Profr. Efraín Soto Apolinar.

Ecuación ordinaria de la circunferencia

En esta sección estudiatemos la ecuación de la circunferencia en la forma ordinaria.

Cuando hablemos de la forma ordinaria de una cónica, generalmente nos referiremos a un problema sencillo.

Circunferencia con centro en el origen

Definición 1

Ecuación de la circunferencia con centro en el origen
La ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio r es:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Ejemplo 1

La ecuación $x^2 + y^2 = 36$ corresponde a una circunferencia con radio 6 con centro en el origen. ¿Cuáles de los siguientes puntos son internos a la circunferencia?

- ✓ $A(0,0)$
- ✓ $B(1,1)$
- ✓ $C(2,2)$
- ✓ $D(3,3)$
- ✓ $E(4,4)$
- ✓ $F(5,5)$
- ✓ $G(6,6)$

- Necesitamos calcular la distancia desde el origen a cada uno de los puntos A, B, C, D, E, F, G.
- Sabemos que el radio de la circunferencia mide 6 unidades.
- Para empezar, la distancia desde un punto a sí mismo es cero, por eso, el punto A es interno a la circunferencia.
- Pues para que fuera externo se requiriera que la distancia desde el origen hasta él fuera mayor a 6, que es el radio de la circunferencia.
- Ahora calculamos la distancia desde el origen al punto B:

$$\begin{aligned} |\overline{OB}| &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

- Para probar que $\sqrt{2} < 6$ elevamos al cuadrado ambos lados de la desigualdad y obtenemos otra desigualdad válida.
- Ahora estudiamos el caso del punto C:

$$\begin{aligned} |\overline{OB}| &= \sqrt{(2-0)^2 + (2-0)^2} \\ &= \sqrt{8} \end{aligned}$$

- De nuevo, el punto es interno, porque $\sqrt{8} < 6 \qquad \Rightarrow \qquad 8 < 36$

- Ahora estudiamos el caso del punto D:

$$\begin{aligned} |\overline{OB}| &= \sqrt{(3-0)^2+(3-0)^2} \\ &= \sqrt{18} \end{aligned}$$

- De nuevo, el punto es interno, porque $\sqrt{18} < 6 \qquad \Rightarrow \qquad 18 < 36$
- Ahora estudiamos el caso del punto E:

$$\begin{aligned} |\overline{OB}| &= \sqrt{(4-0)^2+(4-0)^2} \\ &= \sqrt{32} \end{aligned}$$

- De nuevo, el punto es interno, porque $\sqrt{32} < 6 \qquad \Rightarrow \qquad 32 < 36$
- Ahora estudiamos el caso del punto F:

$$\begin{aligned} |\overline{OB}| &= \sqrt{(5-0)^2+(5-0)^2} \\ &= \sqrt{50} \end{aligned}$$

- De nuevo, el punto es externo, porque $\sqrt{50} > 6 \qquad \Rightarrow \qquad 50 > 36.$
- Finalmente, el caso del punto G:

$$\begin{aligned} |\overline{OB}| &= \sqrt{(6-0)^2+(6-0)^2} \\ &= \sqrt{8} \end{aligned}$$

- De nuevo, el punto es externo, porque $\sqrt{72} > 6 \qquad \Rightarrow \qquad 72 > 36$
- Realiza una gráfica para verificar que esto es verdad.

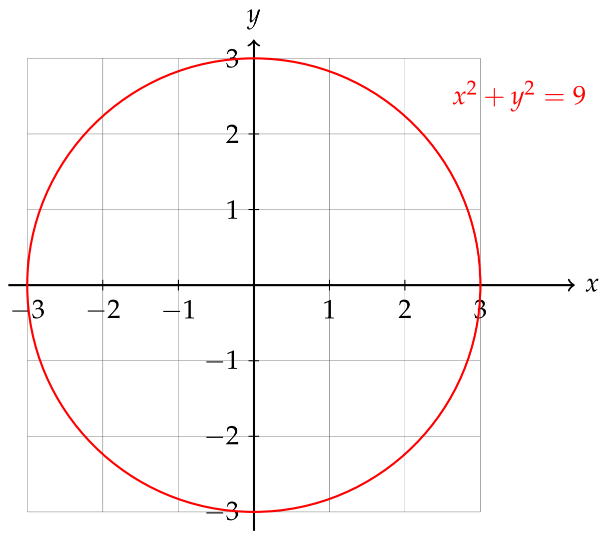
Ejemplo 2 Encuentra la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio $r = 3$ cm.

- Sabemos que el centro está en el origen, por eso la ecuación tiene la forma:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

- Ahora solamente falta sustituir el valor de r en la ecuación para terminar con nuestro problema:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 \\ x^2 + y^2 &= (3)^2 \\ x^2 + y^2 &= 9 \end{aligned}$$



Este ejemplo sirvió solamente para introducir la idea de la ecuación de la circunferencia con centro en el origen.

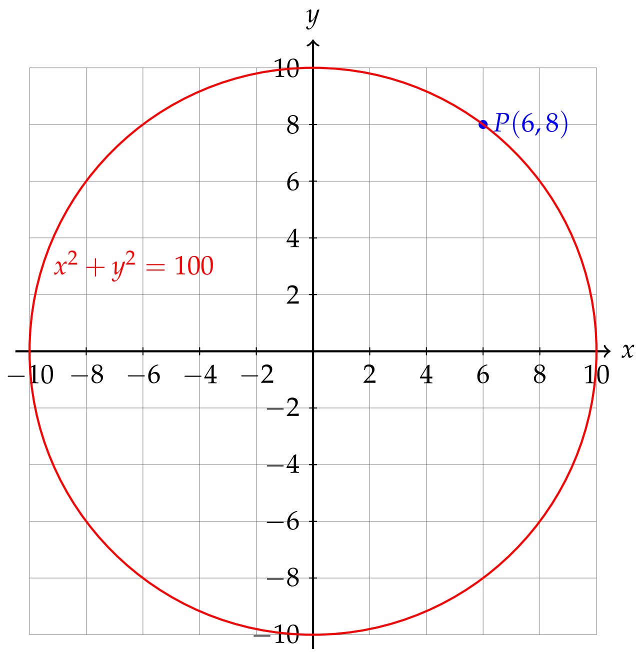
Ejemplo 3

Encuentra la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el origen y pasa por el punto $P(6,8)$.

- Ya sabemos que la circunferencia tiene su centro en el origen, además que pasa por el punto $P(6,8)$.
- Para calcular su radio, basta encontrar la distancia del origen al punto P:

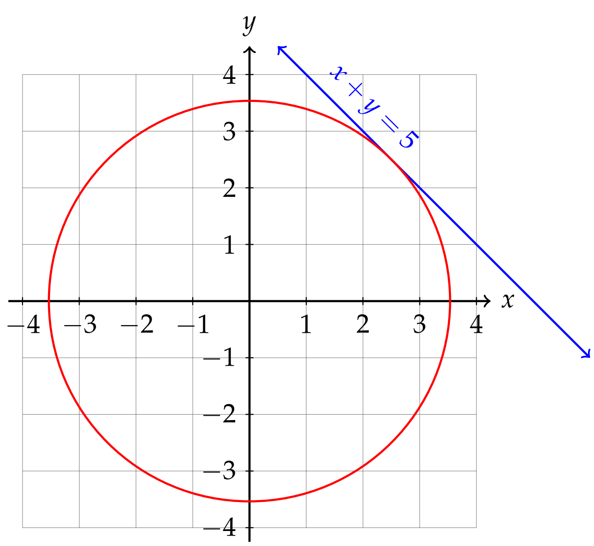
$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(6-0)^2 + (8-0)^2} \\ &= \sqrt{36 + 64} \\ &= \sqrt{100} \\ &= 10 \end{aligned}$$

- Esto nos indica que el radio de la circunferencia es $r = 10$.
- Entonces, la ecuación buscada es: $x^2 + y^2 = 100$.
- La siguiente gráfica muestra a esta circunferencia:



Ejemplo 4	Encuentra la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el origen y es tangente a la recta $x + y = 5$.

- Para resolver el problema es una buena idea empezar dibujando la situación en un plano cartesiano:



- Para encontrar la ecuación de la circunferencia debemos conocer el valor de r.
- Pero r es la distancia del origen a la recta $x + y - 5 = 0$.
- Es decir, necesitamos encontrar la distancia desde el origen a esa recta.

- Para eso utilizamos la fórmula de distancia de un punto a una recta:

$$\begin{aligned} r &= \frac{|A\,x_0 + B\,y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \\ &= \frac{|(1)(0) + (1)(0) - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \\ &= \frac{5}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

- Lo cual implica que $r^2 = 25/2 = 12.5$
- Y la ecuación de la circunferencia es: $x^2 + y^2 = \dfrac{25}{2}$.

Los extremos de un diámetro de una circunferencia son los puntos: $(4, -3)$ y $(-4, 3)$. Encuentra la ecuación de la circunferencia. **Ejemplo 5**

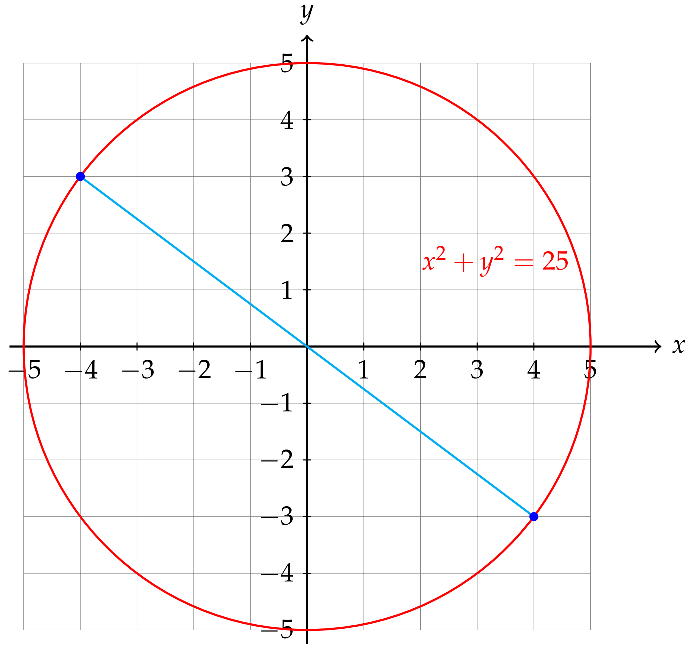
- En este caso no conocemos ni el centro de la circunferencia ni su radio.
- Para conocer su centro, basta calcular las coordenadas del punto medio del diámetro.

$$x_C = \frac{4-4}{2} = 0 \qquad\qquad y_C = \frac{-3+3}{2} = 0$$

- Esto nos indica que la circunferencia está en el origen.
- Ahora necesitamos calcular el radio de la circunferencia.
  - ✓ Podemos calcular la distancia desde el centro a cualquiera de los extremos del diámetro.
  - ✓ Igual, podemos calcular la longitud del diámetro y calculamos después su mitad.
- Calculamos la distancia desde el centro de la circunferencia a cualquiera de los extremos del diámetro:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(4-0)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} \end{aligned}$$

- Entonces, $r = 5$, y la ecuación de la circunferencia es: $x^2 + y^2 = 25$.



Recuerda que elaborar una figura o gráfica para empezar a resolver un problema te ayuda a ordenar las ideas.

Generalmente será fácil resolver problemas de geometría analítica si empiezas dibujando en un sistema de coordenadas la información que el problema te provee. Inclusive este truco te ayuda a entender mejor el problema.

Así que la sugerencia es: en cada problema de geometría analítica empieza siempre la solución dibujando la información en un sistema de coordenadas.

Créditos

Albert Einstein	Todo debe hacerse tan simple como sea posible, pero no más.

Este material se extrajo del libro *Matemáticas I* escrito por Efraín Soto Apolinar. La idea es compartir estos trucos para que más gente se enamore de las matemáticas, de ser posible, mucho más que el autor.

Autor: Efraín Soto Apolinar.

Edición: Efraín Soto Apolinar.

Composición tipográfica: Efraín Soto Apolinar.

Diseño de figuras: Efraín Soto Apolinar.

Productor general: Efraín Soto Apolinar.

Año de edición: 2010

Año de publicación: Pendiente.

Última revisión: 31 de julio de 2010.

Espero que estos trucos se distribuyan entre profesores de matemáticas de todos los niveles y sean divulgados entre otros profesores y sus alumnos.

Este material es de distribución gratuita.

Profesor, agradezco sus comentarios y sugerencias a la cuenta de correo electrónico:

efrain@aprendematematicas.org.mx