Lezione 25

Classificazioni delle quadriche nel piano e nello spazio

Quadriche senza centro di simmetria

- Se $A_0 X + q$ non ha soluzione, si decompone q rispetto a $R(A_0)$:

$$q = q_0 + q_1 \text{ con } q_0 \in N(A_0) \text{ e } q_1 \in R(A_0)$$

Se c_0 è una soluzione di $A_0 X + q_1 = \vec{0}$, si trasla c_0 nell'origine e la matrice della quadrica traslata diventa

$$\begin{pmatrix} A_0 & q_0 \\ q_0^T & f' \end{pmatrix}$$

Quadriche senza centro di simmetria

- Si calcola una matrice modale ortogonale M_0 di A_0 e si trasforma la quadrica con l'isometria lineare $R(X) = M_0^T$. La matrice si trasforma in

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & b'_1 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n & b'_n \\ b'_1 & b'_2 & \cdots & b'_n & f' \end{pmatrix} \text{con} \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix} = M_0^T q_0$$

Quadriche senza centro di simmetria

- Si possono riordinare gli autovalori di A_0 in modo che $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ siano positivi, $\lambda_{r+1}, \cdots, \lambda_{r+s}$ siano negativi e $\lambda_{r+s+1}, \cdots, \lambda_n$ siano nulli.

Analisi di $M_0^T q_0$

- Siccome le ultime $n-r-s$ colonne di M_0 sono gli autovettori relativi all'autovalore nullo, formano una base ortonormale di $N(A_0)$. Le prime r+s colonne di M_0 formano quindi una base ortonormale di $N(A_0)^{\perp}=R(A_0)$.
  Siccome $q_0 \in N(A_0)$, si ha che $M_0^i \cdot q_0 = 0$ se $i \leq s+r$ e quindi

$$M_0^T q_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b'_{r+s+1} \\ b'_{r+s+2} \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix}$$

Quadriche senza centro di simmetria

- Quindi la matrice dell'equazione dopo la diagonalizzazione è

$$\begin{pmatrix}
\lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & \lambda_{r+s} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b'_{r+s+1} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b'_n \\
0 & 0 & \cdots & 0 & b'_{r+s+1} & \cdots & b'_n & f'
\end{pmatrix}$$

Eliminazione dei termini lineari tranne uno

- Lemma: Se $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq \vec{0}$ allora esiste una matrice ortogonale Q tale che $Q v = -\|v\| e_1$
- Dimostrazione:

Siccome $v \neq \vec{0}$, esiste una base $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ per cui $v_1 = -v$. Ortonormalizzando questa base si trova una base ortonormale $\{u_1, \cdots, u_n\}$ per cui $u_1 = -\frac{v}{\|v\|}$. Sia $M = (u_1 \; u_2 \cdots \; u_n)$. Siccome

$$M(-\|v\| e_1) = -\|v\| u_1 = v$$

si ha che, ponendo $Q = M^T = M^{-1}$, $Q v = -\|v\| e_1$

Eliminazione dei termini lineari tranne uno

- Applichiamo il lemma a $v=\begin{pmatrix} b'_{r+s+1} \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix}$. Troviamo

una matrice ortogonale Q per cui

$$Qv=-\|v\|e_1=-\left\|M_0^T q_0\right\|e_1=-\|q_0\|e_1$$

Eliminazione dei termini lineari tranne uno

Si trasforma la quadrica con l'isometria lineare

$$R(X)=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$$

La matrice dell'equazione si trasforma in

$$\begin{pmatrix}
\lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & \lambda_{r+s} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\|q_0\| \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & -\|q_0\| & \cdots & 0 & f'
\end{pmatrix}$$

Eliminazione dei termini lineari tranne uno

- Sia $\mu_i = -\lambda_{i-r}$ per $i > r$. L'equazione è diventata

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2 - \sum_{i=1}^{s} \mu_i x_{i+r}^2 - 2\|q_0\| x_{r+s+1} + f' = 0$$

- Con una traslazione si elimina il termine f' e finalmente si ottiene

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2 - \sum_{i=1}^{s} \mu_i x_{i+r}^2 - 2\|q_0\| x_{r+s+1} = 0$$

con

$$\lambda_i > 0,\ \ \mu_i > 0$$

Sommario

- Abbiamo dimostrato il seguente

Teorema: Ogni quadrica può essere portata con una rototraslazione in una quadrica con equazione in una delle tre seguenti forme

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2 - \sum_{i=1}^{s} \mu_i x_{i+r}^2 = 0 \text{ con } \lambda_i > 0,\ \mu_i > 0$$

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2 - \sum_{i=1}^{s} \mu_i x_{i+r}^2 = c \text{ con } c \neq 0,\ \lambda_i > 0,\ \mu_i > 0$$

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2 - \sum_{i=1}^{s} \mu_i x_{i+r}^2 - c\, x_{r+s+1} = 0 \text{ con } c > 0,\ \lambda_i > 0,\ \mu_i > 0$$

Osservazione 1

- Se M è invertibile allora rk(AM)=rk(A) e rk(MA)=rk(A). In particolare due matrici simili hanno lo stesso rango.
- Dimostrazione: Siccome R(AM) è contenuto in R(A) si ha che $rk(AM) \leq rk(A)$

Siccome $A = (AM)M^{-1}$ si ha $rk(A) \leq rk(AM)$ e quindi

$$rk(A) = rk(AM)$$

Osservazione 2

- Se si rototrasla una quadrica con la rototraslazione $R(X)=M_0 X+v$ allora la sua matrice A si trasforma in $A'=(M^{-1})^T A M^{-1}$ dove M è la matrice di R. Inoltre $A'_0=M_0 A_0 M_0^T$. Ne segue che il rango di A e di A_0 non cambiano.
- Applicando questa osservazione alle tre forme in cui si trasforma ogni quadrica si vede che
  - Il primo tipo corrisponde a $rk(A)=rk(A_0)$
  - Il secondo tipo corrisponde a $rk(A)=rk(A_0)+1$
  - Il terzo tipo corrisponde a $rk(A)=rk(A_0)+2$

Osservazione 3

- Per calcolare esattamente la forma a cui corrisponde una quadrica non è necessario calcolare gli autovettori di A_0 ma solo gli autovalori:
  - Se $rk(A)=rk(A_0)$ si è nel primo tipo e bastano gli autovalori.
  - Se $rk(A)=rk(A_0)+2$ si è nel terzo tipo e bastano gli autovalori poiché $c=2\|q_0\|$
  - Se $rk(A)=rk(A_0)+1$ e $det\,A_0\neq 0$ allora bastano gli autovalori poiché $c=-\frac{det\,A}{det\,A_0}$
  - Se $rk(A)=rk(A_0)+1$ e $det\,A_0=0$ allora oltre agli autovalori si calcola un centro c_0 e $c=-p(c_0)$

Coniche

- Applichiamo la classificazione delle quadriche al caso delle quadriche nel piano ovvero le coniche.

Forme canoniche delle coniche

-

Forma canonica	
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	Ellisse reale. rk(A)=3, rk(A_0)=2
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$	Ellisse immaginaria. rk(A)=3, rk(A_0)=2
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	Iperbole. rk(A)=3, rk(A_0)=2
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	Ellisse degenere (un punto). rk(A)=2,rk(A_0)=2
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$	Iperbole degenere (due rette incidenti) rk(A)=2,rk(A_0)=2
$y^2=a\,x$	Parabola. rk(A)=3, rk(A_0)=1.

Forme canoniche delle coniche

Forma canonica	
$y^2 = a, \ \ a > 0$	Rette parallele. rk(A)=2, rk(A_0)=1
$y^2 = a, \ \ a < 0$	Rette immaginarie. rk(A)=2, rk(A_0)=1
$y^2 = 0$	Retta doppia. rk(A)=1, rk(A_0)=1

Quadriche in $\mathbb{R}^3$

- Applichiamo la classificazione delle quadriche al caso delle quadriche nello spazio.

Forme canoniche delle quadriche nello spazio

Forma canonica	
$\lambda_1 x^2+\lambda_2 y^2+\lambda_3 z^2=0$	Autovalori tutti dello stesso segno: un punto (cono immaginario). rk(A)=3, rk(A_0)=3
$z^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$	Cono. rk(A)=3, rk(A_0)=3
$\lambda_1 x^2+\lambda_2 y^2=0$	Autovalori con lo stesso segno: una retta rk(A)=2, rk(A_0)=2
$\lambda_1 x^2+\lambda_2 y^2=0$	Autovalori con segno discorde: una coppia di piani incidenti. rk(A)=2, rk(A_0)=2
$x^2=0$	Un piano. rk(A)=1, rk(A_0)=1
$a x^2+b y^2+c z^2=1$	a>0, b>0, c>0 ellissoide rk(A)=4, rk(A_0)=3
$a x^2+b y^2+c z^2=1$	a>0, b>0, c<0, iperboloide iperbolico rk(A)=4, rk(A_0)=3
$a x^2+b y^2+c z^2=1$	a>0, b<0, c<0, iperboloide ellittico rk(A)=4, rk(A_0)=3
$a x^2+b y^2+c z^2=1$	a<0, b<0, c<0, insieme vuoto (ellissoide immaginario) rk(A)=4, rk(A_0)=3

Forme canoniche delle quadriche nello spazio

Forma canonica	
$a x^2 + b y^2 = 1$	a<0 e b<0 insieme vuoto rk(A)=3, rk(A_0)=2
$a x^2 + b y^2 = 1$	a>0 e b>0 cilindro ellittico rk(A)=3, rk(A_0)=2
$a x^2 + b y^2 = 1$	ab<0 cilindro iperbolico rk(A)=3, rk(A_0)=2
$x^2 = u$	Due piani paralleli se u>0 rk(A)=2, rk(A_0)=1
$x^2 = u$	Insieme vuoto se u<0 (piani immaginari) rk(A)=2, rk(A_0)=1
$a x^2 + b y^2 = z$	a>0 e b>0 paraboloide ellittico rk(A)=4, rk(A_0)=2
$a x^2 + b y^2 = z$	a>0, b<0 paraboloide iperbolico rk(A)=4, rk(A_0)=2
$x^2 = a z$	Cilindro parabolico rk(A)=3, rk(A_0)=1

Classificazione affine delle quadriche

- Come abbiamo visto ci sono 9 tipi di forme canoniche per le coniche e 17 tipi di forme canoniche per le quadriche nello spazio.
- Vogliamo determinare il tipo di forma canonica senza dover calcolare gli autovalori della matrice A_0.

Classificazione metrica vs classificazione affine

- Il calcolo della forma canonica di una quadrica è detto classificazione metrica della quadrica.
- Il calcolo del tipo di forma canonica è detto classificazione affine della quadrica.

Invarianti metrici

- Data l'equazione di una conica sia $A=\begin{pmatrix} A_0 & q \\ q^T & f \end{pmatrix}$ la sua matrice.
- Gli invarianti metrici della conica sono
  - L'invariante cubico $I_3=det(A)$
  - L'invariante quadratico $I_2=det(A_0)$
  - L'invariante lineare $I_1=tr(A_0)$
- Gli invarianti metrici sono chiamati così perché rimangono invariati se si applica una rototraslazione alla conica.

Invarianti metrici e classificazione affine

- Dal segno degli invarianti metrici è possibile (tranne in un caso) classificare affinemente la conica.
- Esempio: $I_3 > 0,\ I_2 > 0,\ I_1 > 0$. Da $I_1 > 0$ si ha $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$. Da $I_2 > 0$ si ha $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ e quindi

$$\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0$$

- Da $I_3 > 0$ si ha che $f' = \frac{det\ A}{det\ A_0} > 0$ e quindi, dall'equazione

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + f' = 0$$

si vede che la conica è un'ellisse immaginaria

Coniche nondegeneri: $I_3 \neq 0$

$I_2 > 0$	$I_1 I_3 > 0$	Ellisse immaginaria
$I_2 > 0$	$I_1 I_3 < 0$	Ellisse
$I_2 < 0$		Iperbole
$I_2 = 0$		Parabola

Coniche degeneri: $I_3 = 0$

$I_2 > 0$		Ellisse degenere (un punto)
$I_2 < 0$		Iperbole degenere (due rette incidenti)
$I_2 = 0$	$rk(A) = 1$	Retta doppia
$I_2 = 0$	$I_1 f' < 0$	Rette parallele
$I_2 = 0$	$I_1 f' > 0$	Rette immaginarie

- Nei casi degeneri con $I_2 = 0$, gli invarianti metrici non bastano: bisogna calcolare f'

Classificazione affine delle quadriche

- Come nel caso delle coniche vogliamo classificare affinemente le quadriche senza dover calcolare gli autovalori di A_0 .
- La classificazione dipende dalla segnatura della forma quadratica che ha la matrice A_0 come matrice di Gram:

$$q_0(X)=X^T A_0 X$$

Classificazione affine delle quadriche nondegeneri

Segnatura q_0		
$(3,0)$ o $(0,3)$	$detA>0$	Ellissoide immaginario
$(3,0)$ o $(0,3)$	$detA<0$	Ellissoide
$(2,1)$ o $(1,2)$	$detA>0$	Iperboloide iperbolico
$(2,1)$ o $(1,2)$	$detA<0$	Iperboloide ellittico
$rk(A_0)=2$	$detA>0$	Paraboloide iperbolico
$rk(A_0)=2$	$detA<0$	Paraboloide ellittico

Classificazione affine delle quadriche con $rk(A)=3$

Segnatura q_0		
$(3,0)$ o $(0,3)$		Un punto (cono immaginario)
$(2,1)$ o $(1,2)$		Cono
$(2,0)$ o $(0,2)$	$tr(A_0)f'>0$	Cilindro immaginario
$(2,0)$ o $(0,2)$	$tr(A_0)f'<0$	Cilindro ellittico
$(1,1)$		Cilindro iperbolico
$(1,0)$ o $(0,1)$		Cilindro parabolico

Classificazione affine delle quadriche con $rk(A) \leq 2$

Segnatura A_0			
$(2,0)$ o $(0,2)$			Una retta (due piani immaginari incidenti)
$(1,1)$			Due piani incidenti
$(1,0)$ o $(0,1)$	$rk(A)=2$	$tr(A_0)f'>0$	Vuoto (due piani parralleli immaginari)
$(1,0)$ o $(0,1)$	$rk(A)=2$	$tr(A_0)f'<0$	Due piani paralleli
$(1,0)$ o $(0,1)$	$rk(A)=1$		Piano doppio

Coniche nello spazio

- Una conica nello spazio viene descritta come l'intersezione di una quadrica con un piano non contenuto nella quadrica
- Per riconoscere affinemente la conica è sufficente eliminare un parametro dall'equazione della quadrica usando l'equazione del piano e classificare affinemente l'equazione che si ottiene

Esempio: Classificare affinemente la conica di equazione

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+2xy+y^2+z^2+x+y-1=0 \end{cases}$$

Superfici quadriche

- Le superfici quadriche sono le superfici che sono anche quadriche
- Ad esempio una sfera è una superficie quadrica perché è la superfice di equazione

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

- La retta di equazione $x^2+y^2=0$ è una quadrica ma non è una superfice.

Sfere

- Una sfera è un ellissoide ed è caratterizzato dal fatto che A_0 ha un solo autovalore e $det\ A < 0$.
- Il centro della sfera è il centro di simmetria e il raggio è

$$R = \frac{\sqrt{-det\ A}}{\left(det\ A_0\right)^{2/3}}$$

Esempio

- Verificare se la quadrica di equazione

$$2x^2+2y^2+2z^2+3x-y+2z=4$$

è una sfera e in tal caso calcolarne il centro e il raggio.

Coni quadrici

- I coni quadrici sono caratterizzati dal fatto di possedere un centro di simmetria (il vertice V)
- Inoltre il centro di simmetria appartiene alla quadrica e quindi nella forma canonica

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + c = 0$$

si ha $c = p(V) = 0$

- Quindi i coni quadrici sono le superfici quadriche per cui

$$rk(A) = rk(A_0)$$

Classificazione dei coni quadrici

- $rk\, A_0 = 3,$ segnatura $(2,1)$ o $(1,2)$
  - Coni: $z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$
- $rk\, A_0 = 2,$ segnatura $(1,1)$
  - Piani incidenti: $a\, x^2 - b\, y^2 = 0$ a>0, b>0
- $rk\, A_0 = 1$
  - Piano: $x^2 = 0$

Esercizio

- Verificare che la quadrica di equazione

$$2x^2 - xy - y^2 + xz + 2yz - z^2 + x - y + z = 0$$

è un cono quadrico e calcolarne il vertice

Cilindri quadrici

- Un cilindro quadrico è un cilindro che è anche una superfice quadrica
- I cilindri quadrici sono caratterizzati dal fatto che

$$rk(A) \leq 3, \quad rk(A_0) \leq 2$$

Classificazione dei cilindri quadrici

- $rk(A)=3, \quad rk(A_0)=2$
  - Cilindro ellittico (segnatura di q_0 (2,0) o (0,2) e $tr(A_0)f'<0$)
  - Cilindro iperbolico (segnatura di q_0 (1,1))
- $rk(A)=3, \quad rk(A_0)=1$
  - Cilindro parabolico
- $rk(A)=2, \quad rk(A_0)=2$
  - Due piani incidenti (segnatura di q_0 (1,1))

Classificazione dei cilindri quadrici

- $rk(A)=2, \quad rk(A_0)=1$
  - Due piani paralleli ($tr(A_0)f'<0$)
- $rk(A)=1, \quad rk(A_0)=1$
  - Un piano

Esercizio

- Verificare che la quadrica di equazione

$$2x^2+2xy+y^2-2xz+z^2-4=0$$

è un cilindro quadrico.

Le quadriche di rotazione hanno un autovalore doppio di A_0

- Sia v una direzione dell'asse di rotazione e sia w un vettore ortogonale a v. Il piano passante per l'asse di rotazione e avente direzioni v e w è un piano di simmetria della quadrica. I piani di simmetria delle quadriche hanno direzioni parallele agli autovettori di A_0, quindi ogni vettore ortogonale a v è autovettore di A_0. Siccome gli autovettori relativi a autovalori distinti sono ortogonali, A_0 deve avere un autovalore doppio.

Classificazione delle quadriche di rotazione

- Le quadriche che possono avere un autovalore doppio sono
  - Ellissoidi di rotazione ottenuti ruotando un'ellisse intorno a un asse di simmetria
  - Iperboloidi sia ellittici che iperbolici ottenuti ruotando un iperbole intorno a un asse di simmetria
  - Paraboloide ellittico ottenuto ruotando una parabola intorno al suo asse di simmetria

Classificazione delle quadriche di rotazione

- Coni di rotazione ottenuti ruotando due rette incidenti una intorno all'altra
- Cilindro ellittico ottenuto ruotando due rette parallele una intorno all'altra
- Due piani paralleli ottenuti ruotando due rette parallele intorno a un asse ortogonale a entrambe
- Piano ottenuto ruotando una retta attorno a un asse ortogonale alla retta

Classificazione delle quadriche di rotazione

- Cilindro parabolico ha un autovalore doppio, ma non è una quadrica di rotazione