

Lezione 10

Trasformazioni lineari

Generalità sulle funzioni

Dati due insiemi A e B, una funzione

$f : A \rightarrow B$ è una legge che associa a **ogni** elemento di A uno e **un solo** elemento di B che si indica con $f(a)$.

Una funzione si dice iniettiva se $f(a_1)=f(a_2)$ implica che $a_1=a_2$.

Una funzione si dice suriettiva se per ogni elemento b di B esiste un elemento a di A tale che $f(a)=b$.

Una funzione si dice biiettiva se è iniettiva e suriettiva

Generalità sulle funzioni

La funzione identità $I_A: A \rightarrow A$ è la funzione definita ponendo $I_A(a)=a$.

Dati gli insiemi A, B, C , e funzioni $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ la composta di g con f è la funzione definita ponendo

$$g \circ f : A \rightarrow B$$

$$g \circ f (a) = g(f(a))$$

Generalità sulle funzioni

Una funzione $f: A \rightarrow B$ si dice invertibile se esiste una funzione $g: B \rightarrow A$ tale che

$$g \circ f = I_A, \quad f \circ g = I_B$$

Se f è una funzione invertibile allora la funzione g è unica e la si indica con f^{-1}

Teorema: Una funzione è invertibile se e solo se è biiettiva.

Trasformazioni lineari

Dati due spazi vettoriali V e W , una trasformazione lineare da V in W è una funzione $f: V \rightarrow W$ tale che, dati v_1 e v_2 in V ,

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$$

e, dato v in V e t numero reale,

$$f(tv) = tf(v).$$

Le trasformazioni lineari di solito si indicano con lettere maiuscole T, S, \dots anziché f, g, \dots

Osservazione

Se $T : V \rightarrow W$ è una trasformazione lineare
allora $T(\vec{0}) = \vec{0}$ infatti

$$T(\vec{0}) = T(\vec{0} + \vec{0}) = T(\vec{0}) + T(\vec{0})$$

quindi

$$T(\vec{0}) = \vec{0}$$

Esempi di trasformazioni che non sono lineari

$T: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ definita ponendo $T(x,y,z) = (x+1, y, z)$
non è lineare. Infatti

$$T(\vec{0}) = (1, 0, 0) \neq \vec{0}$$

$T: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ definita ponendo

$T(x,y) = (x^2 + y^2, x, y)$ non è lineare. Infatti

$$T((1,1) + (1,0)) = T((2,1)) = (5, 2, 1)$$

mentre

$$T((1,1)) + T((1,0)) = (2, 1, 1) + (1, 1, 0) = (3, 2, 1)$$

Esempio generale di trasformazione lineare

Identifichiamo $M(nx1, \mathbb{R})$ con \mathbb{R}^n

- Se A è una matrice $n \times m$, la funzione

$$T_A: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

definita ponendo

$$T_A(X) = AX$$

è una trasformazione lineare.

Esempi

- Se $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ allora

$$T_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

- Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ allora

$$T_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ y+z \end{pmatrix}$$

Ogni trasformazione lineare è una T_A

- Se $T: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una trasformazione lineare, sia $v_i = T(e_i)$ e sia A la matrice $n \times m$

$$A = (v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_m)$$

- Abbiamo che $T = T_A$: infatti

$$T(X) = T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}\right) = \sum_i x_i T(e_i) = \sum_i x_i v_i = AX$$

La matrice A è chiamata matrice associata a T nelle basi canoniche o matrice rappresentativa di T nelle basi canoniche.

Nucleo e Immagine

Se $T:V \rightarrow W$ è una trasformazione lineare allora l'insieme

$$\text{Ker } T = \{v \in V \mid T(v) = \vec{0}\}$$

è chiamato nucleo di T .

L'insieme

$$\text{Im } T = \{w \in W \mid \text{esiste } v \in V \text{ tale che } w = T(v)\}$$

è chiamato immagine di T .

Osservazione

- Il nucleo e l'immagine di una trasformazione lineare $T:V \rightarrow W$ sono sottospazi vettoriali rispettivamente di V e di W .
- Verifichiamo ad esempio che $\text{Ker } T$ è sottospazio di V : dobbiamo verificare che
 - È non vuoto: $T(\vec{0}) = \vec{0}$ quindi $\vec{0}$ è in $\text{Ker } T$
 - È chiuso rispetto alla somma: se v e w stanno in $\text{Ker } T$ allora $T(v+w) = T(v) + T(w) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$
 - È chiuso rispetto al prodotto: se v sta in $\text{Ker } T$ e t è un numero allora $T(tv) = tT(v) = t\vec{0} = \vec{0}$

Nucleo e immagine di T_A

- Il nucleo di T_A è $N(A)$.
- L'immagine di T_A è $R(A)$.
- In simboli

$$Ker T_A = N(A) \qquad Im T_A = R(A)$$

- In particolare

$$\dim Im T_A = rk(A), \quad \dim Ker T_A = null(A)$$

- Dimostrazione:

$$Ker T_A = \{v | T_A(v) = \vec{0}\} = \{v | Av = \vec{0}\} = N(A)$$

Continuazione dimostrazione

- Verifichiamo ora che $\text{Im } T_A = R(A)$:

$$\begin{aligned}\text{Im } T_A &= \{T_A(v) | v \in \mathbb{R}^m\} = \{Av | v \in \mathbb{R}^m\} = \left\{ A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \mid x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \sum_i x_i A^i \mid x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R} \right\} = R(A)\end{aligned}$$