Lezione 16

Autovalori e autovettori

Controesempio

- Esistono matrici che non sono diagonalizzabili. Ad esempio

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

non è diagonalizzabile.

Dimostrazione: osserviamo che $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Supponiamo per assurdo che A sia diagonalizzabile, quindi esiste M invertibile tale che

$$M^{-1} A M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Continuazione dimostrazione

- Quindi

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix} = (M^{-1} A M)^2 = M^{-1} A M M^{-1} A M = M^{-1} A^2 M = 0$$

da cui si ottiene che $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Ne segue che $M^{-1} A M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e quindi

$$A = M \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} M^{-1} = 0$$ che è assurdo

Autovalori di una matrice

- Definizione: Sia A una matrice quadrata di ordine n. Si dice che un numero $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore per A se esiste un vettore $v \in \mathbb{R}^n$ **non nullo** tale che

$$Av = \lambda v$$

Autovettori di una matrice

- Se $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore di una matrice A allora un vettore v non nullo tale che $Av = \lambda v$ viene chiamato autovettore di A relativo all'autovalore λ.
- Se v è autovettore di A e $Av = \lambda v$ allora λ viene chiamato autovalore di A relativo all'autovettore v.

Esempio

- 1 e -1 sono autovalori di $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, infatti

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore relativo a 1

- $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ è autovettore relativo a -1

Autovettori e diagonalizzazione

- Teorema: Una matrice A quadrata di ordine n è diagonalizzabile se e solo se esiste una base di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori.
- Dimostrazione: Indichiamo con $diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ la matrice diagonale che ha $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sulla diagonale.

Se A è diagonalizzabile allora esiste una matrice invertibile M tale che $M^{-1}AM = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$

quindi $AM = M\, diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$

Continuazione della dimostrazione

- Se $M^1, \cdots, M^n$ sono le colonne di M allora

$$AM = \left(AM^1, \cdots, AM^n \right) = M \, diag\left(\lambda_1, . \cdots, \lambda_n \right) = \left(\lambda_1 M^1, \cdots, \lambda_n M^n \right)$$

Quindi $AM^i = \lambda_i M^i$, cioè $M^1, \cdots, M^n$ sono autovettori. Siccome M è invertibile, essi formano una base di $\mathbb{R}^n$. Abbiamo quindi trovato una base di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori di A.

Rovesciando l'argomento si verifica che se esiste una base di autovettori allora la matrice è diagonalizzabile.

Osservazione

- La dimostrazione del teorema ci dice che la matrice modale è la matrice che ha per colonne gli elementi di una base di autovettori di A, mentre la matrice diagonale simile ad A è la matrice che ha sulla diagonale gli autovalori di A.
- Per diagonalizzare una matrice A ci basta quindi trovare gli autovalori di A e una base formata da autovettori.

Come calcolare gli autovalori

Lo strumento per calcolare gli autovalori è il polinomio caratteristico della matrice A.

Polinomio caratteristico

- Definizione: Sia A una matrice quadrata di ordine n. La funzione di una variabile reale

$$p(t)=det(A-tI)$$

è un polinomio di grado n che è chiamato polinomio caratteristico di A. Lo si indica con

$$p_A(t)$$

Esempio

Il polinomio caratteristico di $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ è

$$p_A(t)=det\begin{pmatrix} -t & 1 \\ 1 & -t \end{pmatrix}=t^2-1$$

Teorema

- Gli autovalori di A sono le radici del polinomio caratteristico di A, cioè λ è autovalore di A se e solo se

$$p_A(\lambda) = 0$$

Dimostrazione del teorema

λ autovalore

$\Leftrightarrow$ esiste v non nullo tale che $Av = \lambda v$

$\Leftrightarrow$ esiste v non nullo tale che $Av - \lambda v = \vec{0}$

$\Leftrightarrow$ esiste v non nullo tale che $(A - \lambda I)v = \vec{0}$

$\Leftrightarrow$ il sistema $(A - \lambda I)X = \vec{0}$ ha una soluzione non nulla

$\Leftrightarrow$ $det(A - \lambda I) = 0$

$\Leftrightarrow$ $p_A(\lambda) = 0$

Osservazione

Una matrice quadrata di ordine n ha al più n autovalori, infatti il polinomio caratteristico ha al più n radici essendo un polinomio di grado n.

Come calcolare gli autovettori

Se λ è un autovalore di A allora gli autovettori relativi a λ sono le soluzioni non nulle del sistema lineare

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow (A - \lambda I) X = \vec{0}$$

quindi, se c'è un autovalore, gli autovettori sono infiniti.

Problema: come si fa a scegliere tra tutti gli autovettori una base di $\mathbb{R}^n$?

Autospazio

- L'insieme delle soluzioni del sistema lineare $(A-\lambda I)X=\vec{0}$ è detto autospazio relativo all'autovalore λ .
- L'autospazio è l'insieme di tutti gli autovettori relativi a λ unito con $\{\vec{0}\}$.
- Ovviamente l'autospazio è un sottospazio
- La sua dimensione viene chiamata la molteplicità geometrica dell'autovalore λ e la si indica con $m_g(\lambda)$.

Calcolo della molteplicità geometrica

- Per definizione la molteplicità geometrica è

$$dim\, Sol(A-\lambda I, \vec{0})$$

e quindi $m_g(\lambda)=null(A-\lambda I)=n-rk(A-\lambda I)$

- E' anche importante saper calcolare una base dell'autospazio: per farlo si usa il solito metodo di calcolo di una base dello spazio delle soluzioni di un sistema omogeneo.

Esercizio

- Calcolare la molteplicità geometrica di ogni autovalore e una base di ogni autospazio di

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio

- Calcolare la molteplicità geometrica di ogni autovalore e una base di ogni autospazio di

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

- Soluzione: calcoliamo gli autovalori della matrice. Il polinomio caratteristico è

$$p_A(t)=det\begin{pmatrix}-t & 1 & 0\\ 1 & -t & 0\\ 0 & 0 & 1-t\end{pmatrix}=(1-t)(t^2-1)=-(t-1)^2(t+1)$$

- Risolvendo $p_A(t)=0$ si trova che gli autovalori sono $\lambda_1=1$ e $\lambda_2=-1$

Continuazione soluzione

- La molteplicità geometrica di λ_1 è

$$m_g(\lambda_1) = 3 - rk(A - \lambda_1 I) = 3 - rk\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2$$

mentre la molteplicità geometrica di λ_2 è

$$m_g(\lambda_2) = 3 - rk(A - \lambda_2 I) = 3 - rk\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1$$

Continuazione soluzione

- Rimane da calcolare una base per ogni autospazio.
- L'autospazio relativo a λ_1 è l'insieme delle soluzioni di $(A-\lambda_1 I)X=\vec{0}$, cioè

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Riduciamo la matrice completa del sistema:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Continuazione soluzione

- La variabile vincolata è x e quindi quelle libere sono y,z. Il sistema ridotto è $\{-x+y=0$, che, risolto all'indietro da come soluzioni

$$\begin{pmatrix} y \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Una base dell'autospazio relativo a $\lambda_1 = 1$ è

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Continuazione soluzione

- L'autospazio relativo a λ_2 è l'insieme delle soluzioni di $(A-\lambda_2 I)X=\vec{0}$, cioè

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Riduciamo la matrice completa del sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Fine soluzione

- Le variabili vincolata sono x e z e quindi quella libera è y. Il sistema ridotto è

$$\begin{cases} x+y=0 \\ 2z=0 \end{cases}$$

che, risolto all'indietro da come soluzioni

$$\begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Una base dell'autospazio relativo a $\lambda_2 = -1$ è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Come calcolare una base di autovettori

- Ritorniamo al problema di scegliere tra infiniti autovettori una base di $\mathbb{R}^n$. Per risolverlo ci serve ancora un teoremino:
- Lemma: Sia A una matrice quadrata. Siano $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ autovalori **distinti** di A. Se v_i è autovettore relativo a λ_i allora i vettori $v_1, \cdots, v_r$ sono linearmente indipendenti.

(Autovettori relativi a autovalori distinti sono linearmente indipendenti)

Dimostrazione lemma

- Dimostriamo il lemma solo nel caso r=2.
- Siano v_1 e v_2 autovettori relativi agli autovalori λ_1, λ_2. Stiamo assumendo che $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Supponiamo che $x v_1 + y v_2 = \vec{0}$ e verifichiamo che $x = y = 0$.
- Da $x v_1 + y v_2 = \vec{0}$ otteniamo che

$$\lambda_1 x v_1 + \lambda_1 y v_2 = \vec{0},\ A x v_1 + A y v_2 = \vec{0} \Leftrightarrow x \lambda_1 v_1 + y \lambda_2 v_2 = \vec{0}$$

Sottraendo le due equazioni si trova

$$y(\lambda_2 - \lambda_1) v_2 = \vec{0}$$

Fine dimostrazione lemma

- Siccome $\lambda_1 \neq \lambda_2$, abbiamo che $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$. Siccome v_2 è un autovettore, abbiamo che $v_2 \neq \vec{0}$ Dall'equazione

$$y(\lambda_2 - \lambda_1) v_2 = \vec{0}$$

concludiamo che y=0. Dall'equazione $x v_1 + y v_2 = \vec{0}$ otteniamo $x v_1 = \vec{0}$. Siccome v_1 è un autovettore, abbiamo che $v_1 \neq \vec{0}$, quindi x=0.

Primo criterio di diagonalizzabilità

- Una prima conseguenza del lemma è il seguente
- Corollario: Se una matrice A quadrata di ordine n ha n autovalori distinti allora la matrice è diagonalizzabile.
- Dimostrazione: gli n autovettori $v_1, \cdots, v_n$ relativi agli n autovalori distinti sono indipendenti in $\mathbb{R}^n$ e quindi sono una base.