Distancia entre un punto y una recta

Frecuentemente en geometría nos encontramos con el problema de calcular la distancia desde un punto a una recta.

Distancia de un punto a una recta

La fórmula para calcular la mínima distancia medida desde el punto $P(x_1, y_1)$ hasta la recta $\ell: Ax + By + C = 0$, es:

$$D_{P\ell} = \frac{|A x_1 + B y_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Definición 1

Obviamente, suponemos que el punto en cuestión no está sobre la recta, porque en ese caso, la distancia buscada es cero.

Observa que si el punto $P(x_1, y_1)$ está sobre la recta, entonces satisface su ecuación y como su ecuación, tanto en forma general como en forma normal, están igualadas a cero, al sustituir las coordenadas del punto en la ecuación de la recta en forma normal (que corresponde a fórmula para calcular la distancia de un punto a una recta) obtenemos cero:

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} y + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

Calcula la distancia desde la recta 5x - 12y - 10 = 0 hasta el punto P(4,3).

Ejemplo 1

• Sustituimos los datos conocidos en la fórmula:

$$D = \frac{|A x_1 + B y_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$= \frac{|5 (4) - 12 (3) - 10|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{|20 - 36 - 10|}{\sqrt{25 + 144}}$$

$$= \frac{|26|}{\sqrt{169}} = \frac{26}{13} = 2$$

• Entonces, desde la recta 5x - 12y - 10 = 0 hasta el punto P(4,3) hay 2 unidades de distancia.

¿A qué distancia pasa la recta 3x + 4y + 15 = 0 del origen?

Ejemplo 2

• Este problema es equivalente a la siguiente solicitud:

Calcula la distancia desde la recta 3x + 4y + 15 = 0 hasta el punto P(0,0).

Comentario

• Ahora que conocemos los datos, basta sustituir en la fórmula de distancia de un punto a

una recta y realizar las operaciones que quedan indicadas:

$$D = \frac{|A x_1 + B y_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$= \frac{|3 (0) - 4 (0) + 15|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|0 - 0 + 15|}{\sqrt{25}}$$

$$= \frac{|15|}{5} = 3$$

- Entonces, la recta pasa a 3 unidades del origen.
- Para graficar la recta podemos transformarla a la forma simétrica:

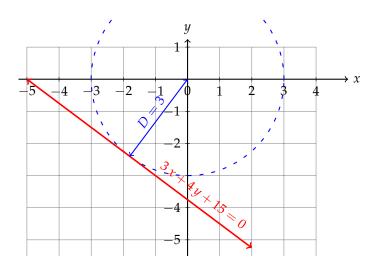
$$3x + 4y + 15 = 0$$

$$3x + 4y = -15$$

$$\frac{3x}{-15} + \frac{4y}{-15} = \frac{-15}{-15}$$

$$\frac{x}{-5} + \frac{y}{-15/4} = 1$$

• Ahora podemos graficar la recta y mostrar que la distancia al origen es de 3 unidades:



La fórmula para encontrar la distancia de un punto a una recta tiene muchas aplicaciones, sobre todo en problemas de lugar geométrico.

En la siguiente unidad vamos a encontrar el lugar geométrico del punto P(x,y) que se mueve de tal manera que su distancia a una recta es igual a la distancia a otro punto F(h,k) que no se encuentra sobre la recta.

Los problemas que podemos resolver con esta fórmula son muy diversos.

Ejemplo 3

Las rectas ℓ_1 : 3x + 4y - 20 = 0, y ℓ_2 : 3x + 4y + 20 = 0 son paralelas. Encuentra la distancia que hay entre ellas.

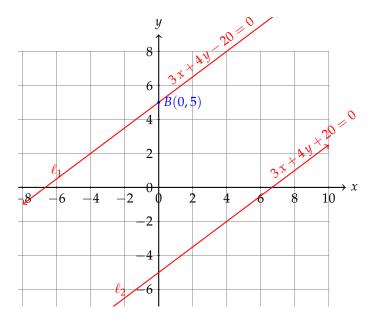
• Nosotros no tenemos una fórmula para calcular la distancia entre dos rectas, pero podemos transformar este problema en uno que sí podamos resolver.

Profr. Efraín Soto Apolinar.

- Nosotros ya sabemos cómo encontrar la distancia de un punto a una recta.
- Así que vamos a encontrar un punto que esté sobre cualquiera de las rectas y de ahí vamos a calcular la distancia del punto a la otra recta.
- Podemos encontrar, por ejemplo, la intersección de la recta ℓ_1 con el eje y sustituyendo x=0:

$$3(0) + 4y - 20 = 0$$
 \Rightarrow $y = \frac{20}{4} = 5$

- Esto nos indica que la recta corta al eje y en el punto B(0,5).
- Igualmente, podemos encontrar el punto de intersección con el eje x, por ejemplo, de la recta ℓ_2 y calcular su distancia a la recta ℓ_1 .
- En ambos casos obtendremos el mismo resultado porque la distancia de ℓ_1 a ℓ_2 es la misma que de la recta ℓ_2 a la recta ℓ_1 .



• Ahora podemos encontrar la distancia del punto B(0,5) a la recta ℓ_2 :

$$D = \frac{|A x_1 + B y_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

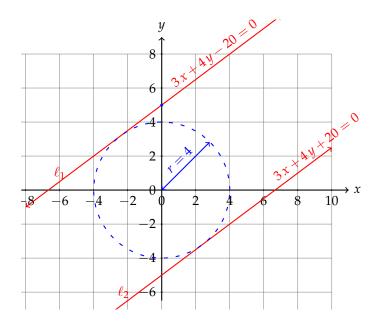
$$= \frac{|3 (0) + 4 (5) + 20|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|20 + 20|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|40|}{\sqrt{25}} = \frac{40}{5} = 8$$

• Entonces, las rectas se encuentran alejadas una de otra a 8 unidades de distancia.

Profesor:

Recuerde a los estudiantes que la distancia se mide perpendicular a las rectas.

Profr. Efraín Soto Apolinar.



Un ejemplo de aplicación se muestra enseguida.

Ejemplo 4 Calcula el área del triángulo que tiene sus vértices en los puntos A(1,3), B(-3,1) y C(2,-2).

- ullet La fórmula para calcular el área de un triángulo es base imes altura entre dos.
- Podemos calcular la longitud de la base del triángulo con la fórmula de distancia entre dos puntos.
- La altura la calculamos con la fórmula de distancia de un punto a una recta.
- Pero primero debemos calcular la ecuación de la base del triángulo que elijamos.
- Elegiremos la base \overline{BC} .
- La longitud de este lado es:

$$|\overline{BC}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(2 - (-3))^2 + (-2 - 1)^2}$$

$$= \sqrt{(2 + 3)^2 + (-3)^2}$$

$$= \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$$

- Ahora vamos a calcular la altura del triángulo...
- Primero encontramos la ecuación de la recta en forma general que pasa por los puntos B y C (porque esos puntos elegimos para la base).
- Calculamos la pendiente de esa recta:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2 - 1}{2 - (-3)} = -\frac{3}{5}$$

• Ahora sustituimos la pendiente y un punto para encontrar la ecuación de la recta:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-3) = -\left(\frac{3}{5}\right)(x - 1)$$

$$5(y - 1) = -3(x - (-3))$$

$$5y - 5 = -3x - 9$$

$$3x + 5y + 4 = 0$$

• Ahora que conocemos la ecuación de la base, podemos calcular la distancia de la base al vértice opuesto, que es el punto A(1,3):

$$D = \frac{|A x_1 + B y_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$
$$= \frac{|3(1) + 5(3) + 4|}{\sqrt{3^2 + 5^2}} = \frac{|3 + 15 + 4|}{\sqrt{9 + 25}} = \frac{22}{\sqrt{34}}$$

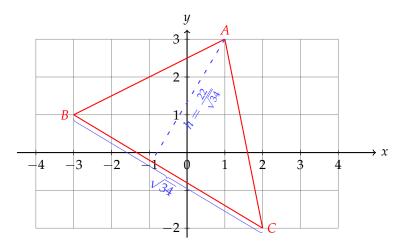
• Ahora sustituimos los valores de las longitudes de la base y la altura en la fórmula para encontrar el área del triángulo:

$$A = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{34}\right) \times \left(\frac{22}{\sqrt{34}}\right)}{2}$$

$$= \frac{22}{2} = 11$$

• Es decir, el área del triángulo es de 11 unidades cuadradas.



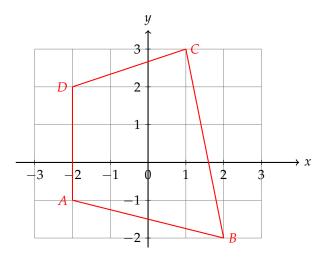
• Se te queda como ejercicio verificar que el área de este triángulo es 11 unidades cuadradas utilizando triángulos envolventes para formar un rectángulo alrededor del mismo.

Encuentra el área del cuadrilátero que tiene sus vértices en los puntos A(-2,-1), B(2,-2), C(1,3) y D(-2,2).

Ejemplo 5

Profr. Efraín Soto Apolinar.

- Para resolver este problema, vamos a reducirlo a un problema que ya sabemos resolver.
- Vamos a encontrar la ecuación de una de las diagonales del cuadrilátero para formar dos triángulos internos.
- Vamos a calcular la longitud de esa diagonal para que sirva de base a los dos triángulos.
- Después calculamos las alturas de los triángulos con la fórmula de distancia de un punto a una recta.
- Conociendo la base y las alturas de los triángulos, podremos calcular el área de cada triángulo.
- Finalmente calculamos el área del cuadrilátero sumando las áreas de los triángulos.
- Empezamos dibujando el cuadrilátero.



• Vamos a calcular la longitud de la diagonal \overline{AC} usando la fórmula para calcular la distancia entre dos puntos:

$$|\overline{AC}|$$
 = $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
= $\sqrt{(3 - (-1))^2 + (1 - (-2))^2} = \sqrt{(4)^2 + (3)^2}$
= $\sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$

- Ahora conocemos la longitud de la base de los triángulos.
- Vamos a calcular la ecuación de la recta ℓ que pasa por los puntos A y C.
- Primero encontramos su pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4}{3}$$

• Ahora calculamos la ecuación con la forma punto-pendiente:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 3 = \frac{4}{3}(x - 1)$$

$$3(y - 3) = 4(x - 1)$$

$$3y - 9 = 4x - 4$$

$$-4x + 3y - 5 = 0 \Rightarrow \ell : 4x - 3y + 5 = 0$$

Profr. Efraín Soto Apolinar.

• Ahora calculamos la altura del triángulo $\triangle ACD$ usando la fórmula para calcular la distancia de un punto a una recta:

$$D_{D\ell} = \frac{|A x_1 + B y_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$
$$= \frac{|4 (-2) - 3 (2) + 5|}{\sqrt{(4)^2 + (-3)^2}} = \frac{|-8 - 6 + 5|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{9}{5}$$

• Ahora puedo calcular el área de este triángulo:

$$A_{\triangle ACD} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{\cancel{5} \times \left(\frac{9}{\cancel{5}}\right)}{2} = \frac{9}{2}$$

- Ahora calculamos el área del triángulo $\triangle ACB$.
- Empezamos calculando su altura:

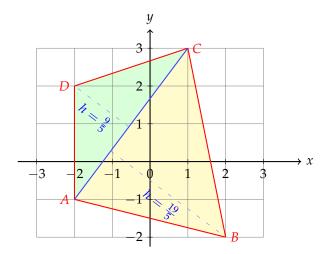
$$D_{B\ell} = \frac{|A x_1 + B y_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$
$$= \frac{|4 (2) - 3 (-2) + 5|}{\sqrt{(4)^2 + (-3)^2}} = \frac{|8 + 6 + 5|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{19}{5}$$

• Y el área de este triángulo es:

$$A_{\triangle ACB} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{\cancel{5} \times \left(\frac{19}{\cancel{5}}\right)}{2} = \frac{19}{2}$$

• Finalmente, como ya sabemos que el área del cuadrilátero es igual a la suma de las áreas de los dos triángulos, sumamos esas áreas:

$$A_{ABCD} = \frac{19}{2} + \frac{9}{2} = \frac{28}{2} = 14$$
 unidades cuadradas.



• Verifica que este cálculo es correcto usando triángulos envolventes.

Créditos

Albert Einstein

Todo debe hacerse tan simple como sea posible, pero no más.

Este material se extrajo del libro *Matemáticas I* escrito por Efraín Soto Apolinar. La idea es compartir estos trucos para que más gente se enamore de las matemáticas, de ser posible, mucho más que el autor.

Autor: Efraín Soto Apolinar.Edición: Efraín Soto Apolinar.

Composición tipográfica: Efraín Soto Apolinar.

Diseño de figuras: Efraín Soto Apolinar. **Productor general:** Efraín Soto Apolinar.

Año de edición: 2010

Año de publicación: Pendiente.

Última revisión: 31 de julio de 2010.

Derechos de autor: Todos los derechos reservados a favor de Efraín Soto Apolinar. México. 2010.

Espero que estos trucos se distribuyan entre profesores de matemáticas de todos los niveles y sean divulgados entre otros profesores y sus alumnos.

Este material es de distribución gratuita.

Profesor, agradezco sus comentarios y sugerencias a la cuenta de correo electrónico:

efrain@aprendematematicas.org.mx