Lezione 3

Sistemi lineari

Sviluppo di Laplace lungo la i-esima riga

- Se A è una matrice quadrata di ordine n, allora, fissato un indice i si ha

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

Esempio

- Calcolare

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Alcune proprietà del determinante

- **Normalizzazione**: det I=1
- **Simmetria**: $\det(A)=\det(A^T)$
- **Formula di Binet**: $\det(AB)=\det(A)\det(B)$

Conseguenze delle proprietà

- Dalla formula di Binet segue che se A è invertibile allora $det A \neq 0$ e

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

- Questa condizione è necessaria e sufficiente: A è invertibile **se e solo se**

$$det\ A \neq 0$$

Calcolo dell'inversa

- Data una matrice A quadrata sia C la matrice tale che $c_{ij}=A_{ij}$. L'aggiunto classico di A è la matrice $agg(A)={}^{t}C$.
- Si ha che

$$A\, agg(A)=agg(A)A=(\det A)\, I$$

quindi, se $det(A)\neq 0$, allora

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}agg(A)$$

Esercizio

- Sia $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tale che $ad-bc\neq 0$.
- Calcolare l'inversa di A.

Esercizio teorico

- Data una matrice quadrata A di ordine n, dimostrare che se esiste una matrice quadrata B di ordine n tale che $BA = I$ allora A è invertibile e $B = A^{-1}$

Esercizio

- Verificare se la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ è

invertibile e in tal caso calcolare l'inversa.

Matrici a blocchi

- Una matrice a blocchi è una matrice della forma

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

dove $A_{1,} A_2$ sono matrici quadrate.

- Nel caso di matrici a blocchi il determinante è il prodotto dei determinanti dei blocchi e l'inversa è la matrice a blocchi avente come blocchi le inverse dei blocchi di A.

Esempio

- Verificare se la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ è

invertibile e in tal caso calcolare l'inversa.

Soluzione

- Nel nostro caso $det(A)=det(A_1)\,det(A_2)=(-1)(-2)=2$. Ne segue che A è invertibile e

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & A_2^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio per casa

- Verificare se la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ è

invertibile e in tal caso calcolare l'inversa.

Suggerimento: è una matrice a blocchi.

Altre proprietà del determinante

- **Alternanza**: se A’ si ottiene da A scambiando due righe allora det A’=-det A
- **Multilinearità**: se A’ si ottiene da A moltiplicando una riga di A per uno scalare t allora det A’=tdet A

se la i-esima riga di A è la somma di due vettori v e w allora det A=det A’+det A’’ dove A’ è la matrice che si ottiene da A sostituendo v alla i-esima riga e A’’ è la matrice che si ottiene da A sostituendo w alla i-esima riga.

Conseguenze delle proprietà

- Se una matrice A ha due righe uguali allora det(A)=0.
- Siccome det(A) = det(A^T) allora lo sviluppo di Laplace si può fare anche lungo le colonne: vale cioè la formula

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

Esempio

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soluzione

- Sviluppiamo il determinante lungo la quarta colonna:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1\,A_{14} + 0\,A_{24} + 1\,A_{34} + 0\,A_{44}$$

$$= 1\left(-1\right)^{1+4} det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} + 1\left(-1\right)^{3+3} det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -\left(-1\right) - \left(-9\right) = 10$$