Localización en Categorías Trianguladas

Jaime Gabriel Melgar Castañeda

Noviembre 2019

Resumen

Estas notas comienzan con una introducción a las categorías trianguladas y vemos sus propiedades. Después introducimos la noción de sistema multiplicativo para definir el cociente de Verdier.

Explicamos la localización en el sentido de Verdier y Bousfield. Luego pasamos a categoría trianguladas compactas y bien generadas donde la representablidad de Brown es indispensable para construir funtores de localización. El objetivo es estudiar la teoría de localización en categorías trianguladas. Esto se aborda de dos maneras: con la localización de Verdier y la localización de Bousfield. Mostramos que ambos enfoques están estrechamente relacionados entre sí.

Índice

1. Introducción

Las categorías trianguladas son un marco conveniente para la homología y la cohomología, no solo en topología, sino en todas las ramas de las matemáticas que usan funtores que tienen sucesiones largas y exactas. De hecho, cualquier teoría de (co)homología debe tener una categoría triangulada como estructura subyacente, que luego puede ser analizada por las sucesiones exactas largas. La triangulación es la estructura categórica que realiza un seguimiento de las propiedades de exactitud de la teoría. En consecuencia, surgen categorías trianguladas en muchos campos de las matemáticas.

Este trabajo constituyen una exposición elemental de la teoría básica de las categoíıas trianguladas, comenzando con la definición de categoría triangulada y una discusión detallada de los axiomas. Las secciones posteriores proporcionan detalles sobre álgebra homológica en categorías trianguladas y una descripción general de la localización de Verdier y de Busfield. Las fuentes de consulta para desarrollar estas notas son: Des categories derivees des categories abeliennes [Ver96], Localizacion for Triangulated Categories [Kra], Triangulated categories [Nee01] y Homotopy limits in triangulated categories [Nee93].

Estas notas están destinadas a lectores con cierta comprensión básica de la teoría de categorías particularmente en categorías aditivas y en categorías localizadas, la cual adjunto un trabajo sobre esta ultima[Mel19]

2. Categorías aditivas

Sea $\mathcal{A}$ una categoría preaditiva y $A, B \in \mathcal{A}$. Recordemos que el producto $A \times B$ existe si y solo si el coproducto $A \amalg B$ existe, y que estos son isomorfos. Denotamos al producto y coproducto por $A \oplus B$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "1_A"] \arrow[dr, "i"] & & A \\
& A \oplus B \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "q"] & \\
B \arrow[ur, "j"] \arrow[rr, "1_B"] & & B
\end{tikzcd}$$

La suma directa $A \oplus B$, esta dotada de los morfismos i, j, p, q, que están determinados de forma únicamente por la conmutatividad del diagrama ($pi = 1_A$, $qj = 1_B$) y por $pj = 0$, $qi = 0$. Automáticamente se tiene $ip + jq = 1_{A \oplus B}$. Similarmente, dado i, j, los morfismos p y q están determinados de manera única. Finalmente, estos morfismos también determinan a $A \oplus B$, es decir, dados morfismos $i \colon A \to C$, $j \colon B \to C$, $p \colon C \to A$ y $q \colon C \to B$ tal que $pi = 1_A$, $qj = 1_B$, $pj = 0$, $qi = 0$ e $ip + jq = 1_C$, entonces C es la suma directa de A y B con los correspondientes morfismos i, j, p, q. En ocasiones denotamos una suma directa por $(A \oplus B, i, j, p, q)$ y llamamos a los morfismos i, j, p, q testigos de la escición en suma directa.

Si $(A \oplus B, i, j, p, q)$ es una suma directa en $\mathcal{A}$, entonces i es un núcleo de q, y dualmente, p es un conúcleo para j.

Lema 2.1. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría preaditiva. Los siguientes son equivalentes*

1. *Cada idempotente de un objeto de $\mathcal{A}$ tiene un núcleo.*

2. Cada idempotente de un objeto de $\mathcal{A}$ tiene un conúcleo.

3. Dado un idempotente $e\colon C \to C$ de $\mathcal{A}$ existe una descomposición de suma directa $C = A \oplus B$ tal que e corresponde a la proyección sobre B.

Demostración. Supongamos (1) y demostramos (3). Como $(1-e)e = 0$ vemos que e factoriza a través de $\ker(1-e)$ y se obtenemos un morfismo $C \to \ker(1-e)$. Del mismo modo obtenemos un morfismo $C \to \ker\, e$. Se ha construido un análisis de e:

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[rr, "e"] \arrow[dr, dashed, "q"'] & & C \arrow[dr, dashed, "p"] & \\
\ker\, e \arrow[ur, "i"] & & \ker(1-e) \arrow[ur, "j"'] & & \ker\, e
\end{tikzcd}$$

además $\ker(1-e) = \operatorname{im} e$. La verificación de que estos cuatro morfismos inducen un isomorfismo $C = \ker\, e \oplus \ker(1-e)$, es clara. Así (1) $\Rightarrow$ (3). La implicación (2) $\Rightarrow$ (3) es dual. Finalmente, la condición (3) implica (1) y (2) es clara. □

Definición 2.2. Decimos que una categoría preaditiva es *Karoubiana*, si satisface cualquiera de las equivalencias anteriores.

Observación 2.3. Expresar A como un retracto de C, es dar morfismos s, r resp. una *sección* y una *retracción*, es decir $rs = 1$, como se muestra en el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "s"] \arrow[rr, bend left, "1"] & C \arrow[r, "r"] \arrow[rr, bend right, "sr"'] & A \arrow[r, "s"] & C
\end{tikzcd}$$

El retracto A es tanto el núcleo como el conúcleo de $1 - sr$; y el idempotente sr da lugar a una escisión de C si r admite un núcleo k. Es decir, (C, s, k, r, t) es una suma directa

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "s"] & C \arrow[rr, "1-sr"] \arrow[dr, dashed, "t"'] & & C \arrow[r, "r"] & A \\
 & & B \arrow[ur, "k"'] & &
\end{tikzcd}$$

Es fácil observar que $B = \operatorname{im}(1 - sr)$.

Decimos que un idempotente e se escinde, si se puede factorizar $e = sr$, donde r es una retracción y s una sección, es decir, e se escinde si su retractación es testigo de su idempotencia.

Lema 2.4. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría preaditiva. Se tiene lo siguiente*

1. Si $\mathcal{A}$ tiene productos numerables y toda retracción admite núcleo, entonces es Karoubiana.

2. Si $\mathcal{A}$ tiene coproductos numerables y toda sección admite núcleo, entonces es Karoubiana.

Demostración. Sea $e\colon A \to A \in \mathcal{A}$ un idempotente. El funtor

$$B \longmapsto \ker(\mathcal{A}(B, A) \xrightarrow{e} \mathcal{A}(B, A))$$

es representable si y solo si e tiene un núcleo. Tenga en cuenta que para cualquier grupo abeliano $\underline{A}$ y endomorfismo idempotente $e\colon \underline{A} \to \underline{A}$ tenemos

$$\ker(\underline{A} \xrightarrow{e} \underline{A}) = \ker(\prod_{n\in\mathbf{N}} \underline{A} \xrightarrow{\Phi} \prod_{n\in\mathbf{N}} \underline{A})$$

dónde

$$\Phi(a_1, a_2, a_3, \ldots) = (ea_1 + (1-e)a_2, ea_2 + (1-e)a_3, \ldots)$$

Además, Φ tiene el inverso derecho

$$\Psi(a_1, a_2, a_3, \ldots) = (a_1, (1-e)a_1 + ea_2, (1-e)a_2 + ea_3, \ldots).$$

Por lo tanto (1) se cumple. La prueba de (2) es dual . □

Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana. Una *subcategoría Serre* de $\mathcal{A}$ es una subcategoría plena $\mathcal{B}$ (no vacía), tal que dada una sucesión exacta $A \to B \to C$ con $A, C \in \mathcal{B}$, entonces $B \in \mathcal{B}$. Esto es equivalente a que se cumplan las siguientes condiciones:

- $\mathcal{B}$ es una subcategoría estrictamente plena.
- Cualquier subobjeto o cociente de un objeto de $\mathcal{B}$ es un objeto de $\mathcal{B}$.
- Si $A \in \mathcal{A}$ es una extensión de objetos de $\mathcal{B}$ entonces $A \in \mathcal{B}$.

Una subcategoría Serre es una categoría abeliana y el funtor de inclusión es exacto.

Dado un funtor exacto $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{C}$, el núcleo $\ker F$, que es la subcategoría plena tal que $A \in \ker F$ si y solo si $F(A) = 0$), forma una subcategoría Serre de $\mathcal{A}$. Y cualquier subcategoría Serre $\mathcal{B}$ de una categoría abeliana $\mathcal{A}$, es el núcleo de un funtor exacto. Es decir, existe una categoría abeliana $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ (llamada *categoría cociente de Serre*) y un funtor exacto $\mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{B}$ esencialmente suprayectivo, cuyo núcleo es $\mathcal{B}$. La categoría cociente de Serre $\mathcal{A}/\mathcal{B}$, es justamente la localización por el sistema multiplicativo

$$\{f \in \mathcal{A} \mid \ker f, \operatorname{coker} f \in \mathcal{B}\}.$$

Una *subcategoría de Serre débil* de $\mathcal{A}$, es una subcategoría plena $\mathcal{B}$ no vacía, tal que dada una secuencia exacta $A_0 \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to A_4$, con $A_0, A_1, A_3, A_4 \in \mathcal{B}$, entonces $A_2 \in \mathcal{B}$. Esto es equivalente a que se cumplan las siguientes condiciones:

- $\mathcal{B}$ es una subcategoría estrictamente plena.
- Núcleos y conúcleos en $\mathcal{A}$ de morfismos de $\mathcal{B}$ están en $\mathcal{B}$.
- Si $A \in \mathcal{A}$ es una extensión de objetos de $\mathcal{B}$ entonces también $A \in \mathcal{B}$.

3. Categorías trianguladas

Sea $\mathcal{D}$ una categoría aditiva. Definimos lo que es un *desplazamiento* o *traslación* como funtores aditivos $[n]\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D} : X \mapsto X[n]$, indexados por $n \in \mathbf{Z}$, tales que $[n] \circ [m] = [n+m]$ y $[0] = id$. Un *triángulo* es una sucesión de morfismos $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$ en $\mathcal{D}$, que denotamos por (X, Y, Z, f, g, h) o simplemente (X, Y, Z). Un morfismo de triángulos $(X, Y, Z, f, g, h) \to (X', Y', Z', f', g', h')$ es dado por morfismos $X \xrightarrow{a} X', Y \xrightarrow{b} Y', Z \xrightarrow{c} Z' \in \mathcal{D}$ que cumplen $bf = f'a$, $cg = g'b$ y $a[1]h = h'c$.

Damos la definición de una categoría triangulada tal como se da en la tesis de Verdier.

Definición 3.1. Una categoría *triangulada* consiste en un triple $(\mathcal{D}, [\,], \triangle_{\mathcal{D}})$ donde $\mathcal{D}$ es una categoría aditiva, $[\,]$ una traslación y $\triangle_{\mathcal{D}}$ un conjunto de triángulos llamados *triángulos distinguidos*, sujeto a las siguientes condiciones:

T1. a. Cualquier triángulo isomorfo a un triángulo distinguido es un triángulo distinguido.
   b. $(X, X, 0, 1, 0, 0) \in \triangle_{\mathcal{D}}$ para todo $X \in \mathcal{D}$.
   c. Para toda $f\colon X \to Y \in \mathcal{D}$ existe $(X, Y, Z, f, g, h) \in \triangle_{\mathcal{D}}$.

T2. $(X, Y, Z, f, g, h) \in \triangle_{\mathcal{D}}$ si y solo si $(Y, Z, X[1], g, h, -f[1]) \in \triangle_{\mathcal{D}}$.

T3. Dado un diagrama sólido conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, dashed, "c"] & X[1] \arrow[d, "a[1]"] \\
X' \arrow[r, "f'"] & Y' \arrow[r, "g'"] & Z' \arrow[r, "h'"] & X'[1]
\end{tikzcd}$$

entre triángulos distinguidos, existe un morfismo c tal que (a, b, c) es un morfismo de triángulos.

T4. (Axioma octaédrico) Dados tres triángulos distinguidos

$$(X, Y, Y/X, f, p, d), \quad (Y, Z, Z/Y, g, q, d'), \quad (X, Z, Z/X, g \circ f, r, d'')$$

existe un cuarto triángulo distinguido

$$(Y/X, Z/X, Z/Y, g^*, f^*, p[1] \circ d')$$

tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "g\circ f"] \arrow[dr, "f"] & & Z \arrow[rr, "q"] \arrow[dr, "r"] & & Z/Y \arrow[rr] \arrow[dr, "d'"] & & Y/X[1] \\
& Y \arrow[ur, "g"] \arrow[dr, "p"] & & Z/X \arrow[ur, "f^*"] \arrow[dr, "d''"] & & Y[1] \arrow[ur, "p[1]"] & \\
& & Y/X \arrow[ur, "g^*"] \arrow[rr, "d"] & & X[1] \arrow[ur, "f[1]"] & &
\end{tikzcd}$$

Denotamos por $(\mathcal{D}, \triangle_{\mathcal{D}})$ a una categoría triangulada, pues consta de una categoría aditiva con una estructura triangular $\triangle_{\mathcal{D}}$; en la estructura triangula va implícito al funtor traslación $[\,]$. En general simplemente decimos que $\mathcal{D}$ es la categoría triangulada. En el transcurso de este trabajo siempre $\mathcal{D}$ denotara una categoría triangulada.

Observación 3.2. El triángulo distinguido (X, Y, Z, f, g, h) asociado a f, es único salvo isomorfismo de triángulos. Precisamente, si $(X, Y, Z', f, g', h') \in \triangle_{\mathcal{D}}$, entonces

$$(1, 1, c)\colon (X, Y, Z, f, g, h) \longrightarrow (X, Y, Z', f, g', h'),$$

es un isomorfismo, como consecuencia del lema 4.5. Por esta unicidad denotamos a Z en ocasiones por Y/X o C_f y le llamamos *cono de* f.

Observación 3.3. Hay una biyección

$$\mathrm{Mor}\mathcal{D}/\sim \;\longleftrightarrow\; \triangle_{\mathcal{D}}/\sim$$

La equivalencia en Mor$\mathcal{D}$ es dada por $f \sim g$ si y solo si existen a, b isomorfismos tal que $f = agb$ y la relación en $\triangle_{\mathcal{D}}$ es dada por los isomorfismo de triángulos.

Observación 3.4. El axioma octaédrico (con menos información) implica el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
Y/X \arrow[dr, squiggly] \arrow[ddrr, bend right, "g^*"'] & & Y \arrow[ll] \arrow[dr, "g"] & & Z/Y \arrow[ll, squiggly] \arrow[llll, squiggly, bend right, "(gf)^*"'] \\
& X \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "gf"] & & Z \arrow[ur] \arrow[dl] & \\
& & Z/X \arrow[ul, squiggly] \arrow[uurr, bend right, "f^*"'] & &
\end{tikzcd}$$

donde $X \rightsquigarrow Y$ representa un morfismo $X \longrightarrow Y[1]$

Definición 3.5. Un funtor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ entre categorías trianguladas es *exacto* si existe un morfismo natural $\alpha\colon F \circ [1] \to [1] \circ F$ tal que F manda triángulos en triángulos:

$$(X, Y, Z, f, g, h) \in \triangle_{\mathcal{C}} \longmapsto (FX, FY, FZ, Ff, Fg, \alpha_X \circ Fh) \in \triangle_{\mathcal{D}}.$$

Un morfismo natural (exacto) $\eta\colon (F, \alpha) \to (F', \alpha')$ entre dos funtores exactos es morfismo natural entre los funtores $\eta\colon F \to F'$ que es compatible con α y α', es decir,

$$\begin{tikzcd}
F \circ [1] \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[d, "\eta\star 1"'] & {[1] \circ F} \arrow[d, "1\star\eta"] \\
F' \circ [1] \arrow[r, "\alpha'"] & {[1] \circ F'}
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Observación 3.6. Un funtor exacto entre categorías trianguladas es aditivo. Primero, aplicando F a $(0, 0, 0, 1, 1, 0) \in \triangle_{\mathcal{C}}$ (es distinguido lo que se observa en 4.10) y se tiene $(F0, F0, F0, 1, 1, F0) \in \triangle_{\mathcal{D}}$, por lo tanto $F0 = 0$ ya que $1 \circ 1 = 0$. Ahora, aplicamos F a $(X, X \oplus Z, Z) \in \triangle_{\mathcal{C}}$ (es distinguido, se observa en 4.10), esto implica que el mapa $F(1, 0) \oplus F(0, 1)\colon F(X) \oplus F(Y) \to F(X \oplus Y)$ es un isomorfismo, véase el proposición 4.6 (3).

Observación 3.7. El morfismo natural α en la definición de funtor exacto es un isomorfismo natural. Sea $X \in \mathcal{C}$ consideramos $(X, 0, Z, 0, 0, h) \in \triangle_{\mathcal{C}}$ y $(FX, 0, FZ, 0, 0, \alpha_X \circ Fh) \in \triangle_{\mathcal{D}}$. Del lema 4.5 se obtiene que $\alpha_X \circ Fh$ y h son isomorfismos, de donde concluye que α_X es isomorfismo.

Observación 3.8. Composición de funtores exactos da un funtor exacto.

Definición 3.9. Un funtor aditivo $H\colon \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ entre una categoría triangulada y abeliana, se llama *homológico*, si para cada $(X, Y, Z) \in \triangle_{\mathcal{D}}$ la sucesión $H(X) \to H(Y) \to H(Z)$ correspondiente es exacta. Un funtor aditivo $H\colon \mathcal{D}^{op} \to \mathcal{A}$ se llama *cohomológico* si el funtor correspondiente $\mathcal{D} \to \mathcal{A}^{op}$ es homológico. Usualmente escribimos $H^n(X) = H(X[n])$, $H(X) = H^0(X)$ y $H^n(f) = H(f[n])$.

Observación 3.10. Un funtor homológico relaciona triángulos distinguidos con sucesiones exactas en la categoría abeliana, es decir, cada $(X, Y, Z, f, g, h) \in \triangle_{\mathcal{D}}$ determina una sucesión exacta larga

$$H^{-1}(Z) \xrightarrow{H^{-1}h} H^0(X) \xrightarrow{Hf} H^0(Y) \xrightarrow{Hg} H^0(Z) \xrightarrow{Hh} H^1(X)$$

Definición 3.11. Sea $\mathcal{D}$ una categoría triangulada y $\mathcal{A}$ una categoría abeliana. Un δ-*funtor* de $\mathcal{A}$ a $\mathcal{D}$ es un funtor $G\colon \mathcal{A} \to \mathcal{D}$, que a cada sucesión exacta corta le asocia un triángulo distinguido

$$(A, B, C, f, g) \longmapsto (GA, GB, GC, Gf, Gg, \delta_{(A,B,C)}) \in \triangle_{\mathcal{D}},$$

y a cada morfismo de sucesiones exactas cortas le asocia un morfismo de triángulos. Es decir, dado un morfismo $(A, B, C) \to (A', B', C')$ se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
GC \arrow[r, "\delta_{(A,B,C)}"'] \arrow[d] & GA[1] \arrow[d] \\
GC' \arrow[r, "\delta_{(A',B',C')}"] & GA'[1]
\end{tikzcd}$$

4. Resultados elementales en categorías trianguladas

En esta sección $(\mathcal{D}, [\,], \triangle_{\mathcal{D}})$ será una categoría triangulada. El primer lema relaciona el concepto "fuerte" de núcleo y conúcleo débil con los triángulos distinguidos.

El axioma T3 se vera da la propiedades de las categorías trianguladas de exactitud de los triángulos. De echo de él surge la propiedad de núcleo y conúcleo débil (proposición 4.2).

La primer proposición demuestra que los axiomas T2 y T4 (octaédrico) implica el axioma T3.

Proposición 4.1. *Sea el siguiente diagrama sólido conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, dashed, "c"] & X[1] \\
X' \arrow[r, "f'"] & Y' \arrow[r, "g'"] & Z' \arrow[r, "h'"] & X'[1]
\end{tikzcd}$$

entre triángulos distinguidos. Entonces existe un morfismo c tal que (a, b, c) *es un morfismo de triángulos.*

Demostración. Consideremos primero dos casos, cuando $X = X'$ y cuando $Y = Y'$. En tales casos, se tiene respectivamente $f' = bf$ y $f = f'a$. Entonces el axioma octaédrico afirma para cada caso $((C_f, C_{f'}, C_b), (C_a, C_f, C_{f'}) \in \triangle_{\mathcal{D}})$, la existencia de los morfismos deseados.

El caso general se factoriza en estos dos casos:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, dashed] & X[1] \arrow[d, "1"] \\
X \arrow[r] \arrow[d, "a"] & Y' \arrow[r] \arrow[d, "1"] & \bullet \arrow[r] \arrow[d, dashed] & X[1] \arrow[d, "a[1]"] \\
X' \arrow[r, "f'"] & Y' \arrow[r, "g'"] & Z' \arrow[r, "h'"] & X'[1]
\end{tikzcd}$$

y c es la composición de estos dos morfismos, donde el triángulo distinguido en la fila de en medio se obtiene mediante T2. $\square$

Proposición 4.2. *En un triángulo distinguido $(X, Y, Y/X, f, g, h)$, el morfismos f es un* núcleo débil *de g y g un* conúcleo débil *de f. En detalle: se tiene $gf = 0$ y*

- *si $ga = 0$, entonces a factoriza a través de f*

$$\begin{tikzcd}
& \bullet \arrow[dl, dashed] \arrow[d, "a"] \arrow[dr, "0"] & & \\
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Y/X \arrow[r, "h"] & X[1]
\end{tikzcd}$$

- *si $bf = 0$, entonces b factoriza a través de g*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "0"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"] & X/Y \arrow[r, "h"] \arrow[dl, dashed] & X[1] \\
& \bullet & &
\end{tikzcd}$$

Demostración. El diagrama superior e inferior representan los morfismos de triángulos respectivamente

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "1"] \arrow[d, dashed] & \bullet \arrow[r] \arrow[d, "a"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "0"] & \bullet[1] \arrow[d, dashed] \\
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "0"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"] & X/Y \arrow[r, "h"] \arrow[d, dashed] & X[1] \arrow[d, "0"] \\
0 \arrow[r] & \bullet \arrow[r, "1"] & \bullet \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Así la propiedad de núcleo y conúcleo se deben al axioma T3. $\square$

Observación 4.3. Sea $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ en $\mathcal{D}$. Se tienen las siguientes afirmaciones

- Para todo $W \in \mathcal{D}$ la sucesión $\mathcal{D}(W, X) \to \mathcal{D}(W, Y) \to \mathcal{D}(W, Z)$ es exacta si y solo si $gf = 0$ y f es núcleo débil de g.
- Para todo $W \in \mathcal{D}$ la sucesión $\mathcal{D}(Z, W) \to \mathcal{D}(Y, W) \to \mathcal{D}(X, W)$ es exacta si y solo si $gf = 0$ y g es conúcleo débil de f.

Lema 4.4. *Para todo $W \in \mathcal{D}$ el funtor $\mathcal{D}(W, -)$ es homológico. De esto se sigue que los funtores representables son cohomológicos.*

Demostración. Sea $(X, Y, Z) \in \triangle_{\mathcal{D}}$. Debemos mostrar que $\mathcal{D}(W, X) \to \mathcal{D}(W, Y) \to \mathcal{D}(W, Z)$ es exacta. Esto se sigue de la observación 4.3 y el lema 4.2. $\square$

La observación 4.3 nos permite distinguir una clase especial de triángulos. Llamemos a un triángulo $(X, Y, Z) \in \mathcal{D}$ *especial* si para cada objeto $W \in \mathcal{D}$ la sucesión larga de grupos abelianos

$$\ldots \longrightarrow \mathcal{D}(W, X) \longrightarrow \mathcal{D}(W, Y) \longrightarrow \mathcal{D}(W, Z) \longrightarrow \mathcal{D}(W, X[1]) \longrightarrow \ldots$$

es exacta. Hay una definición dual de triángulos *coespeciales*, es decir, triángulos que se convierten en sucesiones largas y exactas al aplicar el funtor $\mathcal{D}(-, W)$. Los triángulos distinguidos son especiales y coespeciales.

Lema 4.5. *Sea $(a, b, c)\colon (X, Y, Z) \to (X', Y', Z')$ un morfismo entre triángulos especiales (similarmente para coespeciales). Si dos de los tres a, b, c son isomorfismos, también lo es el tercero.*

Demostración. Si dos entre a, b, c son isomorfismos, también los correspondientes morfismos

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & \mathcal{D}(W,X) \arrow[r] \arrow[d, "a"] & \mathcal{D}(W,Y) \arrow[r] \arrow[d, "b"] & \mathcal{D}(W,Z) \arrow[r] \arrow[d, "c"] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & \mathcal{D}(W,X') \arrow[r] & \mathcal{D}(W,Y') \arrow[r] & \mathcal{D}(W,Z') \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

en la sucesión exacta larga son isomorfismos. Del lema de los cincos, de deduce que el resto de los morfismos son isomorfismos. Por lo tanto, por el encaje de Yoned a que el tercer morfismo de (a, b, c) será un isomorfismo. ☐

Proposición 4.6. *Sea $(X, Y, Z, f, g, h) \in \triangle_{\mathcal{D}}$. Se tienen las siguientes afirmaciones:*

1. $gf = 0$, $hg = 0$, $f[1]h = 0$.
2. $Z = 0$ *si y solo si* f *es un isomorfismo.*
3. $h = 0$ *si y solo si* $Y = X \oplus Z$*. Además,* f *y* g *serán testigos de escisión en suma directa; es decir,* f *tiene inverso izquierdo si y solo si* g *tiene inverso derecho si y solo si* $h = 0$.

Demostración. El morfismo de triángulos distinguidos

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "1"'] \arrow[d, "1"] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & X[1] \arrow[d, "1[1]"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r, "h"] & X[1]
\end{tikzcd}$$

implica $gf = 0$ (y (1) se deduce por traslación de triángulos), y del lema 4.5 se concluye (2).
(3): De la sucesión exacta de grupos abelianos $\mathcal{D}(Z, Y) \xrightarrow{g} \mathcal{D}(Z, Z) \xrightarrow{h} \mathcal{D}(Z, X[1])$, es inmediato ver que $h = 0$ si y solo si g es una retracción: $h = 0 \Leftrightarrow \operatorname{im} g = \mathcal{D}(Z, Z) \Leftrightarrow \exists\, g'$ tal que $gg' = 1$. Para ver que la retracción g es testigo de la suma directa, es suficiente mostrar $f = \ker g$. Pero todo surge del hecho de que la sucesión exacta $\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{D}(W,X) \arrow[r, "f"] & \mathcal{D}(W,Y) \arrow[r, "g"] & \mathcal{D}(W,Z) \arrow[l, bend right, "g'"'] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$ se escinde. Del encaje de Yoneda concluimos que la sección g' define el isomorfismo

$$X \oplus Z \xrightarrow{\begin{pmatrix} f & g' \end{pmatrix}} Y.$$

La afirmación cuando f tiene inverso $f'f = 1$, es similar a lo demostrado arriba. Siguiendo la misma demostración, da lugar al isomorfismo

$$Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} f' \\ g \end{pmatrix}} X \oplus Z$$

$\square$

Observación 4.7. Si dado $(X, Y, Z, f, g, h) \in \triangle_{\mathcal{D}}$, se tiene $f'f = 1$ y respectivamente si $gg' = 1$, construimos los morfismos entre triángulos distinguidos $((X, X \oplus Z, Z) \in \triangle_{\mathcal{D}}$, observación 4.10)

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"'] \arrow[d, "1"] & Y \arrow[r, "g"'] \arrow[d, "\begin{pmatrix} f' \\ g \end{pmatrix}"'] & Z \arrow[d, "1"] \\
X \arrow[r] & X \oplus Z \arrow[r] & Z
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "1"] & X \oplus Z \arrow[r] \arrow[d, "\begin{pmatrix} f & g' \end{pmatrix}"'] & Z \arrow[d, "1"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z
\end{tikzcd}$$

Entonces los morfismos $\begin{pmatrix} f' \\ g \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} f & g' \end{pmatrix}$ son isomorfismos (lema 4.5).

También observamos que aplicando el axioma octaédrico a la composición $f'f = 1$ se tiene

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "1"] \arrow[dr, "f"] & & X \arrow[rr] \arrow[dr] & & X/Y \arrow[rr] \arrow[dr] & & Z[1] \\
& Y \arrow[ur, "f'"] \arrow[dr, "g"] & & 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & Y[1] \arrow[ur] & \\
& & Z \arrow[ur] \arrow[rr, "h"] & & X[1] \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

de donde se sigue que $h = 0$ (pues factoriza a través de 0). Similarmente se obtiene $h = 0$ considerando la composición $gg' = 1$.

Además se afirma que los isomorfismos

$$X \oplus Z \xrightarrow{\begin{pmatrix} f & g' \end{pmatrix}} Y, \qquad Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} f' \\ g \end{pmatrix}} X \oplus Z$$

coinciden (es decir, son inversos entre sí) si y solo si $f'g' = 0$. ES decir, hay que verificar sí

$$\begin{pmatrix} f' \\ g \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} f & g' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'f & f'g' \\ gf & gg' \end{pmatrix}$$

es la identidad. Se deduce el resultado, ya que $gf = 0$ (proposición 4.6) y por que $f'f = 1 = gg'$.

Lema 4.8. *Sea $f \colon X \to Y \in \mathcal{D}$. Los siguientes son equivalentes*

1. *f tiene núcleo.*
2. *f tiene conúcleo.*
3. *f es isomorfo a la composición $K \oplus X' \to X' \to X' \oplus W$ de una proyección y coproyección.*

Demostración. Observamos que si $X \xrightarrow{i} Y$ es un monomorfismo, entonces Y se escinde: elegimos $(X, Y, Z, i, g, h) \in \triangle_{\mathcal{D}}$, como $i \circ h[-1] = 0$ se tiene $h[-1] = 0$ y, entonces $h = 0$, por lo tanto $Y = X \oplus Z$.
$(3) \Rightarrow (1), (2)$, es claro. Pues el morfismo $K \oplus X' \to X' \oplus W$ tiene núcleo K y conúcleo W.
$(1) \Rightarrow (3)$. Como $\ker f \to X$, $\operatorname{im} f \to Y$ son monomorfismos, se concluye fácilmente que $X = \ker f \oplus \operatorname{coim} f$ y $Y = \operatorname{im} f \oplus \operatorname{coker} f$.
$(2) \Rightarrow (3)$ es dual. □

Lema 4.9. *Sean (X, Y, Z), (X', Y', Z') triángulos. Entonces $(X \oplus X', Y \oplus Y', Z \oplus Z') \in \triangle_{\mathcal{D}}$ si y solo si $(X, Y, Z), (X', Y', Z') \in \triangle_{\mathcal{D}}$.*

Demostración. Es inmediato que $(X \oplus X', Y \oplus Y', Z \oplus Z')$ es un triángulo especial si y solo si $(X, Y, Z), (X', Y', Z')$ son triángulos especiales:
$(\Rightarrow)$: Sea $(X, Y, \bullet) \in \triangle_{\mathcal{D}}$. Se tienen los siguientes morfismos de triángulos

$$(X, Y, Z) \longrightarrow (X \oplus X', Y \oplus Y', Z \oplus Z') \longrightarrow (X, Y, \bullet).$$

El primero morfismo es dado por las inclusiones y el segundo morfismo es dado por las proyecciones (y el axioma T3). Al componer estos morfismos, obtenemos un morfismo de triángulos especiales $(1, 1, c)$, y encontramos que c es un isomorfismo, lo que deduce $(X, Y, Z) \in \triangle_{\mathcal{D}}$ por T1.a.
$(\Leftarrow)$: Sea $(X \oplus X', Y \oplus Y', \bullet) \in \triangle_{\mathcal{D}}$. Por T3 podemos encontrar morfismos de triángulos distinguidos

$$(X, Y, Z) \longrightarrow (X \oplus X', Y \oplus Y', \bullet) \longleftarrow (X', Y', Z').$$

Tomando la suma directa de estos morfismos obtenemos un morfismo entre triángulos especiales

$$(1, 1, c)\colon (X \oplus X', Y \oplus Y', Z \oplus Z') \longrightarrow (X \oplus X', Y \oplus Y', \bullet).$$

Por lo tanto, concluimos que c es un isomorfismo, y entonces $(X \oplus X', Y \oplus Y', Z \oplus Z') \in \triangle_{\mathcal{D}}$. □

Observación 4.10. Para todo $X, Y \in \mathcal{D}$ siempre se tienen:

a. $X \longrightarrow X \oplus Y \longrightarrow Y \xrightarrow{0} X[1] \ \in \triangle_{\mathcal{D}}$,

b. $X \xrightarrow{0} Y \longrightarrow X[1] \oplus Y \longrightarrow X[1] \ \in \triangle_{\mathcal{D}}$,

pues son la suma resp. de los triángulos distinguidos

$$X \xrightarrow{1} X \longrightarrow 0 \longrightarrow X[1] \qquad 0 \longrightarrow Y \xrightarrow{-1} Y \longrightarrow 0$$

y

$$X \xrightarrow{1} 0 \longrightarrow x[1] \xrightarrow{1} X[1]\ , \qquad 0 \longrightarrow Y \xrightarrow{1} Y \longrightarrow 0$$

Lema 4.11. *Supongamos que $\mathcal{D}$ tiene productos, resp. coproductos, sobre algún conjunto de indices. Sean $(X_i, Y_i, Z_i) \in \triangle_{\mathcal{D}}$ indexados sobre esa familia. Entonces*

1. $\prod(X_i, Y_i, Z_i) = (\prod X_i, \prod Y_i, \prod Z_i) \in \triangle_{\mathcal{D}}$
2. $\bigoplus(X_i, Y_i, Z_i) = (\bigoplus X_i, \bigoplus Y_i, \bigoplus Z_i) \in \triangle_{\mathcal{D}}$

Demostración. Primero observamos

- $(\prod X_i)[n] = \prod(X_i[n])$ y $(\bigoplus X_i)[n] = \bigoplus(X_i[n]) \quad n \in \mathbf{Z}$. Pues $[n]$ son autoequivalencia de $\mathcal{D}$ y sumas y productos directos se definen en términos de la estructura de categorías.
- Los triángulos $(\prod X_i, \prod Y_i, \prod Z_i)$ y $(\bigoplus X_i, \bigoplus Y_i, \bigoplus Z_i)$ son especiales. Los productos y coproductos de sucesiones exactas de grupos abelianos son exactos.

(1): Sea $(\prod X_i, \prod Y_i, \bullet) \in \triangle_{\mathcal{D}}$. Para cada i elegimos un morfismo $\bullet \to Z_i$, que encaja con los morfismos de proyección en un morfismo de triángulos distinguidos

$$(\prod X_i, \prod Y_i, \bullet) \to (X_i, Y_i, Z_i)$$

Obtenemos un morfismo $c\colon \bullet \to \prod Z_i$ que se ajusta al morfismo de triángulos (especiales)

$$(1, 1, c)\colon (\prod X_i, \prod Y_i, \bullet) \to (\prod X_i, \prod Y_i, \prod Z_i)$$

Concluimos que es un isomorfismo de triángulos y por lo tanto (axioma T1) $(\prod X_i, \prod Y_i, \prod Z_i) \in \triangle_{\mathcal{D}}$
(2): es dual. □

Lema 4.12. *Si $\mathcal{D}$ tiene productos contables o tiene coproductos contables, entonces $\mathcal{D}$ es Karoubiana.*

Demostración. Ver definición de Karoubiana 2.2. Por Lema 2.4, es suficiente verificar que los morfismos que tienen un inverso derecho tienen núcleos. Cualquier morfismo que tenga un inverso derecho es un epimorfismo, por lo tanto, tiene un núcleo según el lema 4.8. La segunda afirmación es dual a la primera. □

Lema 4.13. *Sea $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ un funtor exacto. Si $F \dashv G$, entonces F es exacto. Además el morfismo natural $F[1] \to [1]F$, es dado por la composición*

$$F \circ [1] \xrightarrow{F\circ[1]\circ\eta} F \circ [1] \circ G \circ F \xrightarrow{F\circ\beta^{-1}\circ F} F \circ G \circ [1] \circ F \xrightarrow{\epsilon\circ[1]\circ F} [1] \circ F,$$

donde $\eta\colon 1 \to GF$, $\epsilon\colon FG \to 1$ (unidad y counidad) y $\beta\colon G[1] \to [1]G$.

Demostración. Sea $f\colon X \to Y \in \mathcal{C}$. Se tienen los triángulos $(X, Y, Z) \in \triangle_{\mathcal{C}}$, $(FX, FY, W) \in \triangle_{\mathcal{D}}$ (correspondientes a f y Ff) y el morfismo (por T3)

$$(\eta_X, \eta_Y, a)\colon (X, Y, Z) \longrightarrow (GFX, GFY, GW)$$

De este morfismo se construye el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
FX \arrow[r] \arrow[d, "F\eta_X"] & FY \arrow[r] \arrow[d, "F\eta_Y"] & FZ \arrow[rr] \arrow[d, "Fa"] & & F(X[1]) \arrow[d, "F(\eta_X[1])"] \\
FGFX \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_{FX}"] & FGFY \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_{FY}"] & FG(W) \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_W"] & FG((FX)[1]) \arrow[r, "F\beta_{FX}"] \arrow[d, "\epsilon_{(FX)[1]}"] & F(GFX[1]) \\
FX \arrow[r] & FY \arrow[r] & W \arrow[r] & (FX)[1] &
\end{tikzcd}$$

Dando lugar (por la igualdad triangular) al morfismo

$$(1, 1, \epsilon_W \circ Fa) \colon (FX, FY, FZ) \longrightarrow (FX, FY, W).$$

Este morfismo es un isomorfismo ya que el triangulo (FX, FY, FZ) es coespecial:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\dots & \longrightarrow & \mathcal{C}(Z, GW) & \longrightarrow & \mathcal{C}(Y, GW) & \longrightarrow & \mathcal{C}(X, GW) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \updownarrow{\sim} & & \updownarrow{\sim} & & \updownarrow{\sim} & & \\
\dots & \longrightarrow & \mathcal{D}(FZ, W) & \longrightarrow & \mathcal{D}(FY, W) & \longrightarrow & \mathcal{D}(FX, W) & \longrightarrow & \dots
\end{array}$$

Por último, la descripción del morfismo natural $F[1] \to [1]F$, se obtuvo (diagrama arriba) como:

$$X \longmapsto \epsilon_{(FX)[1]} \circ F\beta_{FX}^{-1} \circ F(\eta_X[1]).$$

Y coincide con el morfismo descrito en el lema. □

5. Cociente de Verdier

En esta sección $(\mathcal{D}, [\,], \triangle_\mathcal{D})$ será una categoría triangulada.

Una subcategoría aditiva $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ es una *subcategoría triangulada* de $\mathcal{D}$, si existe una estructura triangular $\triangle_\mathcal{C}$ de $\mathcal{C}$ tal que el funtor inclusión $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{D}$ es exacto, es decir, $\triangle_\mathcal{C} \subset \triangle_\mathcal{D}$ y el funtor $[\,]_\mathcal{C}$ de desplazamiento de $\mathcal{C}$ es la restricción de $[\,]$. La subcategoría $\mathcal{C}$ es *cerrada bajo traslaciones* si para todo $X \in \mathcal{C}$, $X[n] \in \mathcal{C}$, y *cerrada bajo conos* si para todo $f \in \mathcal{C}$, $C_f \in \mathcal{C}$ o es isomorfo a un objeto de $\mathcal{C}$.

Observación 5.1. Sea $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ una subcategoría aditiva. Entonces se tienen:

- $\mathcal{C}$ es subcategoría triangular si y solo si es cerrada bajo traslaciones y conos.
- Si además $\mathcal{C}$ es plena y cerrada bajo isomorfismos, entonces

$$\triangle_\mathcal{C} = \{(X, Y, Z) \in \triangle_\mathcal{D} \mid X, Y, Z \in \mathcal{C}\}.$$

Definición 5.2. Una *subcategoría saturada* $\mathcal{C}$, es una subcategoría triangulada cerrada bajo isomorfismos, tal que, cada vez que $X \oplus Y \in \mathcal{C}$ entonces $X, Y \in \mathcal{C}$. Dada una subcategoría $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ (o una clase de objetos o morfismos), la subcategoría saturada más pequeña que contiene a $\mathcal{C}$ la detonamos por $\langle \mathcal{C} \rangle$.

En la definición de saturada, cuando la subcategoría triangulada no es cerrada bajo isomorfismos, igualmente se le llama saturada si cada vez que $X \oplus Y$ es isomorfo a un objeto de $\mathcal{C}$, tanto X como Y son isomorfos a objetos de $\mathcal{C}$. Pero en este trabajo no contemplamos esta situación.

Dada una clase $\mathcal{E}$ de objetos o morfismos, está claro que existe $\langle \mathcal{E} \rangle$: es simplemente la intersección de todas las subcategorías saturadas que contienen a $\mathcal{E}$.

Lema 5.3. *Sea $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ una subcategoría triangulada y plena. Entonces $\langle \mathcal{C} \rangle$ es la subcategoría estrictamente plena dada por*

$$\langle \mathcal{C} \rangle = \{X \in \mathcal{D} \mid X \oplus X[1] \ \textit{es isomorfo a un objeto de } \mathcal{C}\}.$$

Demostración. Primero demostramos que $\langle \mathcal{C} \rangle$ es triangulada. Claramente $\langle \mathcal{C} \rangle$ es cerrada bajo traslación. Afirmamos que es cerrada bajo conos; suponemos que $X \xrightarrow{f} Y \in \langle \mathcal{C} \rangle$. Se tiene que

$$(X \oplus X[1], Y \oplus Y[1], C_f \oplus C_f[1]) \in \triangle_{\mathcal{D}},$$

con $X \oplus X[1]$ y $Y \oplus Y[1]$ isomorfos a objetos de $\mathcal{C}$. Por lo tanto $C_f \oplus C_f[1]$ también es isomorfo a un objeto de $\mathcal{C}$, pues $\mathcal{C}$ es cerrada bajo conos. Esto demuestra que $C_f \in \langle \mathcal{C} \rangle$.

Por último, comprobamos que es saturada. Sea $X \oplus Y \in \langle \mathcal{C} \rangle$. Se tiene que

$$(X \oplus Y \oplus X[1] \oplus Y[1], X \oplus Y \oplus X[1] \oplus Y[1], X \oplus X[1]) \in \triangle_{\mathcal{D}},$$

dado que esta definido por las sumas directas

$$(X, X, X \oplus X[1]) \oplus (Y, Y, 0) \oplus (X[1], X[1], 0) \oplus (Y[1], Y[1], 0),$$

de triángulos distinguidos (observe que $(X, X, X \oplus X[1])$ es el triangulo inducido por $X \xrightarrow{0} X$). Como $X \oplus Y \oplus X[1] \oplus Y[1]$ es isomorfo a un objeto de $\mathcal{C}$, nuevamente se deduce que $X \oplus X[1]$ es isomorfo a un objeto de $\mathcal{C}$. Esto demuestra que $X \in \langle \mathcal{C} \rangle$. $\square$

Lema 5.4. *Sea $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ una subcategoría triangulada. Las siguientes afirmaciones se tienen:*

1. *$\mathcal{C}$ es saturada si y solo si es cerrada bajo retractos.*
2. *Si $\mathcal{C}$ es saturada y $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ en $\mathcal{D}$ con $Y, Z/X \in \mathcal{C}$ ($Z/X = C_{gf}$), entonces $X, Z \in \mathcal{C}$.*

Demostración. (1.) $\Rightarrow$): Si X es un retracto de $Y \in \mathcal{C}$, es decir, se tiene un morfismo $X \to Y$ con inverso izquierdo, obtenemos un isomorfismo $Y \xrightarrow{\sim} X \oplus C_f$ (observación 4.7). Por lo tanto $X \in \mathcal{C}$.

(1.) $\Leftarrow$): Supongamos que $X \oplus Y \in \mathcal{C}$. Entonces $X \in \mathcal{C}$, pues es un retracto de $X \oplus Y$. Por último, los isomorfismo son retractos, por lo tanto una subcategoría cerrada bajo retractos es cerrada bajo isomorfismos.

(2.): Aplicando el axioma octaédrico obtenemos los diagramas

$$\begin{tikzcd}
& & Z/X \arrow[dr] & & \\
& Y/X \arrow[ur] \arrow[dl, squiggly] & & Z/Y \arrow[ll, squiggly] \arrow[dl, squiggly] & \\
X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul] \arrow[rr, "g"] & & Z \arrow[ul]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& & \bullet \arrow[dr] & & \\
& Z/X \arrow[ur] \arrow[dl, squiggly] & & Y[1] \arrow[ll, squiggly] \arrow[dl, squiggly] & \\
X \arrow[rr, "gf"] \arrow[rrrr, bend right, "0"'] & & Z \arrow[ul] \arrow[rr] & & Z/Y \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

En el diagrama derecho se tiene $(Z/X, \bullet, Y[1]) \in \triangle_{\mathcal{D}}$ y por lo tanto $\bullet \in \mathcal{C}$, ya que $Z/X, Y[1] \in \mathcal{C}$. También muestra que $\bullet$ es el cono de $X \xrightarrow{0} Z/Y$, por lo tanto contiene a X como sumando directo (4.10). De esto concluimos que $X \in \mathcal{C}$. Finalmente, $(X, Z, Z/X) \in \triangle_{\mathcal{D}}$ implica $Z \in \mathcal{C}$. $\square$

Lema 5.5. *Sea $F \colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ exacto y $H \colon \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ homológico. Sean $\ker F$ y $\ker H$ las subcategorías estrictamente plenas, definidas respectivamente por*

$$\{X \in \mathcal{D} \mid F(X) = 0\}, \quad \{X \in \mathcal{D} \mid H^n(X) = 0, \forall\, n \in \mathbf{Z}\}.$$

Estas subcategorías son trianguladas y saturadas.

Demostración. Es claro que la subcategorías $\ker F$ y $\ker H$ son cerradas bajo traslaciones y conos; la primer afirmación en el caso de F se deriva de $F(X[1]) = (FX)[1]$ y en el caso de H por que la definición así lo afirma. Por lo tanto, aplicando la observación 5.1 se tiene que son subcategorías trianguladas. La afirmación de ser saturado se deduce de $F(X) \oplus F(Y) = 0 \Rightarrow F(X) = F(Y) = 0$ y respectivamente

$$\begin{aligned} H((X \oplus Y)[n]) = 0 &\Rightarrow H(X[n] \oplus Y[n]) = 0 \\ &\Rightarrow H(X[n]) \oplus H(Y[n]) = 0 \\ &\Rightarrow H(X[n]) = H(Y[n]) = 0 \end{aligned}$$

para toda $n \in \mathbf{Z}$. □

Definición 5.6. Sea $\mathcal{W}$ un conjunto de morfismos con cálculo de fracciones izquierdo en $\mathcal{D}$. El sistema $\mathcal{W}$ es compatible con la estructura triangular si además satisface:

F4. Para $w \in \mathcal{W}$ se tiene $w[n] \in \mathcal{W}$ para toda $n \in \mathbf{Z}$.

F5. Si en la situación del axioma [T3] para las categorías trianguladas $u, v \in \mathcal{W}$, entonces el morfismo w también puede elegirse para estar en $\mathcal{W}$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "u\in\mathcal{W}"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "v\in\mathcal{W}"] & Z \arrow[r] \arrow[d, dashed, "w\in\mathcal{W}"] & X[1] \arrow[d, "u[1]\in\mathcal{W}"] \\ X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & X'[1] \end{tikzcd}$$

Lema 5.7. *Sea $\mathcal{W}$ un conjunto de morfismos, que satisface los axiomas F1, F4 y F5. Entonces también satisface el axioma F2.*

Demostración. Sea $f \in \mathcal{D}$ y $w \in \mathcal{W}$ como en el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"'] \arrow[d, "w"] & Y \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\in\mathcal{W}"] & C_f \arrow[r] \arrow[d, "1"] & X[1] \arrow[d, "w[1]"] \\ X' \arrow[r, dashed] & Y' \arrow[r] & C_f \arrow[r] & X'[1] \end{tikzcd}$$

La existencia de $X' \to Y'$ es dada por el triangulo distinguido inducido por $C_f \to X'[1]$. F4 afirma $w[1] \in \mathcal{W}$ y de F5 se sigue la existencia de $Y \to Y' \in \mathcal{W}$. □

A continuación siempre consideramos sistemas multiplicativos que serán compatibles con la estructura triangular, por ende omitiremos decir en tal caso que son compatibles.

Proposición 5.8. *Dado un sistema multiplicativo $\mathcal{W} \subset \mathcal{D}$, existe una única estructura triangular en la categoría de fracciones $\mathcal{W}^{-1}\mathcal{D}$, de manera que el funtor de localización $Q\colon \mathcal{D} \to \mathcal{W}^{-1}\mathcal{D}$ es exacto.*

Demostración. Se tiene $\mathcal{W}^{-1}\mathcal{D}$ es aditivo (esto se ha visto en [Mel19] trabajo adjunto). El axioma F4 asegura que cada $[n]$ desciende a una auto-equivalencia en $\mathcal{W}^{-1}\mathcal{D}$. Por construcción, $Q[1] = [1]Q$. Declaramos que un triángulo en $\mathcal{W}^{-1}\mathcal{D}$ es distinguido, si es isomorfo a la imagen bajo Q de algún triángulo distinguido en $\mathcal{D}$.

La prueba de T2 es inmediata de las definiciones. Para demostrar T1 lo único que se probara es que dado $\alpha\colon X \to Y \in \mathcal{W}^{-1}\mathcal{D}$, este se encaja en un triángulo distinguido. Sea $\alpha = w^{-1}f$, y $(X, \bullet, Z, f, g, h) \in \triangle_{\mathcal{D}}$. El diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1"] & \bullet \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, "1"] & X[1] \arrow[d, "1"] \\
X \arrow[r, "\alpha"] & Y \arrow[u, "w"] \arrow[r] & Z \arrow[r] & X[1]
\end{tikzcd}$$

muestra que $(X, Y, Z, \alpha, g \circ w, h)$ es un triangulo distinguido en $\mathcal{W}^{-1}\mathcal{D}$.

T3: Lo que aprendimos arriba es que un triangulo $(X, Y, C\alpha) \in \triangle_{\mathcal{W}^{-1}\mathcal{D}}$, es isomorfo a un triangulo (X, W, C_f), donde $\alpha = w^{-1}f$. Sea $\alpha' = (w')^{-1}f'$, con el correspondiente $(X', W', C'_f) \in \triangle_{\mathcal{W}^{-1}\mathcal{D}}$ asociado. Supongamos que hay fracciones $u^{-1}g\colon X \to X'$, $v^{-1}h\colon Y \to Y'$ como muestra el diagrama solido conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & W \arrow[r] \arrow[d, "h"] & C_f \arrow[r] \arrow[d, dashed] & X[1] \arrow[d, "{g[1]}"] \\
X'' \arrow[r, dashed, "f''"] & W'' \arrow[r, dashed] & C''_f \arrow[r, dashed] & X''[1] \\
X' \arrow[r, "f'"] \arrow[u, "u"] & Y' \arrow[r] \arrow[u, "v"] & C'_f \arrow[r] \arrow[u, dashed, "\in \mathcal{W}"'] & X'[1] \arrow[u, "{u[1]}"']
\end{tikzcd}$$

El diagrama muestra que existe una fracción $C_f \to C'_f$ siempre que podamos justificar la existencia de un morfismo f''; este se demuestra en el lema 1.13 (3) que se encuentra en [Mel19] trabajo adjunto. $\square$

Proposición 5.9. *Sea $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ una subcategoría triangulada plena. El conjunto de morfismos*

$$\mathcal{W}_{\mathcal{C}} = \{w \in \mathcal{D} \mid C_w \text{ es isomorfo a un objeto de } \mathcal{C}\},$$

es un sistema multiplicativo compatible con la estructura triangular de $\mathcal{D}$. En esta situación el sistema multiplicativo es saturado si y solo si $\mathcal{C}$ es una subcategoría saturada.

Demostración. Por simplicidad consideremos que $\mathcal{C}$ es estrictamente plena. El axioma F4 es obvio.

Para probar F1, sean $w, v \in \mathcal{W}_{\mathcal{C}}$ morfismos componibles. Tenemos que mostrar que $wv \in \mathcal{W}_{\mathcal{C}}$. Del axioma octaédrico se tiene $(C_v, C_{wv}, C_w) \in \triangle_{\mathcal{D}}$ y rotando $(C_w[-1], C_v, C_{wv}) \in \triangle_{\mathcal{D}}$. Además como $C_w, C_v \in \mathcal{C}$ y $\mathcal{C}$ es cerrada bajo conos, concluimos que $C_{wv} \in \mathcal{C}$. Lo que demuestra que $wv \in \mathcal{W}_{\mathcal{C}}$.

Para probar F3, hay que demostrar: dado un morfismo $f \in \mathcal{C}$ para el cual existe $w \in \mathcal{W}_{\mathcal{C}}$ tal que $fw = 0$, entonces existe $v \in \mathcal{W}_{\mathcal{C}}$ tal que $vf = 0$. Por la propiedad de conúcleo débil existe un g que hace el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "w"] & \bullet \arrow[d] \arrow[dr, "f"] \arrow[drr, bend left, "0"] & & \\
& C_w \arrow[r, "g"] & \bullet \arrow[r, "v"] & C_g
\end{tikzcd}$$

y $v \in \mathcal{W}_{\mathcal{C}}$ ya que $C_v = C_w[1] \in \mathcal{C}$.

El axioma F5: considere el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] \arrow[dr] & Y \arrow[d, "v"] \\
X' \arrow[r, "f'"] & Y'
\end{tikzcd}$$

Aplicando el axioma octaédrico a cada uno de los dos triángulos conmutativos, se obtiene los morfismos $Y/X \xrightarrow{v^*} Y'/X \xrightarrow{u^*} Y'/X'$ en $\mathcal{W}_{\mathcal{C}}$ y la composición da el morfismo requerido.

El axioma F2 se obtiene como implicación de F1, F4 y F5 (lema 5.7).

Los axiomas duales a F2 y F3 (para definir fracción derecha), se deducen de las demostraciones dadas.

Por último demostramos:

Si $\mathcal{C}$ está saturada, entonces $\mathcal{W}_{\mathcal{C}}$ está saturado. Sean $f, g, h \in \mathcal{C}$ tales que $fg, gh \in \mathcal{W}_{\mathcal{C}}$. Del axioma octaédrico construimos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & & C_{gh} \arrow[dr] & & C_{fg} \arrow[dr] & & \\
 & C_h \arrow[ur] \arrow[dl, squiggly] & & C_g \arrow[ll, squiggly, "v"'] \arrow[ur] \arrow[dl, squiggly] & & C_f \arrow[ll, squiggly, "w"'] \arrow[dl, squiggly] & \\
\bullet \arrow[rr, "h"] & & \bullet \arrow[ul] \arrow[rr, "g"] & & \bullet \arrow[ul] \arrow[rr, "f"] & & \bullet \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

Se observa que $v, w \in \mathcal{W}_{\mathcal{C}}$, pues $C_{gh}, C_{fg} \in \mathcal{C}$, entonces el triángulo distinguido $(C_f, C_h[2], N)$ inducido por $v[1] \circ w$, es tal que $N \in \mathcal{C}$. Afirmamos que $v[1] \circ w = 0$. Para ver esto se observa que w factoriza por $C_f \rightsquigarrow \bullet \longrightarrow C_g$, este último por

$$\begin{tikzcd}
 & C_{gh} \arrow[dr] & \\
\bullet \arrow[ur] \arrow[rr] & & C_g
\end{tikzcd}$$

y se tiene que $C_{gh} \longrightarrow C_g \overset{v}{\rightsquigarrow} C_h$ es cero. Por lo tanto del proposición 4.6, se deduce que C_h es un factor directo de N y como $\mathcal{C}$ es saturado, entonces $C_h \in \mathcal{C}$. Por lo tanto $h \in \mathcal{W}_{\mathcal{C}}$, y concluimos (por la propiedad dos de tres) que $g \in \mathcal{W}_{\mathcal{C}}$.

Si $\mathcal{W}_{\mathcal{C}}$ está saturado, entonces la subcategoría $\mathcal{C}$ es saturada. Sea X un factor directo de un objeto $N \in \mathcal{C}$, es decir $(X, Y, N, 0, g, h) \in \triangle_{\mathcal{D}}$. Como resultado, el morfismo nulo $X \xrightarrow{0} Y \in \mathcal{W}_{\mathcal{C}}$, por lo tanto, por la saturación de $\mathcal{W}_{\mathcal{C}}$, los morfismos

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow 0 \longrightarrow Y$$

implican que $X \to 0 \in \mathcal{W}_{\mathcal{C}}$. Por lo tanto, existe $(X, 0, N', 0, 0, h) \in \triangle_{\mathcal{D}}$, con $N' \in \mathcal{C}$. Como resultado, el morfismo h es un isomorfismo. De esto se sigue que $X \in \mathcal{C}$. $\square$

Definición 5.10. Dada una subcategoría triangulada plena $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$, construimos la categoría cociente $\mathcal{D}/\mathcal{C}$ llamada *localización de Verdier*, como la categoría de fracciones por el sistema multiplicativo $\mathcal{W}_{\mathcal{C}}$. A los isomorfismos de esta categoría (es decir los morfismos de $\mathcal{W}_{\mathcal{C}} \in \mathcal{D}/\mathcal{C}$), les llamamos *$\mathcal{C}$-isomorfismos*

Observación 5.11. Los sistemas multiplicativos asociados a $\ker F$ y $\ker H$ coinciden con:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\ker F} &= \{f \in \mathcal{D} \mid F(f) \text{ es un isomorfismo}\}, \\ \mathcal{W}_{\ker H} &= \{f \in \mathcal{D} \mid H^i(f) \text{ es un isomorfismo } \ \forall\, i \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

En el primer caso: Ff es isomorfismo $\Leftrightarrow$ $F(C_f) = 0$ $\Leftrightarrow$ $C_f \in \ker F$. En el segundo caso

$$\mathcal{W}_{\ker H} = \{f \in \mathcal{D} \mid \exists\, (X, Y, Z, f, g, h) \in \triangle_{\mathcal{D}} \text{ con } H^i(Z) = 0 \;\forall\, i \in \mathbf{Z}\}$$

y es claro por la sucesión exacta larga de homología, que f es un elemento de este conjunto si y solo si $H^i(f)$ es un isomorfismo $\forall\, i \in \mathbb{Z}$.

Lema 5.12. *Sea $\mathcal{W}$ un sistema multiplicativo en $\mathcal{D}$. Los siguientes son equivalentes*

1. $Z = 0$ *en* $\mathcal{W}^{-1}\mathcal{D}$.
2. $\exists W \in \mathcal{D}$ *tal que* $W \xrightarrow{0} Z \in \mathcal{W}$ *(resp.* $\exists W \in \mathcal{D}$ *tal que* $Z \xrightarrow{0} W \in \mathcal{W}$*).*
3. $\exists W \in \mathcal{D}$ *tal que* $X \xrightarrow{f} Y \to Z \oplus W$ *es un triangulo distinguido con* $f \in \mathcal{W}$.

Si $\mathcal{W}$ está saturado, entonces estos también son equivalentes a

- $0 \to Z \in \mathcal{W}$ *(resp.* $Z \to 0 \in \mathcal{W}$*).*
- $\exists (X \xrightarrow{f} Y \to Z) \in \triangle_{\mathcal{D}}$ *con* $f \in \mathcal{W}$.

Demostración. Equivalencia de (1) y (2):

$\Rightarrow$) $0 \to Z$ es isomorfismo en $\mathcal{W}^{-1}\mathcal{D}$. Por lo tanto, existe un $W \to 0$ tal que la composición $Z \to X$ esta en $\mathcal{W}$ (ver lema 1.10 que se encuentra en [Mel19] trabajo adjunto).

$\Leftarrow$) $W \xrightarrow{0} Z$ es un isomorfismo en $\mathcal{W}^{-1}\mathcal{D}$. En la categoría aditiva $\mathcal{W}^{-1}\mathcal{D}$ esto implica que $Z = 0$.

Suponemos (2). Al rotar el triangulo distinguido

$$Z[-1] \longrightarrow Z[-1] \oplus W \longrightarrow W \xrightarrow{\;0\;} Z$$

con $W \xrightarrow{0} Z \in \mathcal{W}$, concluimos (3). Si suponemos (3), entonces existe W tal que $Z \oplus W = 0$ en $\mathcal{W}^{-1}\mathcal{D}$, pues $f \in \mathcal{W}^{-1}\mathcal{D}$ es un isomorfismo, por lo tanto, $Z = 0$, concluimos (1).

La última parte, si $\mathcal{W}$ está saturado es sencillo. Al final de la demostración en la proposición anterior se puede observa que $W \xrightarrow{0} Z \in \mathcal{W}_{\mathcal{C}} \quad \Rightarrow \quad 0 \to Z \in \mathcal{W}_{\mathcal{C}}$. Y si $0 \to Z \in \mathcal{W}_{\mathcal{C}}$, el triangulo distinguido $(0, Z, Z, 0, 1, 0) \in \triangle_{\mathcal{D}}$, demuestra que se tiene (4).

□

Observación 5.13. Sea $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ una subcategoría triangulada y $Z \in \mathcal{D}$. Del lema anterior concluimos:

$$Z = 0 \text{ en } \mathcal{D}/\mathcal{C} \quad \Longleftrightarrow \quad (\exists W)\ Z \oplus W \in \mathcal{C}.$$

Proposición 5.14. *Sea $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ una subcategoría triangulada. Entonces el funtor exacto $Q \colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}/\mathcal{C}$ anula $\mathcal{C}$ y satisfacer:*

1. *El núcleo de Q es la subcategoría saturada más pequeña que contiene $\mathcal{C}$:*
$$\ker Q = \{Z \in \mathcal{D} \mid \exists\, W \in \mathcal{D} \text{ con } Z \oplus W \in \mathcal{C}\}.$$
2. *El funtor Q es universal entre los funtores exactos que anulan $\mathcal{C}$ y entre los funtores homológicos que anulan $\mathcal{C}$.*

Demostración. (1) se deriva de las observaciones 5.13 y en el lema 5.5 se ve que es una categoría saturada. (2) se deriva de la 5.11 y la definición de localización. □

6. Colímites y límites derivados

En esta sección $(\mathcal{D}, [\,], \triangle_{\mathcal{D}})$ será una categoría triangulada. Por un *sistema* $\{X_n, f_n\}$ de objetos en $\mathcal{D}$, entendemos una sucesión de objetos X_n, junto con morfismos $f_n \colon X_n \to X_{n+1}$.

Definición 6.1. Un objeto $\operatorname{hocolim} X_n$ es un *colímite derivado* o *colímite homotópico* de un sistema $\{X_n, f_n\}$ de objetos en $\mathcal{D}$, si la suma directa $\bigoplus X_n$ existe y se tiene $(\bigoplus X_n, \bigoplus X_n, \operatorname{hocolim} X_n) \in \triangle_{\mathcal{D}}$, donde el mapa $\bigoplus X_n \to \bigoplus X_n$ viene dado por $1 - f_n$ en grado n.

El colímite derivado esta dotado de morfismos $i_n \colon X_n \to \operatorname{hocolim} X_n$ tal que $i_{n+1} \circ f_n = i_n$ y tal que exista un morfismo $\operatorname{hocolim} X_n \to \bigoplus X_n$, todo con la propiedad que

$$\bigoplus X_n \xrightarrow{1-f} \bigoplus X_n \xrightarrow{i} \operatorname{hocolim} X_n \longrightarrow \bigoplus X_n[1]$$

es un triángulo distinguido ($f = \bigoplus f_n$, $i = \bigoplus i_n$).

Lema 6.2. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana con colímites secuenciales numerables exactos. Entonces las sumas directas numerables existen y son exactas. Además, si (A_n, f_n) es un sistema numerable, se tiene la sucesión exacta corta*

$$0 \to \bigoplus A_n \to \bigoplus A_n \to \operatorname{colim} A_n \to 0$$

donde el primer morfismo en grado n es dado por $1 - f_n$.

Demostración. La primera declaración se sigue de $\bigoplus A_n = \operatorname{colim}(A_1 \oplus \ldots \oplus A_n)$. Para la segunda, tenga en cuenta que para cada n se tiene la sucesión exacta corta

$$0 \to A_1 \oplus \ldots \oplus A_{n-1} \to A_1 \oplus \ldots \oplus A_n \to A_n \to 0$$

donde el primer morfismo es dado por los morfismos $1 - f_i$ y el segundo es la suma de los morfismos de transición. Tomando el colímite se obtiene la sucesión del lema. □

Lema 6.3. *Sea $\mathcal{D}$ con sumas directas numerables y $\mathcal{A}$ una categoría abeliana con colímites secuenciales numerables exactos. Sea $H \colon \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ un funtor homológico que conmuta con sumas directas numerables. Entonces el morfismo canónico*

$$\operatorname{colim} H(X_n) \longrightarrow H(\operatorname{hocolim} X_n)$$

es un isomorfismo para cualquier sistema de objetos de $\mathcal{D}$.

Demostración. Aplicamos H al triángulo distinguido $(\bigoplus X_n, \bigoplus X_n, \operatorname{hocolim} X_n)$ para obtener

$$\bigoplus H(X_n) \longrightarrow \bigoplus H(X_n) \longrightarrow H(\operatorname{hocolim} X_n) \xrightarrow{0} \bigoplus H(X_n[1]) \longrightarrow \bigoplus H(X_n[1])$$

donde el primer mapa viene dado por $1 - H(f_n)$ y el último mapa está dado por $1 - H(f_n[1])$. Del lema 6.2 se deduce la prueba. $\square$

Observación 6.4. Sea $\mathcal{D}$ una categoría triangulada con sumas directas numerables. Sea $K \in \mathcal{D}$ un objeto tal que para cada familia contable $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}$ el morfismo canónico

$$\bigoplus \mathcal{D}(K, \mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{D}(K, \bigoplus \mathcal{E})$$

es una biyección, es decir, que el funtor representable $\mathcal{D}(K, -)\colon \mathcal{D}^{op} \to \mathbf{Ab}$ homológico conmuta con sumas directas numerables. Entonces el lema 6.3 afirma que cualquier sistema X_n de $\mathcal{D}$ sobre $\mathbf{N}$ cuyo colímite derivado existe, se tiene que

$$\operatorname{colim} \mathcal{D}(K, X_n) \longrightarrow \mathcal{D}(K, \operatorname{hocolim} X_n)$$

es una biyección.

7. Generadores y objetos compactos

En esta sección $(\mathcal{D}, [\,], \triangle_{\mathcal{D}})$ será una categoría triangulada. Se presenta brevemente algunas de las diferentes nociones de generador para una categoría triangulada.

Definición 7.1. Sea $\mathcal{D}$ una categoría triangulada. Si $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}$ es un conjunto de objetos, entonces decimos que $\mathcal{E}$ genera clásicamente a $\mathcal{D}$ si $\mathcal{D} = \langle \mathcal{E} \rangle$.

Sea $E \in \mathcal{D}$. Denotamos por $\langle E \rangle_1$ a la subcategoría aditiva estrictamente plena de $\mathcal{D}$ que consiste de los objetos isomórficos a sumandos directos de sumas directas finitas

$$\bigoplus_{i=1}^{r} E[n_i]$$

de desplazamientos de E. Para $n > 1$, $\langle E \rangle_n$ denota la subcategoría aditiva plena de $\mathcal{D}$, que consta de objetos isomórficos a sumandos directos de objetos Y que encajan en un triángulo distinguido (X, Y, Z) con $X \in \langle E \rangle_1$, $Z \in \langle E \rangle_{n-1}$. Cada una de las categorías $\langle E \rangle_n$ es preservada bajo desplazamientos y bajo tomar sumandos, pero no es necesariamente cerrada bajo "toma de conos", por lo tanto, no es necesariamente una subcategoría triangulada. Sin embargo $\bigcup_n \langle E \rangle_n$ es subcategoría triangulada estrictamente plena de $\mathcal{D}$.

Lema 7.2. *Sea E un objeto de la categoría triangulada $\mathcal{D}$. Se tiene*

$$\langle E \rangle = \bigcup_n \langle E \rangle_n$$

Es la subcategoría saturada más pequeña de $\mathcal{D}$ que contiene el objeto E.

Demostración. Para probar esto es suficiente mostrar: si $X \in \langle E \rangle_m$ y $Z \in \langle E \rangle_n$ y si $(X, Y, Z) \in \triangle_{\mathcal{D}}$, entonces $Y \in \langle E \rangle_{m+n}$.

Por inducción sobre m, es claro para $m = 1$ (resulta de la definición) y supongamos cierto para m. Para los triángulos $(W, X, Z'), (X, Y, Z), (W, Y, Z'') \in \triangle_{\mathcal{D}}$, donde $W \in \langle E \rangle_1$ y $Z' \in \langle E \rangle_{m-1}$, se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[rr] \arrow[dr] & & Y \arrow[rr] \arrow[dr] & & Z \\
& X \arrow[ur] \arrow[dr] & & Z'' \arrow[ur] & \\
& & Z' \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Por T4 se tiene que $(Z', Z'', Z) \in \triangle_{\mathcal{D}}$ y por la hipótesis de inducción se tiene $Z'' \in \langle E \rangle_{n+m-1}$. Esto demuestra que $Y \in \langle E \rangle_{m+n}$. $\square$

Decimos que E es un generador fuerte para $\mathcal{D}$ si para algún n se tiene $\langle E \rangle_n = \mathcal{D}$. Se observa que en este caso $\mathcal{D}$ necesariamente no es saturado.

Por *la derecha ortogonal* $\mathcal{E}^{\perp}$ en $\mathcal{D}$ denotamos la subcategoría plena cuyos objetos son

$$\mathcal{E}^{\perp} = \{Y \in \mathcal{D} \mid \mathcal{D}(E[n], Y) = 0 \text{ para toda } n \in \mathbf{Z} \text{ y } E \in \mathcal{E}\}.$$

Esta es una subcategoría triangular saturada. Decimos que $\mathcal{E}$ *genera* $\mathcal{D}$ si $\mathcal{E}^{\perp} = 0$. Es inmediato ver que $\bigoplus \mathcal{E}$ genera a $\mathcal{D}$ si y solo si $\mathcal{E}$ genera a $\mathcal{D}$.

Lema 7.3. *Sean E, Y objetos de $\mathcal{D}$. Los siguientes son equivalentes.*

1. $\mathcal{D}(E[n], Y) = 0$ *para toda* $n \in \mathbf{Z}$,

2. $\mathcal{D}(X, Y) = 0$ *para todo* $X \in \langle E \rangle$.

Demostración. Las implicación (2) $\Rightarrow$ (1) es inmediata. Ahora, supongamos (1). Entonces $\mathcal{D}(X, Y) = 0$ para todo $X \in \langle E \rangle_1$. Argumentando por inducción en n y usando que $\mathcal{D}(-, Y)$ es cohomológico vemos que $\mathcal{D}(X, Y) = 0$ para todo $X \in \langle E \rangle_n$. $\square$

Lema 7.4. *Sea E un objeto de $\mathcal{D}$. Si E es un generador clásico de $\mathcal{D}$, entonces E es un generador.*

Demostración. Sea $Y \in \mathcal{D}$ tal que $\mathcal{D}(X, Y) = 0$ para todo $X \in \langle E \rangle$. De la suposición $\mathcal{D} = \langle E \rangle$, se concluye que $id_Y = 0$, es decir, $Y = 0$. $\square$

Definición 7.5. Supongamos ahora que $\mathcal{D}$ admite sumas directas arbitrarias. Un objeto $K \in \mathcal{D}$ es *compacto* si $\mathcal{D}(K, -)$ conmuta con sumas directas

$$\bigoplus_{i \in I} \mathcal{D}(K, E_i) \longrightarrow \mathcal{D}(K, \bigoplus_{i \in I} E_i)$$

Es decir $K \in \mathcal{D}$ es compacto (o *pequeño*) si cada morfismo $K \to \bigoplus_{i \in I} X_i$, factoriza a través de $\bigoplus_{i \in J} X_i$ para algún $J \subset I$ finito. Los objetos compactos en $\mathcal{D}$ forman una subcategoría saturada Karoubiana (se demuestra en el siguiente lema) que denotamos $\mathcal{D}^c$. Decimos que $\mathcal{D}$ se genera de forma compacta si $\mathcal{D}$ es generado por $\mathcal{D}^c$ o equivalentemente si existe un conjunto $\mathcal{K}$ de objetos compactos de manera que $\bigoplus \mathcal{K}$ genera $\mathcal{D}$.

.

Lema 7.6. *Sea $\mathcal{D}$ con sumas directas arbitrarias. Entonces $\mathcal{D}^c$ es una subcategoría saturada Karoubiana.*

Demostración. Sea (X, Y, Z) un triángulo distinguido de $\mathcal{D}$ con X e Y compactos. Se desprende del funtor cohomológico $\mathcal{D}(-, W)$ y el lema de los cinco de homología, que Z también es un objeto compacto. Por lo tanto, $\mathcal{D}^c$ es triangulada; y claramente es estrictamente plena. Además, una sucesón exacta escindida $0 \to X \to X \oplus Y \to Y \to 0$ produce el diagrama conmutativo con filas exactas escindidas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \bigoplus \mathcal{D}(X, W_i) \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus \mathcal{D}(X \oplus Y, W_i) \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus \mathcal{D}(Y, W_i) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{D}(X, \bigoplus W_i) \arrow[r] & \mathcal{D}(X \oplus Y, \bigoplus W_i) \arrow[r] & \mathcal{D}(Y, \bigoplus W_i) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Si $X \oplus Y$ es compacto, la flecha vertical del medio es un isomorfismo y en consecuencia, la flecha vertical izquierda es moni, mientras que la flecha vertical derecha es epi. Al intercambiar los roles de X y Y, se demuestra que estas flechas son, isomorfismos, entonces X, Y son objetos compactos. Por lo tanto, $\mathcal{D}^c$ es saturada. Dado que $\mathcal{D}$ es Karoubiana, por el lema 4.12; concluimos que lo mismo es cierto para la subcategoría $\mathcal{D}^c$. □

Sea $\mathcal{D}$ generada en forma compacta por la familia $\mathcal{K}$. Dado un $X \in \mathcal{D}$ construimos

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r] \arrow[drr] & X_2 \arrow[r] \arrow[dr] & \cdots \arrow[r] & X_n \arrow[dl] \\
& & X &
\end{tikzcd}$$

de la siguiente manera:

- $X_1 = \bigoplus_{K \in \mathcal{K}, \phi} K[m], \quad \phi \colon K[m] \to X.$
- Dado $X_n \to X$, definimos $Y_n = \bigoplus_{K \in \mathcal{K}, \phi} K[m]$, $\begin{tikzcd} K[m] \arrow[r, "\phi"] \arrow[rr, bend right, "0"'] & X_n \arrow[r] & X \end{tikzcd}$ y $(Y_n, X_n, X_{n+1}) \in \triangle_{\mathcal{D}}$:

$$\begin{tikzcd}
Y_n \arrow[r] \arrow[dr, "0"'] & X_n \arrow[r] \arrow[d] & X_{n+1} \arrow[dl, dashed] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Lema 7.7. *Sea $\mathcal{D}$ una categoría genera en forma compacta. Teniendo la construcción de arriba para $X \in \mathcal{D}$, se tiene*

1. *El morfismo canónico* $\operatorname{hocolim} X_n \to X$ *es un isomorfismo.*
2. *Si $L \in \mathcal{D}^c$, cada morfismo $L \to X_n$ factoriza por un objeto de $\langle \bigoplus \mathcal{K}' \rangle$ para algún $\mathcal{K}' \subset \mathcal{K}$ finito.*

Demostración. (1): Elegimos un triángulo distinguido $(W, \operatorname{hocolim} X_n, X)$ para este morfismo canónico. Dado cualquier morfismo $K[m] \to W$, $K \in \mathcal{K}$, como K es compacto, la composición $K[m] \to W \to \operatorname{hocolim} X_n$ factoriza a través de algún X_n (observación 6.4). Entonces, la construcción de Y_n muestra que la composición $K[m] \to X_n \to X_{n+1}$ es cero. Es decir, la composición $K[m] \to W \to \operatorname{hocolim} X_n$ es cero y se tiene el diagrama (solido)

$$\begin{tikzcd}
& & K[m] \arrow[dll, dashed, "\phi"'] \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr, "0"] & \\
\operatorname{hocolim} X_n[-1] \arrow[r] & X[-1] \arrow[r] & W \arrow[r] & \operatorname{hocolim} X_n
\end{tikzcd}$$

La existencia del morfismo punteado, se debe a ϕ y a la construcción de X_1; pues $\phi[1]$ induce el primer morfismo de la composición $K[m+1] \to X_1 \to \cdots \to \operatorname{hocolim} X_n$. De esto concluimos que nuestro morfismo $K[m] \to W$ es cero. La suposición de que $\mathcal{K}$ genera $\mathcal{D}$ implica que W es cero y la prueba está terminada.

(2): Probamos esto por inducción en n. El caso base $n = 1$ es claro. Si $n > 1$ consideramos la composición $L \to X_n \to Y_{n-1}[1]$, que por la compacidad de L factoriza a través de $\bigoplus \Phi[1]$ con $\Phi = \{K[m] \mid$ para un número finito de $\phi\colon K[m] \to X_{n-1}\}$. Y obtenemos un morfismo

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus \Phi \arrow[r] \arrow[d] & L' \arrow[r] \arrow[d, dashed] & L \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus \Phi[1] \arrow[d] \\
Y_{n-1} \arrow[r] & X_{n-1} \arrow[r] & X_n \arrow[r] & Y_{n-1}[1]
\end{tikzcd}$$

entre triángulos distinguidos. Por inducción, el morfismo $L' \to X_{n-1}$ factoriza a través de algún $K' \in \langle \mathcal{K}' \rangle$, con $\mathcal{K}' \subset \mathcal{K}$ finito. Se define el triángulo distinguido $(\bigoplus \Phi, K', K)$, entonces $K \in \langle \bigoplus(\Phi \cup \mathcal{K}') \rangle$. En resumen tenemos los siguientes morfismos de triángulos distinguidos:

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus \Phi \arrow[r] \arrow[d] & L' \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[d, dashed] \arrow[dd, bend left] \arrow[ddr, "0"] & \\
\bigoplus \Phi \arrow[r] \arrow[d] & K' \arrow[r] \arrow[d] & K \arrow[d, dashed] & \\
Y_{n-1} \arrow[r] & X_{n-1} \arrow[r] & X_n \arrow[r] & Y_{n-1}[1]
\end{tikzcd}$$

La composición $L \to K \to X_n$ puede no ser igual al morfismo dado $L \to X_n$, pero la composición a Y_{n-1} las hace iguales. Por lo tanto hay un morfismo $L \to X_{n-1}$ que levanta la diferencia. Nuevamente podemos factorizar este a través de un objeto $K'' \in \langle \mathcal{K}'' \rangle$, con $\mathcal{K}'' \subset \mathcal{K}$ finito. Así, vemos que obtenemos una solución al considerar $K \oplus K'' \to X_n$ porque $K \oplus K'' \in \langle \bigoplus(\Phi \cup \mathcal{W}' \cup \mathcal{W}'') \rangle$. $\square$

La siguiente proposición aclara la relación entre generadores clásicos y generadores débiles.

Proposición 7.8. *Sea $\mathcal{D}$ una categoría triangulada con sumas directas y $K \in \mathcal{D}$ compacto. Los siguientes son equivalentes*

1. *K es un generador clásico de $\mathcal{D}^c$ y $\mathcal{D}$ se genera de forma compacta.*
2. *K es un generador para $\mathcal{D}$.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2): Como $\mathcal{D}$ es generado por $\mathcal{D}^c$ y este a su vez por K (pues un generador clásico es un generador), se deduce formalmente que K es un generador de $\mathcal{D}$.

(2) $\Rightarrow$ (1) es más interesante. Sea $X \in \mathcal{D}^c$. Aplicamos el Lema 7.7 para la familia $\mathcal{W} = \{K\}$ con un elemento, tenemos $X = \operatorname{hocolim} X_i$. Como X es compacto, encontramos que $X \to \operatorname{hocolim} X_n$ factoriza a través de algún X_n (lema 6.4), por lo tanto, X es un sumando directo de X_n. Por el punto (2) del Lema 7.7 vemos que $X \in \langle K \rangle$ y el lema está probado. □

8. Representabilidad de Brown

Teorema 8.1 (Representabilidad de Brown)**.** *Sea $\mathcal{D}$ una categoría triangulada con sumas directas que se genera de forma compacta. Sea $H \colon \mathcal{D} \to Ab$ un funtor cohomológico contravariante que transforma sumas directas en productos. Entonces H es representable.*

Demostración. Sea $\{E_i\}_I$ un conjunto de objetos compactos tales que $\bigoplus_{i \in I} E_i$ genera $\mathcal{D}$. Podemos y asumimos que el conjunto de objetos $\{E_i\}_I$ es cerrado bajo traslaciones. Consideramos pares (i, a) donde $i \in I$, $a \in H(E_i)$; definimos el objeto y funtor:

$$X_1 = \bigoplus_{(i,a)} E_i, \quad a_1 \colon \mathcal{D}(-, X_1) \to H,$$

donde a_1 (por lema de Yoneda) corresponderá al elemento $(a)_{(i,a)} \in H(X_1) = \prod_{(i,a)} H(E_i)$.

Construimos inductivamente X_n y transformaciones $a_n \colon \mathcal{D}(-, X_n) \to H$. Ahora nos fijamos en el funtor $\ker a_n : Y \mapsto \ker(\mathcal{D}(Y, X) \to H(X))$, con transformaciones $\ker a_n \to \mathcal{D}(-, X_n) \to H$. Aplicamos el procedimiento anterior a $\ker a_n$ obtenemos

$$K_{n+1} = \bigoplus_{(i,k)} E_i, \quad \mathcal{D}(-, K_{n+1}) \to \ker a_n.$$

Por el lema de Yoneda la composición $\mathcal{D}(-, K_{n+1}) \to \ker a_n \to \mathcal{D}(-, X_n)$ corresponde a un morfismo $K_{n+1} \to X_n$, y este a su vez a un triángulo $(K_{n+1}, X_n, X_{n+1}) \in \triangle_{\mathcal{D}}$. Entonces tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}(-, K_{n+1}) \arrow[r] \arrow[dr, "0"'] & \mathcal{D}(-, X_n) \arrow[r] \arrow[d, "a_n"] & \mathcal{D}(-, X_{n+1}) \arrow[dl, dashed, "a_n+1"] \\
& H &
\end{tikzcd}$$

La existencia de a_{n+1} se debe a que H es cohomológico, pues a_n es asignado a cero en $H(K_{n+1})$.

Afirmamos que $X = \operatorname{hocolim} X_n$ representa H. Aplicando H a $(\bigoplus X_n, \bigoplus X_n, X) \in \triangle_{\mathcal{D}}$ se obtiene la sucesión exacta $H(X) \to \prod H(X_n) \to \prod H(X_n)$. Podemos observa $(a_n) \mapsto 0$ por el triangulo derecho en diagrama de arriba, por lo tanto, existe un elemento $a \in H(X)$ que es mandado a $(a_n) \in \prod H(X_n)$; esto se representa por el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}(-, X_1) \arrow[r] \arrow[drr, "a_1"] & \mathcal{D}(-, X_2) \arrow[r] \arrow[dr, "a_2"] & \cdots \arrow[r] & \mathcal{D}(-, X) \arrow[dl, "a"] \\
& & H &
\end{tikzcd}$$

Se verá que a es un isomorfismo natural. Primero mostramos que a_{E_i} es un isomorfismo $\forall i$.

- El morfismo $\mathcal{D}(E_i, X) \to H(E_i)$ es sobreyectivo, ya que $\mathcal{D}(E_i, X_1) \to H(E_i)$ es sobreyectivo: tomando $a \in H(E_i)$ se tiene

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{D}(E_i, X_1) & \longrightarrow & \mathcal{D}(H(X_1), H(E_i)) & \longrightarrow & H(E_i) \\ E_i \to \bigoplus E_i & \longmapsto & \prod H(E_i) \to H(E_i) & \longmapsto & a \end{array}$$

  siendo $E_i \to \bigoplus E_i \in \mathcal{D}(E_i, X_1)$ la evidente inyección (ver definición de a_1).

- El morfismo $\mathcal{D}(E_i, X) \to H(E_i)$ es inyectivo: mediante la construcción de $X_n \to X_{n+1}$, el núcleo de $\mathcal{D}(E_i, X_n) \to H(E_i)$ es eliminado por $\mathcal{D}(E_i, X_n) \to \mathcal{D}(E_i, X_{n+1})$ y ya que

$$\mathcal{D}(E_i, X) = \operatorname{colim} \mathcal{D}(E_i, X_n)$$

  por la observación 6.4, vemos que el núcleo de $\mathcal{D}(E_i, X) \to H(E_i)$ es cero.

Ahora, concediéramos la subcategoría

$$\mathcal{D}' = \{Y \in \mathcal{D} \mid \mathcal{D}(Y[n], X) \xrightarrow{a} H(Y[n]) \text{ es un isomorfismo } \forall n\}.$$

Afirmamos que $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$ es una subcategoría plena y saturada. Es claro que es cerdada bajo translación y bajo isomorfismo. Es cerdada bajo conos; dado $(X', Y', Z') \in \triangle_{\mathcal{D}}$ con $X', Y' \in \mathcal{D}'$, obtenemos sucesiones largas (por $\mathcal{D}(-, X)$ y H) y un morfismo entre ellas (inducido por a), de donde se deduce por el lema de los 5 de homología que $Z' \in \mathcal{D}'$. Sea $X' \oplus Y' \in \mathcal{D}'$, aplicando el funtor a al triangulo distinguido correspondiente a la suma directa, tenemos el morfismo de sucesiones exacta cortas

$$(\mathcal{D}(Y', X), \mathcal{D}(X' \oplus Y', X), \mathcal{D}(X', X)) \longrightarrow (HY', H(X' \oplus Y'), HX')$$

donde el morfismo de en medio es un isomorfismo, de esto se deduce que $\mathcal{D}'$ es cerrado por sumandos directos. Además, como H y $\mathcal{D}(-, X)$ transforman sumas directas en productos, vemos que las sumas directas de objetos de $\mathcal{D}'$ están en $\mathcal{D}'$. Por lo tanto, los colímites derivados de objetos de $\mathcal{D}'$ están en $\mathcal{D}'$. Como $\{E_i\}_I$ es cerrado bajo traslaciones, vemos que $E_i \in \mathcal{D}'$ para todo i. Del Lema 7.7 (1) se deduce que $\mathcal{D}' = \mathcal{D}$ y la prueba está completa. □

9. Localización de Bousfield

Este capitulo utiliza definiciones y notaciones dadas en [Mel19] trabajo adjunto. Empezamos la sección con el siguiente lema que caracteriza los objetos $\mathcal{W}_{\mathcal{C}}$-local que simplemente llamamos $\mathcal{C}$-local donde $\mathcal{C}$ es una subcategoría.

Lema 9.1. *Sea $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ una subcategoría triangulada. Se tiene*

$$X \text{ es } \mathcal{C}\text{-local} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{D}(Y, X) = 0 \text{ para todo } Y \in \mathcal{C}.$$

Es decir, $\mathcal{C}^{\perp}$ es la subcategoría de objetos $\mathcal{C}$-locales.

Demostración. $\Rightarrow$: Si $Y \in \mathcal{C}$, entonces el morfismo $Y \to 0 \in \mathcal{W}_{\mathcal{C}}$ e induce, por lo tanto, una biyección $\mathcal{D}(0, X) \to \mathcal{D}(Y, X)$. Lo que demuestra que $\mathcal{D}(Y, X) = 0$ para toda $Y \in \mathcal{C}$.
$\Leftarrow$: Cada $w\colon Y \to Z \in \mathcal{W}_{\mathcal{C}}$ induce una biyección $\mathcal{D}(Z, X) \to \mathcal{D}(Y, X)$ porque $\mathcal{D}(-, X)$ es cohomológico. Lo que demuestra que X es $\mathcal{C}$-local. □

Definición 9.2. Una *localización* en $\mathcal{D}$, es un endofuntor triangulado $L\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ tal que existe una transformación natural (exacta) $\psi\colon id_{\mathcal{D}} \to L$ tal que $L\psi\colon L \to L^2$ es invertible y $L\psi = \psi L$. A los objetos de $\ker L$ les llamamos *L-acíclicos*.

El siguiente lema relaciona los objetos L-acíclicos con los objetos L-locales.

Lema 9.3. *Sea $L\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ una localización. Se tiene lo siguiente*

1. *$X \in \ker L$ si y solo si $\mathcal{D}(X,Y) = 0$ para todo $Y \in \mathcal{D}_L$, es decir, $\ker L = {}^{\perp}\mathcal{D}_L$.*

2. *$Y \in \mathcal{D}_L$ si y solo si $\mathcal{D}(X,Y) = 0$ para todo $X \in \ker L$, es decir, $\mathcal{D}_L = \ker L^{\perp}$.*

Demostración. Demostramos las equivalencias del punto (1):

$\Rightarrow$) Esto es por que todo morfismo $X \to Y$, con $Y \in \mathcal{D}_L$, factoriza por LX:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r, "\sim"] & LZ \arrow[d, "\sim"] \\ LX \arrow[rr] & & L^2Z \end{tikzcd}$$

Para explicar el isomorfismo del diagrama; se ha visto que $\mathcal{D}_L = \operatorname{im} L$ (en [Mel19] trabajo adjunto, lema 2.9) e $\operatorname{im} L$ es la subcategoría estrictamente plena de los objetos LX.

$\Leftarrow$) Por hipótesis $LX \to L^2X$ es 0 y por los axiomas de localización es un isomorfismo, por lo tanto, $LX = 0$.

El punto (2) es una reformulación del lema 9.1. □

Lema 9.4. *La subcategoría triangulada $\ker L \subset \mathcal{D}$ es estable bajo coproductos, es decir, siempre que exista un coproducto de objetos de $\ker L$ en $\mathcal{D}$, este pertenece a $\ker L$.*

Demostración. Para cada $Y \in \mathcal{D}$, $\mathcal{D}(\bigoplus X_i, LY) = \prod \mathcal{D}(X_i, LY)$; por lo tanto (aplicando el lema 9.3) si $LX_i = 0$ para cada i, entonces $L(\bigoplus X_i) = 0$. □

Definición 9.5. Una subcategoría triangulada se llama *localizante*, si es estable bajo coproductos. Dualmente las subcategoría triangulada estables bajo productos, las llamamos *colocalizante*

Lema 9.6. *Si $\mathcal{L}$ es una subcategoría localizante, entonces $\mathcal{L}^{\perp}$ es colocalizante.*

Demostración. Vemos que el cono de un morfismo entre objetos en $\mathcal{L}^{\perp}$ es local considerando la sucesión exacta larga asociada a $\mathcal{D}(Y,-)$, donde $Y \in \mathcal{L}$. Para mostrar que un producto $\prod X_i$ pertenece a $\mathcal{L}^{\perp}$ si cada $X_i \in \mathcal{L}$, se considerar $\mathcal{D}(Y, \prod X_i) = \prod \mathcal{D}(Y, X_i)$, donde este último es 0 si $Y \in \mathcal{D}$. □

Lema 9.7. *Sea $\mathcal{L} \subset \mathcal{D}$ una subcategoría localizante e $Y \in \mathcal{L}^{\perp}$. El funtor de localización de Verdier induce un isomorfismo:*

$$\mathcal{D}(X,Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}/\mathcal{L}(X,Y)$$

para cada $X \in \mathcal{D}$.

Demostración. Esto sucede mas generalmente, ver Lema 2.14, en [Mel19] trabajo adjunto. No obstante exponemos la demostración, considerando la estructura triangular de la categoría. Un morfismo en $\mathcal{D}/\mathcal{L}(X,Y)$ es una fracción (derecha) $X \xleftarrow{w} \bullet \to Y$, con w un $\mathcal{L}$-isomorfismo, es decir, $C_w \in \mathcal{L}$. Aplicando el funtor homológico $\mathcal{D}(-,X)$ se tiene la sucesión exacta

$$0 = \mathcal{D}(C_w[-1], Y) \longrightarrow \mathcal{D}(\bullet, Y) \longrightarrow \mathcal{D}(X,Y) \longrightarrow \mathcal{D}(C_w, Y) = 0$$

es decir, se tiene una única factorización

$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[dr] & \\ X \arrow[ur, "w"] \arrow[rr, "\exists!"] & & Y \end{tikzcd}$$

lo que demuestra la suprayectividad. Ahora, si $f\colon X \to Y \in \mathcal{D}$ es un morfismo que es cero en $\mathcal{D}/\mathcal{L}$, entonces factoriza como $X \to Z \to Y$ con $Z \in \mathcal{L}$, y como Y es $\mathcal{L}$-local, el morfismo $Z \to Y$ es cero. $\square$

Proposición 9.8. *Sea $\mathcal{L} \subset \mathcal{D}$ una subcategoría localizante. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *Hay un funtor de localización $(L,\psi)\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}$, tal que* $\ker L = \mathcal{L}$.
2. *El funtor $\mathcal{L} \to \mathcal{D}$ posee adjunto derecho.*
3. *Por cada $Y \in \mathcal{D}$ hay un triángulo distinguido (X,Y,Z) tal que $X \in \mathcal{L}$ y $Z \in \mathcal{L}^{\perp}$*
4. *El funtor $\mathcal{D} \to \mathcal{D}/\mathcal{L}$ posee adjunto derecho.*
5. *La composición $\mathcal{L}^{\perp} \to \mathcal{D} \to \mathcal{D}/\mathcal{L}$ es una equivalencia de categorías.*
6. *El funtor $\mathcal{L}^{\perp} \to \mathcal{D}$ posee adjunto izquierdo y ${}^{\perp}(\mathcal{L}^{\perp}) = L$.*

Demostración. Sean $i\colon \mathcal{L} \to \mathcal{D}$ y $j\colon \mathcal{L}^{\perp} \to \mathcal{D}$ los funtores de inclusión y $Q\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}/\mathcal{L}$ el funtor cociente. Y denotamos por ψ cuando la hipótesis lo requiera, como la unidad de la localización.
(1) $\Rightarrow$ (2). Para cada $X \in \mathcal{D}$, el morfismo ψ_X completa un triángulo distinguido

$$kX \xrightarrow{\phi_X} X \xrightarrow{\psi_X} LX.$$

Se tiene:

- $kX \in \mathcal{L}$ ya que $L\psi_X$ es invertible: $LkX \xrightarrow{L\phi_X} LX \xrightarrow[\sim]{L\psi_X} L^2X \ \in \triangle_{\mathcal{D}}$ (proposición 4.6).
- $(\forall W \in \mathcal{L}) \quad \mathcal{D}(W, kX) \xrightarrow{\phi_X} \mathcal{D}(W,X)$ es biyectiva ya que $\mathcal{D}(W, LX) = 0$. Esto último por que $LX \in \mathcal{D}_L$ y el lema 9.3.

El triángulo distinguido que define kX es único (hasta un único isomorfismo) determinado por X. Por lo tanto, se obtiene un adjunto derecho k, de i.
(2) $\Rightarrow$ (3). Sea $Y \in \mathcal{D}$. Completamos la unidad de la adjunción $\phi_Y : kY \to Y$ a un triángulo distinguido

$$kY \xrightarrow{\phi_Y} Y \longrightarrow Z\ .$$

Se tiene:

$(\forall W \in \mathcal{L}) \quad \mathcal{D}(W, Z) = 0$ ya que $\mathcal{D}(W, kY) \xrightarrow{\phi_Y} \mathcal{D}(W, Y)$ es biyectiva. Por lo tanto $Z \in \mathcal{L}^{\perp}$.

(3) $\Rightarrow$ (4). Sea $Y \in \mathcal{D}$ con

$$X \longrightarrow Y \xrightarrow{\psi_Y} Z \ \in \triangle_{\mathcal{D}}, \qquad X \in \mathcal{L}, \quad Z \in \mathcal{L}^{\perp}.$$

El morfismo ψ_X es $\mathcal{L}$-isomorfismo (es decir, $\psi_Y \in \mathcal{W}_{\mathcal{L}}$) pues $C_{\psi_Y} \in \mathcal{L}$ y Z es $\mathcal{L}$-local como muestra el lema 9.3. El resultado se deduce del lema 2.15 en [Mel19] trabajo adjunto.

De la proposición 2.5 en [Mel19] trabajo adjunto: (4) $\Rightarrow$ (5) y (4) $\Rightarrow$ (1).

(5) $\Rightarrow$ (6). Sea $F\colon \mathcal{D}/\mathcal{L} \to \mathcal{L}^{\perp}$ un quiasi-inverso de Qj.Para toda $X \in \mathcal{D}$ y $Y \in \mathcal{L}^{\perp}$ se tiene

$$\mathcal{D}(X, jY) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}/\mathcal{L}(QX, QjY) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}^{\perp}(FQX, FQjY) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}^{\perp}(FQX, FQY)$$

Por lo tanto, FQ es adjunto izquierdo de la inclusión j. La inclusión ${}^{\perp}(\mathcal{L}^{\perp}) \supseteq \mathcal{L}$ es clara. Sea $X \in^{\perp}(\mathcal{L}^{\perp})$, entonces

$$\mathcal{D}/\mathcal{L}(QX, QX) \cong \mathcal{L}^{\perp}(FQX, FQX) \cong \mathcal{D}(X, jFQX) = 0.$$

De esto $QX = 0$ y por lo tanto $X \in \mathcal{L}$.

(6) $\Rightarrow$ (3). Suponemos que k es un adjunto izquierdo de la inclusión j. Sea $Y \in \mathcal{D}$ y completamos el morfismo adjunto μ_Y a un triángulo exacto

$$X \longrightarrow Y \xrightarrow{\mu_Y} kY \ .$$

Se tiene

- $kY \in \mathcal{L}^{\perp}$.
- $(\forall W \in \mathcal{L}^{\perp}) \quad \mathcal{D}(X, W) = 0$ ya que $\mathcal{D}(Y, W) \xrightarrow{\mu_Y} \mathcal{D}(kY, W)$ es biyectiva.

Por lo que $X \in^{\perp} (\mathcal{L}^{\perp}) = \mathcal{L}$. □

Definición 9.9. Sea $(L, \psi)\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ una localización. Para cada $X \in \mathcal{D}$, se tiene un triangulo exacto

$$\Gamma X \xrightarrow{\phi_X} X \xrightarrow{\psi_X} LX$$

Entonces se obtiene un funtor bien definido $\Gamma\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}$.

Lema 9.10. *El funtor Γ es exacto y se tienen las siguientes propiedades:*

1. $\ker L = \operatorname{im} \Gamma \qquad \ker \Gamma = \operatorname{im} L$.
2. Γ *es adjunto derecho a la inclusión* $\ker L \to \mathcal{D}$.
3. L *es adjunto izquierdo a la inclusión* $\mathcal{D}_L \to \mathcal{D}$.

Demostración. Para cada $X \in \mathcal{D}$, es fácil verificar que ΓX es L-acíclico y para cada objeto W L-acíclico el morfismo $\mathcal{D} \xrightarrow{\phi_X} \mathcal{D}(W, X)$ es una biyección. Por lo tanto, $X \mapsto \Gamma X$ es un adjunto derecho para el funtor inclusión. En particular, el funtor $\mathcal{D} \to \ker L$ es exacto porque es un adjunto de un funtor exacto. El resto de la prueba es igualmente sencillo. □

El par (Γ, ϕ) es un funtor de localización para la categoría opuesta $\mathcal{D}^{op}$. Tales funtores se llaman *colocalización.*

Referencias

[Nee93] Amnon Neeman. *Homotopy limits in triangulated categories.* Vol. 86. Compositio Mathematica, 1993.

[Ver96] Jean-Louis Verdier. *Des catégories dérivées des catégories abéliennes.* Vol. 239. Astérisque. Société Mathématique de France, 1996.

[Nee01] Amnon Neeman. *Triangulated categories.* Vol. 148. Annals of Mathematics Studies, 2001.

[Mel19] Jaime Gabriel Melgar. "Teoría de localización para categorías trianguladas". I.P.N., 2019.

[Kra] Henning Krause. *Localizacion for Triangulated Categories.* URL: `https://www.recercat.cat/bitstream/handle/2072/13070/Pr813.pdf?sequence=1`.