \longrightarrow [\mathcal{A}, \mathcal{X}]$ es fiel y pleno, entonces $G \dashv FH$.

Demostración. Sea $\eta\colon 1_{\mathcal{A}} \to H(GF)$ la unidad de la adjunción. Para $F\eta\colon F \to (FHG)F \in [\mathcal{A},\mathcal{B}]$ existe, por hipótesis, un morfismo natural único $\eta'\colon 1_{\mathcal{B}} \to FHG$, tal que $\eta' F = F\eta$. Sea ϵ la counidad de la adjunción. De la igualdad triangular $(H\epsilon)\circ(\eta H) = 1_H$ se sigue la igualdad

$$(FH\epsilon)\circ(\eta' FH) = (FH\epsilon)\circ(F\eta H) = 1_{FH}$$

Y la igualdad $(\epsilon G)\circ(G\eta') = 1_G$ se sigue de

$$(\epsilon GF)\circ(G\eta' F) = (\epsilon GF)\circ(\eta GF) = 1_{GF}$$

Estas dos identidades demuestran que η' y ϵ son la unidad y counidad de la adjunción $G \dashv FH$. □

Definición 3.3. Un funtor $L\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ se llama *Bousfield localización* (o simplemente localización) si existe un morfismo $\psi\colon Id_{\mathcal{C}} \to L$ llamado *adjunción* tal que $L\psi$ es invertible y $L\psi = \psi L$. Solo se requiere la existencia de ψ; el morfismo realmente no es parte de la definición de L. No obstante denotamos a lo localización junto con su adjunción (L,ψ).

Observación 3.4. La adjunción ψ está determinado por L, hasta isomorfismo único, lema 3.10.

Proposición 3.5. *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *Existe un funtor de localización $(L,\psi)\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$.*
2. *Hay un par de funtores $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{B}$, $G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ adjuntos $F \dashv G$ tal que G es fiel y pleno.*

Además $\mathcal{B} \simeq \mathcal{C}_L \doteq \{a \in \mathcal{C} \mid \psi_a\colon a \xrightarrow{\sim} La\}$ y existe una equivalencia única $\mathcal{C}[\mathcal{W}_L^{-1}] \to \mathcal{C}_L$ haciendo que el siguiente diagrama sea conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r] \arrow[dr, "F"'] & \mathcal{C}[\mathcal{W}_L^{-1}] \arrow[r] \arrow[d, "\sim"] & \mathcal{C} \\
& \mathcal{C}_L \arrow[ur, "G"'] &
\end{tikzcd}$$

Demostración. Sea $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}_L$ dado por L y $G\colon \mathcal{C}_L \to \mathcal{C}$ la inclusión. Se afirma $F \dashv G$, ya que ψ es la unidad y $\epsilon\colon FG \to 1$, $b \mapsto \psi_b^{-1}$ es la counidad:

$$\begin{aligned}
a \in \mathcal{C} \qquad & (\epsilon F \circ F\psi)_a = \epsilon_{Fa} \circ F\psi_a = \psi_{Fa}^{-1} \circ \psi_{Fa} = 1_{Fa} \\
b \in \mathcal{C}_L \qquad & (G\epsilon \circ \psi G)_b = G\psi_b^{-1} \circ \psi_{Gb} = \psi_{Gb}^{-1} \circ \psi_{Gb} = 1_{Gb}
\end{aligned}$$

Por el contrario, sea $F \dashv G$ con unidad ψ y counidad ϵ. Se afirma que (GF,ψ) es una localización. Para esto se aplica que ϵ es invertible (pues G es fiel y pleno). De las identidades triangulares

$$F \xrightarrow{F\psi} FGF \xrightarrow{\epsilon F} F \quad \text{y} \quad G \xrightarrow{\psi G} GFG \xrightarrow{G\epsilon} G$$

se tiene

$$GF\psi = G(\epsilon F)^{-1} = (G\epsilon F)^{-1} = (G\epsilon)^{-1}F = \psi GF.$$

La última afirmación es por que $\mathcal{W}_L$ es igual al conjunto de morfismos $\mathcal{W}_F$ ya que G es totalmente fiel y aplicamos la proposición 3.1. □

Proposición 3.6. *Sea $L\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ una localización. El conjunto de morfismos $\mathcal{W}_L$ admite un cálculo de fracciones izquierdas.*

Demostración. (F1): esta condición es clara porque L es un funtor.
(F2): Sea $c \xleftarrow{w} a \xrightarrow{f} b$ con $w \in \mathcal{W}_L$. Esto puede ser completado a un cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "w"'] & b \arrow[d, "\psi_b \in \mathcal{W}_L"] \\ c \arrow[r, dashed, "f^*"] & Lb \end{tikzcd}$$

lo que es posible porque $\mathcal{C}(c, Lb) \xrightarrow{w} \mathcal{C}(a, Lb)$ es sobreyectiva ($Lb \in \mathcal{C}_L$).
(F3): Sean $f, g\colon a \to b \in \mathcal{C}$. Supongamos que hay un morfismo $w\colon c \to a \in \mathcal{W}_L$ tal que $fw = gw$ (y entonces $\psi_b fw = \psi_b gw$).De la inyectividad de $\mathcal{C}(a, Lb) \to \mathcal{C}(c, Lb)$ se sigue $\psi_b f = \psi_b g$. ☐

Observación 3.7. Sea $\mathcal{B} \in \mathcal{C}$ una subcategoría plena. Existe un funtor tal que la composición $\mathcal{C} \dashrightarrow \mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{C}$ es una localización si y solo si $\mathcal{B}$ es una subcategoría reflejante de $\mathcal{C}$. Descrito en términos del morfismo universal, una subcategorías $\mathcal{B}$ es reflejante si:

$$\forall a \in \mathcal{C} \quad \exists a \to a',\ a' \in \mathcal{B} \quad \text{t.q} \quad \mathcal{C}(a', b) \longrightarrow \mathcal{C}(a, b) \quad \text{es biyectiva} \quad \forall b \in \mathcal{B}$$

Definición 3.8. Un objeto $a \in \mathcal{C}$ se llama $\mathcal{W}$-*local*, si para cada morfismo $w\colon b \to c \in \mathcal{W}$ el morfismo inducido $\mathcal{C}(c, a) \to \mathcal{C}(b, a)$ es biyectivo. A un morfismo $a \to b \in \mathcal{W}$ con b $\mathcal{W}$-local le llamamos $\mathcal{W}$-*localización* de a. Dado un funtor F diremos que un objeto es F-*local* si es $\mathcal{W}_F$-local.

Lema 3.9. *Sea $(L, \psi)\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ una localización. Para $a \in \mathcal{C}$ se tiene*

$$a \text{ es } L\text{-local} \quad \Leftrightarrow \quad a \in \mathcal{C}_L \quad \Leftrightarrow \quad a \in \operatorname{im} L$$

Además, a es L-local $\Leftrightarrow$ es local respecto a $\{\psi_c\}_{c \in \mathcal{C}}$.

Demostración. Sea $a \in \operatorname{im} L$. Entonces existe a' tal que $a \simeq La'$. Consideramos el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(c, a) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "w"] & \mathcal{C}(c, La') \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "w"] & \mathcal{C}(Fc, Fa') \arrow[d, "Fw"] \\ \mathcal{C}(b, a) \arrow[r, "\sim"] & \mathcal{C}(b, La') \arrow[r, "\sim"] & \mathcal{C}(Fb, Fa') \end{tikzcd}$$

donde $w\colon b \to c \in \mathcal{C}$. Se deduce que w es invertible, siempre que Fw es invertible, y entonces siempre que Lw sea invertible. Esto demuestra que a es L-local.

Sea a es L-local. Entonces ψ_a induce una biyección $\mathcal{C}(La, a) \to \mathcal{C}(a, a)$, de donde obtenemos un morfismo $g\colon La \to a$ que es inverso izquierdo de ψ_a. Además

$$\psi_a \circ g = Lg \circ \psi_{La} = Lg \circ L\psi_a = L(g \circ \psi_a) = 1.$$

Lo que demuestra que $a \in \mathcal{C}_L$.

Sea $a \in \mathcal{C}_L$. Es inmediato que $a \in \operatorname{im} L$ pues $\psi\colon a \to La$ es un isomorfismo. ☐

En general denotamos por $\mathcal{C}_{\mathcal{W}}$ a la subcategoría plena de objetos $\mathcal{W}$-locales y $\mathcal{C}^{\mathcal{W}}$ la subcategoría plena de objetos en $\mathcal{C}$ que admiten una $\mathcal{W}$-localización.

Lema 3.10. *Sean $f_i \colon a \to b_i$, $i = 1, 2$ localizaciones de a. Entonces existe un isomorfismo único $g \colon b_1 \to b_2$ tal que $f_2 = g \circ f_1$.*

Demostración. El morfismo f_1 induce una biyección $\mathcal{C}(b_1, b_2) \to \mathcal{C}(a, b_2)$ y tomamos por g el morfismo único que se envía a f_2. Intercambiando los roles de f_1 y f_2, obtenemos el inverso de g. □

Observación 3.11. El lema anterior afirma que si existe una $\mathcal{W}$-localización para a, entonces es única hasta un isomorfismo único. Esto significa que si elegimos una $\mathcal{W}$-localización para cada objeto de $\mathcal{C}^{\mathcal{W}}$, obtenemos únicamente un funtor $\mathcal{C}^{\mathcal{W}} \to \mathcal{C}_{\mathcal{W}}$.

Observación 3.12. Si $\mathcal{W}$ es cerrado débilmente se tienen

1. Dados f, g localizaciones de a y $h \in \mathcal{W}$, tal que $fh = gh$, entonces $f = g$: por el lema 3.10 existe un isomorfismo ξ tal que $g = \xi f$, este isomorfismo también cumple $gh = \xi f h$ y como sabemos $fh = gh$, la unicidad obliga a $\xi = 1$.

2. Todo morfismo $w \in \mathcal{W}$ tal que $w \in \mathcal{C}_{\mathcal{W}}$, es un isomorfismo: se deduce del diagrama

$$\begin{tikzcd} & a \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "1"] & \\ b \arrow[rr, dashed, "\sim"] & & a \end{tikzcd}$$

Proposición 3.13. *Sea $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{\mathcal{W}}$ y $\mathcal{W}$ es cerrado débilmente. La composición $\mathcal{C} \to \mathcal{C}_{\mathcal{W}} \hookrightarrow \mathcal{C}$ que denotamos por L es una localización de Bousfield en $\mathcal{C}$ y la clase de L-equivalencias es precisamente $\mathcal{W}$.*

Demostración. Las $\mathcal{W}$-localizaciones que elegimos para los objetos en $\mathcal{C}$ forman un morfismo natural $\psi \colon 1 \to L$, lo cual es fácil de confirmar. Igual es claro que $L\psi$ es un isomorfismo. solo es necesario demostrar que $L\psi = \psi L$. Para cada $a \in \mathcal{C}$ se tiene $L\psi_a \circ \psi_a = \psi_{La} \circ \psi_a$ (esta igualdad es justamente la definición de $\mathcal{C} \to \mathcal{C}_{\mathcal{W}}$ o equivalentemente la naturalidad de ψ) y dado que $L^2 a \in \mathcal{C}_{\mathcal{W}}$, a razón de la observación 3.12 (1) $L\psi_a = \psi_{La}$.

Sea $\mathcal{C} \to \mathcal{C}_{\mathcal{W}}, \quad w \mapsto Lw$:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "\psi_a"] \arrow[d, "w"] & La \arrow[d, "Lw"] \\ b \arrow[r, "\psi_b"'] & Lb \end{tikzcd}$$

Si Lw es un isomorfismo, entonces $Lw \in \mathcal{W}$ y por consecuencia $\psi_b w \in \mathcal{W}$ lo que implica $w \in \mathcal{W}$. Por el contrario, si $w \in \mathcal{W}$ se tiene $\psi_b w \in \mathcal{W}$, entonces $\psi_b w \in \mathcal{C}^{\mathcal{W}}$, por lo tanto Lw es un isomorfismo. □

Lema 3.14. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $\mathcal{W}$ un conjunto de morfismos que admiten cálculo de fracciones izquierdas. Entonces los siguientes son equivalentes*

1. $b \in \mathcal{C}_{\mathcal{W}}$.

2. El funtor cociente induce una biyección $\mathcal{C}(a, b) \to \mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}(a, b)$ para todo a.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2): Sea $w^{-1}f \in \mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}(a,b)$. Entonces existe r con $r \circ w = 1$ ya que b es local. Se tiene $rf \mapsto w^{-1}f$:

$$\begin{tikzcd}
& \bullet \arrow[d, "r"] & \\
a \arrow[ur, "f"] \arrow[r] & b & b \arrow[ul, "w"'] \arrow[l, "1"']
\end{tikzcd}$$

lo que muestra la suprayectividad. Ahora sean $f, g \in \mathcal{C}(a,b)$, tal que $f = g \in \mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}(a,b)$:

$$\begin{tikzcd}
& b \arrow[d, "f'"] & \\
a \arrow[ur, "f"] \arrow[r] \arrow[dr, "g"'] & \bullet & b \arrow[ul, "1"'] \arrow[l, "w"'] \arrow[dl, "1"] \\
& b \arrow[u, "g'"'] &
\end{tikzcd}$$

Del diagrama se sigue $f' = g' = w$ y $wf = wg$. Como se sabe w tiene inverso izquierdo cuando b es local y por lo tanto $f = g$. Que muestra la inyectividad.
(2) $\Rightarrow$ (1): Sea $w \in \mathcal{W}$. El siguiente diagrama demuestra la implicación

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(\bullet, b) \arrow[r, "w"'] \arrow[d, "\sim"] & \mathcal{C}(\bullet, b) \arrow[d, "\sim"] \\
\mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}(\bullet, b) \arrow[r, "\sim", "w"'] & \mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}(\bullet, b)
\end{tikzcd}$$

$\square$

Proposición 3.15. *Sea $\mathcal{W} \subset \mathcal{C}$ un conjunto de morfismos que admiten un cálculo de fracciones izquierdas. Los siguientes son equivalentes.*

1. *El funtor cociente Q tiene adjunto derecho (que es fiel y pleno).*

2. *Para cada $a \in \mathcal{C}$, existe un morfismo $\psi_a \colon a \to a'$ con $a' \in \mathcal{C}_{\mathcal{W}}$ y $Q(\psi_a)$ es invertible.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$(2): Es inmediata, pues la hipótesis alude a una localización que denotamos (L, ψ), y el resto es consecuencia inmediata.

(2) $\Rightarrow$ (1): Fijamos los objetos a y b. Entonces tenemos dos biyecciones naturales

$$\mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}(a,b) \xrightarrow{\sim} \mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}(a,b') \xleftarrow{\sim} \mathcal{C}(a,b').$$

El primer morfismo es inducido por $Q(\psi_b)$ que es invertible. El segundo morfismo es biyectivo por lema 3.14, ya que $b' \in \mathcal{C}_{\mathcal{W}}$. Por lo tanto, obtenemos un adjunto derecho para Q enviando cada objeto $b \in \mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}$ a b'. $\square$

Proposición 3.16. *Sea, $\mathcal{C}$ una categoría con coproductos y $L \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ un funtor de localización. Los siguientes son equivalentes.*

1. *El funtor L conserva coproductos.*

2. La subcategoría $\mathcal{C}_L$ es estables en coproductos de $\mathcal{C}$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2): Sea $(a_i)_i$ una familia de objetos L-locales. Por lo tanto, los morfismos naturales ψ_{a_i} son invertibles y se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & a_i \arrow[r, "\psi_{a_i}", "\sim"'] \arrow[d] \arrow[dl, bend right] & La_i \arrow[d] \arrow[dr, bend left] & \\
 & \amalg a_i \arrow[r, "\amalg\psi_{a_i}", "\sim"'] \arrow[dl, "1"] & \amalg La_i \arrow[dr, "\sim"] & \\
\amalg a_i \arrow[rrr, "\psi_{\amalg a_i}"] & & & L(\amalg a_i)
\end{tikzcd}$$

de donde se deduce que $\amalg a_i$ es L-local.
(2) $\Rightarrow$ (1): L es la composición $\mathcal{C} \to \mathcal{C}_L \to \mathcal{C}$. El primer funtor conserva coproductos ya que es un adjunto izquierdo. De ello se deduce que L conserva coproductos si el segundo funtor conserva coproductos. $\square$

Proposición 3.17. *Sean $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ una subcategoría plena y $\mathcal{W} \subset \mathcal{C}$ un conjunto de morfismos que admiten un cálculo de fracciones. Si para cada morfismo $w\colon b \to c \in \mathcal{W}$ con $b \in \mathcal{B}$ hay un morfismo h tal que $hw \in \mathcal{W} \cap \mathcal{B}$, entonces $\mathcal{W} \cap \mathcal{B}$ admite cálculo de fracciones y el funtor inducido $(\mathcal{W} \cap \mathcal{B})^{-1}\mathcal{B} \to \mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}$ es fiel y pleno.*

Demostración. Es sencillo verificar (F1) - (F3) para $\mathcal{W} \cap \mathcal{B}$. Se necesita mostrar que

$$(\mathcal{W} \cap \mathcal{B})^{-1}\mathcal{B}(a,b) \longrightarrow \mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}(a,b)$$

es biyectivo para cada $a, b \in \mathcal{B}$. Este morfismo envía una fracción a la misma fracción. Si $w^{-1}f \in \mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}(a,b)$ y h es un morfismo con $hw \in \mathcal{W} \cap \mathcal{B}$, entonces $(hw)^{-1}hf \in (\mathcal{W} \cap \mathcal{B})^{-1}\mathcal{B}(a,b)$ se envía claramente a $w^{-1}f$. Lo que muestra que es suprayectiva. Un argumento similar muestra que f es inyectiva. $\square$

Referencias

[GZ67] P. Gabriel y M. Zisman. *Calculus of fractions and homotopy theory.* Ed. por Springer Verlag. 1967.

[Ara] Nerses Aramian. *Bousfield Localization.* URL: `https://faculty.math.illinois.edu/~aramyan2/bousfield.pdf`.

[Kra] Henning Krause. *Localizacion for Triangulated Categories.* URL: `https://www.recercat.cat/bitstream/handle/2072/13070/Pr813.pdf?sequence=1`.

[pro] The Stacks project. URL: `https://stacks.math.columbia.edu`.