Lezione 24

Classificazione delle quadriche

Rototraslazioni

- La composta di due isometrie F e G è ancora un'isometria:

$$d\left(F\circ G\left(P\right),F\circ G\left(Q\right)\right)=d\left(F\left(G\left(P\right)\right),F\left(G\left(Q\right)\right)\right)$$

$$=d\left(G\left(P\right),G\left(Q\right)\right)=d\left(P,Q\right)$$

- Una rototraslazione è una isometria lineare seguita da una traslazione. Siccome una rototraslazione è la composta di due isometrie, è essa stessa un'isometria.

Rototraslazioni

- Sia $R = T_v \circ T$ una rototraslazione con T isometria lineare. Sia A la matrice di T nella base canonica. Abbiamo che
$$R(X) = T_v(AX) = AX + v$$
- Siccome T è un'isometria lineare, A è ortogonale.
- L'isometria lineare T è anche detta parte lineare di R.
- Si può dimostrare che tutte le isometrie del piano o dello spazio sono rototraslazioni.

Matrice di una rototraslazione

- Definizione: se $R = T_v \circ T$ è una rototraslazione con parte lineare T e M_0 è la matrice di T allora la matrice associata alla rototraslazione R è

$$M = \begin{pmatrix} M_0 & v \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix}$$

- Osservazione:

$$\begin{pmatrix} R(X) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_0 X + v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_0 & v \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}$$

Inversa di una rototraslazione

- L'nversa R^{-1} di una rototraslazione R è anch'essa una rototraslazione:
- Se $R(X)=T_v(AX)=AX+v$ allora

$$R^{-1}(X)=A^{-1}(X-v)=A^{-1}X-A^{-1}v=T_{-A^{-1}v}A^{-1}X$$

Quadriche

- Definizione: una quadrica è il luogo di punti in $\mathbb{R}^n$ definito da un'equazione di secondo grado:

$$p(x_1,\cdots,x_n)=0 \text{ con } p(x_1,\cdots,x_n)=\Sigma_{i\leq j} a_{ij} x_i x_j + \Sigma b_i x_i + f$$

- Se n=2 le quadriche sono chiamate coniche; quindi una conica è il luogo di punti definito dall'equazione

$$a x^2 + b xy + c y^2 + d x + e y + f = 0$$

con

$$(a, b, c) \neq (0,0,0)$$

Esempi

- La conica di equazione $x^2+y^2-1=0$ è l'insieme di punti di coordinate (x,y) tali che $x^2+y^2=1$

ed è quindi la circonferenza di centro l'origine O e di raggio 1.

- La conica di equazione $x^2+y^2+1=0$ è l'insieme di punti di coordinate (x,y) tali che $x^2+y^2=-1$ ed è quindi l'insieme vuoto.
- La quadrica di equazione $x^2+y^2+z^2-1=0$ è l'insieme di punti di coordinate (x,y,z) tali che $x^2+y^2+z^2=1$ ed è quindi la sfera di centro O e raggio 1.

Esempi geometrici

- Data una retta r detta direttrice e un punto F non appartenente a r detto fuoco e un numero $e>0$ detto eccentricità, il luogo dei punti P tali che

$$d(P,F)=e\,d(P,r)$$

è una conica detta ellisse se $e<1$, parabola se $e=1$, iperbole se $e>1$.

Sfere

- Le sfere sono superfici quadriche: infatti la sfera di centro (x_0, y_0, z_0) e raggio R è il luogo di punti di equazione

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

Coni

- Un cono è una superfice per ogni punto della quale passa una retta *g* tutta contenuta nella superficie e passante per un punto fisso V, detto *vertice* del cono.
- Le rette *g* si dicono *generatrici* del cono.
- Una curva che interseca tutte le generatrici in un punto è detta direttrice del cono

Coni quadrici

- Un cono quadrico è un cono che è anche una superfice quadrica
- Esempio: la quadrica di equazione

$$x^2+y^2-z^2=0$$

è il cono quadrico con vertice l'origine e direttrice la circonferenza di raggio 1 centro (0,0,1) giacente nel piano z=1.

Cilindri

- Chiamiamo *cilindro* una superficie per ogni punto della quale passa una retta *g* di direzione assegnata tutta contenuta nella superficie.
- Le rette *g* si dicono *generatrici* del cilindro.
- Una curva che interseca tutte le generatrici in un punto è detta direttrice del cilindro

Cilindri quadrici

- Un cilindro quadrico è un cilindro che è anche una superfice quadrica
- Esempio: la quadrica nello spazio di equazione

$$x^2+y^2-1=0$$

è il cilindro quadrico con generatrici parallele all'asse z e direttrice la circonferenza di raggio 1 centro (0,0,0) giacente nel piano z=0.

Superfici di rotazione

- Data una curva γ ed una retta *r* la superficie decritta dai punti di γ durante una rotazione di 2π attorno alla retta *r* si dice *superficie di rotazione* generata da γ ed *r* si dice *asse di rotazione*.
- Le quadriche di rotazione sono le superfici quadriche che sono anche superfici di rotazione

Esempi di quadriche di rotazione

- Ellissoidi di rotazione ottenuti ruotando un'ellisse intorno a un asse di simmetria
- Iperboloidi ottenuti ruotando un iperbole intorno a un asse di simmetria
- Paraboloidi ottenuti ruotando una parabola intorno al suo asse di simmetria
- Ruotando un retta intorno ad un'altra retta si ottiene (quasi sempre) una quadrica di rotazione.

Problema

- Come si deducono le proprietà geometriche di una quadrica dalla sua equazione?
- Esempio: verificare che la quadrica di equazione

$$x^2+2xy+2x+2y+z^2+1=0$$

è un cono

Forme canoniche

- Ogni quadrica può essere spostata con una rototraslazione in una particolare forma detta forma canonica della quadrica.
- Per calcolare la forma canonica è necessario capire come si trasforma l'equazione della quadrica se si rototrasla la quadrica.

Matrice di una quadrica

- All'equazione

$$p(x_1, \cdots, x_n) = 0 \text{ con } p(x_1, \cdots, x_n) = \Sigma_{i \le j} a_{ij} x_i x_j + \Sigma b_i x_i + f$$

si associa la matrice

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & q \\ q^T & f \end{pmatrix}$$

dove $(a_0)_{ii} = a_{ii}$, $(a_0)_{ij} = a_{ij}/2$, $q_i = b_i/2$. L'equazione si può scrivere come

$$\begin{pmatrix} X^T & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Rototraslazione di una quadrica

- Se $\mathcal{Q}$ è una quadrica di equazione p(X)=0 e R è una rototraslazione, allora la curva R($\mathcal{Q}$) ha equazione

$$p\left(R^{-1}\left(X\right)\right)=0$$

- Dimostrazione: Il punto X sta su R($\mathcal{Q}$) se e solo se $X=R\left(X'\right)$ con X' su $\mathcal{Q}$. Ne segue

che $X'=R^{-1}\left(X\right)$ e, siccome X' sta su $\mathcal{Q}$,

$p\left(X'\right)=0$. Quindi X sta su R($\mathcal{Q}$) se e solo se

$$0=p\left(X'\right)=p\left(R^{-1}\left(X\right)\right)$$

Equazione della rototraslazione di una quadrica

Sia Q una quadrica. Sia R una rototraslazione e sia A la matrice di Q. Quindi l'equazione di Q è p(X)=0 con

$$p(X) = \begin{pmatrix} X^T & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sia M la matrice di R, quindi

$$\begin{pmatrix} R^{-1}(X) \\ 1 \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}$$

Conclusione

- L'equazione di R(Q) è $p\left(R^{-1}(X)\right)=0$ cioè

$$0=\begin{pmatrix} R^{-1}(X) \\ 1 \end{pmatrix}^T A \begin{pmatrix} R^{-1}(X) \\ 1 \end{pmatrix}=\left(M^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}\right)^T A M^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix}\left(M^{-1}\right)^T A M^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

- La matrice di R(Q) è

$$\left(M^{-1}\right)^T A M^{-1}$$

dove M è la matrice di R.

Esercizio

Sia $\mathcal{C}$ la conica avente equazione

$$x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$$

Calcolare l’equazione di R($\mathcal{C}$) dove R è la rotazione di $\frac{\pi}{4}$ in senso antiorario.

Soluzione: la matrice dell'equazione è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Continuazione soluzione

- La matrice della rotazione è

$$M=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

quindi

$$M^{-1}=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Continuazione soluzione

- La matrice della conica rototraslata è

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\left(2\sqrt{2}\right) & 3/\left(2\sqrt{2}\right) & 0 \\ -1/\left(2\sqrt{2}\right) & 3/\left(2\sqrt{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Fine soluzione

- L'equazione di R($\mathcal{C}$) è

$$\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}y^2-1=0$$

Esercizio

- Sia C' la conica avente equazione

$$x^2+xy+y^2+2x-1=0$$

Calcolare l'equazione di T(C') dove T è la traslazione $T_{(4/3,-2/3)}$

- Soluzione: la matrice dell'equazione è

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Continuazione soluzione

- La matrice della traslazione è

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4/3 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

quindi

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Continuazione soluzione

- La matrice della conica rototraslata è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4/3 & 2/3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4/3 & 2/3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -7/3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7/3 \end{pmatrix}$$

Fine soluzione

- L'equazione di R($\mathcal{C}$) è

$$x^2 + xy + y^2 - 7/3 = 0$$

Calcolo della forma canonica

Il metodo consiste nel modificare l’equazione della quadrica in successivi passaggi moltiplicandola per un fattore k non nullo oppure effettuando una rototraslazione. In generale si applicano due procedimenti:

- la diagonalizzazione
- l'eliminazione dei termini lineari.

Se l'equazione della quadrica è

$p(x_1, \cdots, x_n) = 0$ con $p(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i \leq j} a_{ij} x_i x_j + \sum b_i x_i + f$

allora

- La diagonalizzazione consiste nella diagonalizzazione della matrice A_0 e l'effetto è quello di eliminare i termini $a_{ij}x_ix_j$ con $i \neq j$ dall'equazione.
- L'eliminazione dei termini lineari consiste in una traslazione e l'effetto è quello di eliminare dall'equazione termini del tipo b_ix_i.
- La forma canonica è quella che si ottiene eliminando tutti i termini $a_{ij}x_ix_j$ con $i \neq j$ e il maggior numero possibile di termini lineari.

Forma canonica delle quadriche: quadriche con centro di simmetria

- Sia $A = \begin{pmatrix} A_0 & q \\ q^T & f \end{pmatrix}$ la matrice di una quadrica Q

- Una quadrica con centro di simmetria è una quadrica tale che esiste una soluzione c_0 di

$$A_0 X + q = \vec{0}$$

- Come vedremo il punto c_0 è un centro di simmetria della quadrica.

Eliminazione dei termini lineari

Effettuiamo la traslazione che manda il centro c_0 nell'origine degli assi:

$$\begin{pmatrix} T_{-c_0}(X) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & -c_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matrice dell'equazione diventa

$$A' = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & f' \end{pmatrix}$$

L'equazione della quadrica traslata è

$$p'(X) = X^T A_0 X + f' = 0$$

Si noti che

$$\det A' = \det \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & f' \end{pmatrix} = f' \det A_0$$

e che $\det A' = \det M^{-2} \det A = \det A$

e quindi, se $det\, A_0 \neq 0$ $\quad f' = \dfrac{\det A}{\det A_0}$

- Se $det\, A_0 = 0$, allora $f' = p'(0) = p(T_{c_0}(0)) = p(c_0)$

Significato geometrico della traslazione

- Geometricamente con la traslazione si porta un centro di simmetria nell'origine degli assi

Il passo: diagonalizzazione

A questo punto si diagonalizza la matrice A_0. Siccome A_0 è una matrice simmetrica sappiamo che A_0 ammette una matrice modale M_0 ortogonale. Abbiamo dunque che

$$M_0^T A_0 M_0 = M_0^{-1} A_0 M_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Si effettua la isometria lineare

$$\begin{pmatrix} R\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_0^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quindi la matrice A’’ dell’equazione della quadrica rototraslata mediante R è

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & f' \end{pmatrix}$$

che corrisponde all'equazione

$$\sum \lambda_i x_i^2 + f' = 0$$

Significato geometrico della diagonalizzazione

- Geometricamente la diagonalizzazione corrisponde a ruotare gli assi di simmetria della quadrica negli assi coordinati.
- I versori corrispondenti agli assi di simmetria sono dati dalle colonne della matrice M_0, cioè dagli autovettori della matrice A_0

Quadriche con centro di simmetria

- Si possono riordinare gli autovalori di A_0 in modo che $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ siano positivi, $\lambda_{r+1}, \cdots, \lambda_{r+s}$ siano negativi e $\lambda_{r+s+1}, \cdots, \lambda_n$ siano nulli.
- L'equazione diventa, chiamando $\mu_i = -\lambda_{r+i}$,

$$\Sigma_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2 - \Sigma_{i=1}^{s} \mu_i x_i^2 = -f'$$

Con $\lambda_i > 0, \mu_i > 0$

- L'equazione $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2 - \sum_{i=1}^{s} \mu_i x_i^2 = -f'$ è chiamata forma canonica della quadrica.