1 Ecuaciones y propiedades de la recta

En esta sección estudiaremos la caracterización de la recta desde el punto de vista algebraico.

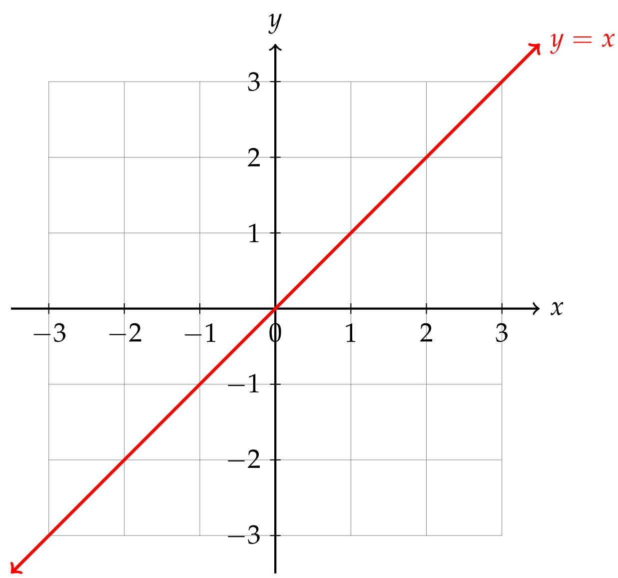
A partir del concepto de pendiente podremos entender mejor lo que nos dice en palabras la ecuación de una recta.

1.1 Forma punto-pendiente

Empezaremos a estudiar la ecuación de la recta a partir de la forma más sencilla.

Grafica la recta con ecuación: $y = x$. **Ejemplo 1**

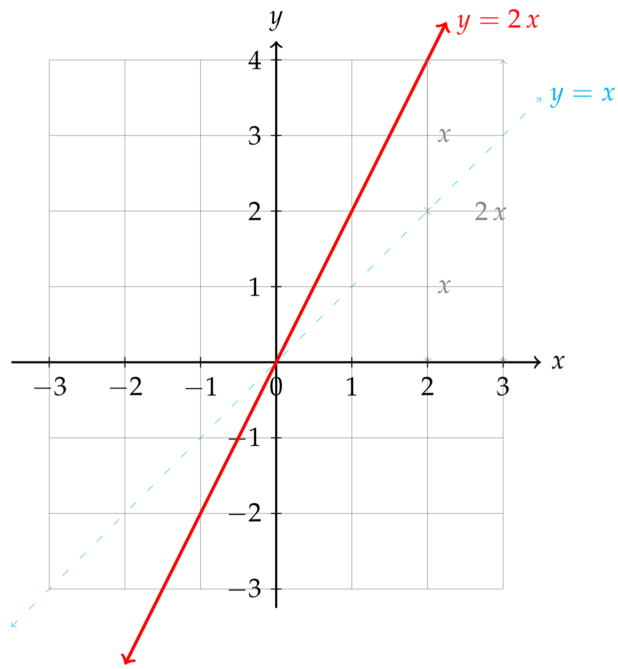
- La gráfica de esta ecuación es inmediata.
- En realidad no requerimos tabular distintos valores de x y calcular los valores de y.
- La gráfica de esta ecuación forma un ángulo de 45° con ambos ejes:



- En la gráfica se observa claramente que a cada valor de x le corresponde un valor de y.

Grafica la ecuación: $y = 2\,x$. **Ejemplo 2**

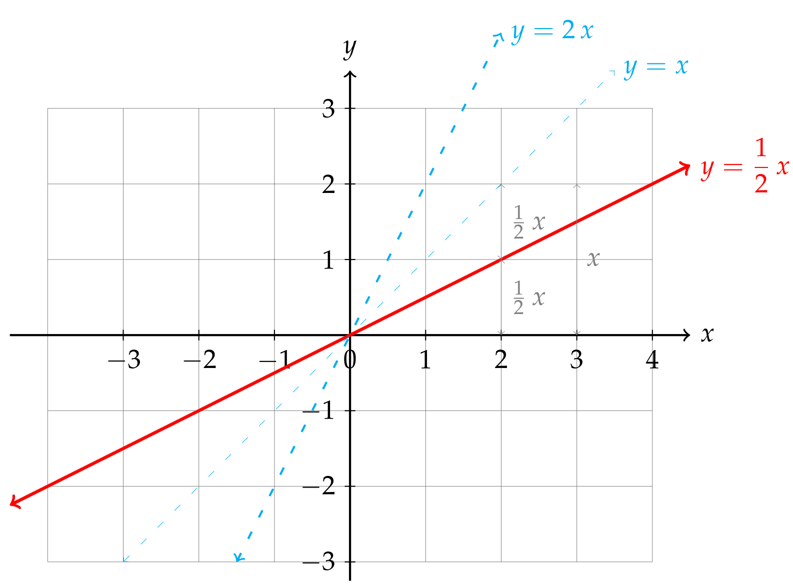
- Esta ecuación en palabras dice: *"al valor que me des de x lo multiplicaré por 2, y ese valor se lo asignaré a la variable y.*



- Al comparar las dos gráficas, vemos que esta gráfica tiene distinta inclinación que la anterior, y por tanto, distinta pendiente.

Ejemplo 3 Grafica la ecuación: $y = \dfrac{1}{2}\,x$.

- La gráfica de esta ecuación es el reflejo de: $y = 2\,x$ respecto a la recta: $y = x$.



- En el ejemplo anterior el coeficiente de x era 2, los valores de y siempre eran el doble de los valores de x.

- En este caso el coeficiente de x es $1/2$, esto causa que los valores de y siempre sean la mitad de los valores correspondientes de x.

Para determinar de manera única una recta necesitamos dos condiciones.

En este caso, las condiciones serán: (**1**) las coordendas de un punto y (**2**) la pendiente de la recta.

Ecuación de la recta en su forma punto-pendiente

La ecuación de la recta que pasa por el punto $P(x_1, y_1)$ y que tiene pendiente m es:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

Definición 1

Debido a que esta ecuación se encuentra a partir de esos datos se conoce como la ecuación en la forma punto-pendiente.

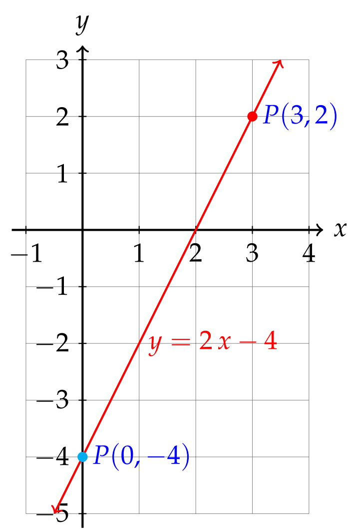
Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(3, 2)$ con pendiente $m = 2$.

Ejemplo 4

- Para encontrar la ecuación de la recta sustituimos los valores de los datos conocidos:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m\,(x - x_1) \\ y - 2 &= 2\,(x - 3) \\ y - 2 &= 2\,x - 6 \\ y &= 2\,x - 4 \end{aligned}$$

- Ahora graficamos la recta.



- Observa que si $x = 0$, entonces, $y = -4$.
- Además, $m = 2$, por lo que por cada unidad que avancemos en la dirección del eje x debemos subir 2 en la dirección del eje y.

Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(2,5)$ con pendiente $m = 2$. **Ejemplo 5**

- Aquí usaremos la ecuación de la recta en su forma punto-pendiente.
- Sabemos, para empezar que la pendiente $m = 2$, y que pasa por el punto $A(2,5)$. Sustituimos estos datos en la ecuación:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m\,(x - x_1) \\ y - 5 &= 2\,(x - 2) \\ y &= 2\,x - 4 + 5 \end{aligned}$$

- Esto resulta ser: $y = 2\,x + 1$.
- Ahora grafica la recta.

Ejemplo 6 Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(2,5)$ con pendiente $m = 2$.

- Aquí usaremos la ecuación de la recta en su forma punto-pendiente.
- Sabemos, para empezar que la pendiente $m = 2$, y que pasa por el punto $A(2,5)$. Sustituimos estos datos en la ecuación:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m\,(x - x_1) \\ y - 5 &= 2\,(x - 2) \\ y &= 2\,x - 4 + 5 \end{aligned}$$

- Esto resulta ser: $y = 2\,x + 1$.
- Observa que si $x = 0$, entonces $y = 1$.
- Ahora grafica la recta.

Ejemplo 7 Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(0,-5)$ con pendiente $m = 3$.

- Aquí usaremos la ecuación de la recta en su forma punto-pendiente.
- Sustituimos los datos en la ecuación:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m\,(x - x_1) \\ y - (-5) &= 3\,(x - 0) \\ y + 5 &= 3\,x \\ y &= 3\,x - 5 \end{aligned}$$

- Observa que en este caso, si $x = 0$, $y = -5$
- Se te queda como ejercicio graficar la recta.

Ejemplo 8 Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(1,2)$ y $B(3,4)$.

- Este problema es distinto de los ejemplos que hemos estudiado.
- Para resolverlo, primero intentaremos reducirlo a un problema parecido a alguno de los que ya hemos resuelto.
- Para este fin, primero debemos conocer la pendiente.
- Porque dado un punto por el cual pasa una recta (conocemos dos, tendremos que elegir un punto de entre los dos) y la pendiente de la misma, podremos utilizar la ecuación en su forma punto-pendiente y finalmente obtendremos su ecuación.
- Primero, utilizamos la fórmula para calcular la pendiente de una recta conocidos dos puntos por los que pasa.
- Conocemos dos puntos por los cuales pasa la recta: $A(1,2)$ y $B(3,4)$.
- Con estos datos calculamos su pendiente:

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{4-2}{3-1} \\ &= \frac{2}{2} = 1 \end{aligned}$$

- Ahora que conocemos la pendiente, podemos utilizar la ecuación de la recta en su forma punto-pendiente, ya que conocemos ambos datos.
- Nota que podemos usar cualquiera de los puntos que conocemos, puesto que el requisito impuesto es que la recta pase por el punto dado y en este caso, pasa por ambos puntos.
- Sustituyendo obtenemos:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m\,(x - x_1) \\ y - 2 &= 1\,(x-1) \\ y &= x - 1 + 2 \\ &= x + 1 \end{aligned}$$

- Con lo que la ecuación buscada es: $y = x + 1$.

Es claro que podemos sustituir en la ecuación el valor de m a partir de las coordenadas de los puntos por los cuales pasa la recta. Así obtenemos la ecuación en su forma dos puntos.

Definición 2

Ecuación de la recta en su forma dos puntos
La ecuación de la recta que pasa por los dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ es:

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)$$

Observa también que la ecuación de la recta en su forma punto pendiente sustituimos el valor de m en función de las coordenadas de los dos puntos por donde pasa:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m \, (x - x_1) \\ y - y_1 &= \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1) \end{aligned}$$

Ahora, consideremos solamente la definición de pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Si suponemos que no concemos más que un punto y dejamos las coordenadas del punto $Q(x_2, y_2)$ como incógnitas, obtenemos la ecuación de la recta en su forma punto pendiente, despejando $y - y_1$:

$$\begin{aligned} \frac{y - y_1}{x - x_1} &= m \\ y - y_1 &= m\,(x - x_1) \end{aligned}$$

Así que no tendrás que memorizar ninguna de estas fórmulas.

A partir de la definición de pendiente puedes fácilmente deducir las otras dos.

Inclusive, la fórmula de pendiente puedes recordarla a partir de su interpretación:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{Incremento en } y}{\text{Incremento en } x}$$

Así que es mejor entender la información que nos da la pendiente y así podremos deducir su fórmula y a partir de ésta las demás ecuaciones.

Créditos

Albert Einstein Todo debe hacerse tan simple como sea posible, pero no más.

Este material se extrajo del libro *Matemáticas III* escrito por Efraín Soto Apolinar. La idea es compartir estos trucos para que más gente se enamore de las matemáticas, de ser posible, mucho más que el autor.

Autor: Efraín Soto Apolinar.

Edición: Efraín Soto Apolinar.

Composición tipográfica: Efraín Soto Apolinar.

Diseño de figuras: Efraín Soto Apolinar.

Productor general: Efraín Soto Apolinar.

Año de edición: 2010

Año de publicación: Pendiente.

Última revisión: 31 de julio de 2010.

Espero que estos trucos se distribuyan entre profesores de matemáticas de todos los niveles y sean divulgados entre otros profesores y sus alumnos.

Este material es de distribución gratuita.

Profesor, agradezco sus comentarios y sugerencias a la cuenta de correo electrónico:

efrain@aprendematematicas.org.mx