Profr. Efraín Soto Apolinar.

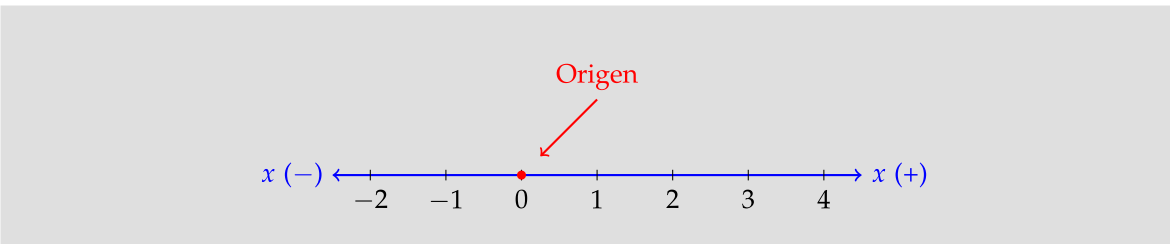
Coordenadas de un punto

En esta sección iniciamos con las definiciones de algunos conceptos básicos sobre los cuales descansan todos los demás conceptos que utilizaremos a lo largo del curso.

Ejes Coordenados

Recta dirigida *Sobre una línea recta eleginos un punto al cual llamaremos origen. A partir de este punto se definen las direcciones una como positiva y la otra como negativa.* *Nosotros utilizaremos una unidad de medida en cada recta dirigida.*	**Definición 1**

Por ejemplo, la siguiente es una recta dirigida:

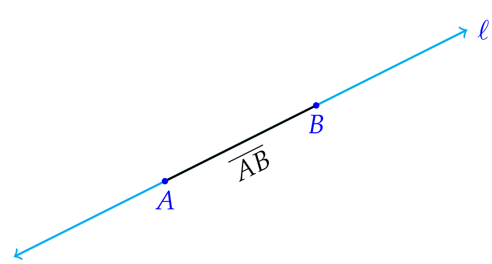


En una recta dirigida definimos una unidad de medida y un origen, donde colocamos el cero.

También definimos en qué dirección se consideran los números positivos. Una vez definida esta dirección, la otra dirección se considera que contiene los números negativos.

Segmento *Es una parte de una recta limitada por dos de sus puntos.*	**Definición 2**

El siguiente segmento está limitado por los puntos A y B y se denota por $\overline{AB}$.



Pero no tenemos por qué conformarnos con usar solamente una recta dirigida. Algunas veces es muy conveniente considerar dos rectas dirigidas.

Por ejemplo, en algunas ciudades, las calles están enumeradas. De manera que una dirección puede ser, Calle 34 Entre 21 y 23. Esto ayuda a localizar de una manera más rápida una ubicación.

Ejes coordenados

Un sistema de ejes coordenados se representa por medio de dos rectas dirigidas, mutuamente perpendiculares.

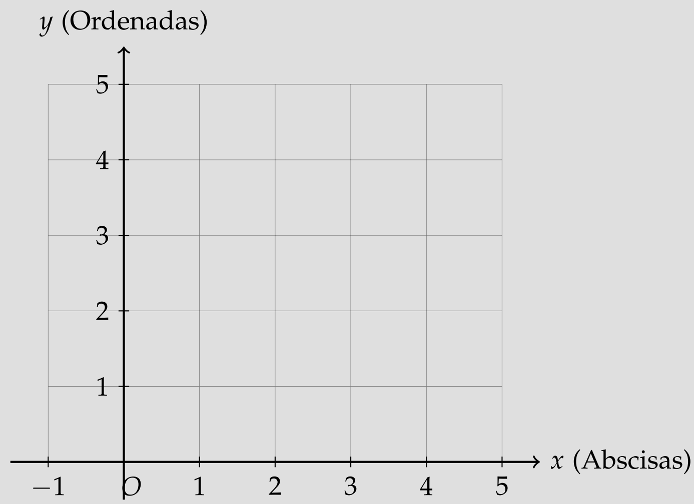
Las dos rectas dirigidas se intersectan en sus respectivos orígenes.

Cada una de las rectas que forman el sistema de ejes coordenados se conoce como eje.

Es común dibujar los sistemas de ejes coordenados con un eje horizontal (abscisas) y el otro vertical (ordenadas) con la unidad de medida común a ambos.

Definición 3

El siguiente es un sistema de ejes coordenados:



De esta manera, cuando elegimos un punto del plano así formado, podemos asignar un único par de valores, que corresponden a la distancia del origen a la coordenada que le corresponde en cada uno de los ejes.

Por ejemplo, fácilmente podemos ubicar el punto $A(3,2)$ en el sistema de ejes coordenados. Primero recorremos a partir del origen 3 unidades y después, verticalmente avanzamos 2 unidades.

Definición 4

Coordenada de un punto

Cuando un punto del plano se define a través de las distancias de sus respectivos ejes al origen, se dice que cada uno de los valores son sus coordenadas.

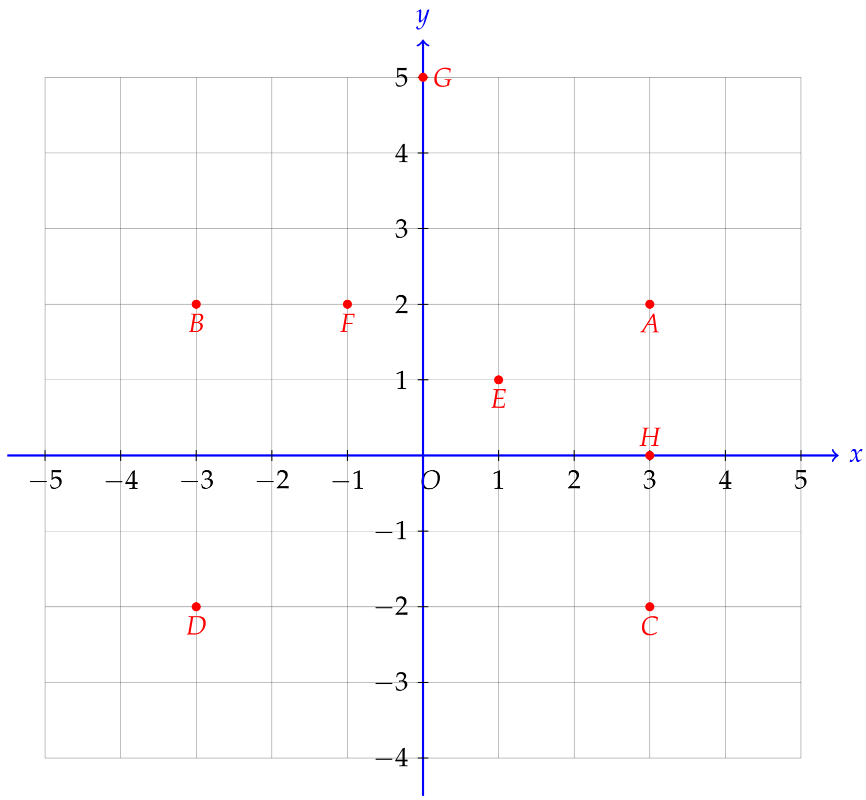
Por ejemplo, en el punto $A(3,2)$ el número 3 es la coordenada de las abscisas, o también del eje horizontal, que comúnmente llamaremos eje x y el número 2 es la coordenada de las ordenadas, o del eje vertival, que llamaremos eje y.

Ejemplo 1

Ubica los siguientes puntos en el sistema de ejes coordenados dado:

✓ $A(3,2)$	✓ $C(3,-2)$	✓ $E(1,1)$	✓ $G(0,5)$
✓ $B(-3,2)$	✓ $D(-3,-2)$	✓ $F(-1,2)$	✓ $H(3,0)$

- Recuerda, siempre debemos primero ubicar la primera coordenada sobre el eje horizontal.



- Junto a la etiqueta que corresponde a cada punto escribe sus coordenadas.

Observa que si $A(x_a, y_a)$ y $B(x_b, y_b)$, entonces, $A = B$ solamente si $x_a = x_b$ y también, $y_a = y_b$.

En palabras, dos puntos son el mismo punto si tienen exactamente las mismas coordenadas (en el mismo sistema de ejes coordenados).

En la geometría analítica frecuentemente necesitaremos calcular la distancia entre dos puntos, para lo cual nos será de gran ayuda la siguiente fórmula:

Definición 5

Distancia entre dos puntos

Sean $P(x_p, y_p)$ y $Q(x_q, y_q)$ dos puntos del plano. La distancia entre ellos, medido en la unidad de medida del sistema de coordenadas es igual a:

$$D = \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2}$$

A partir de la fórmula anterior, podemos deducir las siguientes:

Comentario

Condiciones que satisface la distancia entre dos puntos:

- ✓ La distancia entre dos puntos del plano cartesiano siempre es un número positivo.
- ✓ La distancia de un punto a sí mismo siempre es igual a cero.
- ✓ La distancia de P a Q es igual a la distancia del punto Q al punto P.

Ejemplo 2 Encuentra la distancia entre los puntos $P(2,3)$ y $Q(6,6)$.

- Podemos aplicar directamente la fórmula y sustituir las coordenadas de los puntos:

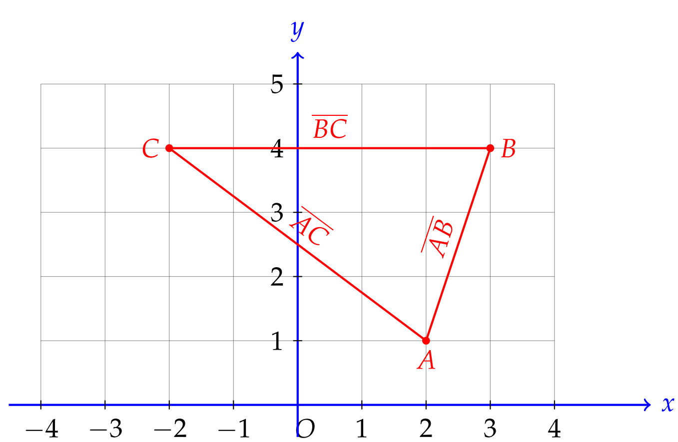
$$\begin{aligned} D &= \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2} \\ &= \sqrt{(6-2)^2 + (6-3)^2} \\ &= \sqrt{(4)^2 + (3)^2} \\ &= \sqrt{16+9} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5 \end{aligned}$$

- Entonces, si el sistema de coordenadas tiene por unidad de medida el centímetro, la distancia entre los puntos $P(2,3)$ y $Q(6,6)$ será de 5 cm.
- Se te queda como ejercicio verificar la tercera condición que satisface la distancia entre los puntos P y Q.

En este curso vamos a utilizar las definiciones de la geometría plana para poder resolver muchos problemas y probar propiedades de las figuras geométricas, pero ahora vamos a utlizar el álgebra para poder demostrar o identificar propiedades de los objetos geométricos con los que nos encontraremos.

Ejemplo 3 Verifica si el triángulo con vértices en los puntos $A(2,1)$, $B(3,4)$ y $C(-2,4)$ es isósceles.

- Para saber si es isósceles o no, debemos asegurarnos que dos de sus lados midan lo mismo.
- Así que tenemos que encontrar la longitud de cada uno de sus lados.
- Realizamos un dibujo para representar la situación:



- Al parecer, los lados que tienen la misma longitud son $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$.

- Ahora encontramos la longitud del lado $\overline{AC}$:

$$\begin{aligned} D_{\overline{AC}} &= \sqrt{(x_c - x_a)^2 + (y_c - y_a)^2} \\ &= \sqrt{(-2-2)^2 + (4-1)^2} \\ &= \sqrt{(-4)^2 + (3)^2} = \sqrt{16+9} \\ &= \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

- Por otra parte, la longitud del lado $\overline{BC}$ es:

$$\begin{aligned} D_{\overline{BC}} &= \sqrt{(x_c - x_b)^2 + (y_c - y_b)^2} \\ &= \sqrt{(-2-3)^2 + (4-4)^2} \\ &= \sqrt{(-5)^2 + (0)^2} = \sqrt{25+0} \\ &= \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

- Entonces, el triángulo sí es un triángulo isósceles.

Profesor: Sugiera a los estudiantes calcular la longitud del lado $\overline{AB}$.

$$|\overline{AB}| = \sqrt{10}$$

Definición 6

Punto de división
Sean P y Q dos puntos fijos en una recta dirigida. Se dice que el punto M divide al segmento $\overline{PQ}$ en otros dos segmentos $\overline{PM}$ y $\overline{MQ}$.

Lo interesante del punto de división consiste en la proporción de las longitudes de los segmentos formados por él.

Definición 7

Razón de división
La razón de división r ocasionada por el punto de división M sobre el segmento $\overline{PQ}$ es:

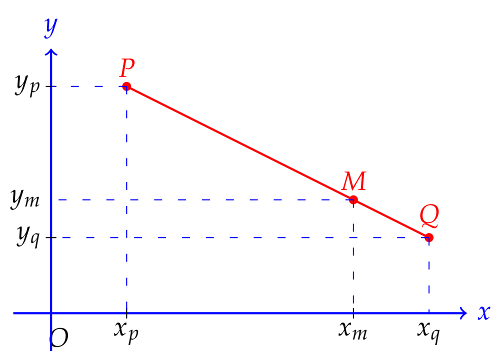
$$r = \frac{\overline{PM}}{\overline{MQ}}$$

Si consideramos que $M(x_m, y_m)$ es el punto de división del segmento $\overline{PQ}$, entonces, podemos escribir:

$$r = \frac{x_m - x_p}{x_q - x_m}$$

y de manera semejante:

$$r = \frac{y_m - y_p}{y_q - y_m}$$



A partir de cada una de las ecuaciones podemos despejar x_m y y_m respectivamente, que es, la mayoría de las veces, lo que necesitaremos encontrar:

$$\begin{aligned}
r &= \frac{x_m - x_p}{x_q - x_m} \\
r\,(x_q - x_m) &= x_m - x_p \\
r\,x_q - r\,x_m &= x_m - x_p \\
r\,x_q + x_p &= x_m + r\,x_m \\
r\,x_q + x_p &= x_m(1+r) \\
x_m &= \frac{r\,x_q + x_p}{1+r}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r &= \frac{y_p - y_m}{y_m - y_q} = \frac{y_m - y_p}{y_q - y_m} \\
r\,(y_q - y_m) &= y_m - y_p \\
r\,y_q - r\,y_m &= y_m - y_p \\
r\,y_q + y_p &= y_m + r\,y_m \\
r\,y_q + y_p &= y_m(1+r) \\
y_m &= \frac{r\,y_q + y_p}{1+r}
\end{aligned}$$

Es importante recordar que r es la proporción de las longitudes de los segmentos formados al incluir el punto de división M en el segmento.

La proporción es una constante que se define como la razón de la longitud del semento $\overline{PM}$ entre la longitud del segmento $\overline{MQ}$.

Definición 8

Coordenadas del punto de división con una razón dada

Las coordenadas del punto de división $M(x_m, y_m)$ del segmento $\overline{PQ}$ con $P(x_p, y_p)$ y $Q(x_q, y_q)$ con una razón r, se calculan con las siguientes fórmulas:

$$x_m = \frac{r\,x_q + x_p}{1+r} \qquad\qquad y_m = \frac{r\,y_q + y_p}{1+r}$$

Ejemplo 4

Encuentra las coordenadas del punto $M(x_m, y_m)$ que divide al segmento cuyos extremos son los puntos $P(1, -1)$, y $Q(7, 2)$ en la razón $r = 2$.

- Tenemos todos los datos:

✓ $r = 2$ ✓ $x_p = 1$, $y_p = -1$ ✓ $x_q = 7$, $y_q = 2$

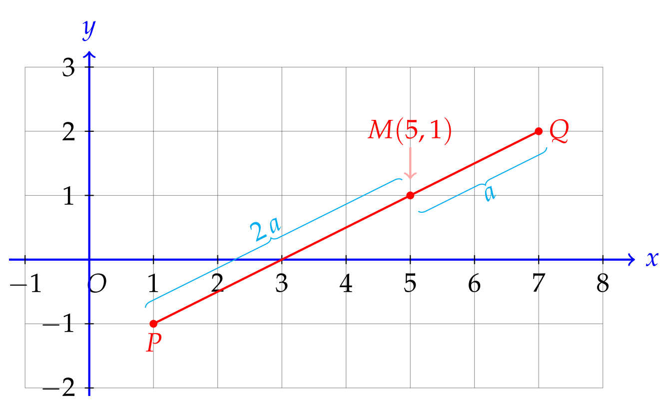
- Lo único que necesitamos es sustituir en las fórmulas:

$$\begin{aligned}
x_m &= \frac{2\,(7) + 1}{1+2} \\
&= \frac{15}{3} \\
&= 5
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
y_m &= \frac{2\,(2) - 1}{1+2} \\
&= \frac{3}{3} \\
&= 1
\end{aligned}$$

- La siguiente figura muestra geométricamente el resultado:

Profesor:
Muestre que:

$$r = \frac{\overline{PM}}{\overline{MQ}} = 2$$



Un caso particular muy importante ocurre cuando consideramos el punto medio.

Entonces, $r = 1$, porque queremos que ambos segmentos $\overline{PM}$ y $\overline{MQ}$ tengan la misma longitud.

En este caso:

$$\bar{x} = \frac{x_q + x_p}{2} \qquad \bar{y} = \frac{y_q + y_p}{2}$$

Definición 9

Punto medio

Las coordenadas del punto medio $M(\bar{x}, \bar{y})$ del segmento $\overline{PQ}$ con $P(x_p, y_p)$ y $Q(x_q, y_q)$ se calcula con las siguientes fórmulas:

$$\bar{x} = \frac{x_q + x_p}{2} \qquad \bar{y} = \frac{y_q + y_p}{2}$$

Una forma sencilla de memorizar este par de fórmulas es la siguiente:

Comentario

La coordenada del punto medio se calcula con el promedio

Observa que en cada fórmula debemos calcular el promedio de las coordenadas de los puntos extremos del segmento para calcular la coordenada de su punto medio. Así de fácil.

Gracias a la propiedad de conmutatividad, el punto medio de un segmento es independiente del orden. Es decir, no importa qué punto sustituyas primero y cuál después, siempre obtienes el mismo resultado. Después de todo, el segmento $\overline{PQ}$ es idéntico al segmento $\overline{QP}$.

Excepto en la dirección.

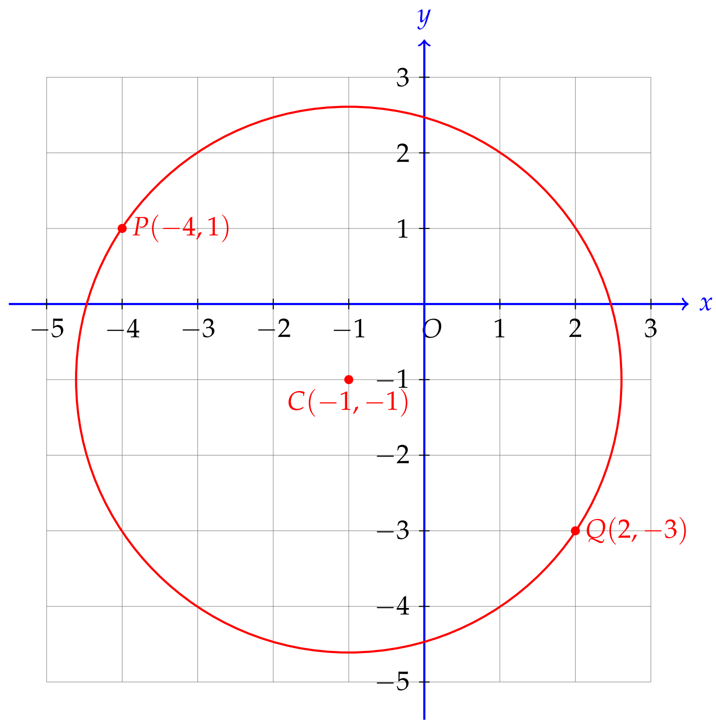
Ejemplo 5

Los extremos del diámetro de una círculo son los puntos $P(-4, 1)$ y $Q(2, -3)$. Encuentra las coordenadas de su centro $C(h, k)$.

- Sabemos que el centro del círculo siempre es el punto medio del diámetro.
- Así que en este caso debemos encontrar el punto medio del segmento $\overline{PQ}$.
- Sustituimos los valores de las coordenadas de los puntos en las fórmulas:

$$\begin{aligned} h &= \frac{-4+2}{2} \\ &= \frac{-2}{3} \\ &= -1 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} k &= \frac{1-3}{2} \\ &= \frac{-2}{2} \\ &= -1 \end{aligned}$$

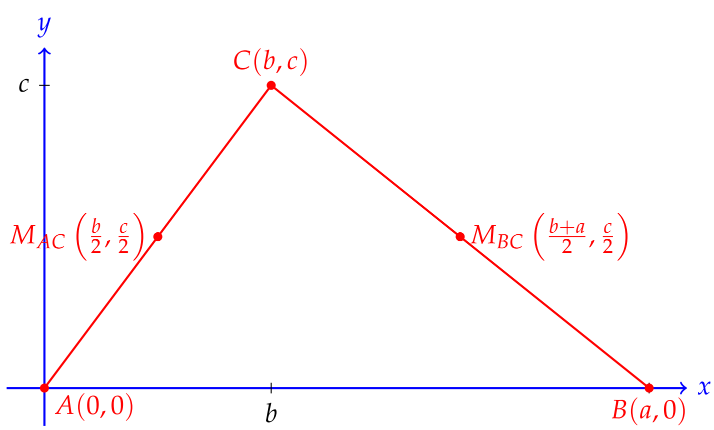
- Entonces, el centro del círculo es el punto $C(-1, -1)$.
- Geométricamente, el resultado es el siguiente:



Estas fórmulas se estarán utilizando a lo largo de todo el curso, así que es mejor que las vayas memorizando.

Ejemplo 6 Demuestra que la longitud del segmento que se forma al unir los puntos medios de dos de los lados de un triángulo mide la mitad del otro lado.

- Consideramos el triángulo con vértices en los siguientes puntos:



- La distancia desde el punto medio del lado $\overline{AC}$ hasta el punto medio del lado $\overline{BC}$ es:

$$\overline{M_{AC}M_{BC}} = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2} - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2} - \frac{c}{2}\right)^2}$$

- Podemos simplificar esta expresión para obtener:

$$\begin{aligned}\overline{M_{AC}M_{BC}} &= \sqrt{\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}-\frac{b}{2}\right)^2+0}\\ &= \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2}\\ &= \frac{|a|}{2}\end{aligned}$$

  Que es precisamente lo que queríamos demostrar.

Siempre que encuentres problemas donde requieras demostrar una aseveración, escribe las coordenadas suponiendo que son números.

Trátalos como si fueran números siempre, indicando las operaciones que debes hacer con ellos y trata de expresar tus resultados de la manera más simplificada que te sea posible.

Cuando encuentres lo que deseas demostrar has terminado.

Estos problemas tienen exactamente el mismo nivel de dificultad que en el que te dan números específicos para las coordenadas de puntos, etc., pero tienen un mayor nivel de abstracción, porque debes suponer que cada letra es un número.

El método de solución del problema no cambia en forma alguna.

Si tienes dificultad para resolver un problema usando las literales, sustituye números en su lugar, resuelve el problema y después intenta resolverlo con letras usando el método que usaste para resolverlo con números en lugar de literales.

Créditos

Todo debe hacerse tan simple como sea posible, pero no más.	**Albert Einstein**

Este material se extrajo del libro *Matemáticas I* escrito por Efraín Soto Apolinar. La idea es compartir estos trucos para que más gente se enamore de las matemáticas, de ser posible, mucho más que el autor.

Autor: Efraín Soto Apolinar.

Edición: Efraín Soto Apolinar.

Composición tipográfica: Efraín Soto Apolinar.

Diseño de figuras: Efraín Soto Apolinar.

Productor general: Efraín Soto Apolinar.

Año de edición: 2010

Año de publicación: Pendiente.

Última revisión: 31 de julio de 2010.

Espero que estos trucos se distribuyan entre profesores de matemáticas de todos los niveles y sean divulgados entre otros profesores y sus alumnos.

Este material es de distribución gratuita.

Profesor, agradezco sus comentarios y sugerencias a la cuenta de correo electrónico:

efrain@aprendematematicas.org.mx