Lezione 23

Forme quadratiche semidefinite, definite, indefinite

Il criterio di Cartesio

- Definizione: Dato il polinomio $p(t)=\sum_{j=0}^{r} a_j t^{i_j}$ con $a_j \neq 0$ e $0 \leqslant i_0 < i_1 < \cdots i_r$ il numero di variazioni di segno è il numero di j tali che

$$sgn(a_j) \neq sgn(a_{j-1})$$

- Esempi: $p(t)=-2t^7+3t^4-t^2-1$

$$p(t)=t^4+t^3-t^2-t$$

Il criterio di Cartesio

- Teorema:
  - Il numero di variazioni di un polinomio è il massimo numero di radici positive del polinomio.
  - Se il polinomio ha solo radici reali allora il numero di variazioni è il numero di radici positive contato con la loro molteplicità.

Applicazione al calcolo della segnatura di una matrice simmetrica

- Se A è simmetrica allora il polinomio caratteristico ha solo radici reali, quindi il numero di autovalori positivi è uguale al numero di variazioni del polinomio caratteristico
- Il numero di autovalori nulli è uguale alla nullità di A.
- Il numero di autovalori negativi è uguale a

$$
\begin{aligned}
& rk(A) - \text{numero autovalori positivi} \\
& = rk(A) - \text{numero variazioni}
\end{aligned}
$$

Applicazione al calcolo della segnatura di una forma quadratica

- La segnatura di una forma quadratica q(X) è (r,s) dove
  - r è il numero di variazioni nel polinomio caratteristico della matrice di Gram S di q(X)
  - $s = rk(S) - r$

Definizioni

Sia q una forma quadratica su $\mathbb{R}^n$

- Si dice che q è nondegenere se il rango della sua matrice di Gram è n.
- Si dice che q è semidefinita positiva se $q(X) \geq 0$ per ogni $X \in \mathbb{R}^n$
- Si dice che q è semidefinita negativa se $q(X) \leq 0$ per ogni $X \in \mathbb{R}^n$
- Si dice che q è definita positiva se $q(X) \geq 0$ per ogni $X \in \mathbb{R}^n$ e $q(X) = 0$ se e solo se $X = 0$

Altre definizioni

- Si dice che q è definita negativa se $q(X) \leq 0$ per ogni $X \in \mathbb{R}^n$ e $q(X) = 0$ se e solo se $X = 0$
- Si dice che q è indefinita se esiste un vettore v per cui q(v)>0 e esiste un vettore w per cui q(w)<0.

Segnatura e valori di q(X)

- La forma q è semidefinita positiva se e solo se ha segnatura (r,0).
- La forma q su $\mathbb{R}^n$ è definita positiva se e solo se ha segnatura (n,0).
- Dimostrazione: sia S la matrice di Gram di q. Se la segnatura di q è (r,0) gli autovalori di S sono tutti positivi.

Continuazione dimostrazione

- Per il teorema spettrale esiste una matrice ortogonale M tale che

$$M^T S M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_r & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

con $\lambda_i > 0$.

Sia $X' = M^T X$ cosicchè $X = MX.'$

Continuazione dimostrazione

- Calcoliamo q(X).

$$q(X)=X^T S X=(MX')^T S MX'=(X')^T M^T S M X'$$

$$=(X')^T\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_r & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}X'$$

Continuazione dimostrazione

- Scriviamo $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$. Quindi

$$q(X) = (x'_1, \cdots, x'_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_r & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

$= \lambda_1 (x'_1)^2 + \cdots + \lambda_r (x'_r)^2$. Siccome $\lambda_i > 0$, abbiamo che $q(X) \geq 0$ e quindi q è semidefinita positiva.

Continuazione dimostrazione

- Se r<n allora è chiaro che possiamo avere q(X)=0 con $X \neq \vec{0}$. Ad esempio se $X = Me_{r+1}$ allora $X' = e_{r+1}$ quindi $x'_1 = x'_2 = \cdots = x'_r = 0$ e quindi

$$q(X) = \lambda_1 (x'_1)^2 + \cdots + \lambda_r (x'_r)^2 = 0$$

- Se invece r=n e q(X)=0 allora

$$q(X) = \lambda_1 (x'_1)^2 + \cdots + \lambda_n (x'_n)^2 = 0$$

da cui si ottiene $X' = \vec{0} \Rightarrow X = MX' = \vec{0}$

Quindi se la segnatura è (n,0) la forma è definita positiva

Fine dimostrazione

- Rimane solo da vedere che se q(X) è semidefinita positiva allora la segnatura di q(X) è (r,0), cioè tutti gli autovalori della matrice di Gram sono maggiori o uguali a zero.
- Se λ è autovalore della matrice di Gram S di q(X) e v è un autovettore relativo a λ allora

$$0 \leq q(v) = v^T S v = v^T \lambda v = \lambda \|v\|^2$$

Siccome $\|v\| > 0$ otteniamo $\lambda \geq 0$

Segnatura e valori di q(X)

- Chiaramente con la stessa dimostrazione otteniamo anche che
- La forma q(X) è semidefinita negativa se e solo se la segnatura di q(X) è (0,s).
- La forma q(X) su $\mathbb{R}^n$ è definita negativa se e solo se la segnatura di q(X) è (0,n).

Forme indefinite

- La forma q(X) è indefinita se e solo se la segnatura di q(X) è (r,s) con $r \neq 0$ e $s \neq 0$
- Dimostrazione: Se $r \neq 0$ e $s \neq 0$ sia λ un autovalore positivo della matrice di Gram S di q(X) e sia μ un autovalore negativo di S.
- Sia v un autovettore relativo a λ e w un autovettore relativo a μ.

Continuazione dimostrazione

- Allora

$$q(v) = v^T S v = \lambda v^T v = \lambda \|v\|^2 > 0$$

e

$$q(w) = w^T S w = \mu w^T w = \mu \|w\|^2 < 0$$

quindi q(X) è indefinita.

Fine dimostrazione

- Viceversa se q(X) è indefinita allora la sua segnatura è (r,s) con $r \neq 0$ e $s \neq 0$ perché se r=0 allora la forma sarebbe semidefinita negativa e se s=0 allora la forma sarebbe semidefinita positiva.

Come calcolare la segnatura di una forma quadratica nel piano

- Sia $q(x, y) = a x^2 + b xy + c y^2$ una forma quadratica su $\mathbb{R}^2$ e sia $S = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$ la sua matrice di Gram.
- È possibile calcolare la segnatura di q senza calcolare esplicitamente gli autovalori di S.

Determinante e traccia di una matrice 2x2

- Se $S=\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$ e λ_1, λ_2 sono i suoi autovalori allora

$$det\, S = ac - b^2/4 = \lambda_1 \lambda_2$$
$$tr(S) = a + c = \lambda_1 + \lambda_2$$

Criteri per la segnatura di una forma quadratica nel piano

- La segnatura di $q(x, y) = a x^2 + b xy + c y^2$ è (2,0) se det S > 0 e a > 0
- Infatti det S > 0 implica che $\lambda_1 \lambda_2 > 0$, quindi i due autovalori hanno lo stesso segno. Inoltre $ac - b^2/4 = det\, S > 0$ quindi ac>0 e quindi a e c hanno lo stesso segno. Siccome a>0 abbiamo che c>0 e quindi a+c>0. Ma allora $\lambda_1 + \lambda_2 = a + c > 0$ e quindi λ_1 e λ_2 sono entrambi positivi, quindi la segnatura è (2,0).

Criteri per la segnatura di una forma quadratica nel piano

- La segnatura di $q(x, y) = a x^2 + b xy + c y^2$ è (0,2) se det S > 0 e a < 0
- Infatti det S > 0 implica che $\lambda_1 \lambda_2 > 0$, quindi i due autovalori hanno lo stesso segno. Inoltre $ac - b^2/4 = det\, S > 0$ quindi ac>0 e quindi a e c hanno lo stesso segno. Siccome a<0 abbiamo che c<0 e quindi a+c<0. Ma allora $\lambda_1 + \lambda_2 = a + c < 0$ e quindi λ_1 e λ_2 sono entrambi negativi, quindi la segnatura è (0,2).

Criteri per la segnatura di una forma quadratica nel piano

- La segnatura di $q(x,y)=a x^2+b xy+c y^2$ è (1,1) se det S < 0.
- Infatti det S < 0 implica che $\lambda_1 \lambda_2 < 0$, quindi i due autovalori hanno segno opposto e quindi la segnatura è (1,1).

Criteri per la segnatura di una forma quadratica nel piano

- La segnatura di $q(x, y) = a x^2 + b xy + c y^2$ è (1,0) se det S = 0 e a+c>0.
- Infatti det S = 0 implica che $\lambda_1 \lambda_2 = 0$, quindi uno dei due autovalori è nullo. Inoltre $\lambda_1 + \lambda_2 = a + c > 0$ e quindi l'altro autovalore deve essere positivo, quindi la segnatura è (1,0).

Criteri per la segnatura di una forma quadratica nel piano

- La segnatura di $q(x,y)=a\,x^2+b\,xy+c\,y^2$ è (0,1) se det S = 0 e a+c<0.
- Infatti det S = 0 implica che $\lambda_1\lambda_2=0$, quindi uno dei due autovalori è nullo. Inoltre $\lambda_1+\lambda_2=a+c<0$ e quindi l'altro autovalore deve essere negativo, quindi la segnatura è (0,1).

Esercizio

- Calcolare la segnatura di
  - $q(x, y) = 2xy$
  - Soluzione: la matrice di Gram è $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
    Siccome det S=-1<0 la segnatura è (1,1).
  - $q(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$
  - Soluzione: la matrice di Gram è $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
    Siccome det S=0 e a+c=2>0, la segnatura è (1,0).

Esercizio

- Calcolare la segnatura di
  - $q(x, y) = x^2 + xy + y^2$
  - Soluzione: la matrice di Gram è $S = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$

    Siccome det S=3/4>0 e a=1>0 la segnatura è (2,0).
  - $q(x, y) = -x^2 + xy - y^2$
  - Soluzione: la matrice di Gram è $S = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix}$

    Siccome det S=3/4>0 e a=-1<0, la segnatura è (0,2).

Esercizio

- Calcolare la segnatura di $q(x, y, z) = 2xz + y^2$
- Soluzione: la matrice di Gram è

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Calcoliamo gli autovalori:

$$p_S(t) = \begin{pmatrix} -t & 0 & 1 \\ 0 & 1-t & 0 \\ 1 & 0 & -t \end{pmatrix} = (1-t)(t^2-1) = -(t-1)^2(t+1)$$

- Gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$ con molteplicità 2 e $\lambda_2 = -1$ con molteplicità 1, quindi la segnatura è (2,1).

Esercizio

- Determinare se esiste un vettore $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$ tale che $x^2+xz+y^2+z^2<0.$
- Soluzione: calcoliamo la segnatura della forma quadratica $q(x, y, z)=x^2+xz+y^2+z^2$
- La matrice di Gram è

$$S=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Continuazione soluzione

- Calcoliamo il polinomio caratteristico di S

$$p_S(t)=\begin{pmatrix} 1-t & 0 & 1/2 \\ 0 & 1-t & 0 \\ 1/2 & 0 & 1-t \end{pmatrix}=(1-t)^3-\frac{1}{4}(t-1)$$

$$=-t^3+3t^2-\frac{11}{4}t+\frac{3}{4}$$

- Le variazioni sono 3, quindi ci sono tre autovalori positivi. Ne segue che la segnatura è

(3,0) e quindi non esiste un vettore $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tale che

$$x^2+xz+y^2+z^2<0$$

Isometrie

- Un'isometria su $\mathbb{R}^n$ è una funzione $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ che rispetta la distanza tra i punti:

$$d(F(P), F(Q)) = d(P, Q)$$

Isometrie lineari

- Una isometria lineare di $\mathbb{R}^n$ è una trasformazione lineare T tale che

$$Tx \cdot Ty = x \cdot y$$

- Una isometria lineare preserva la norma:

$$\|Tx\| = \|x\|$$

- Infatti

$$\|Tx\| = \sqrt{Tx \cdot Tx} = \sqrt{x \cdot x} = \|x\|$$

Isometrie lineari

- Una isometria lineare preserva gli angoli:
- Infatti

$$\widehat{Tx\,Ty} = \arccos\left(\frac{Tx \cdot Ty}{\|Tx\|\|Ty\|}\right) = \arccos\left(\frac{x \cdot y}{\|x\|\|y\|}\right) = \widehat{x\,y}$$

Le isometrie lineari sono particolari isometrie

- Se T è un'isometria lineare allora

$$d(T(P),T(Q)) = \|\overrightarrow{T(P)T(Q)}\| = \|T(Q)-T(P)\|$$

$$= \|T(Q-P)\| = \|Q-P\| = \|\overrightarrow{PQ}\| = d(P,Q)$$

Matrice associata ad una isometria lineare

- La trasformazione lineare T è un'isometria lineare se e solo se la sua matrice A è una matrice ortogonale:

$$x \cdot y = T(x) \cdot T(y) = Ax \cdot Ay = x \cdot A^T Ay$$

- Quindi $x \cdot y = x \cdot A^T Ay$ per ogni x,y, cioè

$$x \cdot (y - A^T Ay) = 0 \text{ per ogni } x, y$$

- In particolare, scegliendo $x = y - A^T Ay$, si ha

$(y - A^T Ay) \cdot (y - A^T Ay) = \|y - A^T Ay\|^2 = 0 \text{ per ogni } y$, quindi $y = A^T Ay$ per ogni y, cioè $A^T A = I$

Non tutte le isometrie sono isometrie lineari

- Dato un vettore v, la traslazione T_v è la funzione definita ponendo

$$T_v(P) = P + v$$

- Se $v \neq \vec{0}$ allora la traslazione T_v non è lineare perchè $T(\vec{0}) = v \neq \vec{0}$.
- Le traslazioni sono isometrie:

$$d(T_v(P), T_v(Q)) = d(P+v, Q+v) = \|(Q+v)-(P+v)\| = \|Q-P\|$$

$$= d(P, Q)$$