Lezione 7

Conseguenze del teorema della base

Teorema della base

Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato. Allora

- V ha una base e tutte le basi di V hanno lo stesso numero di elementi. (Esistenza di una base)
- ogni insieme linearmente indipendente in V è contenuto in una base di V. (Completamento a base)
- ogni insieme di generatori di V contiene una base. (Estrazione di una base)

Definizione di dimensione

Se V è uno spazio finitamente generato il teorema della base dice, tra l'altro, che tutte le basi di V hanno lo stesso numero di elementi. Ha quindi senso dare la seguente

DEFINIZIONE: il numero di elementi di una qualsiasi base di uno spazio V è chiamato dimensione di V e lo si indica con il simbolo dim V.

Esempi

- L'insieme vuoto $\varnothing$ è una base di $\{\vec{0}\}$.
- {(1,0),(0,1)} è una base di $\mathbb{R}^2$.
- Più generalmente sia

$$e_i = (0,0,\cdots,\overset{i}{1},\cdots,0) \in \mathbb{R}^n$$

e sia

$$C^n = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$$

allora C^n è una base di $\mathbb{R}^n$, detta base canonica.

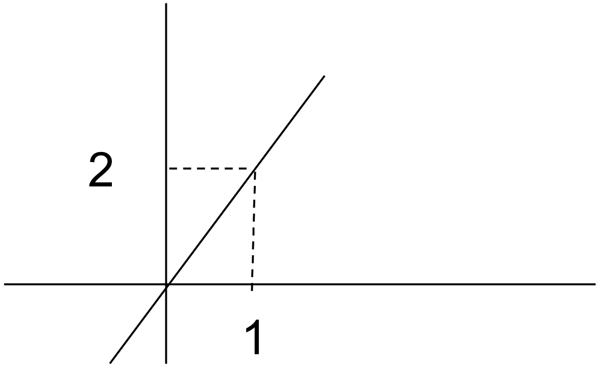
Esempi

dim $\{\vec{\mathrm{O}}\}$ = 0

dim $\mathbb{R}^n$ = n

dim L((1,1,0),(1,2,-1))=2

dim($\{(x,y)|2x-y=0\}$)=1



dim M(nxm,**R)**= nm

R[x] non è finitamente generato.

Discussione esempi

- Abbiamo visto che $\emptyset$ è una base di $\{\vec{0}\}$, quindi dim $\{\vec{0}\}$ è uguale al numero di elementi di $\emptyset$ cioè zero.
- Abbiamo visto che la base canonica C^n è una base di $\mathbb{R}^n$. Siccome C^n ha n elementi abbiamo che dim $\mathbb{R}^n$ =n.

Continuazione discussione esempi

- Come si vede dal disegno

$$V=\{(x,y)|2x-y=0\}=L((1,2))$$

Quindi (1,2) genera V. In generale $\{v\}$ è dipendente se e solo se $v=\vec{0}$. Infatti se $\{v\}$ è dipendente allora esiste $t\neq 0$ tale che $tv=\vec{0}$ da cui si ricava che $v=\frac{1}{t}\vec{0}=\vec{0}$

In particolare abbiamo che $\{(1,2)\}$ è indipendente e quindi è una base di $L((1,2))$. Ne segue che

dim V=1.

Fine discussione esempi

- Sia E_{ij} la matrice nxm che ha 1 al posto (i,j) e zero in tutti gli altri posti.

Come per $\mathbb{R}^n$ si verifica che l'insieme $\{E_{ij} : 1 \le i \le n, 1 \le j \le m\}$ è linearmente indipendente e genera M(nxm,**R)**.

Siccome $\{E_{ij} : 1 \le i \le n, 1 \le j \le m\}$ ha nm elementi, si ottiene che dim M(nxm,**R**)=nm

- Per il principio di identità dei polinomi, l'insieme $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ è linearmente indipendente per ogni n. Se **R**[x] fosse finitamente generato e dim **R**[x] = k, allora, per il teorema della base $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ sarebbe contenuto in una base e quindi $k \ge n$ per ogni n. Assurdo.

Esercizio

- Quale dei seguenti insiemi è una base di $\mathbb{R}^2$?
  - {(1,2)}
  - {(1,1),(1,0),(0,1)}
  - {(1,-1),(-1,1)}

Esercizio

- $\{(1,2),(2,1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$?

Esercizi

- $\{(1,0,1),(1,1,2),(2,1,0),(1,1,1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$?

- $\{(1,0,1),(1,1,2)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$?

- Esiste una base di $\mathbb{R}^2$ che contiene $(1,1)$?

Esercizio per casa

- $\{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$?

Conseguenze del teorema della base I

Uno spazio è finitamente generato se e solo se ammette una base con un numero finito di elementi.

Dimostrazione: Se V è finitamente generato allora ammette un base con un numero finito di elementi per il Teorema della base.

Se V ammette un base con un numero finito di elementi allora la base è un insieme finito di generatori e quindi V è finitamente generato.

Spazi di dimensione finita

- Siccome gli spazi finitamente generati sono precisamente quelli che hanno una base con un numero finito di elementi allora gli spazi finitamente generati sono anche chiamati spazi di dimensione finita.

Conseguenze del teorema della base II

Sia V uno spazio finitamente generato. Allora

- Se $v_1,v_2,\dots,v_k$ sono linearmente indipendenti in V allora $k \leq \dim V$

Dimostrazione: siccome $v_1,v_2,\dots,v_k$ sono linearmente indipendenti, per il Teorema della base, sono contenuti in una base B di V. Quindi $k \leq$ numero di elementi di $B = \dim V$

Conseguenze del teorema della base III

Sia V uno spazio di dimensione finita. Allora

- Se $v_1, v_2, \ldots, v_k$ generano V allora dim V ≤ k

Dimostrazione: siccome $v_1, v_2, \ldots, v_k$ generano V, allora per il Teorema della base, $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ contiene una base B di V. Quindi

k≥ numero di elementi di B = dim V

Conseguenze del teorema della base IV

Sia V uno spazio di dimensione finita. Allora

- Se $v_1,v_2,\ldots,v_k$ sono linearmente indipendenti e dim V=k allora $\{v_1,v_2,\ldots,v_k\}$ è una base di V.

Dimostrazione: Siccome $\{v_1,v_2,\ldots,v_k\}$ è linearmente indipendente allora, per il teorema della base, è contenuto in una base B di V. Siccome B ha k elementi, ne segue che $B=\{v_1,v_2,\ldots,v_k\}$.

Conseguenze del teorema della base V

Sia V uno spazio di dimensione finita. Allora

- Se $v_1,v_2,\ldots,v_k$ generano V e dim V=k allora $\{v_1,v_2,\ldots,v_k\}$ è una base di V.

Dimostrazione: Siccome $\{v_1,v_2,\ldots,v_k\}$ genera V allora, per il teorema della base, contiene una base B di V. Siccome B ha k elementi, ne segue che $B=\{v_1,v_2,\ldots,v_k\}$.

Conseguenze del teorema della base VI

Sia V uno spazio di dimensione finita. Allora

- Se W è un sottospazio di V allora anche W è di dimensione finita e dim W $\leq$ dim V