Lezione 22

Distanze tra spazi affini

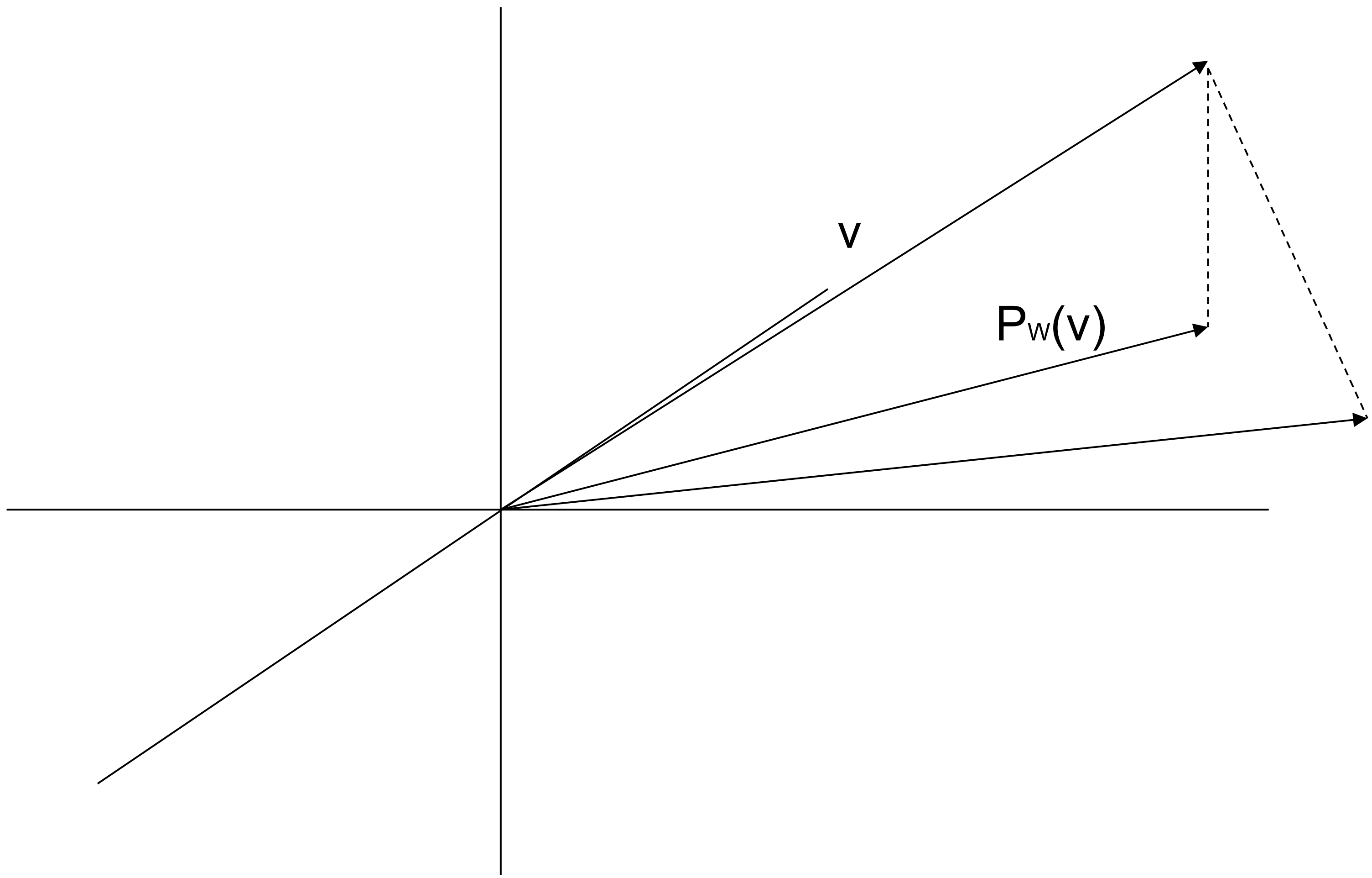
Principio di ortogonalità

- Osservazione: Sia V uno spazio vettoriale e sia $v \cdot w$ un prodotto scalare su V. Sia

W un sottospazio di V.

Allora, dato v in V, il vettore in W che minimizza la distanza da v è la proiezione ortogonale di v su W:

$$min_{w \in W} \| v - w \| = \| v - p_W(v) \| = \| p_{W^\perp}(v) \|$$


v
Pw(v)

Principio di ortogonalità

Dimostrazione: Sia w_v la proiezione ortogonale di v su W. Quindi $u_v = v - w_v$ è ortogonale a W.

Se w è in W allora

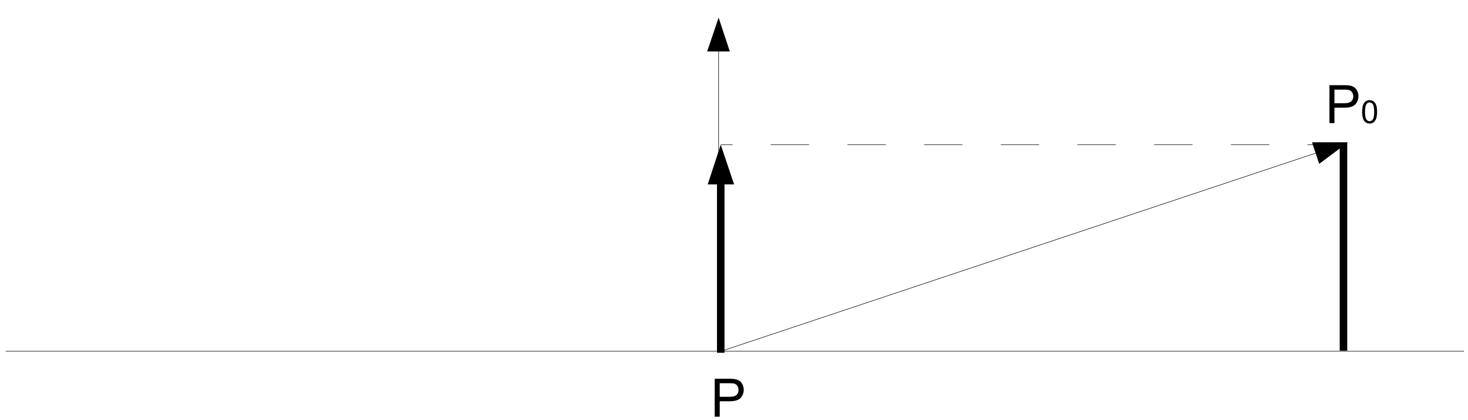
$$\|v-w\|^2 = \|v-w+w_v-w_v\|^2 = \langle v-w_v-(w-w_v), v-w_v-(w-w_v)\rangle$$

$$= \langle v-w_v, v-w_v\rangle - 2\langle v-w_v, w-w_v\rangle + \langle w-w_v, w-w_v\rangle$$

$$= \|v-w_v\|^2 + \|w-w_v\|^2 \geq \|v-w_v\|^2$$

Distanza di un punto da una retta

- La minima distanza di un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ dalla retta di equazione ax+by+c=0 si può calcolare osservando che è la lunghezza della proiezione ortogonale del vettore $\vec{PP_0}$ lungo un vettore ortogonale alla retta, dove P è un qualsiasi punto sulla retta:



Distanza di un punto da una retta nel piano

- Sia r la retta di equazione ax+by+c=0. Siccome $\vec{n}=a\,\vec{i}+b\,\vec{j}$ è un vettore normale alla retta allora la distanza di P_0 da r è

$$d(P_0,r)=\|p_{\vec{n}}(\vec{PP_0})\|=\left\|\left(\frac{\vec{PP_0}\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\right)\vec{n}\right\|=\frac{|\vec{PP_0}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|^2}\|\vec{n}\|=\frac{|\vec{PP_0}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

- Esplicitando $P=(x,y),\ P_0=(x_0,y_0),\ \vec{n}=a\,\vec{i}+b\,\vec{j}$

e usando il fatto che ax+by=-c troviamo che

$$d(P_0,r)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Distanza di un punto da un piano

- La minima distanza di un punto $P_0=(x_0, y_0, z_0)$ dal piano α di equazione ax+by+cz+d=0 è, per lo stesso argomento,

$$d(P_0, \alpha)=\frac{|ax_0+by_0+c\,z_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Distanza tra due piani paralleli

Per calcolare la distanza tra due piani paralleli di equazione

$$\alpha_1 : ax + by + cz = d_1 \qquad \alpha_2 : ax + by + cz = d_2$$

è sufficiente calcolare la distanza di un punto $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ di α_1 da α_2. Otteniamo quindi

$$d(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Siccome P_0 sta sul piano α_1 troviamo che $ax_0+by_0+cz_0=d_1$ da cui ricaviamo che

$$\boxed{d(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

Distanza tra due rette sghembe

- Date due rette sghembe in forma vettoriale r: $P=P_0 + tv$, s: $P=Q_0 + tw$, si ha che la minima distanza tra le due rette è la lunghezza della proiezione di $\overrightarrow{P_0Q_0}$ lungo un vettore ortogonale sia a v che a w.
- Da questa osservazione si ricava la formula

$$d(r,s)=\frac{|\overrightarrow{P_0Q_0}\cdot v\wedge w|}{\|v\wedge w\|}$$

Calcolo della distanza tra due rette sghembe

- Se le due rette sghembe sono date in equazione parametrica

$$r:\begin{cases} x = x_0 + t\,l \\ y = y_0 + tm \\ z = z_0 + t\,n \end{cases} \quad s:\begin{cases} x = x'_0 + t\,l' \\ y = y'_0 + tm' \\ z = z'_0 + t\,n' \end{cases}$$

allora la formula diventa

$$d(r,s) = \frac{\left|\det\begin{pmatrix} x'_0 - x_0 & y'_0 - y_0 & z'_0 - z_0 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{(mn' - m'n)^2 + (l\,n' - l'\,n)^2 + (l\,m' - l'\,m)^2}}$$

Distanza di un punto da una retta nello spazio

- Dato un punto P e una retta in forma vettoriale $r = P_0 + tv$ allora la distanza del punto dalla retta è data da

$$\|\overrightarrow{P_0 P}\| \sin\theta$$

dove θ è l'angolo minimo tra $\overrightarrow{P_0 P}$ e v.

Usando la formula

$$\|\overrightarrow{P_0 P} \wedge v\| = \|\overrightarrow{P_0 P}\| \|v\| \sin\theta$$

si ottiene

$$d(P, r) = \frac{\|\overrightarrow{P_0 P} \wedge v\|}{\|v\|}$$

Forme quadratiche

- Le forme quadratiche su $\mathbb{R}^n$ sono i polinomi di grado due omogenei in n variabili:

se $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ allora $q(X) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$ è una

forma quadratica.

Forme quadratiche e matrici

- Sia $q(X)=\sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$ una forma quadratica e sia A la matrice dei coefficienti (a_{ij}).
- Ponendo $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ possiamo riscrivere la forma

quadratica come $q(X)=X^T A X$

Infatti

$$X^T A X = X^T \left(\sum_j x_j A^j\right) = \sum_j x_j X^T A^j = \sum_j x_j \left(\sum_i a_{ij} x_i\right) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$$

La matrice A non è unica

- Abbiamo visto che ogni forma quadratica può essere scritta nella forma

$$q(X) = X^T A X$$

- Si noti che la scelta della matrice A non è unica. Ad esempio, se $q(X) = X^T A X$, allora

$$q(X) = (q(X))^T = (X^T A X)^T = X^T A^T X$$

quindi possiamo scegliere A^T invece che A.

Forme quadratiche e matrici simmetriche

- Se q(X) è una forma quadratica allora possiamo sempre scrivere la forma quadratica nella forma

$$q(X)=X^T S\,X$$

con S matrice simmetrica. Infatti se $q(X)=X^T A\,X$ con A una matrice qualsiasi, allora

$$q(X)=\frac{1}{2}(X^T A\,X+X^T A^T X)=X^T(\frac{1}{2}(A+A^T))\,X$$

Basta quindi scegliere $S=\frac{1}{2}(A^T+A)$

Matrice di Gram di una forma quadratica

- Una forma quadratica $q(X)$ si può quindi scrivere in modo compatto come

$$q(X)=X^T SX$$

dove S è una matrice simmetrica.

- Teorema:La matrice S è unica ed è detta matrice di Gram di q.
- Dimostrazione: supponiamo di avere che

$$q(X)=X^T SX=X^T S'X$$

con S e S' entrambe simmetriche.

Continuazione dimostrazione

- In particolare $q(e_i)=e_i^T S e_i=e_i^T S^i=s_{ii}$ e $q(e_i)=e_i^T S' e_i=e_i^T S'^i=s'_{ii}$. Quindi $s_{ii}=s'_{ii}$. Inoltre

$$q(e_i+e_j)=(e_i+e_j)^T S(e_i+e_j)=(e_i+e_j)^T (S^i+S^j)=s_{ii}+s_{ij}+s_{ji}+s_{jj}$$

e

$$q(e_i+e_j)=(e_i+e_j)^T S'(e_i+e_j)=(e_i+e_j)^T (S'^i+S'^j)=s'_{ii}+s'_{ij}+s'_{ji}+s'_{jj}$$

Quindi $s_{ii}+s_{ij}+s_{ji}+s_{jj}=s'_{ii}+s'_{ij}+s'_{ji}+s'_{jj}=s_{ii}+s'_{ij}+s'_{ji}+s_{jj}$.

Siccome sia S che S' sono simmetriche, abbiamo che $s_{ij}=s_{ji}$ e $s'_{ij}=s'_{ji}$ da cui otteniamo $s_{ii}+2s_{ij}+s_{jj}=s_{ii}+2s'_{ij}+s_{jj}$ e quindi $s_{ij}=s'_{ij}$, cioè S=S.'

Esercizio

- Calcolare la matrice di Gram della forma quadratica su $\mathbb{R}^3$

$$q(x,y,z)=xy-2xz+3x^2-7yz+z^2-2y^2$$

- Soluzione: si etichetta una matrice con le variabili:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} & \begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{pmatrix} \end{array}$$

Se a è una delle variabili, nei posti etichettati con $a\ a$ si mette il coefficiente di a^2 in q.

Continuazione soluzione

Se a e b sono due variabili distinte, nei posti etichettati con $a\ b$ e $b\ a$ si mette il coefficiente di ab in q diviso per due.

- Nel nostro caso

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} & \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & -2 & -\frac{7}{2} \\ -1 & -\frac{7}{2} & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Esercizio

- Calcolare la matrice di Gram della forma quadratica su $\mathbb{R}^2$

$$q(x, y) = 2xy - 2x^2 + 3y^2$$

- Soluzione:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ z \end{array} & \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Segnatura di una matrice simmetrica

- Definizione: Sia A una matrice simmetrica reale. Sia r il numero di autovalori positivi di A contati con la loro molteplicità geometrica e sia s il numero di autovalori negativi contati con la loro molteplicità geometrica.
- La coppia (r,s) è detta segnatura della matrice A.

Segnatura di una forma quadratica

- La segnatura della matrice di Gram della forma quadratica q(X) è detta segnatura di q(X).
- Riassumendo: la segnatura di q è (r,s) se la matrice di Gram di q ha r autovalori positivi e s autovalori negativi, contando gli autovalori con la loro molteplicità algebrica.