Lezione 21

Spazi affini

Equazione cartesiana di una retta nello spazio

Una retta può anche essere descritta come intersezione di due piani, quindi come insieme delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \end{cases}$$

con la condizione che il sistema abbia ∞^1 soluzioni. Quindi

$$rk \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 2$$

Questo sistema è detto equazione cartesiana della retta nello spazio.

Fascio di piani

L'insieme dei piani passanti per una retta r è detto fascio di piani di centro r.

Se la retta r ha equazione $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \end{cases}$

allora un piano di equazione ax+by+cz=d appartiene al fascio di piani di centro r se

e solo se $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ ax+by+cz=d \end{cases}$ ha ∞^1 soluzioni

Fascio di piani

Ne segue che $$rk\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}=2$$

Otteniamo quindi che

$$(a, b, c, d)=\lambda(a_1, b_1, c_1, d_1)+\mu(a_2, b_2, c_2, d_2)$$

e dunque

$$\boxed{ax+by+cz-d=\lambda(a_1x+b_1y+c_1z-d_1)+\mu(a_2x+b_2y+c_2z-d_2)}$$

Fascio di piani

L'equazione

$$\lambda\,(a_1 x + b_1 y + c_1 z - d_1) + \mu\,(a_2 x + b_2 y + c_2 z - d_2) = 0$$

è detta equazione del fascio di piani in quanto al variare di $(\lambda, \mu) \neq \vec{0}$ descrive tutti i piani appartenenti al fascio.

Esercizio

Calcolare l'equazione cartesiana del piano passante per la retta r di equazione $\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x+y+2z=0 \end{cases}$ e per il punto (1,1,1).

Soluzione: il piano cercato appartiene al fascio di piani con centro r e quindi la sua equazione ha la forma

$$\lambda(2x+y-z-1)+\mu(x+y+2z)=0$$

Imponiamo il passaggio per (1,1,1) e troviamo $\lambda+4\mu=0$. Ponendo $\mu=1$ si ricava $\lambda=-4$ e quindi l'equazione del piano è

$$-7x-3y+6z=4$$

Spazi affini

- Le rette e i piani vengono anche chiamati spazi affini (per distinguerli dagli spazi vettoriali)
- Come abbiamo visto gli spazi affini possono essere rappresentati in forma
  - Vettoriale (eq. parametrica): $S = P_0 + V$ con V uno sottospazio di dimensione 1 (se S è una retta) oppure 2 (se S è un piano)
  - Cartesiana: come insieme delle soluzioni di un sistema AX=b.

Giacitura di uno spazio affine

- Se $S = P_0 + V$ è uno spazio affine allora lo spazio V è chiamato la giacitura di S.
- Osservazione: se S è descritto mediante l'equazione cartesiana AX=b allora la sua giacitura e' l'insieme delle soluzioni di AX=0. Infatti sappiamo che l'insieme delle soluzioni del sistema AX=b è dato da

$$Sol(A, b) = X_{part} + Sol(A, \vec{0})$$

e quindi la giacitura di Sol(A,b) è $Sol(A, \vec{0})$

Dimensione di uno spazio affine

- La dimensione di uno spazio affine è la dimensione della sua giacitura.
  - Le rette sono gli spazi affini di dimensione uno
  - I piani sono gli spazi affini di dimensione due

Parallelismo

- Sia n=2,3. Due spazi affini in $\mathbb{R}^n$ si dicono paralleli se la giacitura di uno è contenuta nella giacitura dell'altro.
- Ad esempio una retta r=P+L(v) è parallela al piano $\alpha = Q + L(v_1, v_2)$ se

$$L(v) \subset L(v_1, v_2)$$

Esempio di condizione di parallelismo

- Le condizioni di parallelismo tra spazi affini possono essere formulate utilizzando il rango di matrici.
- Esempio: una retta r=P+L(v) e un piano $\alpha = Q + L(v_1, v_2)$ nello spazio sono paralleli se $L(v) \subset L(v_1, v_2)$, cioè se v è combinazione lineare di v_1, v_2 e quindi

$$rk \begin{pmatrix} v \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 2$$

Esempi in dimensione 3

- Esempio1: i piani di equazione $ax+by+cz=d$ e $a_1 x+b_1 y+c_1 z=d_1$ sono paralleli se e solo se hanno la stessa giacitura e quindi se e solo se

$$rk\left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{pmatrix}\right)=1$$

Siccome $(a,b,c),(a_1,b_1,c_1)$ sono entrambi non nulli, i piani sono paralleli se e solo se

$$(a_1,b_1,c_1)=t(a,b,c)$$

con $t\neq 0$

Continuazione esempio 1

- Ne segue che l'equazione $a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$ è equivalente all'equazione

$$ax + by + cz = d'$$

con $d' = d_1 / t$

Fascio improprio di piani

- L'insieme di tutti i piani paralleli ad un dato piano α è chiamato fascio improprio di piani. Se α ha equazione $ax+by+cz=d$ allora l'equazione del fascio improprio è
$$ax+by+cz=k$$

- Infatti al variare di k si ottengono tutti i piani paralleli al piano dato.

Esempio 2 in dimensione 3

Date le rette r,s nello spazio di equazione cartesiana

$$r:\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \end{cases} \qquad s:\begin{cases} a'_1 x + b'_1 y + c'_1 z = d'_1 \\ a'_2 x + b'_2 y + c'_2 z = d'_2 \end{cases}$$

Verificare che r e s sono parallele se e solo se

$$rk\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a'_1 & b'_1 & c'_1 \\ a'_2 & b'_2 & c'_2 \end{pmatrix} = 2$$

Soluzione

- Sia V la giacitura di r e sia W la giacitura di s.
- V è l'insieme delle soluzioni di

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0 \end{cases}$$

- W è l'insieme delle soluzioni di

$$\begin{cases} a'_1 x + b'_1 y + c'_1 z = 0 \\ a'_2 x + b'_2 y + c'_2 z = 0 \end{cases}$$

Continuazione soluzione

- L'intersezione $V \cap W$ è data dall'insieme delle soluzioni di

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0 \\ a'_1 x + b'_1 y + c'_1 z = 0 \\ a'_2 x + b'_2 y + c'_2 z = 0 \end{cases}$$

- Se la giacitura di r è contenuta nella giacitura di s, allora $V \subset W$ e quindi $V \cap W = V$. Ne segue che il sistema deve avere ∞^1 soluzioni.

Fine soluzione

- Quindi $rk\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a'_1 & b'_1 & c'_1 \\ a'_2 & b'_2 & c'_2 \end{pmatrix}=2$

- Viceversa, se $rk\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a'_1 & b'_1 & c'_1 \\ a'_2 & b'_2 & c'_2 \end{pmatrix}=2$, allora $dim\, V \cap W = 1$

- Siccome $V \cap W \subset V$ e entrambi hanno dimensione 1, allora $V \cap W = V$ e quindi $V = V \cap W \subset W$ e quindi r e s sono parallele.

Esempio 3 in dimensione 3

Dato il piano α di equazione ax+by+cz=d e la retta r di equazione cartesiana

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \end{cases}$$

sia $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$.

Verificare che piano e retta sono paralleli se e solo se $det\, A = 0$

Soluzione

- Sia V la giacitura di r e sia W la giacitura di α.
- V è l'insieme delle soluzioni di

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0 \end{cases}$$

- W è l'insieme delle soluzioni di

$$ax + by + cz = 0$$

Continuazione soluzione

- L'intersezione $V \cap W$ è data dall'insieme delle soluzioni di

$$\begin{cases} ax+by+cz=0 \\ a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \end{cases}$$

- Se la giacitura di r è contenuta nella giacitura di α, allora $V \subset W$ e quindi $V \cap W = V$. Ne segue che il sistema deve avere ∞^1 soluzioni.

Continuazione soluzione

- Quindi $rk\begin{pmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}=2$ e quindi $det\begin{pmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}=0$

- Viceversa, se $det\begin{pmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}=0$, siccome $rk\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}=2$,

abbiamo che $rk\begin{pmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}=2$ e quindi $dim\, V \cap W = 1$

Fine soluzione

Siccome $V \cap W \subset V$ e entrambi hanno dimensione 1, allora $V \cap W = V$ e quindi $V = V \cap W \subset W$ e quindi r e α sono paralleli.

Posizione reciproca piano-retta

- Sia α il piano di equazione ax+by+cz=d e sia r la retta di equazione

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \end{cases}$$

- Vogliamo verificare se piano e retta sono incidenti o paralleli. Per fare questo studiamo l'intersezione del piano con la retta.

Posizione reciproca di un piano e di una retta

L'intersezione del piano con la retta è data dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \end{cases}$$

. Sia A la matrice dei coefficienti

e b il vettore dei termini noti del sistema.

Allora

rkA	$rk(A,\vec{b})$	Soluzioni	
2	2	∞^1	la retta sta sul piano
2	3	nessuna	piano e retta paralleli e distinti
3	3	1	piano e retta incidenti

Posizione reciproca retta-retta

Date le rette r,s nello spazio di equazione cartesiana

$$r:\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \end{cases} \qquad s:\begin{cases} a'_1 x + b'_1 y + c'_1 z = d'_1 \\ a'_2 x + b'_2 y + c'_2 z = d'_2 \end{cases}$$

vogliamo verificare la loro posizione reciproca. Per fare questo studiamo la loro intersezione che è data dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \\ a'_1 x + b'_1 y + c'_1 z = d'_1 \\ a'_2 x + b'_2 y + c'_2 z = d'_2 \end{cases}$$

Posizione reciproca di due rette

Siano $A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a'_1 & b'_1 & c'_1 \\ a'_2 & b'_2 & c'_2 \end{pmatrix}$ e $\vec{b}=\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d'_1 \\ d'_2 \end{pmatrix}$ rispettivamente la matrice dei coefficienti e il vettore dei termini noti del sistema.

Allora

rkA	$rk(A,\vec{b})$	Soluzioni	
2	2	∞^1	rette coincidenti
2	3	nessuna	rette parallele e distinte
3	3	1	rette incidenti
3	4	nessuna	rette sghembe

Rette complanari e rette sghembe

- Due rette si dicono complanari se appartengono allo stesso piano.
- Se due rette sono complanari o sono parallele oppure sono incidenti.
- Se due rette non sono complanari allora sono sghembe.
- Dalla tabella ricaviamo che le due rette sono complanari se e solo se $rk(A,b)<4$ e quindi se e solo se $\det(A,b)=0$

Condizione di complanarità

- Se due rette sono date in equazione parametrica

$$r:\begin{cases} x=x_0+t\,l \\ y=y_0+tm \\ z=z_0+t\,n \end{cases} \quad s:\begin{cases} x=x'_0+t\,l' \\ y=y'_0+tm' \\ z=z'_0+t\,n' \end{cases}$$

allora la condizione di complanarità è

$$det\begin{pmatrix} x'_0-x_0 & y'_0-y_0 & z'_0-z_0 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{pmatrix}=0$$

Dimostrazione della condizione di complanarità

- Scriviamo le due rette in forma vettoriale:

$$r : P = P_0 + tv\,, \quad s : P = P_0' + tv'$$

dove
$$P_0 = (x_{0,}\, y_{0,}\, z_0)\,,\ \ P_0' = (x_0', y_0', z_0')$$
$$v = l\,\vec{i} + m\,\vec{j} + n\,\vec{k}\,,\ \ v' = l'\,\vec{i} + m'\,\vec{j} + n'\,\vec{k}$$

e sia $\alpha = Q + W$ un piano a cui appartengono entrambe le rette. Allora sia v che v' che $\overrightarrow{P_0 P_0'}$ stanno in W. Siccome W ha dimensione 2, abbiamo che v,v', $\overrightarrow{P_0 P_0'}$ sono linearmente dipendenti e quindi

$$det\begin{pmatrix} x'_0 - x_0 & y'_0 - y_0 & z'_0 - z_0 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{pmatrix} = 0$$

Esercizio

- Date le rette

$$r=(1,1,1)+t(2,1,0) \quad s=(0,1,1)+t(1,1,-1)$$

verificare se sono complanari.

Soluzione:

$$det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}=1\neq 0$$

Non sono complanari.

Ortogonalità tra rette nel piano

- Se r e s sono rette di equazione rispettivamente ax+by+c=0 e a'x+b'y+c'=0 allora sono ortogonali se e solo se i rispettivi vettori normali sono ortogonali e quindi se e solo se $aa'+bb'=0$
- Se r e s sono date mediante le equazioni parametriche $r:\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \end{cases}$ $s:\begin{cases} x=x'_0+l't \\ y=y'_0+m't \end{cases}$

allora saranno ortogonali se solo se i loro vettori direzione lo sono e quindi $ll'+mm'=0$

Ortogonalità tra rette nel piano

- Se invece r è data mediante l'equazione cartesiana e ax+by+c=0 e s mediante l'equazione parametrica

$$s:\begin{cases} x=x_0+l\,t \\ y=y_0+m\,t \end{cases}$$

allora r e s saranno ortogonali se il vettore direzione di s è parallelo al vettore normale di r, da cui otteniamo

$$det\begin{pmatrix} a & b \\ l & m \end{pmatrix}=0$$

Esercizio

- Calcolare i valori di h per cui la retta di

equazione $s:\begin{cases} x=1+t \\ y=1+ht \end{cases}$ è ortogonale alla retta di

equazione 2x+y=1.

- Soluzione: le due rette sono ortogonali se e solo se

$$det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & h \end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow 2h-1=0 \Leftrightarrow h=\frac{1}{2}$$

Ortogonalità tra piani

- Due piani sono ortogonali se e solo se i vettori normali sono ortogonali quindi se i due piani hanno equazione cartesiana

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 , a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$$

e $\vec{n}_1 = a_1 x + b_1 \vec{j} + c_1 \vec{k} , \vec{n}_2 = a_2 x + b_2 \vec{j} + c_2 \vec{k}$ allora i piani sono ortogonali se e solo se

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$$

Ortogonalità tra piano e retta

- Un piano e una retta sono ortogonali se il vettore normale al piano è parallelo al vettore direzione della retta.
- Se sia la retta che il piano sono dati mediante la loro equazione cartesiana

ax+by+cz =d e $\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \end{cases}$ allora la

condizione diventa $\begin{cases} a_1 a + b_1 b + c_1 c = 0 \\ a_2 a + b_2 b + c_2 c = 0 \end{cases}$

Ortogonalità tra rette nello spazio

- Due rette si dicono ortogonali se sono incidenti e i rispettivi vettori direzione sono ortogonali.
- Se le rette sono date in forma vettoriale

$$r = P + tv \qquad s = Q + tw$$

allora sono ortogonali se e solo se sono complanari e

$$v \cdot w = 0$$

Esercizio

- Verificare se le rette di equazione parametrica

$$r:\begin{cases} x=2+3t \\ y=1+1t \\ z=-1-t \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x=1-t \\ y=-2-t \\ z=-1-4\mathrm{t} \end{cases}$$

sono ortogonali.

- Soluzione: verifichiamo se i vettori direzione sono ortogonali.

$$(3\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})\cdot(-\vec{i}-\vec{j}-4\vec{k})=-3-1+4=0$$

Continuazione soluzione

- Verifichiamo ora se le rette sono complanari:

$$det\begin{pmatrix}-1 & -3 & 0\\ 3 & 1 & -1\\ -1 & -1 & -4\end{pmatrix}=4-3+1-36=-34\neq 0$$

- Le rette non sono complanari e quindi non sono ortogonali.