Lezione 11

Teorema della dimensione

Osservazioni

- T è iniettiva se e solo se Ker T $=\left\{\vec{0}\right\}$.
- T è suriettiva se e solo se Im T=W.

Teorema della dimensione

Se T: V$\longrightarrow$ W è una trasformazione lineare tra due spazi vettoriali e V è di dimensione finita, allora Im T è di dimensione finita e

dim V=dim Ker T + dim Im T

Dimostrazione: Si sceglie una base $\{v_1, \cdots, v_k\}$ di Ker T, si completa questa base ad una base $\{v_1, \cdots, v_k, v_{k+1}, \cdots, v_n\}$ di V.

Continuazione della dimostrazione

Dimostriamo che $\{T(v_{k+1}),\cdots,T(v_n)\}$ è una base di Im T:

- linearmente indipendenti: se

$$x_1 T(v_{k+1})+x_2 T(v_{k+2})+\cdots+x_{n-k} T(v_n)=\vec{0}$$

allora $T(x_1 v_{k+1}+x_2 v_{k+2}+\cdots+x_{n-k} v_n)=\vec{0}$

quindi $x_1 v_{k+1}+x_2 v_{k+2}+\cdots+x_{n-k} v_n \in Ker\, T$.

Ne segue che

$$x_1 v_{k+1}+x_2 v_{k+2}+\cdots+x_{n-k} v_n=y_1 v_1+y_2 v_2+\cdots+y_k v_k \Leftrightarrow$$

$$-y_1 v_1-y_2 v_2-\cdots-y_k v_k+x_1 v_{k+1}+x_2 v_{k+2}+\cdots+x_{n-k} v_n=\vec{0}$$

Continuazione della dimostrazione

Siccome $\{v_1, \cdots, v_k, v_{k+1}, \cdots, v_n\}$ è linearmente indipendente otteniamo $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-k} = 0$

– generano:

Se $T(v) \in Im\, T$ allora, scrivendo

$$v = y_1 v_1 + y_2 v_2 + \cdots + y_k v_k + x_1 v_{k+1} + x_2 v_{k+2} + \cdots + x_{n-k} v_n$$

troviamo

$$T(v) = y_1 T(v_1) + y_2 T(v_2) + \cdots + y_k T(v_k) +$$
$$+ x_1 T(v_{k+1}) + x_2 T(v_{k+2}) + \cdots + x_{n-k} T(v_n) =$$
$$= x_1 T(v_{k+1}) + x_2 T(v_{k+2}) + \cdots + x_{n-k} T(v_n)$$

Conclusione della dimostrazione

Quindi

$$T(v) = x_1 T(v_{k+1}) + x_2 T(v_{k+2}) + \cdots + x_{n-k} T(v_n)$$

cioè $\{T(v_{k+1}), \cdots, T(v_n)\}$ genera Im T.

Abbiamo quindi dimostrato che

$$\{T(v_{k+1}), \cdots, T(v_n)\}$$

è una base di Im T, ma allora

dim Im T = n-k = dim V - dim Ker T

ovvero

dim V = dim Ker T + dim Im T

Nullità più rango

- Corollario del teorema della dimensione:

Se A è una matrice nxm,

m=null(A)+rk(A)

Dimostrazione: Per il teorema della dimensione

$$dim\, Im\, T_A + dim\, \mathrm{Ker}\, T_A = dim\, \mathbb{R}^m$$

Siccome $dim\, Im\, T_A = rk(A),\; dim\, Ker\, T_A = null(A)$ e $dim\, \mathbb{R}^m = m$ otteniamo che m=null(A)+rk(A).

Conseguenza del teorema della dimensione I

Siano V e W spazi vettoriali di dimensione finita e T: V W una trasformazione lineare. Allora

- Se T è iniettiva allora dim V $\leqslant$ dim W

$$dim\,V = dim\,Ker\,T + dim\,Im\,T = dim\,Im\,T \leq dim\,W$$

- Se T è suriettiva allora dim V $\geqslant$ dim W

$$dim\,V = dim\,Ker\,T + dim\,Im\,T = dim\,Ker\,T + dim\,W \geq dim\,W$$

Conseguenza del teorema della dimensione II

Siano V e W spazi vettoriali di dimensione finita e T: V W una trasformazione lineare. Allora

- Se dim V=dim W allora T è iniettiva se e solo se è biiettiva.

$$dim\, W = dim\, V = dim\, Ker\, T + dim\, Im\, T = dim\, Im\, T$$

Conseguenza del teorema della dimensione III

Siano V e W spazi vettoriali di dimensione finita e T: V W una trasformazione lineare. Allora

- Se dim V=dim W allora T è suriettiva se e solo se è biiettiva

$$dim\,W = dim\,V = dim\,Ker\,T + dim\,Im\,T = dim\,Ker\,T + dim\,W$$

Conseguenza del teorema della dimensione IV

Siano V e W spazi vettoriali di dimensione finita e T: V W una trasformazione lineare. Allora

- Se T è biiettiva allora dim V=dim W.

$$dim\, V = dim\, Ker\, T + dim\, Im\, T = dim\, W$$

Composta di trasformazioni lineari

- Se $T : V \to W$, $S : W \to U$ sono trasformazioni lineari allora $S \circ T : V \to U$ è una trasformazione lineare.

Composizione di T_A con T_B

- Sia A una matrice nxm, B una matrice mxk, allora

$$T_A \circ T_B = T_{AB}$$

Inversa di una trasformazione lineare

- Se $T : V \to W$ è una trasformazione lineare biiettiva (quindi invertibile) allora $T^{-1} : W \to V$ è lineare.
- Dimostrazione: dobbiamo verificare che

$$T^{-1}(w_1 + w_2) = T^{-1}(w_1) + T^{-1}(w_2), \quad T^{-1}(tw) = tT^{-1}(w).$$

Siano $v_1 = T^{-1}(w_1)$ e $v_2 = T^{-1}(w_2)$. Allora $T(v_1) = w_1$ e $T(v_2) = w_2$, e quindi

$$T^{-1}(w_1 + w_2) = T^{-1}(T(v_1) + T(v_2)) = T^{-1}(T(v_1 + v_2))$$

$$= v_1 + v_2 = T^{-1}(w_1) + T^{-1}(w_2).$$

Inversa di una trasformazione lineare

- Per verificare che $T^{-1}(tw)=tT^{-1}(w)$ sia $v=T^{-1}(w)$. Allora $T(v)=w$, e quindi

$$T^{-1}(t\,w)=T^{-1}(t\,T(v))=T^{-1}(T(t\,v))=tv=tT^{-1}(w)$$

Inversa di T_A

- Sia A una matrice nxm, allora T_A è invertibile se e solo se n=m e A è invertibile. Inoltre si ha

$$T_A^{-1} = T_{A^{-1}}$$