Profr. Efraín Soto Apolinar.

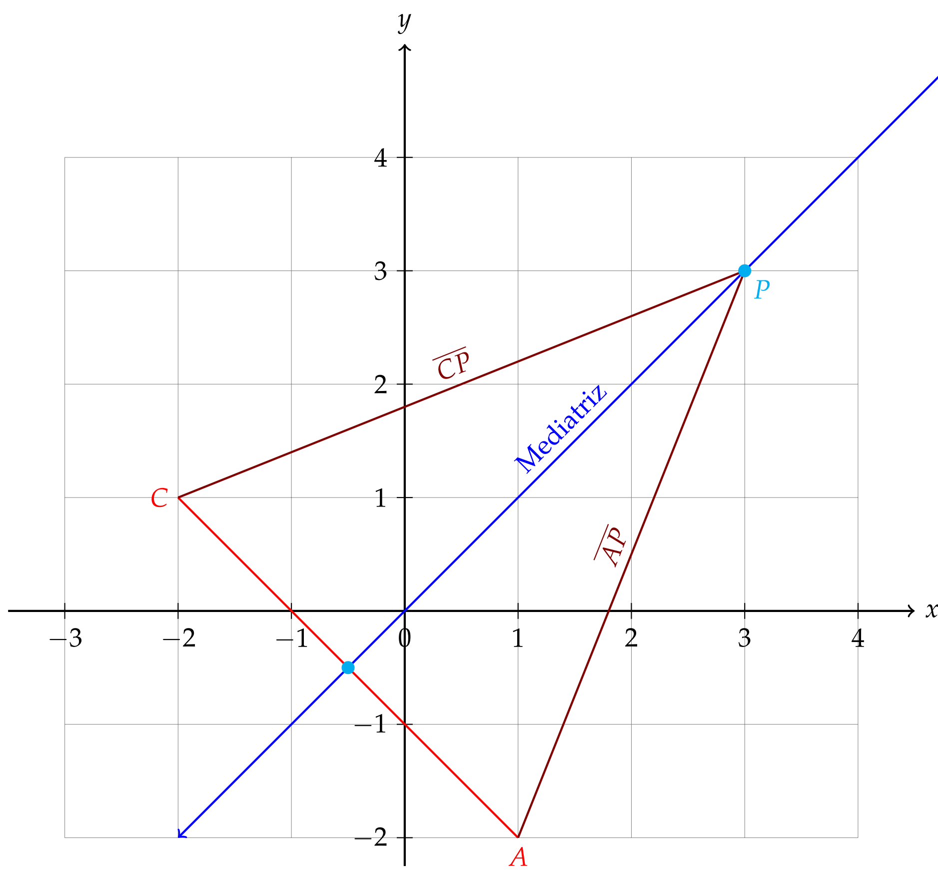
Circunferencia que pasa por tres puntos

En la sección *Ecuaciones de las rectas notables del triángulo* calculamos el punto donde se intersectan las tres mediatrices de los lados de un triángulo.

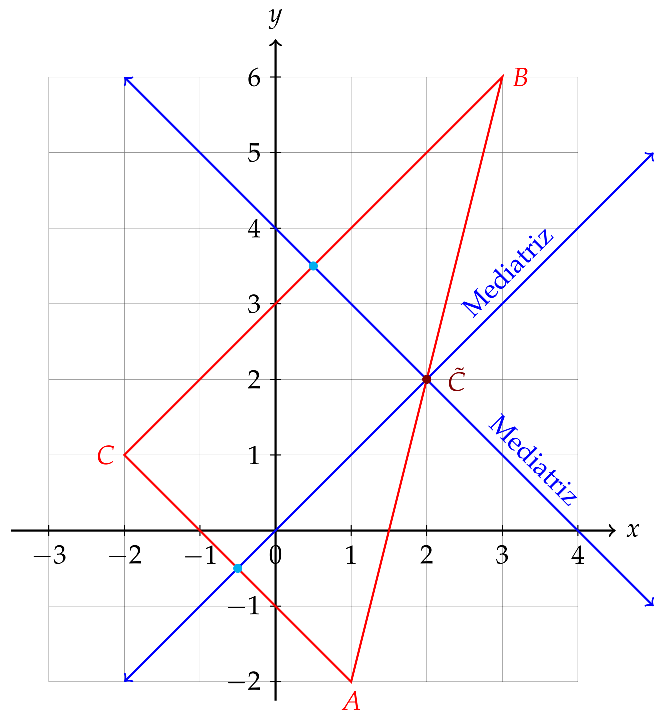
Este punto, llamado circuncentro es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

Condiciones analíticas y geométricas

Observa que cualquier punto P que pertenece a la mediatriz de un segmento está a la misma distancia de los extremos del segmento sobre la cual se le construyó:



Si dibujamos un triángulo y trazamos las mediatrices de dos de sus lados, el punto donde se intersectan está a la misma distancia de los tres vértices.



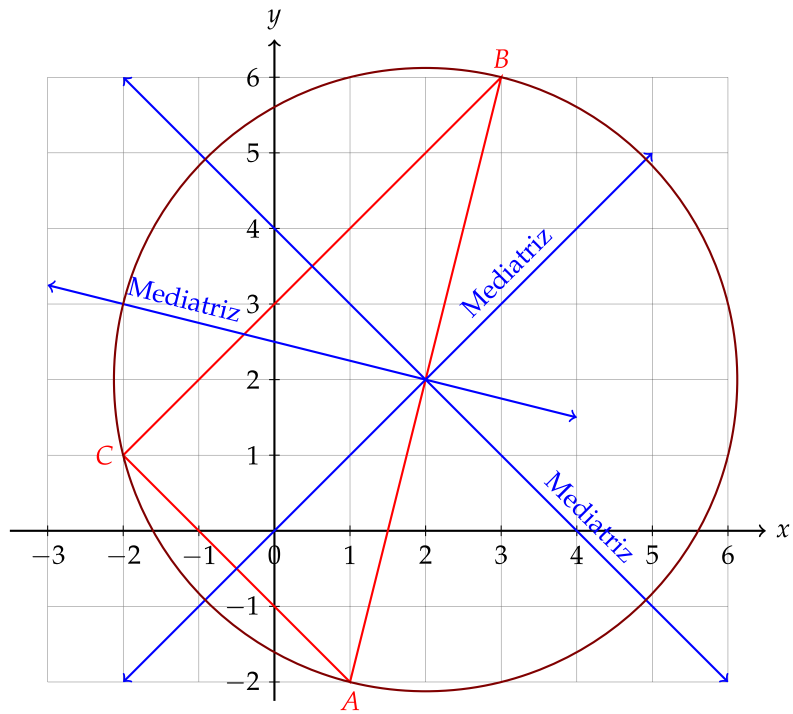
- ✓ El punto $\tilde{C}$ es el punto donde se intersectan las dos mediatrices trazadas.
- ✓ Por pertenecer a la mediatriz del lado $\overline{AC}$ está a la misma distancia del vértice A como del vértice C. Es decir $|\overline{A\tilde{C}}| = |\overline{C\tilde{C}}|$.
- ✓ De manera semejante, por pertenecer a la mediatriz del lado $\overline{BC}$, está a la misma distancia del vértice B como del vértice C. Matemáticamente esto se denota por: $|\overline{B\tilde{C}}| = |\overline{C\tilde{C}}|$.
- ✓ Pero ya se había dicho que $|\overline{A\tilde{C}}| = |\overline{C\tilde{C}}|$. Entonces

$$|\overline{A\tilde{C}}| = |\overline{B\tilde{C}}| = |\overline{C\tilde{C}}|$$

- ✓ Esto obliga a la mediatriz del lado $\overline{AB}$ a pasar por el punto $\tilde{C}$, porque está a la misma distancia de los vértices A y B.
- ✓ En conclusión, el punto donde se intersectan las tres mediatrices está a la misma distancia de los tres vértices.

Esto nos ayuda porque si dibujamos una circunferencia con centro en el circuncentro del triángulo, y radio igual a la distancia del circuncentro a cualquiera de los vértices del triángulo, la circunferencia pasará por los tres vértices.

El triángulo queda inscrito a la circunferencia y decimos que la circunferencia está circunscrita al triángulo. Por esta razón el punto donde se intesectan las tres mediatrices de un triángulo se llama circuncentro.



Esto nos sugiere que para calcular la ecuación de una circunferencia circunscrita a un triángulo dados los vértices del mismo encontremos las ecuaciones de dos de sus mediatrices, después el punto donde se intersectan. Este punto será el centro de la circunferencia. Para calcular el radio podemos calcular la distancia del cincuncentro a cualquiera de los vértices del triángulo y entonces podremos calcular la ecuación de la circunferencia.

Sin embargo hay otro método más sencillo. Como la ecuación de la circunferencia en su forma general es:

$$x^2 + y^2 + D\,x + E\,y + F = 0$$

donde: $D = -2\,h$, $E = -2\,k$, y $F = h^2 + k^2 - r^2$.

Como sabemos que la circunferencia debe pasar por los tres vértices, podemos sustituir sus coordenadas en la ecuación y así obtendremos tres ecuaciones, una por cada vértice y al resolver ese sistema de ecuaciones lineales encontraremos las incógnitas, que son D, E y F.

Una vez que conozcamos los valores de estas incógnitas podremos calcular los valores que nos interesan: h, k y r.

Obtención de la ecuación dados tres puntos

Supongamos que queremos calcular la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$ y $C(x_c, y_c)$. Al sustituir en la ecuación de la circunferencia en su forma general obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
x_a\,D + y_a\,E + F &= -(x_a^2 + y_a^2)\\
x_b\,D + y_b\,E + F &= -(x_b^2 + y_b^2)\\
x_c\,D + y_c\,E + F &= -(x_c^2 + y_c^2)
\end{aligned}$$

Al resolver este S.E.L. encontramos los valores de D, E y F. Usando las definiciones: $D = -2\,h$, $E = -2\,k$, y $F = h^2 + k^2 - r^2$ podemos calcular los valores que nos interesan.

Ejemplo 1 Calcula la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos: $P(-2,3)$, $Q(-2,-3)$ y $R(6,-1)$.

- Vamos a sustituir los valores de las coordenadas de cada punto en la ecuación de la circunferencia en la forma general.
- Así por cada punto obtendremos una ecuación.
- Ecuación para el punto P:

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 + D\,x + E\,y + F &= 0\\
(-2)^2 + (3)^2 - 2\,D + 3\,E + F &= 0\\
4 + 9 - 2\,D + 3\,E + F &= 0\\
-2\,D + 3\,E + F &= -13
\end{aligned}$$

- De manera semejante obtenemos la ecuación que le corresponde a Q:

$$\begin{aligned}
(-2)^2 + (-3)^2 - 2\,D - 3\,E + F &= 0\\
4 + 9 - 2\,D - 3\,E + F &= 0\\
-2\,D - 3\,E + F &= -13
\end{aligned}$$

- Y finalmente para el punto R:

$$\begin{aligned}
(6)^2 + (-1)^2 + 6\,D - E + F &= 0\\
36 + 7 + 6\,D - E + F &= 0\\
6\,D - E + F &= -37
\end{aligned}$$

- Así hemos obtenido el siguiente S.E.L.:

$$\begin{aligned}
-2\,D + 3\,E + F &= -13\\
-2\,D - 3\,E + F &= -13\\
6\,D - E + F &= -37
\end{aligned}$$

- Ahora debemos resolverlo.
- Vamos a utilizar el método de determinantes.
- Empezamos escribiendo el S.E.L. en forma matricial:

$$\left[\begin{array}{rrr|r}
-2 & 3 & 1 & -13\\
-2 & -3 & 1 & -13\\
6 & -1 & 1 & -37
\end{array}\right]$$

- Calculamos primero el determinante principal:

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1\\ -2 & -3 & 1\\ 6 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (6) + (2) + (18) - (-18) - (2) - (-6) = 48$$

- Dado que es distinto de cero, el S.E.L. tiene solución única.

- Ahora calculamos los determinantes auxiliares para las incógnitas del S.E.L.
- Determinante auxiliar para D:

$$\Delta_D = \begin{vmatrix} -13 & 3 & 1 \\ -13 & -3 & 1 \\ -37 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (39) + (13) + (-111) - (111) - (13) - (-39) = -144$$

- Determinante auxiliar para E:

$$\Delta_E = \begin{vmatrix} -2 & -13 & 1 \\ -2 & -13 & 1 \\ 6 & -37 & 1 \end{vmatrix} = (26) + (74) + (-78) - (-78) - (74) - (26) = 0$$

- Determinante auxiliar para F:

$$\Delta_F = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -13 \\ -2 & -3 & -13 \\ 6 & -1 & -37 \end{vmatrix} = (-222) + (-26) + (-234) - (234) - (-26) - (222) = -912$$

- Finalmente, tenemos:

$$\begin{aligned} D &= \frac{\Delta_D}{\Delta_p} = \frac{-144}{48} = -3 \\ E &= \frac{\Delta_E}{\Delta_p} = \frac{0}{48} = 0 \\ F &= \frac{\Delta_F}{\Delta_p} = \frac{-912}{48} = -19 \end{aligned}$$

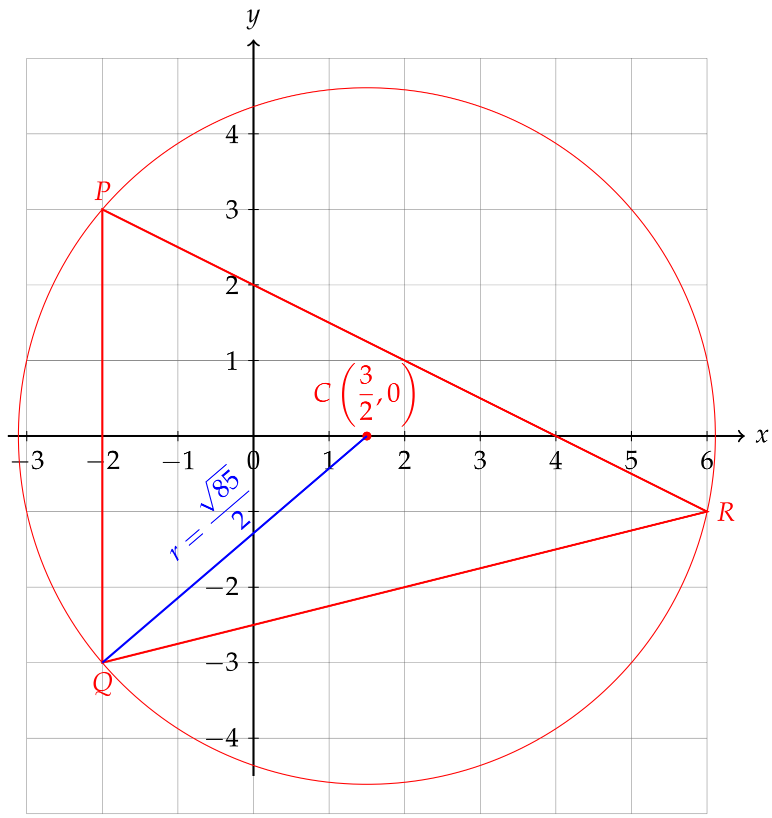
- Y sabiendo que $D = -3 = -2\,h$ es fácil concluir que: $h = 3/2$.
- También, si $E = 0 = -2\,k$ implica que $k = 0$.
- Finalmente, sabemos que $F = -19 = h^2 + k^2 - r^2 = (1.5)^2 + (0)^2 - r^2$, de donde:

$$r^2 = 19 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{85}{4} \qquad \Rightarrow \qquad r = \frac{\sqrt{85}}{2}$$

- Finalmente podemos calcular la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $P(-2,3)$, $Q(-2,-3)$ y $R(6,-1)$:

$$\begin{aligned} (x-h)^2 + (y-k)^2 &= r^2 \\ \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 &= \frac{84}{4} \end{aligned}$$

- La siguiente figura muestra la situación:



- Se te queda como ejercicio escribir la ecuación de esta circunferencia en la forma general.

Ejemplo 2 Calcula la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos: $P(-4,1)$, $Q(3,-2)$ y $R(6,5)$.

- Vamos a sustituir los valores de las coordenadas de cada punto en la ecuación de la circunferencia en la forma general para obtener el S.E.L..
- Ecuación para el punto P:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + D\,x + E\,y + F &= 0 \\ (-4)^2 + (1)^2 - 4\,D + E + F &= 0 \\ 16 + 1 - 4\,D + E + F &= 0 \\ -4\,D + E + F &= -17 \end{aligned}$$

- Ecuación que le corresponde al punto Q:

$$\begin{aligned} (3)^2 + (-2)^2 + 3\,D - 2\,E + F &= 0 \\ 9 + 4 + 3\,D - 2\,E + F &= 0 \\ 3\,D - 2\,E + F &= -13 \end{aligned}$$

- Y finalmente para el punto R:

$$\begin{aligned}
(6)^2+(5)^2+6\,D+5\,E+F &= 0\\
36+25+6\,D+5\,E+F &= 0\\
6\,D+5\,E+F &= -61
\end{aligned}$$

- Así hemos obtenido el siguiente S.E.L.:

$$\begin{aligned}
-4\,D+E+F &= -17\\
3\,D-2\,E+F &= -13\\
6\,D+5\,E+F &= -61
\end{aligned}$$

- Ahora debemos resolverlo.
- Escribimosel S.E.L. en forma matricial:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -4 & 1 & 1 & -17\\ 3 & -2 & 1 & -13\\ 6 & 5 & 1 & -61 \end{array}\right]$$

- Calculamos primero el determinante principal:

$$\Delta_p = \left|\begin{array}{rrr} -4 & 1 & 1\\ 3 & -2 & 1\\ 6 & 5 & 1 \end{array}\right| = (8)+(15)+(6)-(-12)-(-20)-(3) = 58$$

- Dado que es distinto de cero, el S.E.L. tiene solución única.
- Ahora calculamos los determinantes auxiliares para las incógnitas del S.E.L.
- Determinante auxiliar para D:

$$\Delta_D = \left|\begin{array}{rrr} -17 & 1 & 1\\ -13 & -2 & 1\\ -61 & 5 & 1 \end{array}\right| = -116$$

- Determinante auxiliar para E:

$$\Delta_E = \left|\begin{array}{rrr} -4 & -17 & 1\\ 3 & -13 & 1\\ 6 & -61 & 1 \end{array}\right| = -348$$

- Determinante auxiliar para F:

$$\Delta_F = \left|\begin{array}{rrr} -4 & 1 & -17\\ 3 & -2 & -13\\ 6 & 5 & -61 \end{array}\right| = -1102$$

- Finalmente, tenemos:

$$\begin{aligned}
D &= \frac{\Delta_D}{\Delta_p} = \frac{-116}{58} = -2\\
E &= \frac{\Delta_E}{\Delta_p} = \frac{-348}{58} = -6\\
F &= \frac{\Delta_F}{\Delta_p} = \frac{-1102}{58} = -19
\end{aligned}$$

- Entonces, $D = -2 = -2\,h$ implica que: $h = 1$.
- También, si $E = -6 = -2\,k$ se sigue que $k = 3$.
- Y si $F = -19 = h^2 + k^2 - r^2 = (1)^2 + (3)^2 - r^2$, se sigue que:

$$r^2 = 29 \qquad \Rightarrow \qquad r = \sqrt{29} \approx 5.385$$

- Finalmente podemos calcular la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $P(-4,1)$, $Q(3,-2)$ y $R(6,5)$:

$$\begin{aligned}(x-h)^2 + (y-k)^2 &= r^2\\ (x-1)^2 + (y-3)^2 &= 29\end{aligned}$$

- Se te queda como ejercicio graficar la circunferencia verificando que pase por los tres puntos y escribir la ecuación en su forma general.

Ejemplo 3 Calcula la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo que tiene sus vértices en los puntos: $P(-4,3)$, $Q(2,-3)$ y $R(6,3)$.

- Este problema en esencia es el mismo que el que hemos resuelto en los ejemplos anteriores.
- Vamos a sustituir los valores de las coordenadas de cada punto en la ecuación de la circunferencia en la forma general para obtener el S.E.L.
- Ecuación para el punto P:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + D\,x + E\,y + F &= 0\\ (-4)^2 + (3)^2 - 4\,D + 3\,E + F &= 0\\ 16 + 9 - 4\,D + 3\,E + F &= 0\\ -4\,D + 3\,E + F &= -25\end{aligned}$$

- Ecuación que le corresponde al punto Q:

$$\begin{aligned}(2)^2 + (-3)^2 + 3\,D - 2\,E + F &= 0\\ 4 + 9 + 2\,D - 3\,E + F &= 0\\ 2\,D - 3\,E + F &= -13\end{aligned}$$

- Y finalmente para el punto R:

$$\begin{aligned}(6)^2 + (3)^2 + 6\,D + 3\,E + F &= 0\\ 36 + 9 + 6\,D + 3\,E + F &= 0\\ 6\,D + 3\,E + F &= -45\end{aligned}$$

- Así hemos obtenido el siguiente S.E.L.:

$$\begin{aligned}-4\,D + 3\,E + F &= -25\\ 2\,D - 3\,E + F &= -13\\ 6\,D + 3\,E + F &= -45\end{aligned}$$

- Ahora debemos resolverlo.
- Escribimosel S.E.L. en forma matricial:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -4 & 3 & 1 & -25 \\ 2 & -3 & 1 & -13 \\ 6 & 3 & 1 & -45 \end{array}\right]$$

- Calculamos primero el determinante principal:

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (12) + (6) + (18) - (-18) - (-12) - (6) = 60$$

- Ahora calculamos los determinantes auxiliares para las incógnitas del S.E.L.
- Determinante auxiliar para D:

$$\Delta_D = \begin{vmatrix} -25 & 3 & 1 \\ -13 & -3 & 1 \\ -45 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -120$$

- Determinante auxiliar para E:

$$\Delta_E = \begin{vmatrix} -4 & -25 & 1 \\ 2 & -13 & 1 \\ 6 & -45 & 1 \end{vmatrix} = -240$$

- Determinante auxiliar para F:

$$\Delta_F = \begin{vmatrix} -4 & 3 & -25 \\ 2 & -3 & -13 \\ 6 & 3 & -45 \end{vmatrix} = -1260$$

- Finalmente, tenemos:

$$\begin{aligned} D &= \frac{\Delta_D}{\Delta_p} = \frac{-120}{60} = -2 \\ E &= \frac{\Delta_E}{\Delta_p} = \frac{-240}{60} = -4 \\ F &= \frac{\Delta_F}{\Delta_p} = \frac{-1260}{60} = -21 \end{aligned}$$

- Entonces, $D = -2 = -2\,h$ implica que: $h = 1$.
- También, si $E = -4 = -2\,k$ se sigue que $k = 2$.
- Y si $F = -21 = h^2 + k^2 - r^2 = (1)^2 + (2)^2 - r^2$. De donde:

$$r^2 = 26 \qquad \Rightarrow \qquad r = \sqrt{26} \approx 5.099$$

- Finalmente podemos calcular la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $P(-4,3)$, $Q(2,-3)$ y $R(6,3)$:

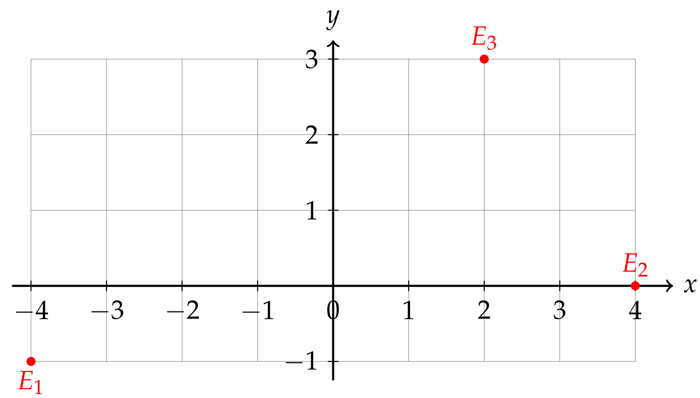
$$\begin{aligned} (x-h)^2 + (y-k)^2 &= r^2 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 &= 26 \end{aligned}$$

- Se te queda como ejercicio graficar la circunferencia verificando que pase por los tres puntos y escribir la ecuación en su forma general.

Ejemplo 4

En un mapa se han localizado las escuelas E_1, E_2 y E_3 ubicadas en las coordenadas $E_1(-4,-1)$, $E_2(4,0)$ y $E_3(2,3)$ medidas en kilómetros. Se planea construir un centro de apoyo escolar que esté ubicado a la misma distancia de las tres escuelas. ¿Cuáles son las coordenadas del punto donde deben ubicar el centro de apoyo escolar?, ¿y a qué distancia se encuentra de cada escuela?

- Tenemos la siguiente situación gráfica:



- Debemos calcular las coordenadas del punto que se encuentre a la misma distancia de las tres escuelas.
- Una vez que las conozcamos podremos calcular la distancia a cada escuela.
- Como el punto que buscamos está a la misma distancia de las escuelas podemos traducir el problema al siguiente:

Comentario

Calcula las coordenadas del circuncentro del triángulo que tiene sus vértices en los puntos: $E_1(-4,-1)$, $E_2(4,0)$ y $E_3(2,3)$.

El circuncentro corresponde al punto donde debemos ubicar el centro de apoyo escolar y los vértices del triángulo corresponden a las escuelas.

- Ahora vamos a resolver el problema usando el método de los ejemplos anteriores.
- Ecuación para la escuela E_1:

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 + D\,x + E\,y + F &= 0\\
(-4)^2 + (-1)^2 - 4\,D - E + F &= 0\\
16 + 1 - 4\,D - E + F &= 0\\
-4\,D - E + F &= -17
\end{aligned}$$

- Ecuación para la escuela E_2:

$$\begin{aligned}
(4)^2 + (0)^2 + 4\,D + (0)\,E + F &= 0\\
16 + 4\,D + F &= 0\\
4\,D + F &= -16
\end{aligned}$$

- Y para la escuela E_3:

$$\begin{aligned}
(2)^2 + (3)^2 + 2\,D + 3\,E + F &= 0 \\
4 + 9 + 2\,D + 3\,E + F &= 0 \\
2\,D + 3\,E + F &= -13
\end{aligned}$$

- Así hemos obtenido el siguiente S.E.L.:

$$\begin{array}{rcrcrcr}
-4\,D & - & E & + & F & = & -17 \\
4\,D & & & + & F & = & -16 \\
2\,D & + & 3\,E & + & F & = & -13
\end{array}$$

- Para resolverlo escribimos el S.E.L. en forma matricial:

$$\left[\begin{array}{rrr|r}
-4 & -1 & 1 & -17 \\
4 & 0 & 1 & -16 \\
2 & 3 & 1 & -13
\end{array}\right]$$

- Calculamos primero el determinante principal:

$$\Delta_p = \left|\begin{array}{rrr}
-4 & -1 & 1 \\
4 & 0 & 1 \\
2 & 3 & 1
\end{array}\right| = (0) + (12) + (-2) - (0) - (-12) - (-4) = 26$$

- Ahora calculamos los determinantes auxiliares para las incógnitas del S.E.L.
- Determinante auxiliar para D:

$$\Delta_D = \left|\begin{array}{rrr}
-17 & -1 & 1 \\
-16 & 0 & 1 \\
-13 & 3 & 1
\end{array}\right| = 0$$

- Determinante auxiliar para E:

$$\Delta_E = \left|\begin{array}{rrr}
-4 & -17 & 1 \\
4 & -16 & 1 \\
2 & -13 & 1
\end{array}\right| = 26$$

- Determinante auxiliar para F:

$$\Delta_F = \left|\begin{array}{rrr}
-4 & -1 & -17 \\
4 & 0 & -16 \\
2 & 3 & -13
\end{array}\right| = -416$$

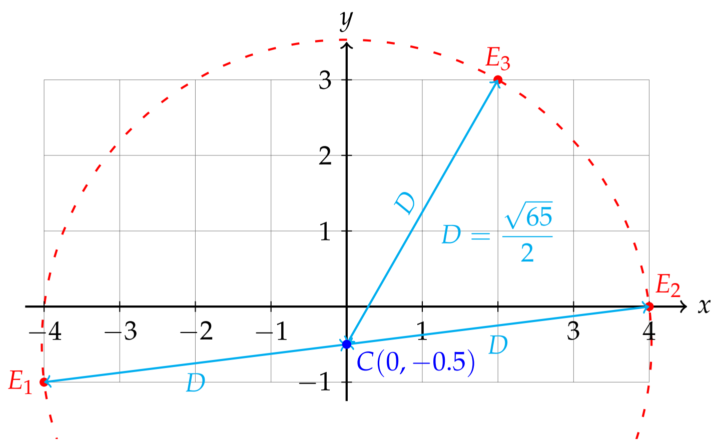
- Finalmente, tenemos:

$$\begin{aligned}
D &= \frac{\Delta_D}{\Delta_p} = \frac{0}{26} = 0 \\
E &= \frac{\Delta_E}{\Delta_p} = \frac{26}{26} = 1 \\
F &= \frac{\Delta_F}{\Delta_p} = \frac{-416}{26} = 16
\end{aligned}$$

- Entonces, $D = 0 = -2\,h$ implica que: $h = 0$.
- También, si $E = 1 = -2\,k$ se sigue que $k = -1/2$.
- Y si $F = 16 = h^2 + k^2 - r^2 = (0)^2 + (-0.5)^2 - r^2$, tenemos que:

$$r^2 = \frac{65}{4} \qquad \Rightarrow \qquad r = \frac{\sqrt{65}}{2} \approx 4.031$$

- El punto $C(h, k)$ donde se debe ubicar el centro de apoyo escolar para equidistar de las tres escuelas es: $C(0, -0.5)$
- La distancia a cada una de las tres escuelas es: $D \approx 4.031$ km.
- Geométricamente se tiene la siguiente solución del problema:



Ejemplo 5 Encuentra la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(x_a, m\,x_a + b)$, $B(x_b, m\,x_b + b)$ y $C(x_c, m\,x_c + b)$.

- Observa que estos puntos están sobre la recta $y = m\,x + b$.
- Primero vamos a escribir el S.E.L. que obtenemos al sustituir las coordenadas de los puntos en la ecuación general:

$$\begin{aligned}
x_a\,D + (m\,x_a + b)\,E + F &= -x_a^2 - (m\,x_a + b)^2 \\
x_b\,D + (m\,x_b + b)\,E + F &= -x_b^2 - (m\,x_b + b)^2 \\
x_c\,D + (m\,x_c + b)\,E + F &= -x_c^2 - (m\,x_c + b)^2
\end{aligned}$$

- Al reescribir este S.E.L. en forma matricial obtenemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}
x_a & m\,x_a + b & 1 & -x_a^2 - (m\,x_a + b)^2 \\
x_b & m\,x_b + b & 1 & -x_b^2 - (m\,x_b + b)^2 \\
x_c & m\,x_c + b & 1 & -x_c^2 - (m\,x_c + b)^2
\end{array}\right]$$

- Vamos a calcular el determinante principal de este sistema de ecuaciones y veremos qué obtenemos:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} x_a & m\,x_a + b & 1 \\ x_b & m\,x_b + b & 1 \\ x_c & m\,x_c + b & 1 \end{vmatrix} &= x_a\,(m\,x_b + b) + x_b\,(m\,x_c + b) + x_c\,(m\,x_a + b) + \\ & \quad -x_c\,(m\,x_b + b) - x_a\,(m\,x_c + b) - x_b\,(m\,x_a + b) \\ &= 0\end{aligned}$$

- Ahora debemos observar que por tres puntos puede pasar a lo más una circunferencia.
- Entonces, no es posible que tengamos un número infinito de soluciones para este caso, lo que indica que el S.E.L. no tiene soluciones.
- En otras palabras, no es posible trazar una circunferencia que pase por tres puntos que estén alineados.

Entonces, existe la posibilidad de que te encuentres con un problema de este tipo y los tres puntos estén alineados.

En este caso, el último ejemplo nos indica que el determinante principal del S.E.L. será cero y así podremos concluir que la solución del problema consiste en la sentencia: «*No existe niguna circunferencia que pase por esos tres puntos, pues están alineados.*»

Créditos

Todo debe hacerse tan simple como sea posible, pero no más.	**Albert Einstein**

Este material se extrajo del libro *Matemáticas I* escrito por Efraín Soto Apolinar. La idea es compartir estos trucos para que más gente se enamore de las matemáticas, de ser posible, mucho más que el autor.

Autor: Efraín Soto Apolinar.

Edición: Efraín Soto Apolinar.

Composición tipográfica: Efraín Soto Apolinar.

Diseño de figuras: Efraín Soto Apolinar.

Productor general: Efraín Soto Apolinar.

Año de edición: 2010

Año de publicación: Pendiente.

Última revisión: 31 de julio de 2010.

Espero que estos trucos se distribuyan entre profesores de matemáticas de todos los niveles y sean divulgados entre otros profesores y sus alumnos.

Este material es de distribución gratuita.

Profesor, agradezco sus comentarios y sugerencias a la cuenta de correo electrónico:

efrain@aprendematematicas.org.mx