Lezione 17

Prodotto scalare

Primo criterio di diagonalizzabilità

- Una prima conseguenza del lemma è il seguente
- Corollario: Se una matrice A quadrata di ordine n ha n autovalori distinti allora la matrice è diagonalizzabile.
- Dimostrazione: gli n autovettori $v_1, \cdots, v_n$ relativi agli n autovalori distinti sono indipendenti in $\mathbb{R}^n$ e quindi sono una base.

Teorema di Ruffini

- Teorema: Se p(t) è un polinomio e $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ sono tutte le sue radici distinte allora

$$p(t) = (t - \lambda_1)^{m_1} \cdots (t - \lambda_r)^{m_r} q(t)$$

con $m_i \geq 1$ e q(t) un polinomio senza radici. L'esponente m_i è detto la molteplicità della radice λ_i

Esempi

- $p(t)=t^2-1$. Il polinomio ha due radici $\lambda_1=1, \lambda_2=-1$ $p(t)=(t-1)^1(t+1)^1$ quindi $m_1=m_2=1$ e $q(t)=1$.
- $p(t)=t^4-1$. Il polinomio ha due radici $\lambda_1=1, \lambda_2=-1$ $p(t)=(t-1)^1(t+1)^1(t^2+1)$ quindi $m_1=m_2=1$ e $q(t)=t^2+1$.
- $p(t)=2t^3-2t^2-2t+2$. Il polinomio ha due radici $\lambda_1=1, \lambda_2=-1$; $p(t)=2(t-1)^2(t+1)^1$ quindi $m_1=2, m_2=1$ e $q(t)=2$.

Cosa succede se gli autovalori non sono distinti: molteplicità algebrica

- Se A è una matrice quadrata di ordine n e $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ sono i suoi autovalori distinti, allora $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ sono le radici di $p_A(t)$, quindi

$$p_A(t) = (t - \lambda_1)^{m_1} \cdots (t - \lambda_r)^{m_r} q(t)$$

con q(t) un polinomio senza radici.

L'esponente m_i è detto molteplicità algebrica di λ_i e lo si indica con $m_a(\lambda_i)$

Osservazione

- Due matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico, quindi due matrici simili hanno gli stessi autovalori con la stessa molteplicità algebrica.

Teorema

$$m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$$

Definizioni

- Un autovalore λ si dice semplice se $m_a(\lambda)=1$
- Un autovalore λ si dice regolare se $m_g(\lambda)=m_a(\lambda)$

Osservazione

- Un autovalore semplice è anche regolare

Secondo criterio di diagonalizzabilità

- Una matrice quadrata A di ordine n è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità algebriche è n e ogni autovalore è regolare

Osservazione

- Il secondo criterio di diagonalizzabilità è necessario e sufficiente.

Dimostrazione del II criterio

- Dimostriamo solo che se vale il secondo criterio allora A è diagonalizzabile:

Siano $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ gli autovalori distinti di A. Sia B_i una base dell'autospazio relativo a λ_i Sia B l'unione delle basi B_i . Chiaramente B ha

$$m_g(\lambda_1)+\cdots+m_g(\lambda_r)=m_a(\lambda_1)+\cdots+m_a(\lambda_r)=n$$

elementi.

Continuazione della dimostrazione

Gli elementi che stanno in B_i distinte sono indipendenti. Elementi che stanno nella stessa B_i sono indipendenti, quindi gli elementi di B sono indipendenti. Siccome B ha n elementi indipendenti è una base di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori di A.

Osservazione

- La dimostrazione del secondo criterio descrive anche un modo per calcolare una base di autovettori una volta verificato che A è diagonalizzabile.
- Basta calcolare una base di ogni autospazio e metterle insieme.
- La matrice modale M sarà la matrice che ha i vettori in questa base come colonne
- La matrice diagonale D sarà la matrice che ha i rispettivi autovalori sulla diagonale

Esercizio

- Verificare se $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile.

- Soluzione: calcoliamo gli autovalori di A. Il polinomio caratteristico è

$$p_A(t)=det\begin{pmatrix} -t & 1 \\ 0 & -t \end{pmatrix}=t^2$$

per cui l'unico autovalore è $\lambda_1=0$ la cui molteplicità algebrica è 2.

Fine soluzione

- La molteplicità geometrica è

$$m_g(\lambda_1) = 2 - rk\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1$$

- Siccome $m_a(\lambda_1) \neq m_g(\lambda_1)$ la matrice non è diagonalizzabile.

Esercizio

- Verificare che

$$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

non è diagonalizzabile se $\theta\neq k\pi$ con k intero.

- Soluzione: calcoliamo gli autovalori della matrice. Il polinomio caratteristico è

$$det\begin{pmatrix}\cos\theta-t & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta-t\end{pmatrix}=(\cos\theta-t)^2+(\sin\theta)^2=t^2-2\cos\theta\, t+1$$

Continuazione soluzione

- Risolviamo l'equazione $t^2 - 2\cos\theta\, t + 1 = 0$. Le soluzioni sono
$$t_{1,2} = \frac{2\cos\theta \pm \sqrt{4(\cos\theta)^2 - 4}}{2}$$
- Siccome $\theta \neq k\pi$, abbiamo che $\cos\theta < 1$ e quindi il discriminante $4(\cos\theta)^2 - 4 = 4((\cos\theta)^2 - 1)$ è negativo. Ne segue che la matrice non ha autovalori e quindi non è diagonalizzabile.

Esercizio

- Verificare se la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile e in tal caso calcolare una matrice modale.

- Soluzione: calcoliamo gli autovalori.

Continuazione soluzione

- Il polinomio caratteristico è

$$det\begin{pmatrix} 1-t & 1 & 0 \\ 0 & 2-t & 0 \\ 0 & 0 & 1-t \end{pmatrix} = (1-t)^2(2-t)$$

- Gli autovalori sono $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$ con molteplicità algebrica rispettivamente 2 e 1, quindi

$$m_a(\lambda_1) + m_a(\lambda_2) = 2 + 1 = 3$$

e quindi la prima condizione del secondo criterio di diagonalizzabilità è soddisfatta.

Continuazione soluzione

- Calcoliamo ora le molteplicità geometriche:

$$m_g(\lambda_1)=3-rk\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=3-1=2$$

$$m_g(\lambda_2)=3-rk\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}=3-2=1$$

- Abbiamo che $m_a(\lambda_1)=2=m_g(\lambda_1),\ \ m_a(\lambda_2)=1=m_g(\lambda_2)$ e quindi anche la seconda condizione del secondo criterio di diagonalizzabilità è soddisfatta.

Continuazione soluzione

- La matrice è quindi diagonalizzabile.
- Calcoliamo ora una matrice modale. Per far questo dobbiamo calcolare una base di ogni autospazio.
- Cominciamo con l'autospazio relativo a λ_1: questo è l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Continuazione soluzione

- Risolviamo il sistema per eliminiazione:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La variabile vincolata è y; le variabili libere sono x,z; il sistema ridotto è $\{y=0$ che, risolto all'indietro dà le soluzioni

$\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Una base dell'autospazio è $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Continuazione soluzione

- Calcoliamo ora luna base per l'autospazio relativo a λ_2 : questo è l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

- Risolviamo il sistema per eliminiazione:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Fine soluzione

Le variabili vincolate sono x,z; la variabile libera è y; il sistema ridotto è

$$\begin{cases} -x+y=0 \\ \quad -z=0 \end{cases}$$

che, risolto all'indietro dà le soluzioni $\begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Una base dell'autospazio è $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

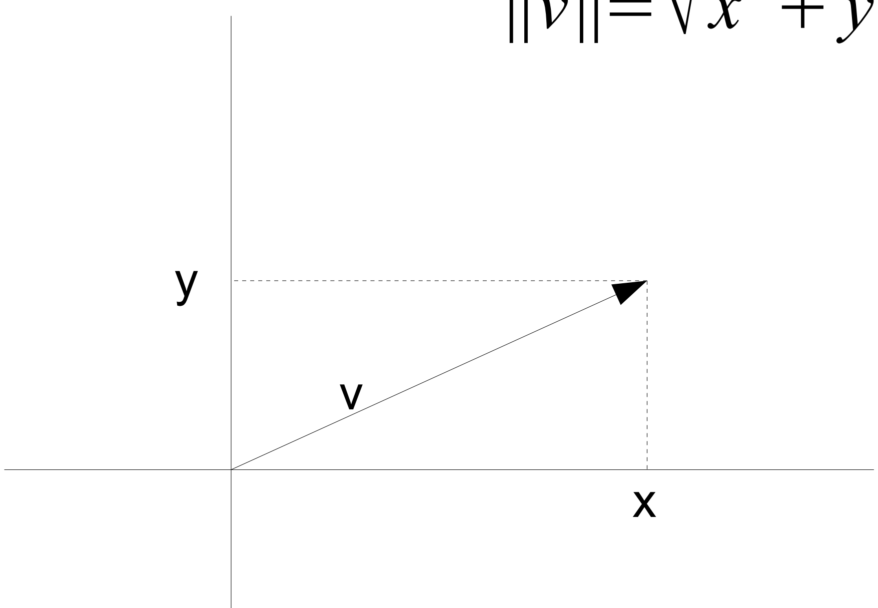
- Una matrice modale si ottiene mettendo in matrice le basi degli autospazi: in questo caso è

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Norma di un vettore

- La norma di un vettore non è altro che la sua lunghezza. Se v è un vettore libero allora la sua norma si indica con $\|v\|$
- Se $v = x\vec{i} + y\vec{j}$ allora, per il teorema di Pitagora,

$$\|v\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Distanza tra due punti

- Chiaramente la distanza tra due punti P e Q è la norma di $\vec{PQ}$. Quindi se $P=(x_0, y_0)$ e $Q=(x_1, y_1)$ allora la distanza tra P e Q è

$$d(P, Q)=\|\vec{PQ}\|=\|(x_1-x_0)\vec{i}+(y_1-y_0)\vec{j}\|$$

$$=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}$$

Distanza tra due punti nello spazio

- Chiaramente se i due punti P e Q sono nello spazio $P=(x_0, y_0, z_0)$, $Q=(x_1, y_1, z_1)$ allora

$$d(P, Q)=\|\vec{PQ}\|=\|(x_1-x_0)\vec{i}+(y_1-y_0)\vec{j}+(z_1-z_0)\vec{k}\|$$

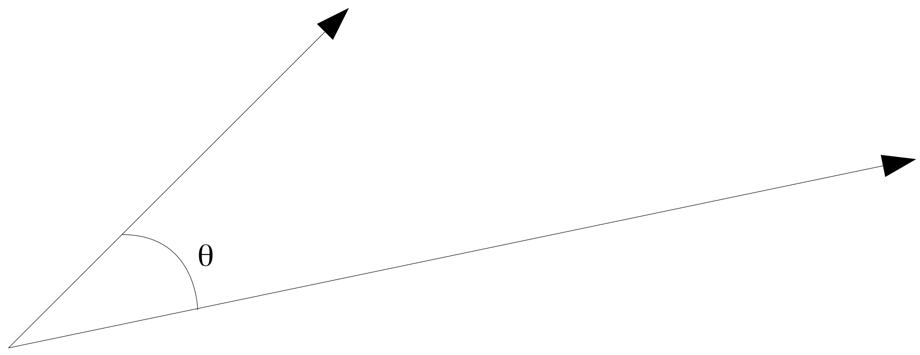
$$=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}$$

Prodotto scalare

- Dati due vettori v e w nel piano o nello spazio il loro prodotto scalare è

$$v \cdot w = \|v\| \|w\| \cos\theta$$

dove θ è l'angolo tra i due vettori



Osservazioni

- Due vettori v e w sono ortogonali se e solo se il loro prodotto scalare è nullo:

$$v \perp w \Leftrightarrow v \cdot w = 0$$

- Norma e prodotto scalare:

$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$$

- Distanza e prodotto scalare:

$$d(P, Q) = \|\vec{PQ}\| = \sqrt{\vec{PQ} \cdot \vec{PQ}}$$