Centro fuera del origen

Ya conoces la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el origen.

Si trasladamos el centro de la circunferencia h unidades a la derecha y k unidades hacia arriba, obtenemos una circunferencia que está fuera del origen.

En este caso obtenemos la circunferencia que obtuvimos en la sección *Caracterización geométrica y elementos de la circunferencia*.

Definición 1

Ecuación de la circunferencia con centro fuera del origen
La ecuación de la circunferencia con centro en el punto $C(h, k)$ y radio r es:

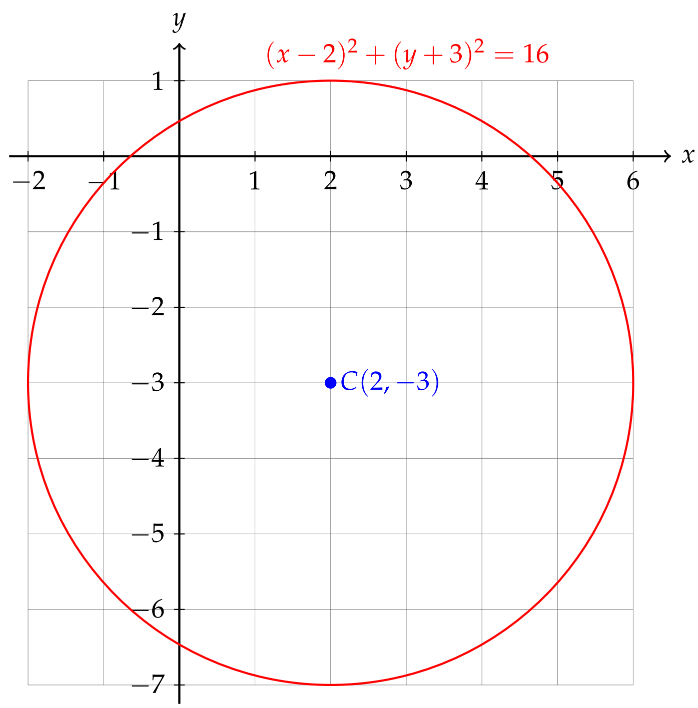
$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Ejemplo 1

Encuentra la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el punto $C(2, -3)$ y radio $r = 4$.

- Ya sabemos que el centro es $C(2, -3)$ y el radio es 4.
- Solamente debemos sustituir los datos en la fórmula:

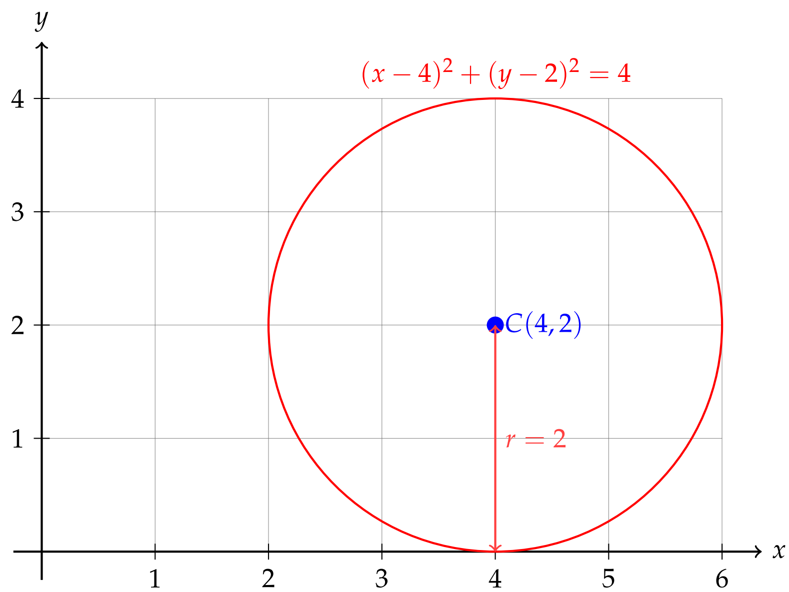
$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = (4)^2$$
$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$$



Ejemplo 2

Encuentra la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el punto $C(4, 2)$ y es tangente al eje x.

- En este caso sabemos que la circunferencia es tangente al eje x.
- Esta información nos ayudará a calcular el radio de la circunferencia.
- Empezamos dibujando la situación:



- Del dibujo se deduce que el radio de la circunferencia es 2.
- Ahora que conocemos dónde está el centro y la medida del radio de la circunferencia, podemos calcular su ecuación:

$$(x-4)^2 + (y-2)^2 = (2)^2$$
$$(x-4)^2 + (y-2)^2 = 4$$

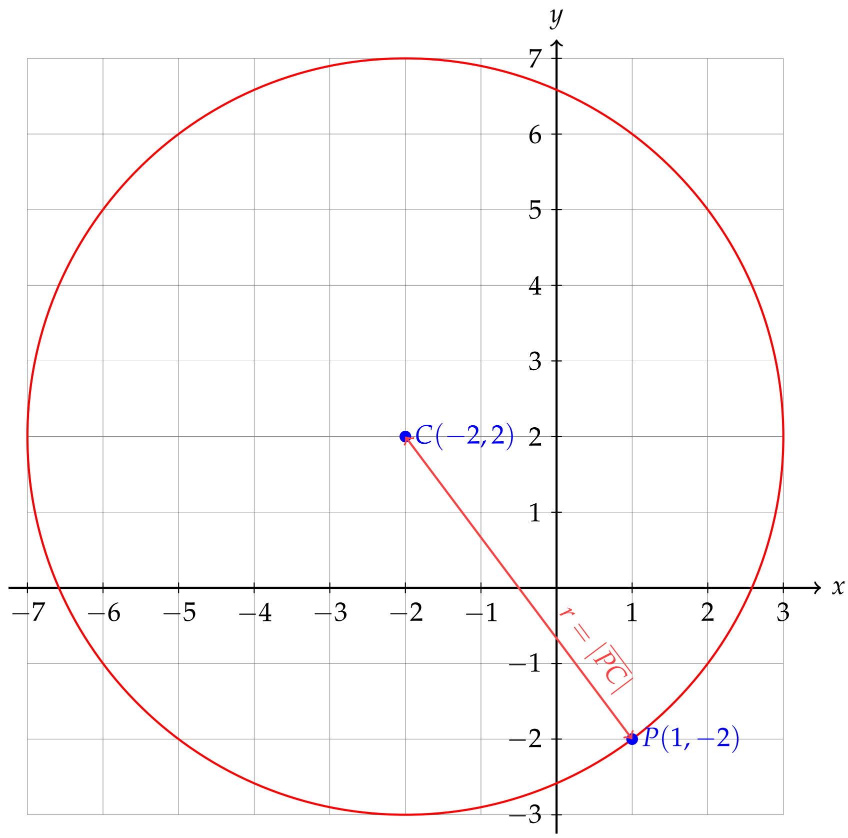
Observa cómo la figura indica de inmediato la medida del radio. En este caso sencillo, también es posible darse cuenta imaginándose la figura. Pero eso no siempre ocurrirá.

En otros problemas te verás obligado a realizar la figura para poder encontrar cómo están relacionados los datos contenidos en el texto del problema.

En algunos casos tendremos que utilizar fórmulas que ya conoces, principalmente las que estudiamos en la primera unidad del curso. El siguiente ejemplo muestra uno de esos casos.

Ejemplo 3 Encuentra la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el punto $C(-2,2)$ y que pasa por el punto $P(1,1)$

- Empezamos dibujando la situación en un sistema de ejes coordenados:



- Ahora vemos que el radio de la circunferencia es la distancia desde el centro de la circunferencia $C(-2, 2)$ hasta el punto $P(1, -2)$.
- Vamos a calcular esta distancia usando la fórmula de distancia entre dos puntos:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(1-(-2))^2 + (-2-2)^2} \\ &= \sqrt{(1+2)^2 + (-4)^2} \\ &= \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

- Ahora podemos calcular la ecuación de la circunferencia:

$$\begin{aligned} (x-(-2))^2 + (y-2)^2 &= (5)^2 \\ (x+2)^2 + (y-2)^2 &= 25 \end{aligned}$$

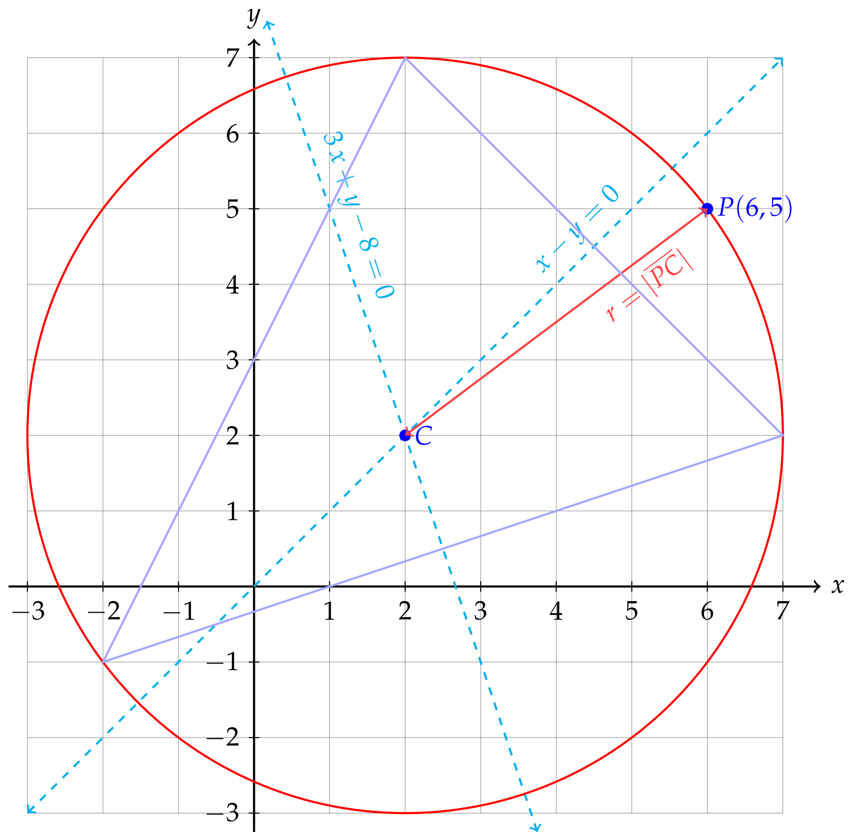
- Esta es la ecuación buscada.

En otros problemas nos encontraremos con la necsidad de aplicar conocimientos de semestres anteriores.

Encuentra la ecuación de la circunferencia circunscrita a un triángulo, sabiendo que dos de sus mediatrices son las rectas $\ell_1 : 3x + y - 8 = 0$ y $\ell_2 : x - y = 0$, y pasa por el punto $P(6, 5)$.	**Ejemplo 4**

- De nuevo, es mejor empezar dibujando la situación.
- Pero debemos primero graficar las rectas.
- La mediatriz $\ell_2\;\; x - y = 0$ es muy sencilla de graficar.
- La mediatriz $\ell_1 :\;\; 3\,x + y - 8 = 0$ pasa por los puntos $A(1,5)$ y $B(3,-1)$

Profesor:
Los vérices del triángulo son $A(2,7)$, $B(7,2)$ y $C(-2,-1)$.



- Debemos calcular el punto donde se intersectan las dos mediatrices del triángulo.
- Para eso debemos resolver el sistema de ecuaciones lineales formado por sus ecuaciones.

$$\begin{cases} 3\,x + y = 8 \\ \;\;\,x - y = 0 \end{cases}$$

- Al sumar ambas ecuaciones obtenemos: $4\,x = 8$, que implica $x = 2$.
- Pero ya sabemos por la mediatriz ℓ_2 que $y = x = 2$.
- Entonces, el centro de la circunferencia es $C(2,2)$.
- Ahora solamente falta calcular su radio.
- Sabemos que la circunferencia pasa por el punto $P(6,5)$.
- El radio es la distancia entre los puntos $C(2,2)$ y $P(6,5)$.

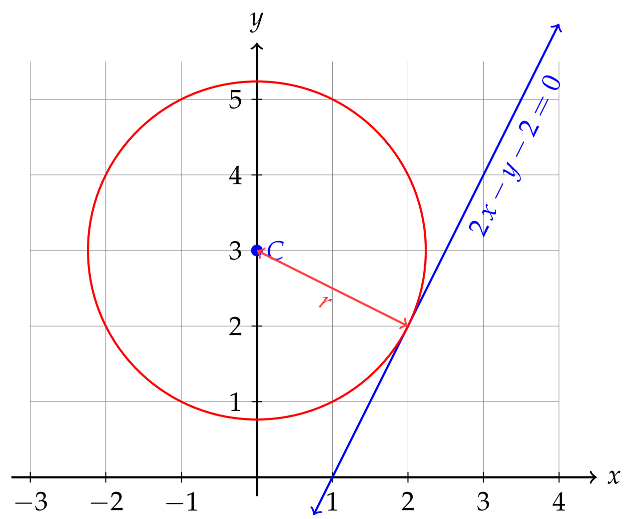
$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(6-2)^2 + (5-2)^2} \\ &= \sqrt{(4)^2 + (3)^2} = \sqrt{16+9} \\ &= \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

- Ahora que conocemos el radio y el centro de la circunferencia, podemos calcular su ecuación:

$$\begin{aligned}(x-2)^2+(y-2)^2 &= (5)^2\\(x-2)^2+(y-2)^2 &= 25\end{aligned}$$

Calcula la ecuación de la circunferencia que es tangente a la recta $2\,x-y-2=0$, y que tiene su centro en el punto $C(0,3)$. **Ejemplo 5**

- Dibujamos la situación en un sistema de coordenadas:



- De la figura vemos que el radio de la circunferencia es igual a la distancia desde la recta $2\,x-y-2=0$ hasta el punto $C(0,3)$.
- Vamos a utilizar la fórmula de distancia de un punto a una recta para calcular la longitud del radio:

$$\begin{aligned}r &= \frac{|A\,x_0+B\,y_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}\\ &= \frac{|2\,(0)-1\,(3)-2|}{\sqrt{(2)^2+(-1)^2}}\\ &= \frac{|-5|}{\sqrt{4+1}}\\ &= \frac{5}{\sqrt{5}}=\frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}}=\frac{5\sqrt{5}}{5}=\sqrt{5}\end{aligned}$$

- Entonces, el radio mide $\sqrt{5}$ unidades.
- Ahora podemos calcular la ecuación de la circunferencia:

$$\begin{aligned}(x-0)^2+(y-2)^2 &= \left(\sqrt{5}\right)^2\\x^2+(y-2)^2 &= 5\end{aligned}$$

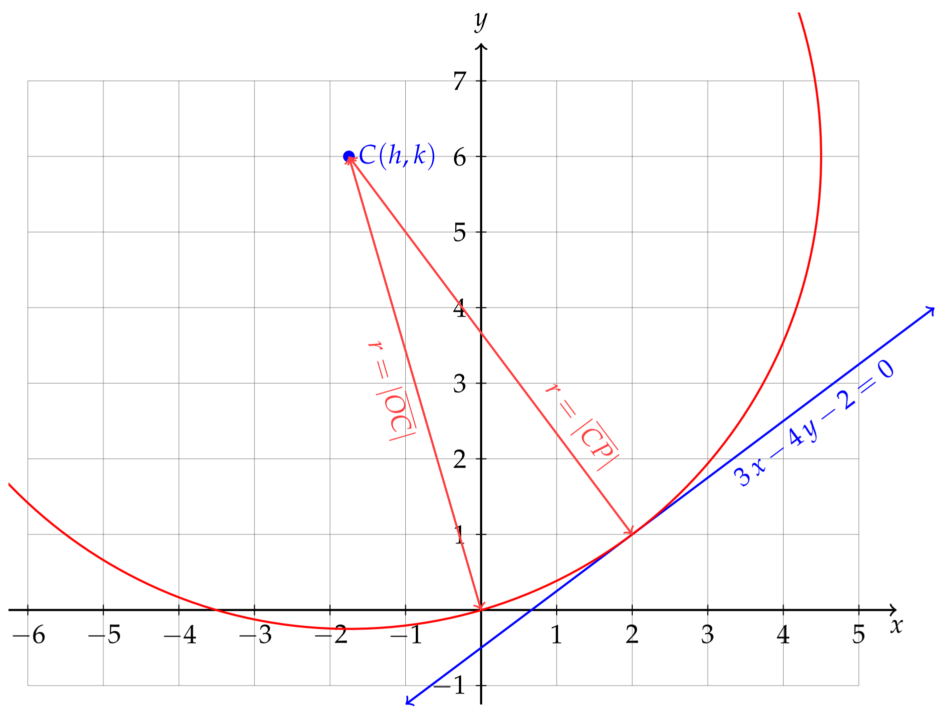
Cuando encuentres un problema que no te da mucha información, es posible resolverlo si trabajas con orden y vas encontrarndo sugerencias conforme avanzas en su solución.

Algunas veces encontrarás un sistema de ecuaciones lineales, en otros casos encontrarás una ecuación cuadrática, pero siempre (al menos en este curso), encontrarás suficiente información para resolver el problema.

Pero recuerda, es importante hacer un dibujo para reconocer toda la información contenida en el texto de problema, porque muchas veces estará «*escondida*», es decir, no estará escrita explícitamente, sino que deberás darte cuenta por la situación geométrica.

Ejemplo 6 Encuentra la ecuación de la circunferencia que es tangente a la recta $3x - 4y = 2$ en el punto $P(2,1)$ y que pasa por el origen.

- En este caso necesitamos calcular primero las coordenadas del centro $C(h,k)$ de la circunferencia.
- Para esto emezamos dibujando la situación en un sistema de coordenadas:



- De la figura se hace evidente que: $r = |\overline{OC}| = |\overline{CP}|$.
- Así que de esa condición podemos obtener una ecuación:

$$\begin{aligned}
r = |\overline{OC}| &= |\overline{CP}| \\
\sqrt{(h-0)^2 + (k-0)^2} &= \sqrt{(h-2)^2 + (k-1)^2} \\
(h-0)^2 + (k-0)^2 &= (h-2)^2 + (k-1)^2 \\
\cancel{h^2} + \cancel{k^2} &= \cancel{h^2} - 4h + 4 + \cancel{k^2} - 2k + 1 \\
4h + 2k &= 5
\end{aligned}$$

- Ahora debemos recordar que el radio de una circunferencia siempre es perpendicular a la tangente a la circunferencia que lo corta.
- Como el radio $\overline{CP}$ es perpendicular a la recta $3\,x - 4\,y = 2$, sus pendientes cumplen con:

$$m_{CP} = -\frac{1}{m_\ell}$$

- Podemos conocer la pendiente de la recta tangente escribiéndola en la forma pendiente-ordenada al origen:

$$3\,x - 4\,y = 2 \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{3}{4}\,x - \frac{1}{2}$$

- Esto nos indica que la pendiente de la recta es: $m_\ell = 3/4$.
- Entonces, la pendiente del radio que toca el punto de tangencia es:

$$m_{CP} = -\frac{1}{m_\ell} = -\frac{4}{3}$$

- Pero, a partir de la fórmula de pendiente podemos calcularla también:

$$m_{CP} = \frac{h-2}{k-1} = -\frac{4}{3}$$

- De aquí obtenemos la otra ecuación:

$$\begin{array}{rcl}\dfrac{k-1}{h-2} = -\dfrac{4}{3} & \Rightarrow & 3\,(k-1) = -4\,(h-2)\\ 3\,k - 3 = -4\,h + 8 & \Rightarrow & 4\,h + 3\,k = 11\end{array}$$

- Ahora obtuvimos un sistema de ecuaciones lineales en h, k el cual podemos resolver para conocer las coordenadas del centro de la circunferencia:

$$\begin{array}{rcl}4\,h + 2\,k & = & 5\\ 4\,h + 3\,k & = & 11\end{array}$$

- Primero multiplicamos la primera ecuación por -1, sumamos las ecuaciones y obtenemos:

$$\begin{array}{r}-\cancel{4h} - 2\,k = -5\\ \cancel{4h} + 3\,k = \ \ 11\\ \hline k = \ \ \ 6\end{array}$$

- Ahora podemos conocer el valor de h sustituyendo el valor de k en cualquiera de las ecuaciones:

$$4\,h + 2\,(6) = 5 \qquad \Rightarrow \qquad 4\,h = 5 - 12 \qquad \Rightarrow \qquad h = -\frac{7}{4} = -1.75$$

- Entonces, el centro de la circunferencia está en: $C(-1.75, 6)$.
- Para poder calcular la ecuación de la circunferencia nos falta conocer el radio.
- Vamos a calcularlo usando la fórmula de distancia entre dos puntos.

- El más fácil de usar es el origen:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(6-0)^2 + (-7/4-0)^2} = \sqrt{(6)^2 + \left(-\frac{7}{4}\right)^2} = \sqrt{36 + \frac{49}{16}} \\ &= \sqrt{\frac{576}{16} + \frac{49}{16}} = \sqrt{\frac{625}{16}} = \frac{25}{4} = 6.25 \end{aligned}$$

- Finalmente, la ecuación de la circunferencia es:

$$\left(x + \frac{7}{4}\right)^2 + (y-6)^2 = \left(\frac{25}{4}\right)^2 \qquad \Rightarrow \qquad \left(x + \frac{7}{4}\right)^2 + (y-6)^2 = \frac{625}{16}$$

- Con esto terminamos.

Créditos

Albert Einstein	Todo debe hacerse tan simple como sea posible, pero no más.

Este material se extrajo del libro *Matemáticas I* escrito por Efraín Soto Apolinar. La idea es compartir estos trucos para que más gente se enamore de las matemáticas, de ser posible, mucho más que el autor.

Autor: Efraín Soto Apolinar.

Edición: Efraín Soto Apolinar.

Composición tipográfica: Efraín Soto Apolinar.

Diseño de figuras: Efraín Soto Apolinar.

Productor general: Efraín Soto Apolinar.

Año de edición: 2010

Año de publicación: Pendiente.

Última revisión: 31 de julio de 2010.

Espero que estos trucos se distribuyan entre profesores de matemáticas de todos los niveles y sean divulgados entre otros profesores y sus alumnos.

Este material es de distribución gratuita.

Profesor, agradezco sus comentarios y sugerencias a la cuenta de correo electrónico:

efrain@aprendematematicas.org.mx