Lezione 8

Calcolo della base di un sottospazio

Conseguenze del teorema della base VII

Sia V uno spazio di dimensione finita. Allora

- Se W è un sottospazio di V e

  dim W = dim V allora W=V.

Dimostrazione: sia n=dim V =dim W. Sia

$\{w_1,w_2,\ldots,w_n\}$ una base di W. Siccome $\{w_1,w_2,\ldots,w_n\}$ è linearmente indipendente allora, per il Teorema della base, è contenuto in una base di B di V. Siccome B ha n elementi, abbiamo che $B=\{w_1,w_2,\ldots,w_n\}$. In particolare $W=L(w_1,w_2,\ldots,w_n)=V$.

Problema

- In generale, se $v_1, v_2, \ldots, v_k$ sono n-vettori come si fa a calcolare una base e la dimensione di $L(v_1, v_2, \ldots, v_k)$?

Esempio

- Calcolare la dimensione dello spazio in $\mathbb{R}^{10}$ generato da
- (1,0,0,-1, 2,3,3,3,1,2),(1,1,0,0,1,2,3,4,5,1),(-1,-1,-2,0,0,0,1,1,2,1)

Spazio riga e spazio colonna

Se A è una matrice nxm indichiamo con $A_1, A_2, \ldots, A_n$ le righe di A e con $A^1, A^2, \ldots, A^m$ le colonne di A.

- Lo spazio riga di A è lo spazio generato dalle righe di A
- Lo spazio colonna è lo spazio generato dalle colonne di A

Quindi lo spazio riga è $L(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ e lo spazio colonna è $L(A^1, A^2, \cdots, A^m)$

Osservazione

- Se A è una matrice mxn e $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ allora

$$AX=\sum_{i=1}^{n} x_i A^i$$

- Dimostrazione: ricordiamo che $e_i=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} i$. Si

osserva che $A e_i=A^i$. Quindi

$$AX=A\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right)=\sum_{i=1}^{n} x_i A e_i=\sum_{i=1}^{n} x_i A^i$$

Calcolo di una base dello spazio riga con il metodo di eliminazione

Il metodo di eliminazione si basa sulla seguente osservazione:

- Se ad una matrice A si applicano le operazioni elementari di riga allora lo spazio **riga** non cambia

Dimostrazione dell' osservazione:

$t_1A_1+t_2A_2+\ldots+t_i(A_i+sA_j)+\ldots+t_nA_n$

$=t_1A_1+t_2A_2+\ldots+t_iA_i+\ldots+(t_j+t_is)A_j+\ldots+t_nA_n$

$t_1A_1+t_2A_2+\ldots+t_iA_i+\ldots+t_nA_n=$

$=t_1A_1+t_2A_2+\ldots+t_i(A_i+sA_j)+\ldots+(t_j-t_is)A_j+\ldots+t_nA_n$

Riduzione a gradini

Sappiamo da quanto visto nella risoluzione dei sistemi lineari che ogni matrice A può essere trasformata con una serie di operazioni elementari di riga in una matrice a gradini che viene detta riduzione a gradini di A.

Quindi se B è una riduzione a gradini di A allora lo spazio riga di B è uguale allo spazio riga di A.

Quindi se so calcolare una base dello spazio riga di B ho una base dello spazio riga di A.

Base dello spazio riga di una matrice a gradini.

Se una matrice B è a gradini allora le sue righe non nulle sono linearmente indipendenti e quindi sono una base del suo spazio riga.

Dimostrazione: Sia B una matrice a gradini.

$$B=\left(\begin{array}{cccccccc} 0&\cdots&\boxed{p_1}&&&&&\\ 0&\cdots&\cdots&\boxed{p_2}&&&&\\ 0&\cdots&\cdots&\ddots&&&&\\ 0&\cdots&\cdots&\cdots&\boxed{p_k}&&&\\ 0&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&0\\ \vdots&&&&&&&\vdots\\ 0&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&0\end{array}\right)\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right\}\text{Righe non nulle}\\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$p_1,p_2,\ldots,p_k$ sono i pivot della matrice

Per verificare se le righe non nulle sono indipendenti bisogna verificare se il sistema $CX=\vec{0}$ ha solo la soluzione $\vec{0}$, dove C è la matrice che ha per colonne le righe non nulle di B, quindi

$$C=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boxed{p_1} & \vdots & & \vdots \\ & \boxed{p_2} & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \boxed{p_k} \end{pmatrix}$$

Quindi il sistema da risolvere è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_1 & \vdots & & \vdots \\ & p_2 & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & p_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \vec{0} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} p_1 x_1 = 0 \\ p_2 x_2 = 0 \\ \vdots \\ p_k x_k = 0 \end{cases}$$

Siccome i pivot $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sono diversi da zero troviamo $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0$

Esempio

Vediamo con un esempio come funziona la dimostrazione.

Consideriamo

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Matrice formata dalle righe non nulle di B

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sistema per verificare se sono indipendenti

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \boxed{1 \quad 0 \quad 0} \\ 1 & 0 & 0 \\ \boxed{1 \quad -2 \quad 0} \\ 1 & 1 & 0 \\ \boxed{1 \quad 1 \quad -1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ \boxed{x = 0} \longrightarrow x=0 \\ x = 0 \\ \boxed{x - 2y = 0} \longrightarrow -2y=0 \longrightarrow y=0 \\ x + y = 0 \\ \boxed{x + y - z = 0} \longrightarrow -z=0 \longrightarrow z=0 \end{cases}$$

quindi le righe non nulle di A sono indipendenti

Base dello spazio riga di una matrice a gradini.

Se una matrice B è a gradini allora le sue righe non nulle sono linearmente indipendenti e quindi sono una base del suo spazio riga.

Conseguenza

Abbiamo visto che le operazioni elementari di riga non cambiano lo spazio riga quindi, se B è una riduzione a gradini di A, allora

Spazio riga di A=Spazio riga di B.

In particolare le righe non nulle di B sono una base dello spazio riga di A e la dimensione dello spazio riga di A è uguale al numero di righe non nulle di B. Quindi

dim(spazio riga di A)=numero dei pivot di B

Esercizio

Calcolare una base e la dimensione dello spazio generato da

$(1,1,2,2),(2,0,4,2),(1,-1,2,0),(0,2,0,2)$

Soluzione

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Una base è {(1,1,2,2), (0,-2,0,-2)}, la dimensione è 2.

Esercizio

- Verificare se (0,0,2,2,-1,1),(1,1,2,1,1,1), (1,1,4,3,0,2) sono linearmente indipendenti.
- Soluzione: Calcoliamo la dimensione dello spazio generato da questi vettori:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Siccome la dimensione dello spazio generato dai tre vettori è 2, non possono essere indipendenti altrimenti la dimensione dello spazio generato sarebbe 3. Quindi sono dipendenti.

Esercizio

- Verificare se (1,2,2,2), (1,0,1,1), (1,2,3,0), (-1,1,1,1) sono linearmente indipendenti.

Soluzione: Come nell'esercizio precedente calcoliamo la dimensione dello spazio generato dai quattro 4-vettori:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

La dimensione dello spazio generato è 4. Siccome i vettori sono quattro, formano una base dello spazio generato e quindi sono indipendenti.

Esercizi vari I

- Verificare se $\{(1,0,0,1),(0,1,1,0),(1,0,0,-1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$

Soluzione: no, non può essere una base perchè non ha 4 elementi.

Esercizi vari II

- Verificare se esiste una base di $\mathbb{R}^4$ che contiene {(1,1,1,0),(1,1,2,1)} e in tal caso calcolarla

Soluzione: esiste una base che contiene l'insieme dato se e solo se l'insieme è linearmente indipendente. Per verificare se è indipendente calcoliamo la dimensione dello spazio generato:
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; la dimensione è 2, quindi sono linearmente indipendenti.

Esercizi vari II continuazione

Per trovare una base di $\mathbb{R}^4$ che contiene l'insieme dato basta aggiungere due vettori in modo da riempire i pivot mancanti nella matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ad esempio possiamo aggiungere (0,1,0,0) e (0,0,0,1). Infatti {(1,1,1,0),(1,1,2,1),(0,1,0,0), (0,0,0,1)} è una base di $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizi vari III

- Verificare se {(1,0,0,1),(0,1,1,0),(0,0,1,2),(1,0,0,-1),(1,0,-1,0)} contiene una base di $\mathbb{R}^4$ e in tal caso calcolarla.

Soluzione: l'insieme dato contiene una base di $\mathbb{R}^4$ se e solo se è un insieme di generatori per $\mathbb{R}^4$. Per verificare se è un insieme di generatori calcoliamo la dimensione dello spazio generato:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizi vari III continuazione

- La dimensione dello spazio generato è 4 e quindi lo spazio generato è $\mathbb{R}^4$. Quindi l'insieme dato è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^4$. Per estrarre da questo insieme una base di $\mathbb{R}^4$ si eliminano i vettori che nella riduzione a gradini corrispondono, seguendo gli scambi di righe effettuati, a righe nulle nella matrice ridotta. Nel nostro caso l'unica riga nulla è la quinta che, avendo effettuato uno scambio di righe, corrisponde al quarto vettore dell'insieme dato. Una base estratta è quindi

$$\{(1,0,0,1),(0,1,1,0),(0,0,1,2),(1,0,-1,0)\}$$

Somma e intersezione di sottospazi

- Se U, W sono sottospazi di una spazio V allora lo spazio somma U+W è

$$\{u+w : u \in U , w \in W\}$$

- L'intersezione di U e W è

$$U \cap W = \{v : v \in U \ e \ v \in W\}$$

- Osservazione: U+W e $U \cap W$ sono sottospazi.