Lezione 19

Teorema spettrale

La B-espansione di un vettore

- Se $B=\{q_1,\cdots,q_n\}$ è una base ortonormale di uno spazio euclideo V e v è un vettore, allora,

$$v=(v\cdot q_1)q_1+\cdots+(v\cdot q_n)q_n$$

- Questa espressione è chiamata la

B-espansione di v.

- Dimostrazione: Siccome B è una base possiamo scrivere $v=x_1q_1+\cdots+x_nq_n$, ma allora

$$v\cdot q_i=(x_1q_1+\cdots+x_nq_n)\cdot q_i=x_i$$

Vettore delle coordinate in una base ortonormale

- Se $B=\{q_1,\cdots,q_n\}$ è una base ortonormale di uno spazio euclideo V allora il vettore delle coordinate di v nella base B è

$$C_B(v)=\begin{pmatrix} v\cdot q_1 \\ \vdots \\ v\cdot q_n \end{pmatrix}$$

Esempio

- Calcolare le coordinate di (2,1) nella base

$$B=\left\{\left(1/\sqrt{2}\,,1/\sqrt{2}\right),\left(1/\sqrt{2}\,,-1/\sqrt{2}\right)\right\}$$

Decomposizione ortogonale

- Teorema: Se U è un sottospazio di uno spazio euclideo V, allora V= $U \oplus U^{\perp}$

Questa è detta decomposizione ortogonale di V rispetto a U.

Dimostrazione: Se $v \in U \cap U^{\perp}$ allora $v \cdot v = 0$ e quindi v è il vettore nullo.

Dobbiamo verificare che $V = U + U^{\perp}$. Scegliamo una base ortonormale $B_U = \{q_1, \cdots, q_r\}$ di U. Completiamo la base B_U a una base B' di V. Applicando Gram-Schmidt a B' si trova una base ortonormale $B = \{q_1, \cdots, q_r, q'_1, \cdots q'_s\}$ di V.

Fine dimostrazione

- La B-espansione di v ci dà

$$v=(v\cdot q_1)q_1+\cdots+(v\cdot q_r)q_r+(v\cdot q'_1)q'_1+\cdots+(v\cdot q'_s)q'_s$$

- Siano

$$u_v=(v\cdot q_1)q_1+\cdots+(v\cdot q_r)q_r \qquad w_v=(v\cdot q'_1)q'_1+\cdots+(v\cdot q'_s)q'_s$$

- Chiaramente $v=u_v+w_v$ e u_v è in U. Si noti che $q_i\cdot w_v=0$ se $i\leq r$. Se u è un qualsiasi elemento di U allora $u=x_1q_1+\cdots+x_rq_r$ e quindi

$$u\cdot w_v=(x_1q_1+\cdots x_rq_r)\cdot w_v=x_1q_1\cdot w_v+\cdots x_rq_r\cdot w_v=0$$

Ne segue che $w_v\in U^{\perp}$ e quindi $V=U+U^{\perp}$

Conseguenze della decomposizione ortogonale

- Se n=dim V allora $dim\, U^{\perp} = n - dim\, U$ per la formula di Grassmann
- $(U^{\perp})^{\perp} = U$ infatti è ovvio che $U \subset (U^{\perp})^{\perp}$. Siccome

$$dim (U^{\perp})^{\perp} = n - (n - dim\, U) = dim\, U$$

si ha $(U^{\perp})^{\perp} = U$

Matrici e prodotto scalare

- Se A è una matrice nxm allora, dati $v \in \mathbb{R}^n$ e $w \in \mathbb{R}^m$, si ha

$$v \cdot (Aw) = (A^T v) \cdot w$$

Infatti

$$v \cdot (Aw) = v^T (A\, w) = (v^T A)\, w = (v^T A)^T \cdot w = (A^T v) \cdot w$$

- In particolare, se n=m e A è simmetrica,

$$(Av) \cdot w = v \cdot (A\, w)$$

Lo spazio ortogonale di R(A) e N(A)

- Si ha che $R(A)^{\perp} = N(A^T)$ e $N(A)^{\perp} = R(A^T)$
- Dimostrazione:

$$R(A)^{\perp} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid u \cdot v = 0 \text{ per ogni } u \in R(A)\}$$
$$= \{v \in \mathbb{R}^n \mid Az \cdot v = 0 \text{ per ogni } z \in \mathbb{R}^m\}$$
$$= \{v \in \mathbb{R}^n \mid z \cdot A^T v = 0 \text{ per ogni } z \in \mathbb{R}^m\}$$

Osserviamo che $z \cdot A^T v = 0 \text{ per ogni } z \Leftrightarrow A^T v = 0$:

se $z \cdot A^T v = 0 \text{ per ogni } z$ allora ponendo $z = A^T v$ si ha $A^T v \cdot A^T v = 0$ e quindi $\|A^T v\|^2 = 0$ da cui $A^T v = 0$.
Viceversa, se $A^T v = 0$ allora ovviamente

$$z \cdot A^T v = z \cdot 0 = 0 \text{ per ogni } z$$

Fine dimostrazione

- Ne segue che

$$R(A)^{\perp} = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid A^T v = 0 \} = N(A^T)$$

e quindi

$$N(A)^{\perp} = (R(A^T)^{\perp})^{\perp} = R(A^T)$$

Decomposizioni associate ad una matrice

- Se A è un matrice mxn allora

$$\mathbb{R}^n = R(A) \oplus N(A^T)$$

J

$$\mathbb{R}^m = N(A) \oplus R(A^T)$$

Esercizio

- Sia $U \subset \mathbb{R}^5$ lo spazio delle soluzioni di

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

- Calcolare una base ortonormale di U e una base ortonormale di $U^{\perp}$.

Proiezione ortogonale

- Abbiamo visto che se U è un sottospazio di uno spazio euclideo allora ogni v in V si decompone in modo unico come $v = u_v + w_v$ con

$$u_v \in U\,,\;\; w_v \in U^{\perp}$$

- La trasformazione lineare $p_U : V \to V$ definita ponendo $p_U(v) = u_v$ è detta proiezione ortogonale su U.
- La proiezione ortogonale è la proiezione su U relativa alla decomposizione ortogonale $V = U \oplus U^{\perp}$

Matrice di proiezione

- La matrice P_U di p_U nella base canonica è detta matrice di proiezione su U.
- Se $B_U = \{q_1, \cdots, q_r\}$ è una base ortonormale di U allora abbiamo visto che

$$u_v = (v \cdot q_1) q_1 + \cdots + (v \cdot q_r) q_r$$

- Sia Q la matrice $(q_1 \;\; q_2 \;\; \cdots \;\; q_r)$. Allora

$$P_U(v) = u_v = Q \begin{pmatrix} v \cdot q_1 \\ \vdots \\ v \cdot q_r \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} v^T q_1 \\ \vdots \\ v^T q_r \end{pmatrix} = Q \left(v^T Q \right)^T = Q Q^T v$$

quindi la matrice di proiezione su U è $P_U = Q Q^T$.

Osservazioni

- La matrice di proiezione P_U è simmetrica
- $P_U^2 = P_U$
- $P_{U^\perp} = I - P_U$
- u è in U se e solo se $P_U(u) = u$. In particolare U è l'autospazio di P_U relativo all'autovalore 1.
- w è in $U^\perp$ se e solo se $P_U(w) = \vec{0}$. In particolare $U^\perp$

è l'autospazio di P_U relativo a 0.

Esercizio

- Si consideri il piano U di equazione $2x+y-z=0$ nello spazio. Si calcoli la matrice di proiezione su U.
- Si calcoli la proiezione ortogonale di $(3,2,1)$ su U.

Esercizio

- Sia $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\1&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$. Si calcoli la matrice di proiezione

$P_{R(A)}$ su R(A).

Autovettori ortogonali

- Teorema: Se A è una matrice quadrata di ordine n simmetrica reale e v, w sono due autovettori di A relativi ad autovalori distinti allora v e w sono ortogonali.

Dimostrazione: Se λ, μ sono gli autovalori relativi a v e w rispettivamente allora

$$\lambda\, v\cdot w = Av\cdot w = v\cdot Aw = \mu\, v\cdot w$$

Quindi $0=\lambda\, v\cdot w-\mu\, v\cdot w=(\lambda-\mu)\,v\cdot w$. Siccome $\lambda-\mu\neq 0$ otteniamo che $v\cdot w=0$

Matrice modale ortogonale

Supponiamo che A sia una matrice tale che esista una base ortonormale formata da autovettori di A, quindi una matrice modale M di A è ortogonale, cioè

$$M^{-1} AM = M^T AM = D = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$$

Questo implica che A è simmetrica. Infatti

$$A = MDM^{-1} = MD\ M^T$$

e $MD\ M^T$ è simmetrica:

$$\left(MD\ M^T\right)^T = (M^T)^T D\ M^T = MD\ M^T$$

Teorema spettrale

Come abbiamo appena visto se una matrice ammette una base ortonormale di autovettori allora è simmetrica. In realtà vale anche il contrario.

Teorema: una matrice A reale quadrata di ordine n è simmetrica **se e solo se** esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori di A. In particolare ogni matrice reale simmetrica è diagonalizzabile.

Teorema spettrale

Un enunciato equivalente del teorema spettrale è:

Sia A una matrice quadrata. Esiste una matrice **ortogonale** M tale che

$$M^{-1} A\, M = M^T AM$$

è diagonale se e solo se A è simmetrica.

Calcolo di una base di autovettori ortonormale

Sia A una matrice simmetrica.

Siano $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ gli autovalori distinti di A.

Per ogni autovalore si calcola una base dell'autospazio e la si ortonormalizza mediante Gram-Schmidt. Si trova così una base ortonormale B_i dell'autospazio relativo a λ_i .

Sia $B = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_r$. Se v è in B_i e w è in B_j con $i \neq j$ allora $v \cdot w = 0$. Se v e w stanno tutti e due in B_i allora $v \cdot w = 0$ perché B_i è ortogonale. Quindi B è un insieme ortogonale. Siccome A è diagonalizzabile B ha n elementi e quindi è una base ortonormale.

Esercizio

- Verificare se la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile e, se esiste, calcolare una base ortonormale di autovettori.

- Soluzione: calcoliamo gli autovalori della matrice. Il polinomio caratteristico è

$$det\begin{pmatrix} 1-t & 1 & 1 \\ 1 & 1-t & 1 \\ 0 & 1 & 1-t \end{pmatrix} = -t+3t^2-t^3 = t(-t^2+3t-1) = -t\left(t-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(t-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$$

Continuazione soluzione

- Gli autovalori sono $0,\ \frac{3-\sqrt{5}}{2},\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Siccome ci sono tre autovalori distinti, per il I criterio di diagonalizzabilità, la matrice è diagonalizzabile.
- Siccome la matrice non è simmetrica non esiste una base ortonormale di autovettori.