Lezione 18

Basi ortonormali

Proprietà del prodotto scalare

1. $v \cdot w = w \cdot v$ Simmetria
2. $(av + bw) \cdot u = av \cdot u + bw \cdot u$ e $u \cdot (av + bw) = au \cdot v + bu \cdot w$

Bilinearità

3. $v \cdot v \geq 0$ e $v \cdot v = 0$ se e solo se $v = 0$

Positività

Espressione analitica del prodotto scalare

- Se $v=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}$ e $w=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}$ allora

$$v\cdot w=x_1 x_2+y_1 y_2$$

- Se $v=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$ e $w=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$ allora

$$v\cdot w=x_1 x_2+y_1 y_2+z_1 z_2$$

- Dimostrazione: basta sostituire in $v\cdot w$ $v=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}$ e $w=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}$ e applicare le proprietà del prodotto scalare.

Prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^n$

- Se $v=(x_1,\ldots,x_n)$, $w=(y_1,\ldots\ldots,y_n)$ sono due n-vettori allora definiamo il prodotto scalare

$$v \cdot w = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

- Ovviamente possiamo anche definire il prodotto scalare di vettori colonna:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

- La norma di un n-vettore $v=(x_1,\ldots,x_n)$ è

$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

Proprietà del prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$

1. $v \cdot w = w \cdot v$ Simmetria

2. $(av + bw) \cdot u = av \cdot u + bw \cdot u$ e $u \cdot (av + bw) = au \cdot v + bu \cdot w$

Bilinearità

3. $v \cdot v \geq 0$ e $v \cdot v = 0$ se e solo se $v = 0$

Positività

Prodotto scalare su uno spazio vettoriale qualsiasi

Sia V uno spazio vettoriale. Un prodotto scalare su V è una funzione che associa a ogni coppia di vettori v,w in V un numero reale $v \cdot w$ e tale che valgono le seguenti proprietà:

1. $v \cdot w = w \cdot v$ Simmetria

2. $(av + bw) \cdot u = av \cdot u + bw \cdot u$ e $u \cdot (av + bw) = au \cdot v + bu \cdot w$

Bilinearità

3. $v \cdot v \geq 0$ e $v \cdot v = 0$ se e solo se $v = 0$

Positività

Spazi euclidei

- Definizione: uno spazio vettoriale su cui è stato definito un prodotto scalare viene detto spazio euclideo.

Norma di un vettore

- In uno spazio euclideo si può definire la norma di un vettore v come

$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$$

Disuguaglianza di Schwarz

- Se v e w sono vettori in V allora vale la seguente disuguaglianza

$$|v \cdot w| \leq \|v\| \|w\|$$

- Dimostrazione: Consideriamo la funzione

$$f(t) = \|v + tw\|^2$$

Abbiamo che

$$0 \leq f(t) = (v + tw) \cdot (v + tw) = v \cdot v + 2\, v \cdot w\, t + w \cdot w\, t^2$$

Ne segue che l'equazione $v \cdot v + 2\, v \cdot w\, t + w \cdot w\, t^2 = 0$ ha al massimo una sola soluzione.

Conclusione della dimostrazione

- Il discriminante dell'equazione $v \cdot v + 2 v \cdot w t + w \cdot w t^2 = 0$

deve essere minore o uguale a zero:

$$(v \cdot w)^2 - (v \cdot v)(w \cdot w) \leq 0$$

Da cui si ottiene

$$(v \cdot w)^2 \leq (v \cdot v)(w \cdot w)$$

La radice quadrata della disequazione dà

$$|v \cdot w| \leq \|v\| \|w\|$$

Angolo minimo tra due vettori

- Usando la disuguaglianza di Schwarz possiamo definire l'angolo minimo tra due vettori in uno spazio euclideo:
- Se v e w sono vettori non nulli in V allora

$$v \cdot w \leq \|v\| \|w\|$$

e quindi $\frac{v \cdot w}{\|v\| \|w\|} \leq 1$. L'angolo

$$\theta = \arccos\left(\frac{v \cdot w}{\|v\| \|w\|}\right)$$

è detto angolo minimo tra v e w.

Insiemi ortogonali e ortonormali

Un insieme $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ di vettori in una spazio euclideo V si dice ortogonale se $v_i \neq \vec{0}$ per ogni i e $v_i \cdot v_j = 0$ per $i \neq j$.

Un insieme ortogonale $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ si dice ortonormale se $\|v_i\| = 1$ per ogni i.

Dato un insieme ortogonale $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ si può costruire un insieme ortonormale $\{w_1, w_2, \ldots, w_r\}$ ponendo $w_i = \dfrac{v_i}{\|v_i\|}$

Gli insiemi ortogonali sono sempre linearmente indipendenti

Se $x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_r v_r = 0$ allora

$$(x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_r v_r) \cdot v_i = 0 \cdot v_i = 0$$

quindi

$$x_1 (v_1 \cdot v_i) + x_2 (v_2 \cdot v_i) + \cdots + x_r (v_r \cdot v_i) = 0$$

L'unico termine che soppravvive è $x_i (v_i \cdot v_i) = 0$ e quindi, siccome $v_i \cdot v_i \neq 0$, abbiamo che x_i=0.

Basi ortogonali e ortonormali

Se dim V=n, essendo gli insiemi ortogonali sempre indipendenti un insieme ortogonale $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ in V è una base di V.

- Un insieme ortogonale $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ in V viene chiamato base ortogonale di V.
- Un insieme ortonormale $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ in V viene chiamato base ortonormale di V.

Esempi di basi ortonormali

$\{\vec{i}\,,\vec{j}\}$ è una base ortonormale dello spazio dei vettori liberi nel piano.

$\left\{(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}),(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})\right\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$

$\left\{(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(0,\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})\right\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$

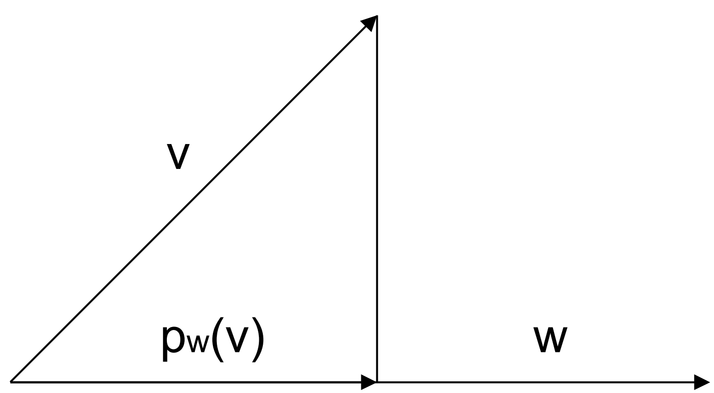
La base canonica è una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$

Come calcolare una base ortonormale di uno spazio euclideo

- C'è un metodo che a partire da una base qualsiasi di uno spazio calcola una base ortonormale.
- Questo metodo è un algoritmo ricorsivo detto processo ortonormalizzazione di Gram-Schmid.

Proiezione ortogonale

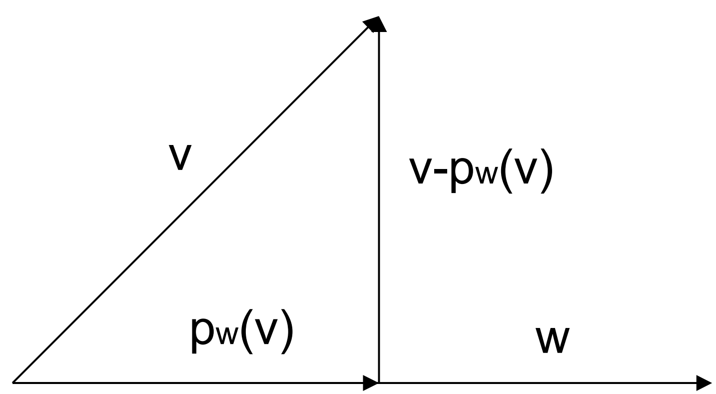
Dati due vettori liberi v e w nel piano o nello spazio la proiezione ortogonale di v lungo w è il vettore $p_w(v)$ rappresentato in figura



Proprietà della proiezione ortogonale

La proiezione ortogonale $p_w(v)$ è caratterizzata dalle seguenti proprietà

1. $p_w(v)$ ha la stessa direzione di w
2. $v-p_w(v)$ è ortogonale a w



Calcolo della proiezione ortogonale

Usiamo le due proprietà per calcolare una formula per la proiezione ortogonale:

Per 1) $p_w(v)=tw$

Per 2) $0=(v-p_w(v))\cdot w$

Quindi

$$v\cdot w-p_w(v)\cdot w=v\cdot w-tw\cdot w=0$$

Risolvendo per t , si trova che $t=\frac{v\cdot w}{w\cdot w}$ e dunque

$$p_w(v)=\frac{v\cdot w}{w\cdot w}w$$

Osservazione

- La stessa dimostrazione vale in un qualsiasi spazio euclideo, quindi, se v e w sono due vettori in uno spazio euclideo e w è nonzero allora

$$p_w(v) = \frac{v \cdot w}{w \cdot w} w$$

è il vettore tale che

  - 1. $p_w(v)$ ha la stessa direzione di w
  - 2. $v - p_w(v)$ è ortogonale a w

Processo di ortonormalizzazione di Gram-Schmid

- I passo: si sceglie una base B={v_1,v_2,…,v_n} dello spazio V
- II passo: si pone $u_1 = v_1$

$$u_2 = v_2 - \frac{u_1 \cdot v_2}{u_1 \cdot u_1} u_1$$

$$u_3 = v_3 - \frac{u_1 \cdot v_3}{u_1 \cdot u_1} u_1 - \frac{u_2 \cdot v_3}{u_2 \cdot u_2} u_2$$

$$\vdots$$

$$u_n = v_n - \frac{u_1 \cdot v_n}{u_1 \cdot u_1} u_1 - \frac{u_2 \cdot v_n}{u_2 \cdot u_2} u_2 - \cdots - \frac{u_{n-1} \cdot v_n}{u_{n-1} \cdot u_{n-1}} u_{n-1}$$

- III passo: l'insieme $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ è un insieme ortogonale. Lo si normalizza ponendo $w_i = \frac{u_i}{\|u_i\|}$ e si ottiene una base ortonormale

$\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$

Esercizio

- Ortonormalizzare la base {(1,0,0),(1,1,0), (1,1,1)} di $\mathbb{R}^3$.
- Soluzione: applichiamo il processo di Gram-Schmidt.

1. $u_1=(1,0,0)$
2. $u_2=(1,1,0)-\frac{(1,1,0)\cdot u_1}{\|u_1\|^2}u_1=(1,1,0)-\frac{1}{1}(1,0,0)=(0,1,0)$
3. $u_3=(1,1,1)-\frac{(1,1,1)\cdot u_1}{\|u_1\|^2}u_1-\frac{(1,1,1)\cdot u_2}{\|u_2\|^2}u_2$

$$=(1,1,1)-\frac{1}{1}(1,0,0)-\frac{1}{1}(0,1,0)=(0,0,1)$$

Continuazione soluzione

- L'insieme ortogonale ottenuto applicando il processo di Gram-Schmidt è {(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)}. Questo insieme è già ortonormale per cui non occorre normalizzare. La base ortonormale ottenuta è la base canonica.

Esercizio

- Ortonormalizzare la base {(1,1,1),(1,1,0), (1,0,0)} di $\mathbb{R}^3$.
- Soluzione: applichiamo il processo di Gram-Schmidt.

1. $u_1=(1,1,1)$
2. $u_2=(1,1,0)-\frac{(1,1,0)\cdot u_1}{\|u_1\|^2}u_1=(1,1,0)-\frac{2}{3}(1,1,1)=(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3})$
3. $u_3=(1,0,0)-\frac{(1,0,0)\cdot u_1}{\|u_1\|^2}u_1-\frac{(1,0,0)\cdot u_2}{\|u_2\|^2}u_2$

$$=(1,0,0)-\frac{1}{3}(1,1,1)-\frac{1}{2}(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3})=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0)$$

Continuazione soluzione

- L'insieme {(1,1,1),(1/3,1/3,-2/3),(1/2,-1/2,0)} è ortogonale, ma non è ortonormale. Occorre quindi normalizzare e si ottiene

$$w_1=\frac{1}{\|u_1\|}u_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$w_2=\frac{1}{\|u_2\|}u_2=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$$

$$w_3=\frac{1}{\|u_3\|}u_3=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$$

Fine soluzione

- La base ortonormale ottenuta è

$$\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \right\}$$

- Si noti come il risultato del processo di Gram-Schmidt dipende dall'ordine in cui scrive la base di partenza.

Esercizio

- Calcolare una base ortonormale del sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ dato dall'insieme delle soluzioni dell'equazione 2x+y-z=0.
- Soluzione: calcoliamo una base del sottospazio e poi applichiamo il processo di Gram-Schmidt a questa base.
- Per calcolare una base del sottospazio basta risolvere all'indietro il sistema $\left\{ 2x+y-z=0 \right.$. Le variabili libere sono y,z. Dall'equazione ricaviamo $\left\{ x=-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=0 \right.$

Continuazione soluzione

- Le soluzioni dell'equazione sono

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

. Una base di W è $\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Applichiamo il processo di Gram-Schmidt a questa base per ortonormalizzarla.

Continuazione soluzione

1. $u_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. $u_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{\|u_1\|^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot u_1 \right) u_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$

- L'insieme $\{u_1, u_2\}$ è ortogonale, ma non ortonormale. Occorre normalizzare.

Fine soluzione

$$w_1=\frac{1}{\|u_1\|}u_1=\frac{2}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ 1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}}\\ 0\end{pmatrix}\quad , w_2=\frac{1}{\|u_2\|}u_2=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\frac{2}{5}\\ \frac{1}{5}\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{15}}\\ \frac{1}{\sqrt{30}}\\ \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

- La base ortonormale cercata è $\left\{\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}}\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{15}}\\ \frac{1}{\sqrt{30}}\\ \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\right\}$

Matrici ortogonali

- Una matrice quadrata si dice ortogonale se

$$A^T = A^{-1} \Leftrightarrow A^T A = I \Leftrightarrow A\, A^T = I$$

Matrici ortogonali e basi ortonormali

- Osservazione: se v e w sono due vettori colonna allora $v \cdot w = v^T w$
- Usando l'osservazione si vede che una matrice è ortogonale se e solo se le sue colonne formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.
- Dimostrazione: se A è una matrice ortogonale, scriviamo A per colonne:

$$A = \left(A^1, \cdots, A^n\right)$$

quindi

$$A^T = \begin{pmatrix} \left(A^1\right)^T \\ \vdots \\ \left(A^n\right)^T \end{pmatrix}$$

Continuazione dimostrazione

- Siccome $A^T A = I$ ne segue che

$$I = \begin{pmatrix} (A^1)^T \\ \vdots \\ (A^n)^T \end{pmatrix} (A^1, \cdots, A^n) = \left((A^i)^T A^j \right) = \left(A^i \cdot A^j \right)$$

Quindi $A^i \cdot A^j = 0$ se $i \neq j$ e $A^i \cdot A^i = 1$. Questo signifca esattamente che $\{A^1, \cdots, A^n\}$ è una base ortonormale.

Spazio ortogonale

- Sia U un sottospazio di uno spazio euclideo V. L'insieme

$$U^{\perp}=\{v\in V \mid u\cdot v=0 \text{ per ogni } u\in U\}$$

è uno spazio vettoriale.

Questo spazio è chiamato spazio ortogonale di U.

Dimostrazione: $\vec{0}\in U^{\perp}$ quindi $U^{\perp}$ non è vuoto

Se v,w sono in $U^{\perp}$ allora

- $u\cdot(v+w)=u\cdot v+u\cdot w=0+0=0$
- $u\cdot(tv)=t(u\cdot v)=t0=0$