Lezione 15

Diagonalizzazione

Esempio

- Sia $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^2$ la trasformazione lineare definita ponendo

$$T(f(x)) = (f(1), f(-1))$$

- Fissiamo le basi $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ di $\mathbb{R}_3[x]$ e C (base canonica) di $\mathbb{R}^2$. Per calcolare la matrice rappresentativa di T calcoliamo

$$T(1) = (1,1),\ \ T(x) = (1,-1),\ \ T(x^2) = (1,1),\ \ T(x^3) = (1,-1)$$

Continuazione esempio

- Siccome il vettore delle coordinate di (a,b) nella base canonica è $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ otteniamo che la matrice rappresentativa è $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Notiamo che $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ è il vettore delle coordinate di $v = a + bx + cx^2 + dx^3$

quindi $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c+d \\ a-b+c-d \end{pmatrix}$

dà il vettore delle coordinate di $T(v)$

Fine esempio

- Infatti $T(a+bx+cx^2+dx^3)=(a+b+c+d\,,a-b+c-d)$

che ha come vettore delle coordinate nella base canonica

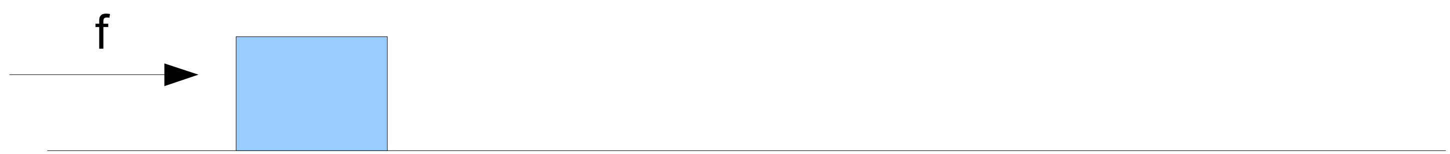
$$\begin{pmatrix} a+b+c+d \\ a-b+c-d \end{pmatrix}$$

Modelli lineari

- Molti problemi ingegnieristici possono essere descritti o approssimati con trasformazioni lineari tra spazi vettoriali
- In tal caso la trasformazione è chiamata modello lineare del problema.

Esempio: controllo di una massa unitaria

- Una massa di 1 kg giace su un piano e si muove senza attrito.



- Assumiamo che a tempo 0 la massa sia in quiete in posizione 0
- Sia t il tempo misurato in secondi. Una forza f di x_i Newtons è applicata per $i-1 \leq t \leq i$. Sia y_1 la velocità della massa al tempo n e y_2 la sua posizione al tempo n.

Modello lineare

- Per la legge del moto di Newton $y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ dipende linearmente da

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- Quindi y=T(x) con T lineare. Il problema è descritto da un modello lineare.

Matrice rappresentativa

- Per calcolare la matrice rappresentativa basta applicare una forza di 1 Newton per $i-1 \leq t \leq i$ e calcolare la velocità e posizione a t=n usando la legge del moto. Il risultato è che la i-esima colonna della matrice che è

$$a_i = \begin{pmatrix} 1 \\ n-i+\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Quindi la matrice rappresentativa del modello lineare è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ n-\frac{1}{2} & n-\frac{3}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

A che serve la matrice rappresentativa?

- Mediante la matrice rappresentativa si possono tradurre problemi sulle trasformazioni lineari tra spazi qualsiasi in problemi sulle matrici e risolverli usando i metodi sviluppati finora.

Esempio

- Sia T il modello lineare del controllo di una massa unitaria

- Calcolare la dimensione di KerT.
- Verificare se T è suriettiva.

Matrice di una trasformazione lineare da V in V

- Se $T: V \to V$ è una trasformazione lineare e B è una base di V allora la matrice $M_B^B(T)$ è detta matrice di T in B.

Esempi geometrici

- Una rotazione di un angolo θ è una trasformazione lineare sui vettori liberi nel piano.
- Una riflessione intorno a un retta è una trasformazione lineare sui vettori liberi nel piano.

Esercizio

- Calcolare la matrice rappresentativa nella base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ di una rotazione di un angolo θ.
- Calcolare la matrice rappresentativa della riflessione intorno alla retta che forma un angolo θ con l'asse x.

Matrice della composizione di due trasformazioni lineari

- Siano $T: V \to W$ e $S: W \to U$ due trasformazioni lineari. Fissiamo una base B di V una base B' di W e una base B'' di U.
- Allora $M_{B''}^{B}(S \circ T) = M_{B''}^{B'}(S) M_{B'}^{B}(T)$

Esempio

- Calcolare la matrice nella base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ di una rotazione di un angolo θ_1 seguita da una rotazione di un angolo θ_2

Osservazione

- Siano V e W spazi vettoriali di dimensione n e m rispettivamente. Fissiamo una base B di V e una base B' di W.
- Data una matrice A mxn allora esiste una trasformazione lineare $T: V \to W$ tale che

$$M_{B'}^{B}(T) = A$$

Applicazione

- Siano V e W spazi vettoriali di dimensione n e m rispettivamente. Sia $B=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ una base di V. Siano $w_1, w_2, \cdots, w_n$ vettori in W.
- Esiste unica una trasformazione lineare tale che

$$T(v_i)=w_i$$

- Dimostrazione: basta scegliere una base B' di W e prendere la trasformazione lineare T tale che $M_{B'}^{B}(T)$ è la matrice che per colonne ha

$$C_{B'}(w_1), C_{B'}(w_2), \cdots, C_{B'}(w_n)$$

FINE MATERIALE COPERTO DALLA I PROVA IN ITINERE

Matrici simili

- Definizione: due matrici quadrate A e B si dicono simili se esiste una matrice invertibile M tale che

$$M^{-1}AM = B$$

Matrici diagonalizzabili

- Una matrice A si dice diagonalizzabile se è simile a una matrice diagonale.

Esempio

$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ è diagonalizzabile: se $M=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ allora

$$M^{-1}AM=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

La matrice M viene spesso chiamata matrice modale.

Controesempio

- Esistono matrici che non sono diagonalizzabili. Ad esempio

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

non è diagonalizzabile.

Dimostrazione: osserviamo che $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Supponiamo per assurdo che A sia diagonalizzabile, quindi esiste M invertibile tale che

$$M^{-1} A M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Continuazione dimostrazione

- Quindi

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix} = (M^{-1} A M)^2 = M^{-1} A M M^{-1} A M = M^{-1} A^2 M = 0$$

da cui si ottiene che $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Ne segue che $M^{-1} A M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e quindi

$A = M \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} M^{-1} = 0$ che è assurdo