Lezione 14

Matrice rappresentativa

Coordinate di un vettore in una base

- Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e sia $B=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ una base di V.
- Se v è un vettore in V allora è combinazione lineare degli elementi di B:

$$v=x_1 v_1+x_2 v_2+\cdots+x_n v_n$$

- Il vettore $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ è detto vettore delle

coordinate di v in B e lo indichiamo con $C_B(v)$.

Esempi

- Se $v = x\vec{i} + y\vec{j}$ è un vettore libero, allora il vettore delle coordinate di v nella base $B = \{\vec{i}\,,\vec{j}\}$ è

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- Se $v = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ è un vettore libero, allora il vettore delle coordinate di v nella base $B = \{\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\}$ è

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

La funzione C_B

- Teorema: Sia B una base di V e sia n la dimensione di V. Allora la funzione

$$C_B : V \to \mathbb{R}^n$$

è un isomorfismo.

- Dimostrazione: Sia B={v_1,....,v_n}. un sottoinsieme di V. La funzione $CL_B : \mathbb{R}^n \to V$ definita ponendo

$$CL_B(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}) = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n$$

è una trasformazione lineare.

Continuazione dimostrazione

- Siccome B è linearmente indipendente, la funzione CL_B è iniettiva. Siccome V e $\mathbb{R}^n$ hanno la stessa dimensione CL_B è biiettiva e quindi è un isomorfismo
- Si nota che

$$C_B = (CL_B)^{-1}$$

e quindi C_B è un isomorfismo.

Conseguenza

- Sia V uno spazio di dimensione n e sia B una base di V. Allora
  - $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ è linearmente indipendente se e solo se $\{C_B(v_1), C_B(v_2), \cdots, C_B(v_k)\}$ è linearmente indipendente
  - $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ è un insieme di generatori se e solo se $\{C_B(v_1), C_B(v_2), \cdots, C_B(v_k)\}$ è un insieme di generatori
  - $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ è una base se e solo se $\{C_B(v_1), C_B(v_2), \cdots, C_B(v_k)\}$ è una base
  - U è sottospazio di V se e solo se $C_B(U)$ è sottospazio di $\mathbb{R}^n$

A che servono le coordinate?

- Le coordinate servono per trasformare i problemi in uno spazio vettoriale V qualsiasi in problemi in $\mathbb{R}^n$.

Esempio

- Sia $V = \mathbb{R}_4[x]$. Sia $W = \{ f(x) \in V \mid f(1) = 0 \}$
- Verificare che W è sottospazio di V
- Calcolare la dimensione e una base di W.
- Soluzione: sappiamo che $B = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ è una base di V. Usando le coordinate in B il problema diventa un problema in $\mathbb{R}^5$ dove possiamo risolverlo con i metodi sviluppati finora.

Esercizio

- Sia $V = \mathbb{R}_5[x]$.
- Verificare se $v_1 = 1 + x, v_2 = 1 + x + x^2, v_3 = 1 - x - x^3 + x^5$ sono linearmente indipendenti in V.
- Verificare se $2 + 2x - 3x^2 + x^5$ è combinazione lineare di v_1, v_2, v_3
- Soluzione: sappiamo che $B = \{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5\}$ è una base di V. Usando le coordinate in B il problema diventa un problema in $\mathbb{R}^6$ dove possiamo risolverlo con i metodi sviluppati finora.

Esercizio

- Sia $V = \mathbb{R}^{3\times 3}$.
- Sia W l'insieme formato dalle matrici per cui la somma degli elementi sulla diagonale è zero.
- Verificare che W è sottospazio di V e calcolare una base per un complemento di W in V.
- Soluzione: sappiamo che

$$B = \{E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{21}, E_{22}, E_{23}, E_{31}, E_{32}, E_{33}\}$$

è una base di V. Usando le coordinate in B il problema diventa un problema in $\mathbb{R}^9$ dove possiamo risolverlo con i metodi sviluppati finora.

Trasformazioni lineari e coordinate

- Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e W uno spazio vettoriale di dimensione m.
- Teorema: Siano B e B' basi rispettivamente di V e W. Data $T : V \rightarrow W$ una trasformazione lineare, esiste unica una matrice A mxn tale che

$$C_{B'}(T(v)) = A\, C_B(v)$$

- La matrice A è detta matrice rappresentativa della trasformazione lineare T nelle basi B e B' e si indica con

$$M_{B'}^{B}(T)$$

Calcolo della matrice rappresentativa

- Data la trasformazione lineare $T: V \rightarrow W$ e le basi $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ di V e B' di W allora, come abbiamo visto,

$$C_{B'}(T(v)) = M_{B'}^{B}(T) C_B(v)$$

In particolare la i-esima colonna di $M_{B'}^{B}(T)$ è

$$M_{B'}^{B}(T) e_i = M_{B'}^{B}(T) C_B(v_i) = C_{B'}(T(v_i))$$

- Conclusione: $M_{B'}^{B}(T)$ è la matrice che ha per i-esima colonna il vettore delle coordinate in B' del i-esimo elemento di B.

Esempio

- La matrice rappresentativa di T_A nelle basi canoniche è A.