Lezione 2

Determinante e inversa

Proprietà del prodotto riga per colonna

- $A(BC)=(AB)C$ Proprietà associativa
- $A(B+C)=AB+AC$ Proprietà distributiva
- $(A+B)C=AC+BC$ Proprietà distributiva
- $t(AB)= (tA)B = A(tB)$
- Se A è una matrice nxm allora

  $I_nA=A$ e $AI_m = A$
- Non vale la proprietà commutativa

Esercizio

- Calcolare AB e BA con

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Trasposta di una matrice

- La trasposta di una matrice A è la matrice che si ottiene scambiando le righe con le colonne.
- La trasposta di A si indica in vari modi:

$$A^T, {}^tA, A'$$

- Una matrice si dice simmetrica se $A = A^T$.
- Una matrice si dice antisimmetrica o emisimmetrica se $A = -A^T$

Proprietà della trasposta

- $\left(A+B\right)^T = A^T + B^T$
- $\left(sA\right)^T = s\,A^T$
- $\left(A^T\right)^T = A$
- $\left(AB\right)^T = B^T\,A^T$

Potenze di matrici quadrate

- Una matrice nxn è anche detta matrice quadrata di ordine n.
- Se una matrice A è quadrata allora ha senso definire $A^2 = AA$ o, più generalmente,

$$A^n = \underbrace{AA \cdots A}_{\text{n volte}}$$

- Si pone $A^0 = I$
- Valgono le proprietà delle potenze:

$$A^n A^m = A^{n+m}$$

$$(A^n)^m = A^{nm}$$

Matrici invertibili

- Una matrice A quadrata si dice invertibile se esiste una matrice quadrata B tale che

  AB = BA = I

- Se una matrice A è invertibile allora la matrice B è unica e la si indica con A^{-1}
- Se A è invertibile allora si pone

$$A^{-n} = \underbrace{A^{-1}\,A^{-1}\cdots A^{-1}}_{\text{n volte}}$$

- Valgono le proprietà delle potenze anche con potenze intere.

Esercizio

- Data $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ calcolare $A^2, A^3, A^{123}, A^{-1}, A^{-72}$

Esercizio

- Data $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ calcolare A^2, A^3, A^{123}. Esiste A^{-1}?

Problemi

- Come si fa a verificare se una matrice è invertibile?
- Come si fa a calcolare l'inversa di una matrice invertibile?
- Per risolvere entrambi questi problemi è necessario introdurre il determinante di una matrice quadrata.

Determinante di matrici 1x1 e 2x2

- Se $\left(a\right)$ è una matrice quadrata di ordine 1 il suo determinante è

$$\det\left(a\right)=a$$

- Se $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è una matrice quadrata di ordine 2 il suo determinante è

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=ad-bc$$

Determinante di matrici 3x3

- Se $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ è una matrica quadrata di

ordine 3 allora il suo determinante è

$$det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

Regola di Sarrus

- La regola di Sarrus (1798-1861) è un metodo di calcolo del determinante di una matrice di ordine 3:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Somma dei prodotti sulle diagonali discendenti meno somma dei prodotti sulle diagonali ascendenti

Esercizio

- Calcolare $det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Determinante

Per matrici di ordine superiore al 3 la formula del determinante diventa sempre più complicata:

- la formula del determinante di una matrice di ordine 4 è una somma di 24 termini
- la formula del determinante di una matrice di ordine 5 è una somma di 120 termini
- la formula del determinante di una matrice di ordine n è una somma di n! termini

Sviluppo di Laplace

- Lo sviluppo di Laplace è una formula ricorsiva che permette di calcolare il determinante di una matrice di ordine n se si sa calcolare il determinante di una matrice di ordine n-1.

Sottomatrici e minori

- Si chiama sottomatrice di A una matrice ottenuta togliendo alcune righe e/o colonne ad A
- Se la sottomatrice è quadrata di ordine m allora la si chiama minore di ordine m
- Il minore complementare M_{ij} dell'elemento a_{ij} è il minore che si ottiene togliendo ad A la i-esima riga e la j-esima colonna
- Il complemento algebrico di a_{ij} è

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$$

Sviluppo di Laplace lungo la i-esima riga

- Se A è una matrice quadrata di ordine n, allora, fissato un indice i si ha

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$