Lezione 5

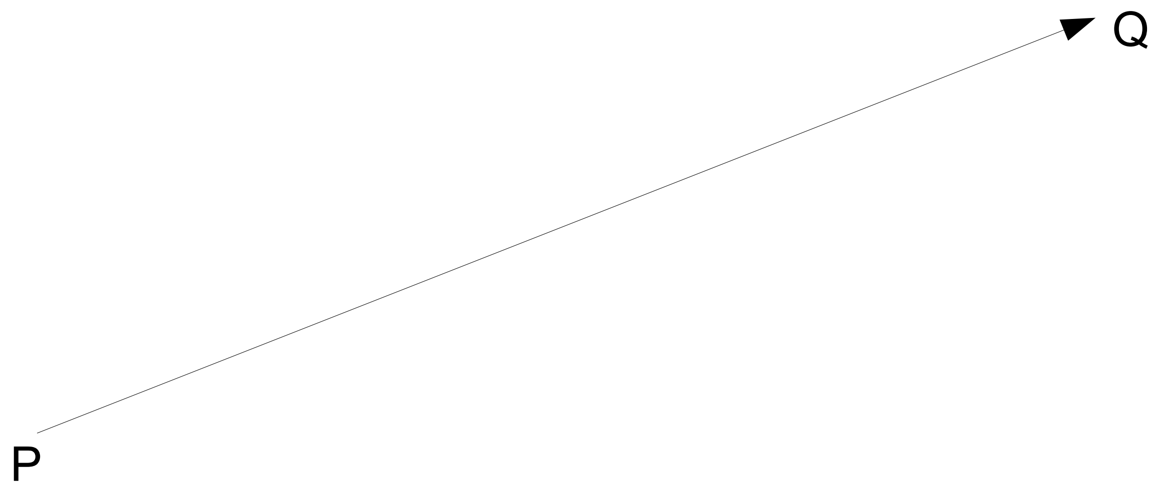
Spazi vettoriali

Vettori fisici

- I vettori fisici, quali forza e velocità, sono quantità caratterizzate da
  - Una grandezza numerica: intensità o **norma** del vettore
  - Una direzione
  - Un verso

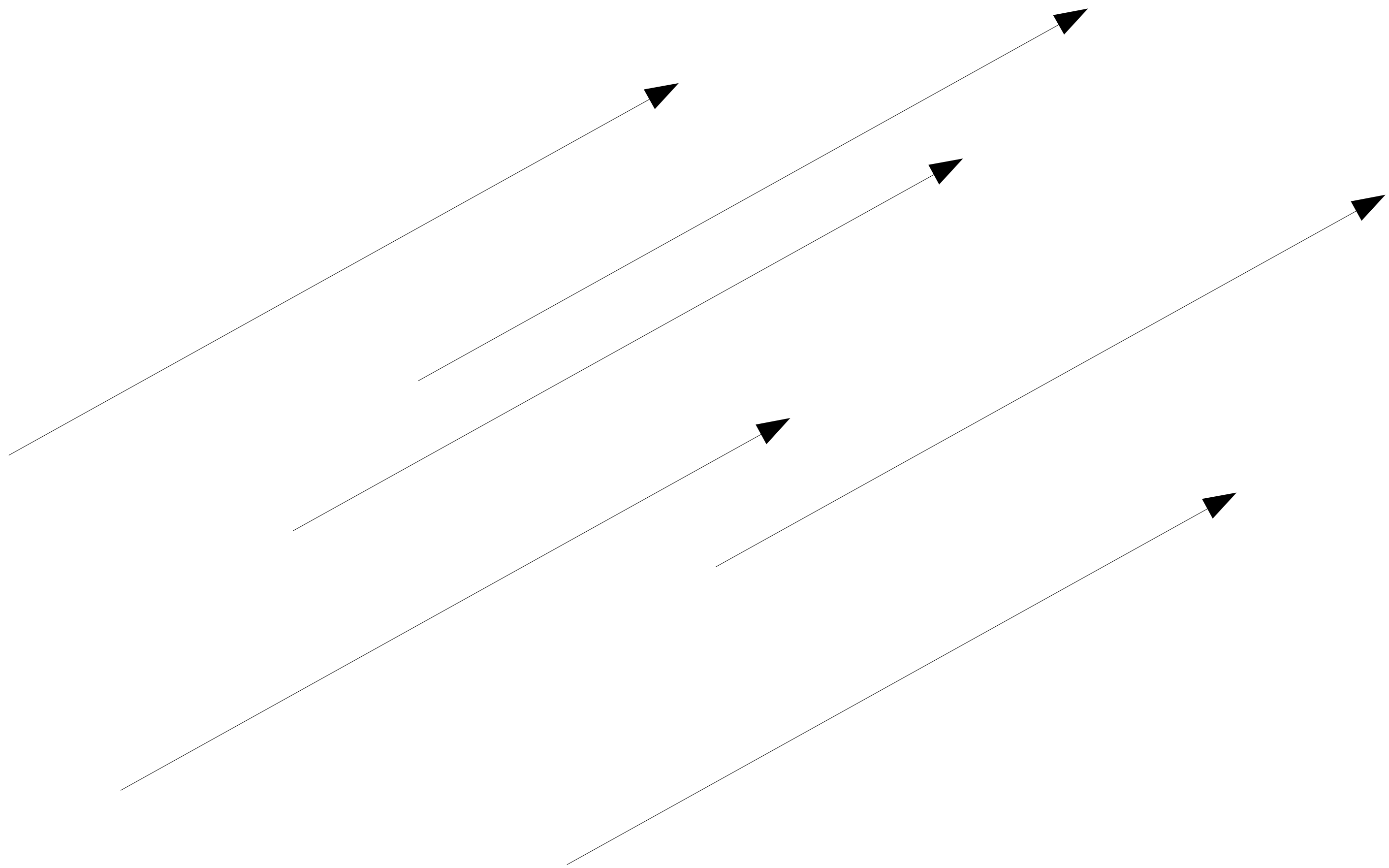
Segmento orientato

- Un modello geometrico per rappresentare i vettori fisici è dato dai segmenti orientati.



- Il segmento orientato PQ rappresenta il vettore
  - la cui norma è la lunghezza del segmento
  - la cui direzione è quella della retta individuata dalla retta passante per P e Q
  - Il verso è quello che va dal punto P al punto Q (P è il punto iniziale e Q è il punto finale)
- Il segmento orientato PP rappresenta il **vettore nullo** che è il vettore di intensità nulla e che non ha né direzione né verso.

- Un vettore è rappresentato da infiniti segmenti orientati:

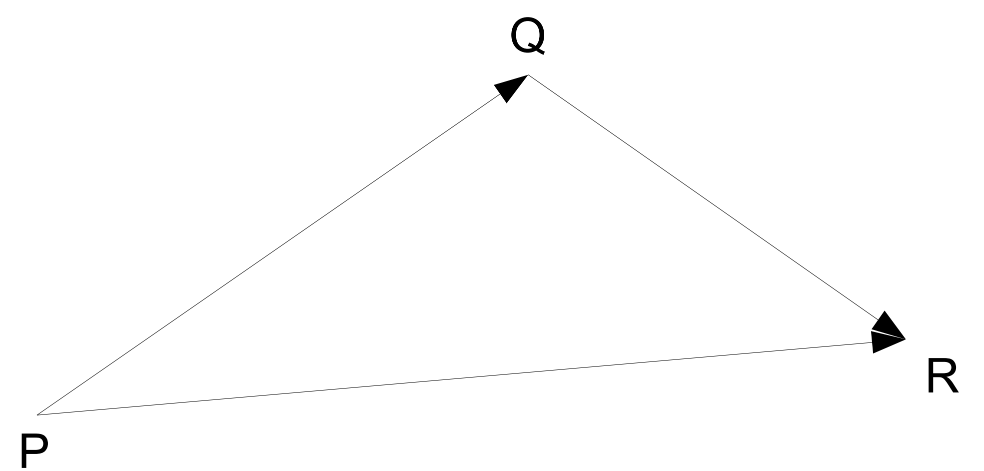


Definizione formale di vettore libero

- Due segmenti orientati si dicono **equipollenti** se hanno la stessa lunghezza, la stessa direzione e lo stesso verso.
- Un vettore libero nel piano (o nello spazio) è la **classe di equipollenza** di un segmento orientato (cioè l'insieme di tutti i segmenti orientati equipollenti ad un segmento dato).
- Il vettore libero rappresentato dal segmento PQ si indica con $\vec{PQ}$. Il vettore nullo si indica con $\vec{0}$

Legge di Galileo

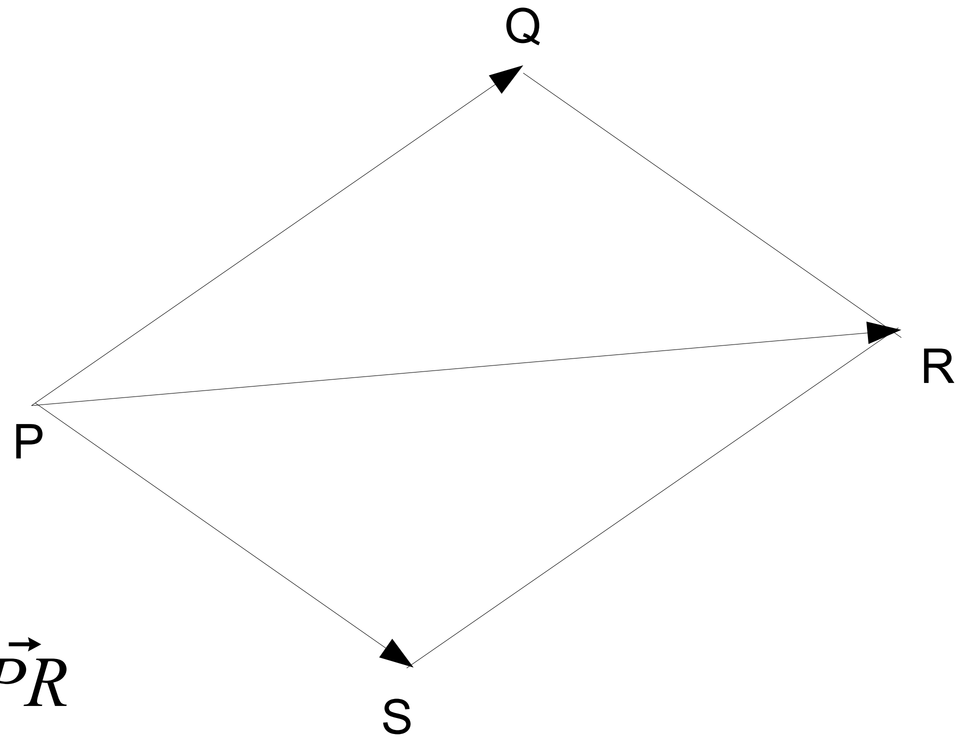
- I vettori liberi possono essere sommati utilizzando la cosiddetta legge di Galileo.



- In simboli $\vec{PQ} + \vec{QR} = \vec{PR}$

Regola del parallelogramma

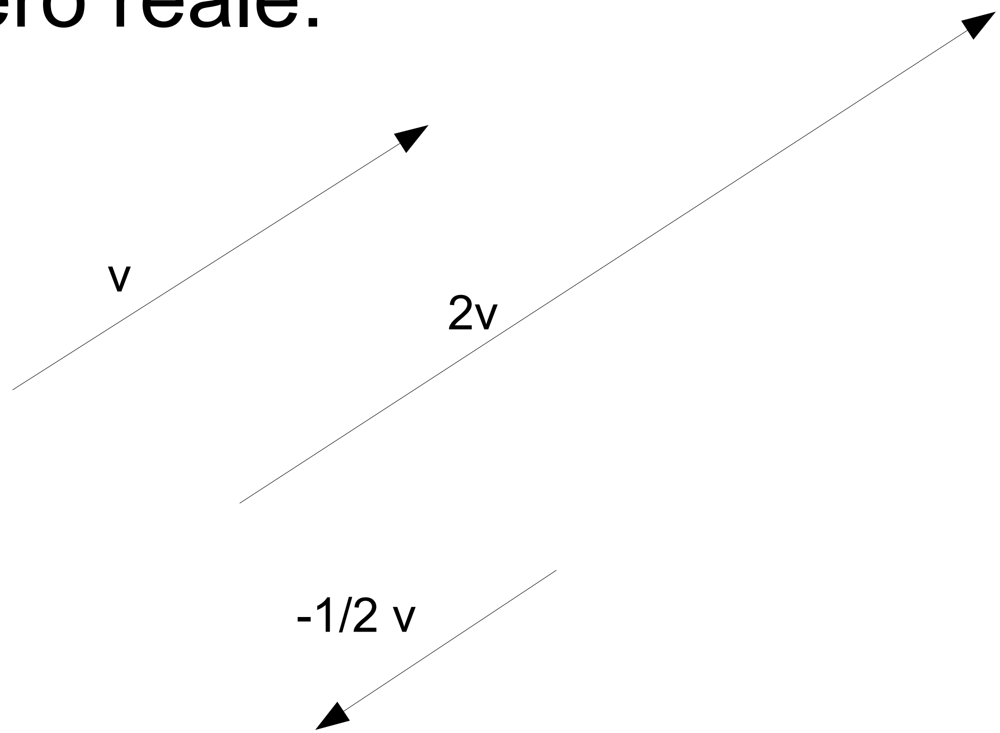
- Un modo equivalente di esprimere la legge di Galileo è la regola del parallelogramma:



- $\vec{PQ}+\vec{PS}=\vec{PR}$

Prodotto per uno scalare

- I vettori possono essere anche moltiplicati per un numero reale:



Prodotto per uno scalare

- Se indichiamo con $\|\vec{PQ}\|$ la lunghezza del vettore $\vec{PQ}$ allora il prodotto di $\vec{PQ}$ per uno scalare t è il vettore $t\,\vec{PQ}$ tale che
  - $\|t\,\vec{PQ}\| = |t|\,\|\vec{PQ}\|$
  - La direzione di $t\,\vec{PQ}$ è la stessa di quella di $\vec{PQ}$
  - Il verso di $t\,\vec{PQ}$ è lo stesso di quello di $\vec{PQ}$ se t>0, mentre è il verso opposto se t<0.
  - Se t=0 allora $t\,\vec{PQ} = \vec{0}$

Proprietà delle operazioni

- $(v+w)+u=v+(w+u)$ Proprietà associativa
- $v+w=w+v$ Proprietà commutativa
- $v+\vec{0}=v$ Esistenza elemento neutro
- $v+(-1)v=\vec{0}$ Esistenza opposto
- $t(v+w)=tv+tw$ Proprietà distributiva
- $(t+s)v=tv+sv$ Proprietà distributiva
- $(ts)v=t(sv)$ Proprietà associativa mista
- $1v=v$ Legge di unità

Esercizio

- Verificare che $\vec{QP} = -\vec{PQ}$

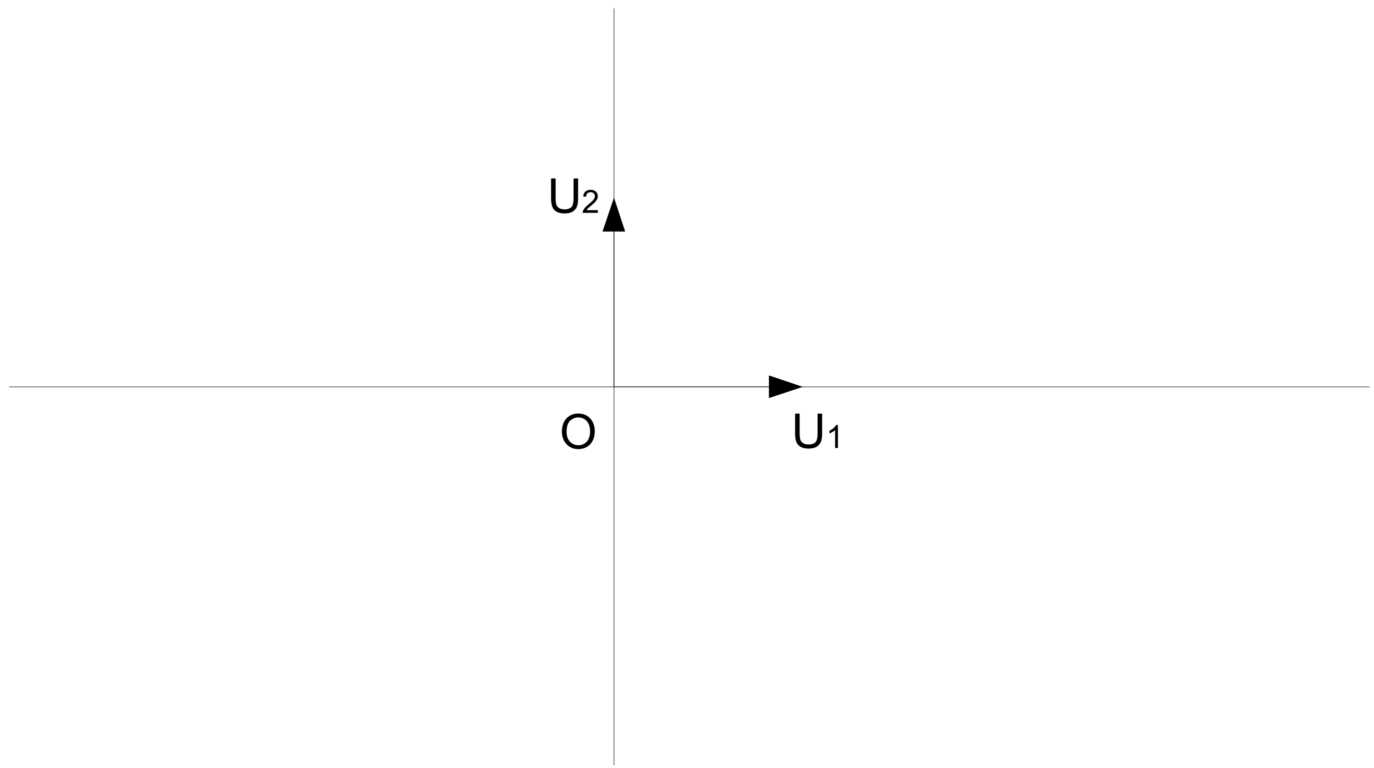
- Soluzione: per la legge di Galileo

$$\vec{PQ} + \vec{QP} = \vec{PP} = \vec{0}$$

Quindi $\vec{PQ} + \vec{QP} = \vec{0}$ e quindi $\vec{PQ} = -\vec{QP}$

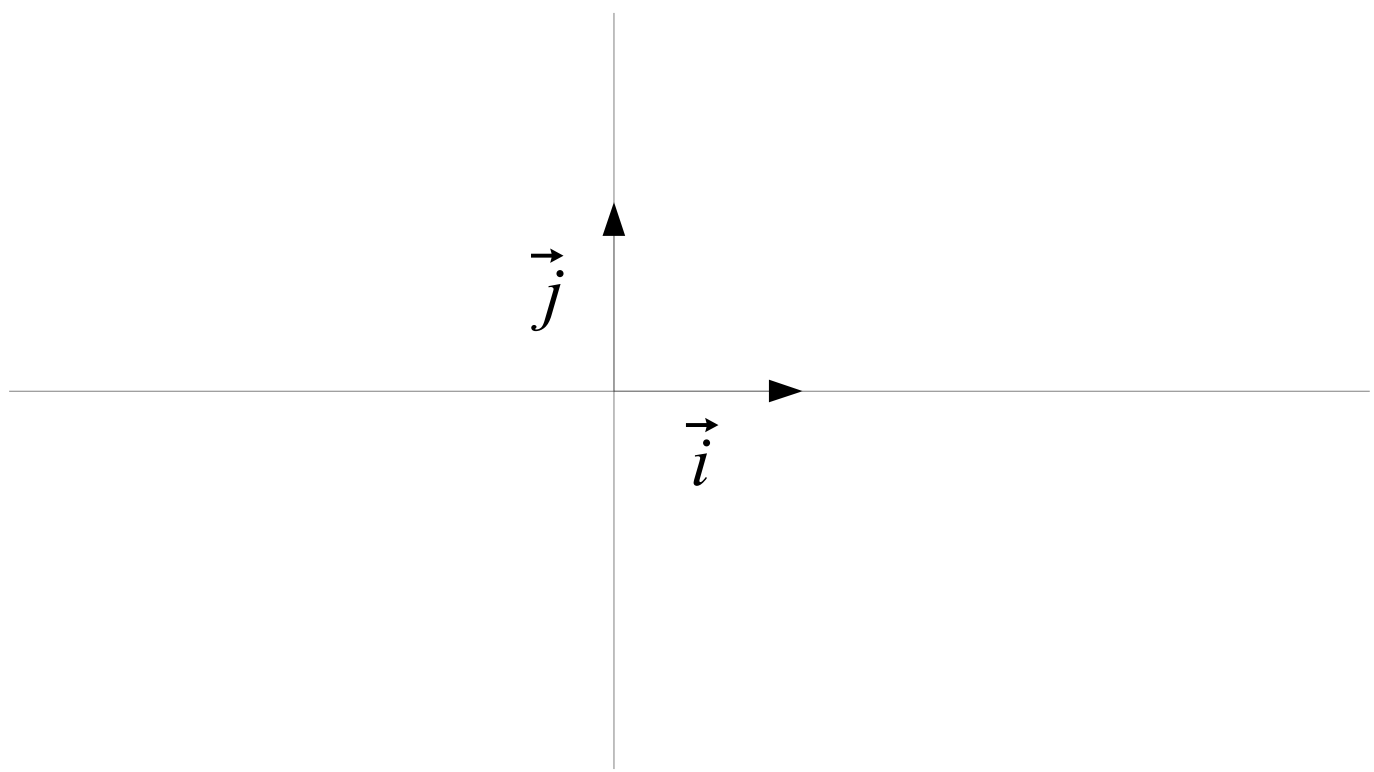
Sistemi di assi cartesiani

- Dare un sistema di assi cartesiani nel piano equivale a fissare un punto O e i vettori $\vec{OU}_1,\ \vec{OU}_2$.



Versori degli assi cartesiani

- Di solito i vettori $\vec{OU}_1, \ \vec{OU}_2$ si indicano rispettivamente con $\vec{i}\,, \vec{j}$ e sono detti versori degli assi cartesiani.



Definizione equivalente di sistema di assi cartesiani

- Dare un sistema di assi cartesiani è equivalente a fissare un punto O e due vettori liberi $\vec{i}\,,\,\vec{j}$ di lunghezza 1 e ortogonali tra loro.

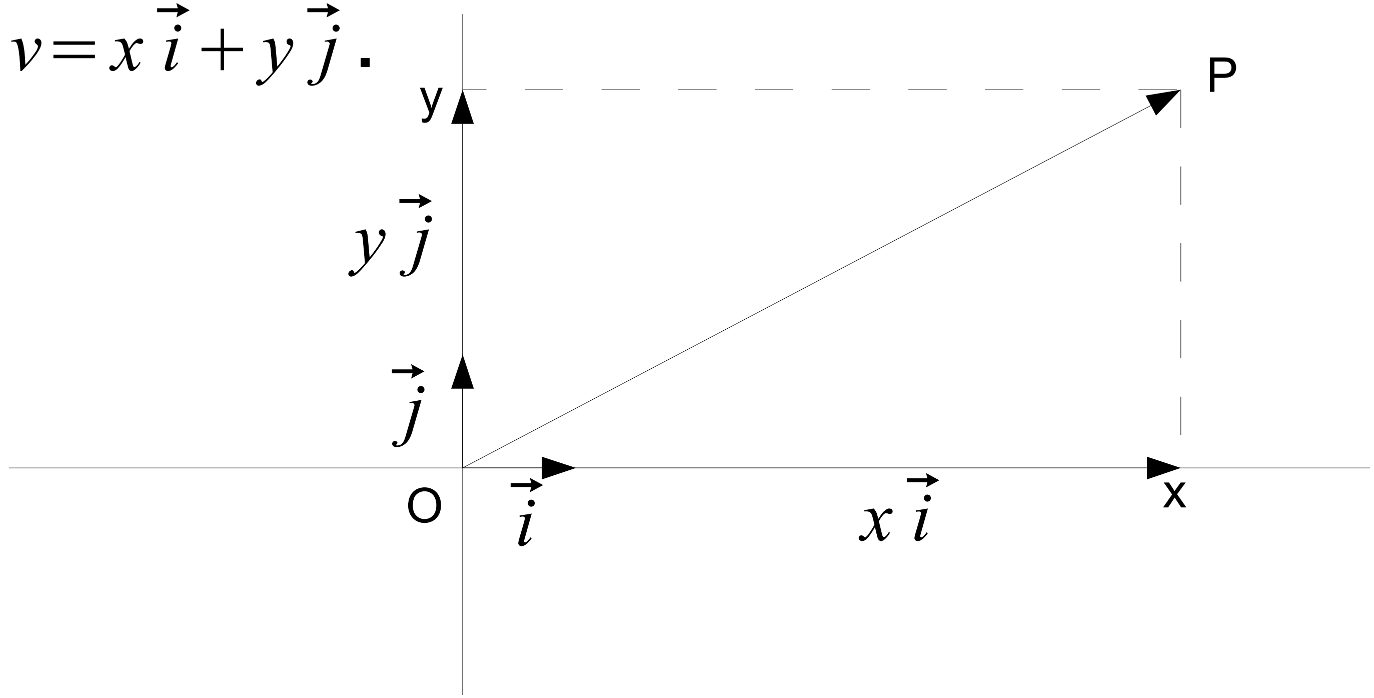
- Il sistema di assi cartesiani individuato da O e $\vec{i}\,,\,\vec{j}$ lo si indica come

$$S=\left(O\,,\{\vec{i}\,,\,\vec{j}\}\right)$$

Coordinate di un vettore

- Se v è un vettore allora possiamo scrivere $v=\vec{OP}$. La coppia (x,y) delle coordinate di P è detta 2-vettore delle coordinate di v.

Si nota che $v=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}$.



Coordinate e operazioni

- Se (x_1, y_1) è il 2-vettore delle coordinate di v_1 e (x_2, y_2) è il 2-vettore delle coordinate di v_2 allora il 2-vettore delle coordinate di $v_1 + v_2$ è $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.
- Se (x, y) è il 2-vettore delle coordinate di v allora (tx, ty) è il 2-vettore delle coordinate di tv.

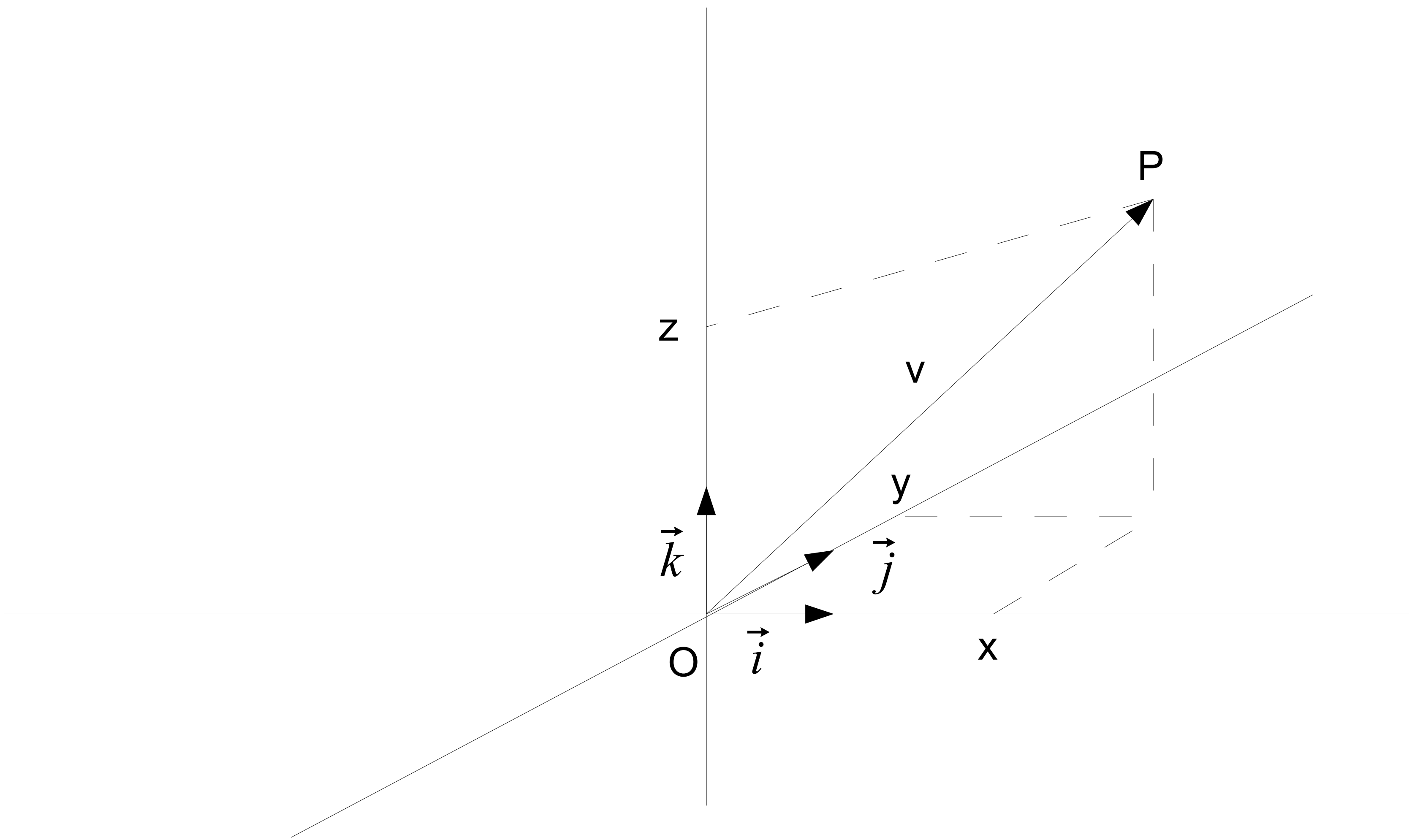
Osservazione semplice ma importante

- Siano **a** il 2-vettore delle coordinate del vettore libero v e **b** il 2-vettore delle coordinate del vettore libero w
- Il 2-vettore delle coordinate di v+w è **a**+**b**.
- Il 2-vettore delle coordinate di tv è t**a**.

Vettori nello spazio

- Quanto visto per i vettori nel piano vale anche per i vettori nello spazio, basta aggiungere una coordinata:
  - Si hanno tre versori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$
  - Il 3-vettore delle coordinate di $v = \vec{OP}$ è la tripla (x,y,z) delle coordinate di P.
  - Si ha che $v = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Vettori nello spazio



Osservazione semplice ma importante

- Siano **a** il 3-vettore delle coordinate del vettore libero v e **b** il 3-vettore delle coordinate del vettore libero w
- Il 3-vettore delle coordinate di v+w è **a**+**b**.
- Il 3-vettore delle coordinate di tv è t**a**.

Definizione di spazio vettoriale (G. Peano – 1888)

Uno spazio vettoriale è un insieme V su cui è definita

- un'operazione di somma che associa a due elementi v,w di un elemento v+w di V
- un'operazione di prodotto per uno scalare che associa ad un numero t e ad un elemento v di V un elemento tv di V

Queste due operazioni devono inoltre verificare le seguenti proprietà:

Proprietà delle operazioni

- $(v+w)+u=v+(w+u)$ Proprietà associativa
- $v+w=w+v$ Proprietà commutativa
- $v+\vec{0}=v$ Esistenza elemento neutro
- $v+(-1)v=\vec{0}$ Esistenza opposto
- $t(v+w)=tv+tw$ Proprietà distributiva
- $(t+s)v=tv+sv$ Proprietà distributiva
- $(ts)v=t(sv)$ Proprietà associativa mista
- $1v=v$ Legge di unità

Giuseppe Peano

Nato il 27 Agosto 1858 a Cuneo

Morto il 20 Aprile 1932 a Torino

Esempi

- L’insieme dei vettori liberi nel piano o nello spazio.
- L'insieme di tutti gli n-vettori (che di solito si indica con $\mathbb{R}^n$)
- L’insieme delle matrici nxm (che di solito si indica con M(nxm, $\mathbb{R}$) o $\mathbb{R}^{n\times m}$)
- L’insieme dei polinomi (che di solito si indica con $\mathbb{R}$[x])
- L’insieme dei polinomi di grado minore o uguale a n (che di solito si indica con $\mathbb{R}_n$[x])