Lezione 13

Teorema di Rouchè-Capelli

Teorema di Rouchè-Capelli

Teorema: Sia A una matrice nxm e si consideri il sistema lineare di n equazioni e m incognite AX=b.

Il sistema ha soluzione se e solo se

$$rk(A)=rk(A,b)$$

(se e solo se il rango della matrice dei coefficienti è uguale al rango della matrice completa). In tal caso il sistema ha ∞^{m-r} soluzioni, dove r=rk(A)=rk(A,b).

Osservazione

- Osserviamo che, in generale, v è combinazione lineare di $v_1,....,v_k$ se e solo se

$$L(v_1,\cdots,v_k)=L(v_1,\cdots,v_k,v)$$

Dimostrazione del teorema di Rouchè-Capelli

Il sistema ha soluzione $\Longleftrightarrow$

esiste $\overline{X}=\begin{pmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\\ \vdots\\ \bar{x}_m\end{pmatrix}$ tale che $A\,\overline{X}=b$ $\Longleftrightarrow$

$$\bar{x}_1 A^1+\bar{x}_2 A^2+\cdots+\bar{x}_m A^m=b \quad \Longleftrightarrow$$

$$L(A^1, A^2, \cdots, A^m, b)=L(A^1, A^2, \cdots, A^m) \quad \Longleftrightarrow$$

Spazio colonna A=Spazio colonna (A,b)

Affermo che

Spazio colonna A=Spazio colonna (A,b) $\Leftrightarrow$

$rk(A)=rk(A,b)$ infatti:

Spazio colonna A=Spazio colonna (A,b) $\Rightarrow$

$rk(A)=rk(A,b)$ è ovvio, mentre

viceversa

$rk(A)=rk(A,b) \Rightarrow$

dim(Spazio colonna A)=dim(Spazio colonna (A,b))

Siccome

Spazio colonna A $\subseteq$ Spazio colonna (A,b)

Abbiamo che

Spazio colonna A = Spazio colonna (A,b)

Numero di soluzioni

- Resta solo da dimostrare che se $r = rk(A) = rk(A, b)$ allora il sistema ha ∞^{m-r} soluzioni, ma questo segue da nullità più rango: infatti,

$$dim\, Sol(A,0) = null(A) = m - rk(A) = m - r$$

Esercizio

- Determinare per quali valori del parametro k in $\mathbb{R}$ il sistema

$$\begin{cases} kx+(k+1)y-z=2 \\ (k-2)x-(k+1)y+kz=-2 \end{cases}$$

ha soluzioni.

- Soluzione: la matrice dei coefficienti è

$$A=\begin{pmatrix} k & k+1 & -1 \\ k-2 & -k-1 & k \end{pmatrix}$$

mentre la matrice completa è

$$(A,b)=\begin{pmatrix} k & k+1 & -1 & 2 \\ k-2 & -k-1 & k & -2 \end{pmatrix}$$

Continuazione soluzione

- Dobbiamo determinare i valori di k per cui il rango di A è uguale al rango di (A,b).
- Se per un valore k il rango di A è 2, allora in A ci sono due colonne indipendenti. A maggior ragione anche in (A,b) ci sono due colonne indipendenti e quindi il rango di (A,b) è almeno 2. Siccome (A,b) ha due righe, deduciamo che se il rango di A è due allora anche il rango di (A,b) è 2. Quindi per risolvere il problema cominciamo a calcolare valori di k per cui rk(A)=2.

Continuazione soluzione

- Per calcolare valori di k per cui rk(A)=2 scegliamo un minore 2x2 e calcoliamo per quali valori il suo determinante è non nullo. Scegliamo il minore

$$M=\begin{pmatrix} k & -1 \\ k-2 & k \end{pmatrix}$$

e calcoliamo il suo determinante: $det\, M=k^2+k-2$. Il determinante di M è zero se e solo se $k^2+k-2=0$, cioè se k=1,-2. Se k è diverso sia da 1 che da -2 allora det M è diverso da zero, quindi il rango di A è 2 ed è uguale al rango di (A,b). Quindi per k diverso da 1 e da -2 il sistema ha soluzione.

Continuazione soluzione

- Rimane solo da controllare cosa succede quando k=1 e quando k=-2.
- Poniamo k=1. Il sistema diventa $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ -x-2y+z=-2 \end{cases}$
- Riduciamo la matrice completa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- L'ultimo pivot non è in ultima colonna: il sistema ha soluzione

Fine soluzione

- Poniamo ora k=-2. Il sistema diventa

$$\begin{cases} -2x - y - z = 2 \\ -4x + y - 2z = -2 \end{cases}$$

- Riduciamo la matrice completa:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

- L'ultimo pivot non è in ultima colonna: il sistema ha soluzione.
- Conclusione: il sistema ha sempre soluzione.

Sistemi crameriani

- Un sistema di n equazioni e n incognite è detto crameriano.
- Se un sistema crameriano $AX = b$ è tale che $det\, A \neq 0$ allora ha un'unica soluzione

$$S = A^{-1} b$$

Il Teorema di Cramer

Teorema: Sia A una matrice quadrata di ordine n. Allora il sistema crameriano AX=b ha un’unica soluzione se e solo se det(A) $\neq$ 0.

Dimostrazione: Abbiamo già visto che se $det\, A \neq 0$ allora c'è un'unica soluzione.

Supponiamo ora che il sistema abbia un’unica soluzione. Allora rk(A)=rk(A,b)=r e n-r=0, cioè rk(A)=n e quindi $det\, A \neq 0$.

Avvertenza

Il Teorema di Cramer **non** dice che se det(A)=0 allora il sistema non ha soluzione, dice solo che se det(A)=0 e il sistema ha soluzione allora la soluzione non è unica.

Regola di Cramer

Supponiamo che il sistema crameriano $AX = b$ sia tale che $det\, A \neq 0$. Sia **S** = $\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$ l'unica soluzione. Allora

$$s_i = \frac{\det A(i, b)}{\det A}$$

dove A(i,**b**) è la matrice che si ottiene sostituendo alla i-esima colonna di A il vettore **b**.

Esempio

- Verificare che il seguente sistema ha un'unica soluzione e calcolarla.

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x-y+z=1 \\ -x+y+z=1 \end{cases}$$

- Soluzione: la matrice dei coefficienti è

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Continuazione soluzione

- $det\ A = -1-1-1+1-1-1 = -4 \neq 0$, quindi il sistema ha un'unica soluzione.

- La soluzione è $S = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$ dove

$$s_1 = \frac{det\ A(1,b)}{det\ A} = \frac{det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{-4} = 1$$

Fine soluzione

$$s_2 = \frac{\det A(2,b)}{\det A} = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{-4} = 1$$

$$s_3 = \frac{\det A(3,b)}{\det A} = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{-4} = 1$$

quindi la soluzione è $S = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Esercizio

- Determinare per quali valori del parametro k il sistema lineare

$$\begin{cases} (k+1)x+z=1 \\ x+(1-k)y+z=-1 \\ 2x+(1+k)y+2z=k \end{cases}$$

ha un'unica soluzione e, per ogni valore di k trovato, calcolare la soluzione.

Basi e coordinate

- Sappiamo calcolare la dimensione e una base di sottospazi quando siamo in $\mathbb{R}^n$
- Come si risolve questo tipo di problemi in uno spazio vettoriale qualsiasi?

Esempio

- Sia $\mathbb{R}_2[x]$ lo spazio dei polinomi di grado minore o uguale a 2 e sia

$$V = \{ p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \mid p(1) = 0 \}$$

- Verificare che V è un sottospazio di $\mathbb{R}_2[x]$
- Calcolare una base e la dimensione di V.

Isomorfismi

- Siano V e W spazi vettoriali. Un isomorfismo da V in W è una trasformazione lineare biiettiva

$$T : V \to W$$

Osservazioni

- Se $T: V \to W$ è un isomorfismo allora:
  - $v_1, v_2, \ldots, v_k$ sono indipendenti in V se e solo se $T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_k)$ sono linearmente indipendenti in W.
  - $v_1, v_2, \ldots, v_k$ generano V se e solo se $T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_k)$ generano W.
  - $v_1, v_2, \ldots, v_n$ è una base di V se e solo se $T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)$ è una base di W.
  - U è sottospazio di V se e solo se T(U) è sottospazio di W.

Coordinate di un vettore in una base

- Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e sia $B=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ una base di V.
- Se v è un vettore in V allora è combinazione lineare degli elementi di B:

$$v=x_1 v_1+x_2 v_2+\cdots+x_n v_n$$

- Il vettore $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ è detto vettore delle

coordinate di v in B e lo indichiamo con $C_B(v)$.