Lezione 20

Geometria

Prodotto vettore

- Il prodotto vettore di due vettori v e w nello spazio è il vettore $v \wedge w$
  - la cui lunghezza è $\|v\|\|w\|\sin\theta$ dove θ è l'angolo minimo tra v e w
  - la cui direzione è quella ortogonale sia a v che a w.
  - il cui verso è determinato dalla regola della mano destra: ruotando le dita della mano destra nel senso in cui v sottende l' angolo minimo tra v e w il verso e' quello del pollice.

Notazioni

- In molti testi il prodotto vettore è indicato con $v \times w$.
- Attenzione: in altri libri di testo con $v \times w$ si indica il prodotto scalare!
- In queste lezioni useremo $v \wedge w$ per il prodotto vettoriale e $v \cdot w$ per il prodotto scalare.

Proprietà del prodotto vettoriale

- $v \wedge w = -w \wedge v$ antisimmetria
- $kv \wedge w = k(v \wedge w)$ e $v \wedge kw = k(v \wedge w)$ omogeneità
- $(v+w) \wedge u = v \wedge u + w \wedge u$ e $v \wedge (w+u) = v \wedge w + v \wedge u$

distributività

- Identità di Lagrange:

$$\|v \wedge w\|^2 = \|v\|^2 \|w\|^2 - v \cdot w^2$$

Basi orientate del piano e dello spazio

- La coppia $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ di due versori nel piano è detta base orientata del piano.
- La terna $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ di tre versori nello spazio è detta base orientata dello spazio.

Basi destrorse e sinistrorse

- La base orientata $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ del piano si dice destrorsa se l'angolo minimo viene percorso in senso antiorario da $\vec{i}$ verso $\vec{j}$.
- La base orientata $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ dello spazio è detta destrorsa se $\vec{k} = \vec{i} \wedge \vec{j}$.

Il prodotto vettoriale dei versori degli assi coordinati

- Se la base orientata $\{\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\}$ è destrorsa allora valgono le seguenti formule

$$\vec{i}\wedge\vec{j}=\vec{k}\qquad \vec{i}\wedge\vec{k}=-\vec{j}\qquad \vec{j}\wedge\vec{k}=\vec{i}$$

- Usando le proprietà del prodotto vettoriale si calcolano tutti gli altri possibili prodotti

$$\vec{i}\wedge\vec{i}\,,\;\; \vec{j}\wedge\vec{i}\,,\;\; \vec{k}\wedge\vec{i}\;\;\text{etc. etc.}$$

Espressione analitica del prodotto vettore

- Se la base è destrorsa e

$$v = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \qquad w = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$$

allora

$$v \wedge w = (yz' - y'z)\vec{i} - (xz' - x'z)\vec{j} + (xy' - x'y)\vec{k}$$

- Se la base è sinistrorsa allora

$$v \wedge w = -(yz' - y'z)\vec{i} + (xz' - x'z)\vec{j} - (xy' - x'y)\vec{k}$$

Prodotto vettore come determinante 3X3

- Se $v = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ e $w = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$ allora
- Se la base è destrorsa

$$v \wedge w = det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{pmatrix}$$

- Se la base è sinistrorsa

$$v \wedge w = -det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{pmatrix}$$

Punto P+v

- Dato un punto P e un vettore libero v si indica con P+v il punto Q tale che

$$\vec{PQ} = v$$

Coordinate di P+v

- Se P ha coordinate (x_0,y_0) e $v = x\vec{i} + y\vec{j}$ allora P+v ha coordinate

$$\left(x_0 + x\,,\, y_0 + y\right)$$

- Se P ha coordinate (x_0,y_0,z_0) e $v = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ allora P+v ha coordinate

$$\left(x_0 + x\,,\, y_0 + y\,,\, z_0 + z\right)$$

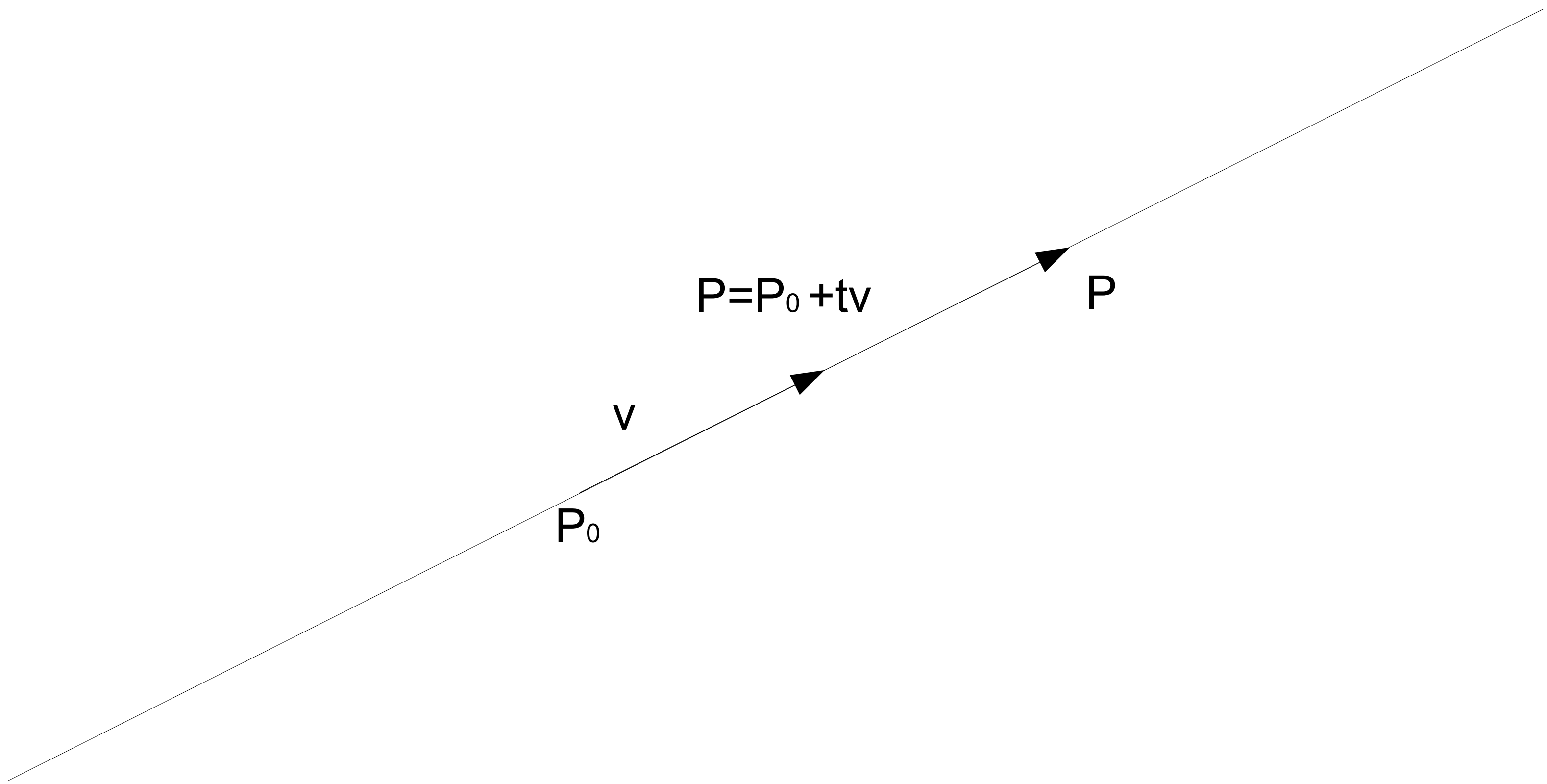
Forma vettoriale della retta

Sia P_0 un punto nel piano o nello spazio e fissiamo un vettore libero v.

La retta r che passa per P_0 e la cui direzione è determinata da v può essere descritta come l'insieme dei punti $P = P_0 + tv$.

L'equazione $P=P_0+tv$ è detta forma vettoriale della retta r.

Si noti che $r=P_0+L(v)$


P=P0 +tv
P
v
P0

Equazione parametrica della retta nel piano

Esplicitando $P_0=(x_0,y_0)$, $P=(x,y)$ e $v=l\vec{i}+m\vec{j}$ e sostituendo nella forma vettoriale si ottiene che

$$(x,y)=(x_0+tl,y_0+tm)$$

Eguagliando le componenti si trova ovvero

$$\begin{cases} x=x_0+tl \\ y=y_0+tm \end{cases}$$

Questo sistema è detto equazione parametrica della retta r nel piano.

Equazione parametrica della retta nello spazio

Esplicitando $P=(x,y,z)$, $P_0=(x_0,y_0,z_0)$, e $v=l\vec{i}+m\vec{j}+n\vec{k}$ ed eguagliando le componenti si ricava l'equazione parametrica della retta nello spazio

$$\begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \\ z = z_0 + tn \end{cases}$$

Esercizio

- Scrivere l’equazione parametrica della retta di equazione 2x-y+1=0.
- Soluzione: si considera l'equazione come un sistema di una equazione e due incognite e si calcola la soluzione generale. Da 2x-y+1=0 si ricava y=2x+1, per cui le soluzioni sono

  (x,2x+1)=(0,1)+x(1,2) al variare di x in $\mathbb{R}$. Il punto di passaggio è (0,1) mentre il vettore direzione è (1,2), quindi l'equazione parametrica è
$$\begin{cases} x=t \\ y=1+2t \end{cases}$$

Esercizio

- Scrivere l'equazione cartesiana della retta

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$$

- Soluzione: si elimina il parametro t. In questo caso

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + 2\mathrm{t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 2 - x \\ y = -1 + 2\mathrm{t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 2 - x \\ y = -1 + 2(2 - x) \end{cases}$$

da cui si ottiene

$$y = -1 + 2(2 - x) \Leftrightarrow 2x + y = 3$$

Retta passante per due punti nel piano

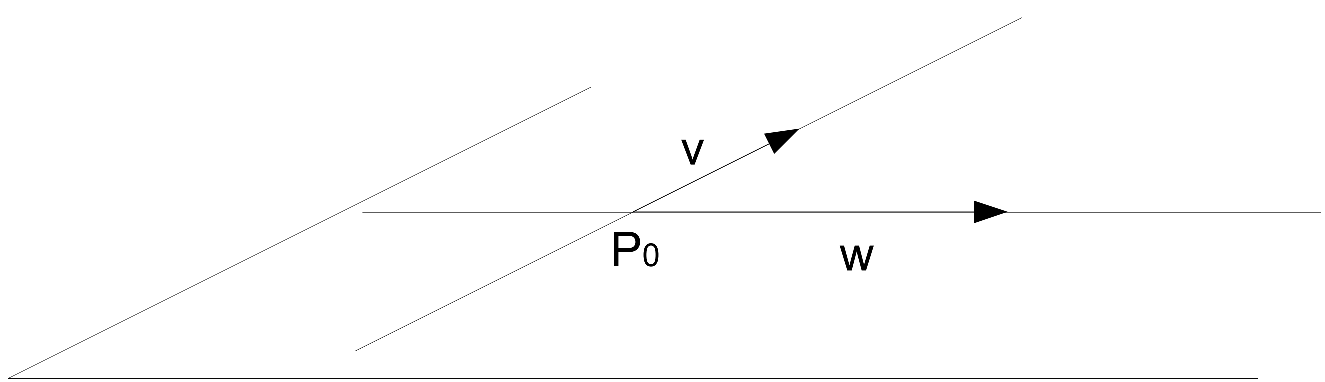
Dati i punti $P_0=(x_0,y_0)$ e $P_1=(x_1,y_1)$ calcolare la forma vettoriale e l'equazione parametrica della retta passante per i due punti.

Soluzione: un vettore direzione di questa retta è $\overrightarrow{P_0P_1}$ quindi una forma vettoriale della retta è $P = P_0 + t\,\overrightarrow{P_0P_1}$, da cui si ricava l'equazione parametrica

$$\begin{cases} x = x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + t(y_1 - y_0) \end{cases}$$

Forma vettoriale di un piano nello spazio

- Fissiamo un punto P_0 sul piano α e due vettori v e w non paralleli per cui le rette passanti per P_0 aventi direzione v e w giacciono sul piano.

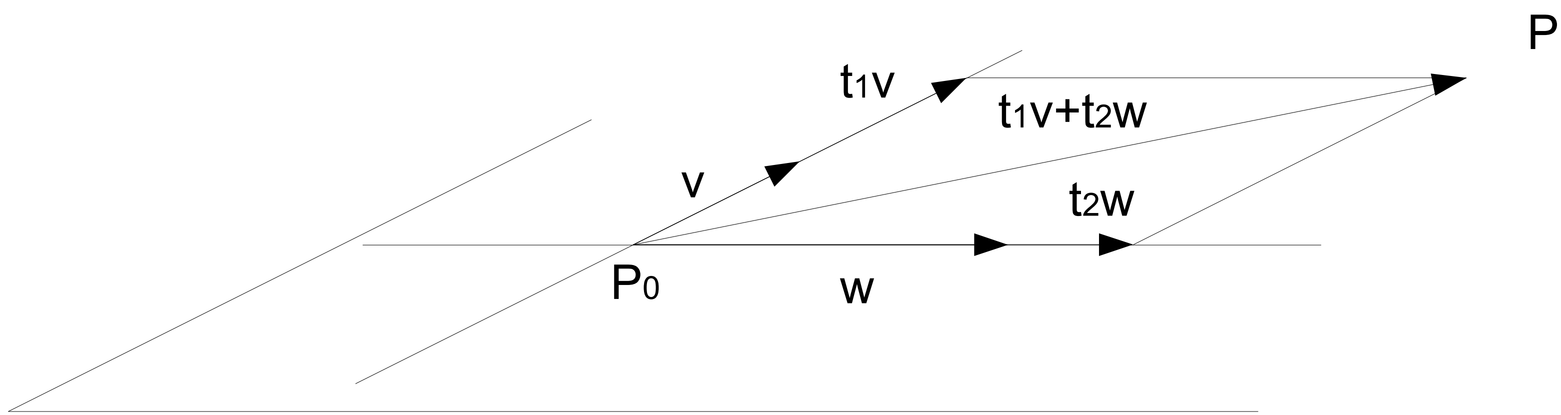


Forma vettoriale del piano nello spazio

- Un punto P sta sul piano α se e solo se

$$P = P_0 + t_1 v + t_2 w$$

- Questa è detta forma vettoriale del piano e i vettori v e w sono detti direzioni del piano.



Si noti che $\alpha = P_0 + L(v, w)$

Equazione parametrica del piano nello spazio

Se esplicitiamo $P = P(x, y, z), \; P_0 = P(x_0, y_0, z_0)$

$$v = l_1 \vec{i} + m_1 \vec{j} + n_1 \vec{k}, \quad w = l_2 \vec{i} + m_2 \vec{j} + n_2 \vec{k}$$

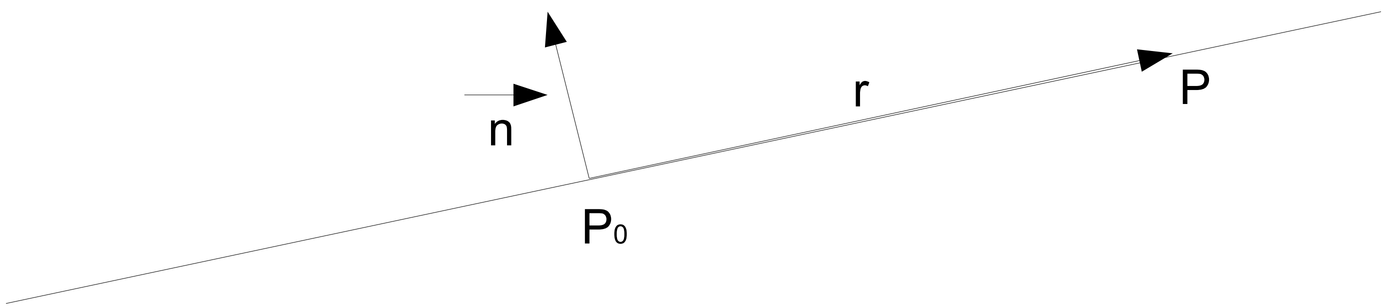
e eguagliamo le componenti troviamo

$$\begin{cases} x = x_0 + t_1 l_1 + t_2 l_2 \\ y = y_0 + t_1 m_1 + t_2 m_2 \\ z = z_0 + t_1 n_1 + t_2 n_2 \end{cases}$$

Questa è detta equazione parametrica del piano.

Forma normale della retta nel piano

Data una retta r sia $\vec{n}$ un vettore normale alla retta.



Fissato un punto di passaggio $P_0=(x_0,y_0)$ abbiamo che un punto P sta sulla retta se e solo se $\overrightarrow{P_0P}$ è ortogonale a $\vec{n}$. Otteniamo quindi l'equazione $\vec{n}\cdot\overrightarrow{P_0P}=0$ che è detta forma normale della retta.

Forma normale e equazione cartesiana

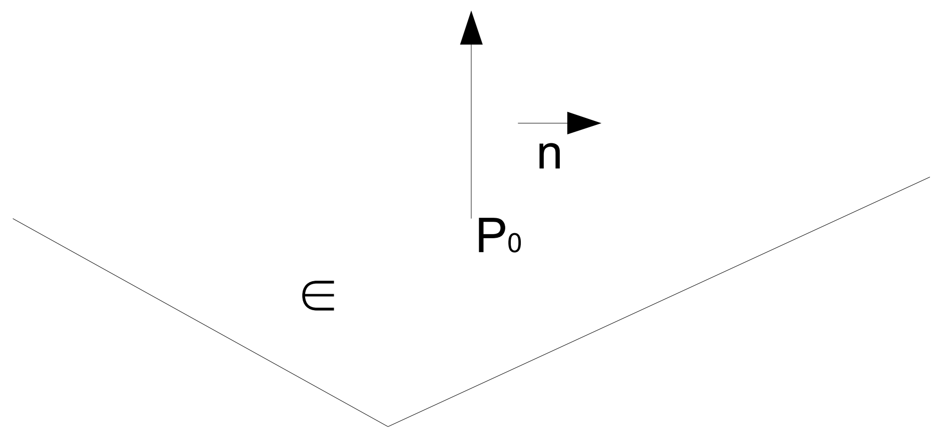
Se $P=(x,y)$, $P_0=(x_0,y_0)$ e $\vec{n}=a\vec{i}+b\vec{j}$ e esplicitiamo la forma normale della retta troviamo

$$(a\vec{i}+b\vec{j})\cdot((x-x_0)\vec{i}+(y-y_0)\vec{j})=0$$

ovvero $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$ che non è altro che l'equazione cartesiana.

Quindi i coefficienti dell'equazione cartesiana sono le componenti di un vettore normale alla retta.

Forma normale di un piano nello spazio



Fissiamo un punto P_0 sul piano ∈ e sia un $\vec{n}$ vettore normale al piano. Un punto P sta sul piano ∈ se e solo se

$$\overrightarrow{P_0 P}\cdot\vec{n}=0$$

Forma normale e equazione cartesiana di un piano

Se esplicitiamo $P=P(x,y,z)$, $P_0=P(x_0,y_0,z_0)$ e $\vec{n}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ allora la forma normale diventa

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

Se poniamo $d=ax_0+by_0+cz_0$ l'equazione diventa

$$ax+by+cz=d$$

che è detta equazione cartesiana del piano nello spazio.

Parametri direttori

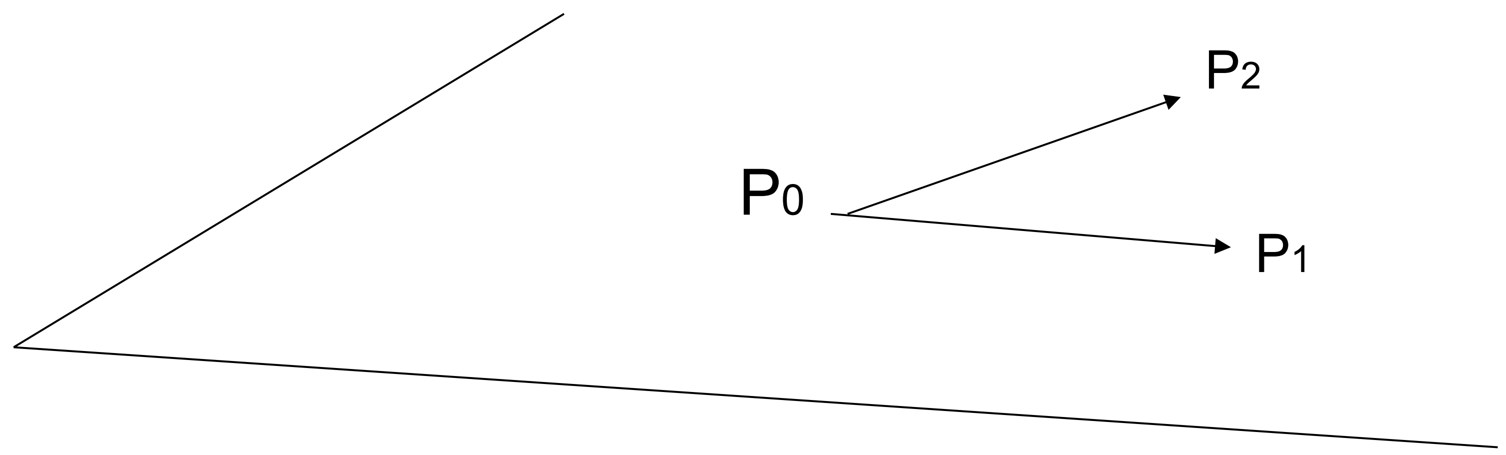
- I parametri direttori di un piano sono i coefficienti a,b,c dell'equazione cartesiana del piano.
- Ne segue che i parametri direttori di un piano sono le componenti di un vettore normale al piano.

Piano passante per tre punti non allineati

Dati tre punti $P_0=(x_0,y_0,z_0)$, $P_1=(x_1,y_1,z_1)$, $P_2=(x_2,y_2,z_2)$ non allineati vogliamo determinare l'equazione parametrica del piano passante per questi tre punti. Come punto di passaggio possiamo prendere P_0.

Come direzione del piano possiamo prendere $\overrightarrow{P_0P_1}$ e $\overrightarrow{P_0P_2}$. L'equazione parametrica è quindi

$$\begin{cases} x = x_0 + t_1(x_1 - x_0) + t_2(x_2 - x_0) \\ y = y_0 + t_1(y_1 - y_0) + t_2(y_2 - y_0) \\ z = z_0 + t_1(z_1 - z_0) + t_2(z_2 - z_0) \end{cases}$$


P2
P0
P1

Piano passante per tre punti: equazione cartesiana

Dati tre punti $P_0=(x_0,y_0,z_0)$, $P_1=(x_1,y_1,z_1)$, $P_2=(x_2,y_2,z_2)$ non allineati vogliamo determinare l'equazione cartesiana del piano passante per questi tre punti. Come vettori direzione del piano possiamo scegliere $\overrightarrow{P_0P_1}$ e $\overrightarrow{P_0P_2}$. Quindi il punto $P=P(x,y,z)$ sta sul piano se e solo se

$$\overrightarrow{P_0P} \text{ è combinazione lineare di } \overrightarrow{P_0P_1} \text{ e } \overrightarrow{P_0P_2}$$

Piano passante per tre punti: equazione cartesiana

Quindi

$$\det\begin{pmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{pmatrix}=0$$

Questa è l'equazione cartesiana del piano passante per i tre punti dati