Lezione 9

Rango di una matrice

Somma e intersezione di sottospazi

- Se U, W sono sottospazi di una spazio V allora lo spazio somma U+W è

$$\left\{ u+w : u \in U, w \in W \right\}$$

- L'intersezione di U e W è

$$U \cap W = \left\{ v : v \in U \; e \; v \in W \right\}$$

- Osservazione: U+W e $U \cap W$ sono sottospazi.

La formula di Grassmann

- Vale la seguente formula:

$$\dim(U+W)+\dim U\cap W=\dim U+\dim W$$

Somma diretta

- Si dice che uno spazio V è somma diretta di due sottospazi U,W se V=U+W e $U \cap W = \{\vec{0}\}$
- Se V è somma diretta di U e W allora si scrive

$$V = U \oplus W$$

Complemento di un sottospazio

- Se U è un sottospazio di uno spazio V, un complemento di U è un sottospazio W tale che

$$V=U\oplus W$$

Osservazione

- $V=U\oplus W$ se e solo se ogni vettore v di V può essere decomposto in modo unico come $v=u+w$ con u in U e w in W.
- Dimostrazione: Supponiamo $V=U\oplus W$ e verifichiamo che ogni vettore v di V può essere decomposto in modo unico come $v=u+w$ con u in U e w in W.

Siccome $V=U+W$, se v è in V allora $v=u+w$ con u in U e w in W.

Continuazione dimostrazione

Verifichiamo che la decomposizione è unica: se v=u+w=u'+w' allora u-u'=w'-w. Siccome u-u' è in U e w'-w è in W, ne segue che

$$u-u'=w'-w\in U\cap W$$

Siccome $U\cap W=\{\vec{0}\}$ otteniamo u=u' e w=w' e quindi la decomposizione è unica.

Fine dimostrazione

- Viceversa supponiamo che ogni vettore v di V può essere decomposto in modo unico come v=u+w con u in U e w in W e dimostriamo che allora V=U⊕W.

Siccome ogni vettore v in V può essere decomposto come u+w è chiaro che V=U+W. Inoltre se v è in $U \cap W$ allora $v = v + \vec{0} = \vec{0} + v$. Siccome la decomposizione è unica otteniamo $v = \vec{0}$ e quindi $U \cap W = \{\vec{0}\}$. Ne segue che V=U⊕W.

Proiezione

- Sia $V=U\oplus W$ allora, dato v in V, possiamo scrivere in modo unico

$$v=u+w$$

con u in U e v in V.

Il vettore u è detto la proiezione di v su U relativa alla somma diretta $V=U\oplus W$

- La proiezione dipende sia da U che da W

Spazio nullo e immagine di una matrice

- Lo spazio nullo di una matrice A è Sol($A,\vec{0}$) e lo si indica con N(A).
- L'immagine di una matrice è lo spazio colonna della matrice e lo si indica con R(A).

Nullità e rango di una matrice

- La dimensione di N(A) è detta nullità di A e la indichiamo con null(A), quindi

$$null(A) = dim\, N(A) = dim\, Sol(A, \vec{0})$$

- La dimensione di R(A) è detta rango di A e la indichiamo con rk(A), quindi, se A è nxm,

$$rk(A) = dim\, R(A) = dim\, L(A^1, \cdots, A^m)$$

- Si noti che $rk(A) \leq m$ e $rk(A) \leq n$

Teorema del rango

Teorema: Il rango di una matrice A è uguale al rango della matrice trasposta, in simboli

$$rk(A) = rk({}^{t}A)$$

Dimostrazione: Supponiamo che A è nxm e sia r=rk(A). Possiamo estrarre dalle colonne di A una base per lo spazio colonna di A. Sia B la matrice che ha per colonne gli elementi di questa base estratta.

Allora abbiamo che ogni colonna di A è una combinazione lineare delle colonne di B:

$$A^{j} = \Sigma\, c_{ij} B^{i}$$

Continuazione della dimostrazione

Sia $C=(c_{ij})$: siccome $A^j=\sum c_{ij}B^i=BC^j$, si ha che

$$A=BC$$

e quindi

$${}^tA={}^tC\,{}^tB$$

In particolare le colonne di ${}^tA$ sono combinazioni lineari delle colonne di ${}^tC$ e quindi

$$\text{spazio colonna di } {}^tA\subseteq\text{spazio colonna di } {}^tC$$

Quindi $rk({}^tA)\leq rk({}^tC)$. Siccome C è rxm otteniamo che $rk({}^tC)\leq r$ e quindi $rk({}^tA)\leq r=rk(A)$

Fine della dimostrazione

- Abbiamo quindi dimostrato che

$$rk\left({}^{t}A\right) \leq rk\left(A\right)$$

- Scambiando i ruoli di A e ${}^{t}A$ abbiamo che

$$rk\left(A\right) \leq rk\left({}^{t}A\right)$$

e quindi

$$rk\left(A\right) = rk\left({}^{t}A\right)$$

Conseguenza

- Sono equivalenti:
  - $rk(A)=r$
  - La dimensione dello spazio colonna è r
  - Il massimo numero di colonne linearmente indipendenti è r
  - La dimensione dello spazio riga è r
  - Il massimo numero di righe linearmente indipendenti è r

Calcolo del rango di una matrice

- Siccome il rango di una matrice A è la dimensione dello spazio riga, per calcolare il rango basta ridurre a gradini la matrice e il numero di pivot della matrice ridotta a gradini è il rango.

Esercizio

Calcolare il rango di

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Soluzione

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il rango è uguale al numero di pivot della matrice ridotta a gradini quindi il rango è 2.

Esercizio

- Verificare se {(1,0,0,1),(0,1,1,0),(0,0,1,2),(1,0,0,-1),(1,0,-1,0)} contiene una base di $\mathbb{R}^4$ e in tal caso calcolarla.

Soluzione: l'insieme dato contiene una base di $\mathbb{R}^4$ se e solo se è un insieme di generatori per $\mathbb{R}^4$. Per verificare se è un insieme di generatori calcoliamo il rango della matrice che ha i vettori come colonne:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Continuazione della soluzione

- Il rango della matrice è 4, quindi la dimensione dello spazio generato dai cinque vettori è 4 e quindi lo spazio generato è $\mathbb{R}^4$.
- Per estrarre da questo insieme una base di $\mathbb{R}^4$ utilizziamo il metodo dei perni: una base di R(A) è data dai vettori che stanno sulle colonne di A corrispondenti ai pivot della matrice ridotta. Nel nostro caso le prime quattro colonne. Una base estratta è quindi
  $\{(1,0,0,1),(0,1,1,0),(0,0,1,2),(1,0,0,-1)\}$

Problema

- Abbiamo visto come calcolare una base e la dimensione di uno spazio generato $L(v_1,....,v_k)$.
- Affrontiamo ora il problema di calcolare una base dello spazio delle soluzioni di un sistema omogeneo, ovvero una base di $N(A)$.

Nullità + rango

- Teorema (nullità più rango): Se A è una matrice nxm allora

$$null(A)+rk(A)=m$$

- Il teorema è un caso speciale di un teorema più generale detto teorema della dimensione che faremo più avanti

Esercizio

- Data $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 2\\ 2 & 0 & 4 & 2\\ 1 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 2\end{pmatrix}$, calcolare una base di N(A).

- Soluzione: $N(A)=Sol(A,\vec{0})$, quindi risolviamo il sistema $AX=\vec{0}$. Riduciamo la matrice completa:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 4 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 2 & 0\\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0\\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 2 & 0\\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Continuazione soluzione

- Il sistema ridotto è $\begin{cases} x+y+2z+2w=0 \\ -2y-2w=0 \end{cases}$. Le variabili

libere sono z,w. Risolvendo all'indietro si trova

$$\begin{cases} x+y+2z+2w=0 \\ -2y-2w=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y-2z-2w=w-2z-2w=-2z-w \\ y=-w \end{cases}$$

quindi le soluzioni sono $\begin{pmatrix} -2z-w \\ -w \\ z \\ w \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, cioè

$N(A)=L(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$.

Fine soluzione

Abbiamo trovato due generatori di N(A).
Sappiamo che dim N(A)=null(A)=4-rk(A)=2, quindi i due generatori formano una base di N(A). Una base di N(A) è quindi

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Esercizio

- Calcolare la dimensione e una base per lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo $AX=\vec{0}$ dove

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Soluzione: procediamo come nell'esercizio precedente.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Continuazione soluzione

- Il sistema ridotto è $\begin{cases} 2x+y+z+u=0 \\ y-z+w+u=0 \end{cases}$. Le variabili

libere sono z,w,u. Risolvendo all'indietro si trova

$$\begin{cases} 2x+y+z+u=0 \\ y-z+w+u=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=-y-z-u=-z+w+u-z-u=w-2z \\ y=z-w-u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2}w-z \\ y=z-w-u \end{cases}$$

quindi le soluzioni sono $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}w-z \\ z-w-u \\ z \\ w \\ u \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

L'insieme $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base per N(A).