Lezione 12

Determinante e rango

Inversa di T_A

- Sia A una matrice nxm, allora T_A è invertibile se e solo se n=m e A è invertibile. Inoltre si ha

$$T_A^{-1} = T_{A^{-1}}$$

Determinante e rango

Teorema: Sia A una matrice quadrata di ordine n, allora

$$rk(A) = n \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$$

In particolare $v_1, v_2, \ldots, v_n$ in $\mathbb{R}^n$ formano una base di $\mathbb{R}^n$ se e solo se il determinante della matrice che ha per righe (o per colonne) i vettori dati è diverso da zero.

Dimostrazione:

detA è diverso da zero se e solo se A è invertibile se e solo se T_A è invertibile se e solo se T_A è suriettiva se e solo se rk(A)=n.

Riassumendo

Se A è una matrice quadrata di ordine n allora sono equivalenti

- det(A) è diverso da zero
- A è invertibile
- rk(A)=n
- Le righe di A formano una base di $\mathbb{R}^n$
- Le colonne di A formano una base di $\mathbb{R}^n$

Calcolo del rango di una matrice

Ci sono due metodi per calcolare il rango di una matrice: il metodo di eliminazione (che abbiamo già visto) e il metodo dei determinanti minori.

Metodo dei determinanti minori

Sia A una matrice nxm. Ricordiamo che un minore di ordine r di A è una sottomatrice quadrata di A di ordine r.

Teorema: Il rango di A è uguale al massimo r per cui esiste un minore M di ordine r il cui determinante è diverso da zero.

(Il rango di A è il massimo ordine di un determinate minore non nullo).

Esempio

$$rk\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 2$$ infatti $$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -3 \neq 0$$

e tutti i minori di ordine 3 hanno determinante zero:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0, \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 0, \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 0, \det\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 0$$

Dimostrazione del metodo dei determinanti minori

Sia A una matrice nxm di rango r e sia s il massimo ordine di un determinate minore non nullo.Siccome A ha r righe linearmente indipendenti allora esiste un minore di ordine r con determinante diverso da zero: basta prendere le r righe linearmente indipendenti, queste formano una matrice rxm che ha rango r e quindi ha r colonne linearmente indipendenti. Queste r colonne formano un minore di ordine r che ha determinante diverso da zero. Quindi

$$r \leq s$$

Dimostrazione del metodo dei determinanti minori

Viceversa se M è un minore di ordine s con determinante non nullo allora esistono s righe di A linearmente indipendenti: basta prendere le righe di A che abbiamo scelto per formare il minore. Queste sono indipendenti perché la matrice formata da queste righe ha s colonne linearmente indipendenti (quelle del minore M) e quindi le sue s righe sono indipendenti.Quindi

$$s \leq r$$

Si conclude che

$$s = r$$

Esempio

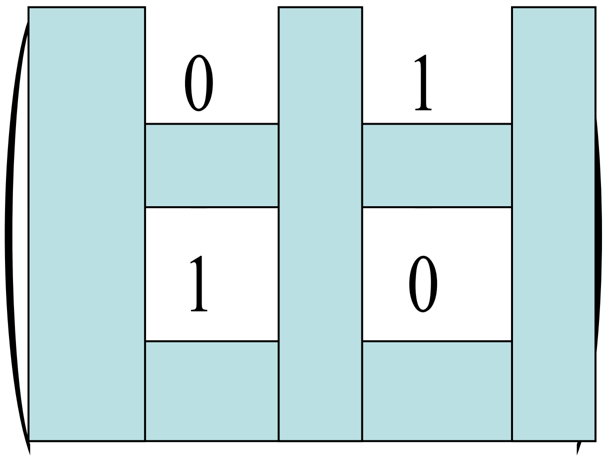
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sono indipendenti

sono indipendenti

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ & & & & \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ & & & & \end{pmatrix}$$

ha due righe indipendenti quindi
ha due colonne indipendenti



minore di ordine due con determinante diverso da zero

Esercizio

Calcolare il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Usando il metodo dei determinanti minori.

Bisogna calcolare 18 determinanti di matrici di ordine 2. Per ridurre il numero dei determinanti minori da calcolare si può utilizzare il metodo degli orlati.

Minore orlato

Se A è una matrice nxm e M è un minore di A di ordine r un minore orlato di M è un minore di A di ordine r+1 che si ottiene aggiungendo a M una riga ed una colonna

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Un minore di A è $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. I minori orlati di M sono

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Metodo di Kronecker per il calcolo del rango (metodo degli orlati)

Teorema: Sia A una matrice nxm. Se M è un minore di A di ordine r tale che $det\, M \neq 0$ e ogni minore orlato di M ha determinante nullo allora il rango di A è r.

- Dimostrazione omessa

Esercizio

- Calcolare il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

usando il metodo dei determinanti minori orlati.

- Soluzione: per prima cosa individuiamo un minore con determinante diverso da zero: ad esempio il minore 1x1 in alto a sinistra: M=(1). Chiaramente $det\, M = 1$.

Continuazione soluzione

- Calcoliamo ora i determinanti di tutti i minori orlati di M:

$$det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}=0,\ det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}=0,\ det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}=0,$$

$$det\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}=0,\ det\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=0,\ det\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}=0.$$

Siccome tutti i minori orlati di M hanno determinante nullo il rango della matrice è l'ordine di M cioè 1.

Esercizio

- Calcolare il rango e la nullità di A usando il metodo degli orlati.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Soluzione: individuiamo un minore con determinante non nullo, ad esempio il minore M 2x2 in alto a sinistra.

$$det\, M = det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -2$$

Continuazione soluzione

- Calcoliamo ora i determinanti di tutti i minori orlati di M:

$$det\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 0, \quad det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 0, \quad det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Siccome tutti i minori orlati di M hanno determinante nullo il rango della matrice è l'ordine di M cioè 2.

La nullità di A è null(A)=5-2=3

Esercizio

- Determinare per quali valori del parametro k in $\mathbb{R}$ la matrice

$$A=\begin{pmatrix} k & k+1 & -1 \\ k-2 & -k-1 & k \end{pmatrix}$$

ha rango 2.

Regola generale

- Se la matrice è numerica si usa il metodo di eliminazione
- Se la matrice ha parametri si usa il rango per minori

Numero di soluzioni di un sistema lineare

Diremo che un sistema lineare AX=b ha ∞^k soluzioni se ha almeno una soluzione e

$$\dim \mathrm{Sol}(A,\vec{0})=k$$

Se un sistema AX=b ha soluzione, allora le soluzioni sono $X_{part}+\mathrm{Sol}(A,\vec{0})$.

Se il sistema ha ∞^k soluzioni allora tutte le soluzioni si possono scrivere come

$$X_{part}+t_1X_1+t_2X_2+\ldots+t_kX_k$$

dove $\{X_1,X_2,\ldots,X_k\}$ è una base di $\mathrm{Sol}(A,\vec{0})$

Soluzione generale di un sistema

Se il sistema AX=b ha ∞^k soluzioni, allora l'espressione

$$X=X_{part}+t_1X_1+t_2X_2+\ldots.+t_kX_k$$

che descrive tutte le soluzioni in termini di k parametri viene chiamata soluzione generale del sistema, quindi dire che il sistema ha ∞^k soluzioni vuol dire che ci sono k parametri nella soluzione generale.

Esercizio

- Calcolare la soluzione generale del sistema

$$\begin{cases} 2x+y-w=7 \\ 2x+2y+z+w=6 \\ y+z+2w=-1 \\ 2x-z-3w=8 \end{cases}$$

- Soluzione: basta risolvere il sistema.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & 7 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & -3 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Continuazione soluzione

$$\sim\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il sistema ridotto è $\begin{cases} 2x+y-w=7 \\ y+z+2w=-1 \end{cases}$. Le variabili libere sono z e w. Risolvendo all'indietro si trova

$$\begin{cases} 2x=7-y+w=7+1+z+2w+w=8+z+3w \\ y=-1-z-2w \end{cases}$$

per cui le soluzioni sono $\begin{pmatrix} 4+\frac{1}{2}z+\frac{3}{2}w \\ -1-z-2w \\ z \\ w \end{pmatrix}$

Fine soluzione

$$\begin{pmatrix} 4+\frac{1}{2}z+\frac{3}{2}w \\ -1-z-2w \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La soluzione generale del sistema è

$$X = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Teorema di Rouchè-Capelli

Teorema: Sia A una matrice nxm e si consideri il sistema lineare di n equazioni e m incognite AX=b.

Il sistema ha soluzione se e solo se

$$rk(A)=rk(A,b)$$

(se e solo se il rango della matrice dei coefficienti è uguale al rango della matrice completa). In tal caso il sistema ha ∞^{m-r} soluzioni, dove r=rk(A)=rk(A,b).