Lezione 4

Soluzione di sistemi lineari

Matrici e sistemi lineari

Si consideri il sistema di m equazioni e n incognite

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

La matrice A=(a_{ij}) è detta matrice dei coefficienti, il vettore colonna **b** = $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ è detto vettore dei termini noti, il vettore **X** = $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ è detto vettore delle incognite o delle variabili.

Sistemi lineari come equazioni vettoriali

Un sistema lineare di m equazioni e n incognite è equivalente all'equazione

$$AX = b$$

dove A è la matrice dei coefficienti, **b** è il vettore dei termini noti e **X** è il vettore delle incognite.

Matrice completa di un sistema

- La matrice completa del sistema AX=b è la matrice (A,b).
- Esempio: la matrice completa di $\begin{cases} 2x+y=1 \\ x-y=-1 \end{cases}$

è

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Sistemi omogenei: legge di sovrapposizione

- Un sistema $AX = b$ si dice omogeneo se

$$b = \vec{0}$$

- Se X_1, X_2 sono soluzioni di un sistema omogeneo allora anche $X_1 + X_2$ lo è.
- Se X è soluzione di un sistema omogeneo allora anche tX lo è.
- Dimostrazione: $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$

$$A(tx) = tAx = t\,\vec{0} = \vec{0}$$

Particolare + omogeneo

- Dato un sistema $AX = b$ l'insieme dei vettori colonna **v** che risolvono il sistema si indica con il simbolo Sol(A,**b**).
- Supponiamo che $AX = b$ abbia soluzione. Fissiamo una soluzione particolare X_{part} del sistema. Allora tutte le soluzioni del sistema sono date da $X_{part} + Y$ al variare di Y in Sol(A,$\vec{0}$). In simboli

  Sol(A,**b**)= X_{part}+ Sol(A,$\vec{0}$).

Dimostrazione

- Se y è in Sol(A,$\vec{0}$) allora

$$A(x_{part}+y)=Ax_{part}+Ay=b+\vec{0}=b$$

- Se x' è in Sol(A,**b**) sia $y=x'-x_{part}$ cosicchè

$$x'=x_{part}+y$$

Si ha che $Ay=A(x'-x_{part})=Ax'-Ax_{part}=b-b=\vec{0}$
quindi $x'=x_{part}+y$ con y in Sol(A,$\vec{0}$)

Esercizio

- Risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+3z=2 \\ x-y+2z=1 \end{cases}$$

Eliminazione e matrice completa

- Invece di usare le equazioni per eliminare variabili si possono equivalentemente utilizzare le righe della matrice completa.
- In questo modo le operazioni che trasformano il sistema in un sistema a gradini diventano operazioni sulle righe della matrice completa.
- Queste operazioni sono dette operazioni elementari di riga

Operazioni elementari di riga

- Le operazioni elementari sulle righe di una matrice sono:
  - Scambiare due righe
  - Moltiplicare una riga per un numero diverso da zero
  - Sommare ad una riga un multiplo di un'altra riga.
  - Scriviamo $A \sim B$ se B si ottiene da A mediante una sequenza di operazioni elementari di riga

Soluzione di un sistema lineare: metodo di eliminazione

- Come abbiamo visto si possono usare le operazioni elementari di riga per ridurre un sistema ad un sistema equivalente che è più semplice da risolvere.
- Questa idea è la base del metodo di eliminazione di Gauss-Jordan: mediante operazioni elementari di riga in modo algoritmico si riduce la matrice del sistema ad una forma particolare detta “a gradini”.

Matrici a gradini

- In una matrice qualsiasi il primo elemento non nullo di una riga viene chiamato pivot della riga
- Una matrice si dice a gradini se il pivot di ogni riga è in una colonna successiva a quella del pivot della riga precedente.
- In particolare, in una matrice a gradini, se una riga è nulla allora tutte le righe successive devono essere nulle

Esempi

- Matrici a gradini:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Matrici non a gradini:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Riduzione a gradini

- Ogni matrice può essere trasformata mediante una sequenza di operazioni elementari di riga in una matrice a gradini.

Esempi

- Riduciamo a gradini

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Sistemi a gradini

- Un sistema si dice a gradini se la sua matrice completa lo è.
- Ogni sistema è equivalente ad un sistema a gradini: basta ridurre la sua matrice a gradini.
- In un sistema a gradini le variabili che corrispondono ai pivot sono dette variabili vincolate, mentre le altre variabili sono dette variabili libere.

Soluzione di un sistema a gradini

- Un sistema a gradini è facile da risolvere: se l'ultimo pivot è nell'ultima colonna della matrice completa allora il sistema non ha soluzione, altrimenti si risolvono all'indietro le variabili vincolate in termini di quella libere.

Esempi

- Risolvere i sistemi

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x-y+z=1 \\ -x+y+z=1 \end{cases}, \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=1 \\ x+z=1 \end{cases}, \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=1 \\ x+z=0 \end{cases}$$

Determinante e operazioni elementari di riga

- Abbiamo visto che scambiando due righe il determinante cambia segno
- Se si applica la terza operazione elementare di riga ad una matrice allora il suo determinante non cambia.
- Usando queste osservazioni si può utilizzare la riduzione a gradini per calcolare il determinante

Esempio

- Calcolare

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$