Lezione 6

Basi e dimensione

Esempio di sottospazio

- Esempio importante: se $AX = \vec{0}$ è un sistema **omogeneo** di n equazioni e m incognite, allora l'insieme delle soluzioni Sol(A,$\vec{0}$) è un sottospazio di $\mathbb{R}^m$. (Legge di sovrapposizione).

Esempi

- L'insieme $\{(x, y) | ax + by = 0\}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$.
- L'insieme $\{(x, y, z) | ax + by + cz = 0\}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio

- Verificare se $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 2x - y + z = 0\}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$

Osservazioni

- Il vettore $\vec{0}$ appartiene ad ogni sottospazio, quindi se in un insieme W non c'è $\vec{0}$ allora W non può essere un sottospazio.
- Dimostrazione: se W è sottospazio allora non è vuoto. Sia v un elemento di W, allora (-1)v è in W e quindi $v+(-1)v=\vec{0}$ è in W.
- Se W è un sottospazio di V, allora, con la somma e il prodotto per uno scalare indotte da V, W è uno spazio vettoriale.
- Ne segue che ogni proprietà che vale per gli spazi vettoriali vale anche per tutti i sottospazi.

Esercizio

- Quali dei seguenti insiemi è un sottospazio?

1. $\{(x, y) | 2x - y = 1\}$.
2. $\{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$.
3. $\{(x, y) | x^2 - y^2 = 0\}$.
4. $\{(x, y) | x^2 + y^2 = 0\}$.
5. $\{(t, 2t) | t \in R\}$.

Combinazioni lineari

- In uno spazio vettoriale V, si dice che il vettore v è una combinazione lineare dei vettori v_1,v_2, …,v_k se

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_k v_k$$

con a_1,a_2,...,a_k numeri reali. Questi numeri vengono chiamati coefficienti della combinazione lineare.

Esempi

(1,2,-1,4) è combinazione lineare di (1,1,0,1), (1,0,1,1), (0,0,0,1) infatti

$$(1,2,-1,4)=2(1,1,0,1)-(1,0,1,1)+3(0,0,0,1)$$

(3,2,1,0) è combinazione lineare di (1,1,0,0), (1,0,0,1), (0,1,0,1)?

Esercizio

- Verificare se (1,2,2,1) è combinazione lineare di (1,0,-3,1), (1,1,0,0), (1,4,-1,2)

Dipendenza e indipendenza lineare

- I vettori $v_1,v_2,\ldots,v_k$ si dicono **linearmente dipendenti** se esiste una combinazione lineare di $v_1,v_2,\ldots,v_k$ con coefficienti **non tutti nulli** uguale a $\vec{0}$.
- I vettori I vettori $v_1,v_2,\ldots,v_k$ si dicono **linearmente indipendenti** se non sono linearmente dipendenti.
- Si dice anche che l'insieme $\{v_1,v_2,\ldots,v_k\}$ è linearmente dipendente o indipendente se $v_1,v_2,\ldots,v_k$ sono dipendenti o indipendenti.
- Per convenzione $\emptyset$ è linearmente indipendente.

Esempi

- I vettori $(1,0,1)$, $(1,1,1)$, $(-1,1,-1)$ sono linearmente dipendenti infatti

  $$(1,0,1)-1/2\,(1,1,1)+1/2(-1,1,-1)=(0,0,0)$$

- I vettori $(1,1,1)$, $(1,1,0)$, $(1,0,0)$ sono linearmente indipendenti

Osservazione

- Due vettori v e w sono linearmente dipendenti se e solo se uno è un multiplo dell'altro.
- Tre vettori v, w ,u sono linearmente dipendenti se e solo se uno è combinazione degli altri due
- In generale n vettori sono linearmente dipendenti se e solo se uno è combinazione lineare degli altri.

Spazio generato

L'insieme di tutte le combinazioni lineari dei vettori $v_1, v_2, \ldots, v_k$ viene chiamato lo spazio generato da $v_1, v_2, \ldots, v_k$ e lo si indica con il simbolo

$$L(v_1, v_2, \ldots, v_k)$$

oppure con

$$< v_1, v_2, \ldots, v_k >$$

o ancora con

$$\mathrm{span}(v_1, v_2, \ldots, v_k).$$

Per convenzione $L(\emptyset) = \{\vec{o}\}$

Osservazione

Lo spazio generato da $v_1, v_2, \ldots, v_k$ è un sottospazio, infatti

- non è vuoto: $\vec{0} \in L(v_1, v_2, \cdots, v_k)$
- è chiuso rispetto alla somma:

$$(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_k v_k) + (b_1 v_1 + b_2 v_2 + \cdots + b_k v_k) =$$

$$= (a_1 + b_1) v_1 + (a_2 + b_2) v_2 + \cdots + (a_k + b_k) v_k$$

- è chiuso rispetto al prodotto per uno scalare:

$$t(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_k v_k) = (t a_1) v_1 + (t a_2) v_2 + \cdots + (t a_k) v_k$$

Insiemi di generatori

- Diremo che $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ è un insieme di generatori per lo spazio V se

$$L(v_1, v_2, \ldots, v_k) = V.$$

In questo caso diremo anche che V è generato da $v_1, v_2, \ldots, v_k$ o che $v_1, v_2, \ldots, v_k$ generano V.

- Esempio: (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) generano $\mathbb{R}^3$, infatti se (x,y,z) è un generico 3-vettore allora

$$(x, y, z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$$

Base di uno spazio vettoriale

- Uno spazio vettoriale V si dice finitamente generato se esiste un insieme finito $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ di vettori che generano V.
- Una base di uno spazio vettoriale V finitamente generato è un insieme $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ di generatori di V linearmente indipendente.

Teorema della base

Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato. Allora

- V ha una base e tutte le basi di V hanno lo stesso numero di elementi. (Esistenza di una base)
- ogni insieme linearmente indipendente in V è contenuto in una base di V. (Completamento a base)
- ogni insieme di generatori di V contiene una base. (Estrazione di una base)

Definizione di dimensione

Se V è uno spazio finitamente generato il teorema della base dice, tra l'altro, che tutte le basi di V hanno lo stesso numero di elementi. Ha quindi senso dare la seguente

DEFINIZIONE: il numero di elementi di una qualsiasi base di uno spazio V è chiamato dimensione di V e lo si indica con il simbolo dim V.