Teoría de portafolio

Usando R

Gabriel Cabrera G.

Universidad de Chile
Facultad de Economía y Negocios

6 de Abril del 2019

Información de contacto

gcabrerag@fen.uchile.cl

gcabrerag.rbind.io

GaboC_g

GaboCg

Facultad de Economía & Negocios, Universidad de Chile

Tabla de contenido

Descargando la librería IntroCompFinR

Librería IntroCompFinR

Para la teoría de portfolio vamos a utilzar la librería IntroCompFinR (**Intro** to **Comp**utational **Fin**ance in **R**) creado por el profesor Eric Zivot (Zivot 2013).

1. Debemos instalar primero las librerías que utiliza IntroCompFinR:

```r
if(!require("pacman")) install.packages("pacman")
p_load("PerformanceAnalytics","quadprog","xts")
```

2. Ya instaladas las dependencias, descargamos IntroCompFinR :

```r
install.packages("IntroCompFinR", repos="http://R-Forge.R-project.org")
```

3. Otra opción es simplemente cargar las funciones, sin necesidad de instalar y cargar el paquete. Estas quedarán en el *Global Environment*.

```
source(IntroComFinR/IntroComFinR.R)
```

A veces debemos instalar (`install.packages()`) muchas librerías y luego cargarlas (`library()`), esto puede ser muy invasivo y genera lineas de código innecesarias, una solución es usar la librería **pacman** (**Pac**kage **Man**agement)

Función Pacman	Paquete equivalente	Descripción
p_load	install.packages + library	Carga e instala los paquetes
p_install	install.packages	Instala paquetes desde CRAN
p_load_gh	ninguno	Carga e instala del github

Existen más opciones, pero no serán necesarias para la sesión. Con la función `p_load` agregan[1] todos las librerías que deseen, si las tienen las carga (`library()`), si no, las instala (`install.packages()`) y luego las carga.

[1]Deben escribir antes `if(!require("pacman")) install.packages("pacman")`

Funciones útiles de IntroCompFinR

Funciones	Descripciones
getPortfolio	Crea un portafolio (objeto)
globalMin.portfolio	Computa el portafolio de mímina varianza
efficient.portfolio	Computa el portafolio de mímina varianza sujeto a un retorno
tangency.portfolio	Computa el portafolio tangente
efficient.frontier	Computa la frontera eficiente

Utilizando IntroCompFinR

Cargando la librería y la base de datos

Una vez la instalada la librería, procedemos a cargarla en conjunto con aquellas que utilizaremos en esta ayudantía:

```
if(!require("pacman")) install.packages("pacman")
p_load("IntroCompFinR","readxl","tidyverse")
```

Como ya está cargado `readxl` cargamos el archivo **stocks.xlsx**, que ya posee los retornos[2].

[2] si quieren replicarlo vean los videos

Portafolio con tres activos riesgosos

Considerando tres activos riesgosos (Starbucks, Nordstrom y Microsoft), definimos un vector columna $3x1$ el que tendrá los retornos y los pesos:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} R_a \\ R_b \\ R_c \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{pmatrix}$$

El vector de retornos esperados es:

$$E[\mathbf{R}] = E\left[\begin{pmatrix} R_a \\ R_b \\ R_c \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} E[R_a] \\ E[R_b] \\ E[R_c] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_a \\ \mu_b \\ \mu_c \end{pmatrix} = \mu$$

La matriz $3x3$ de varianza y covarianza de los retornos es:

$$var[\mathbf{R}] = \begin{pmatrix} \sigma_a^2 & \sigma_{ab} & \sigma_{ac} \\ \sigma_{ab} & \sigma_b^2 & \sigma_{bc} \\ \sigma_{ac} & \sigma_{bc} & \sigma_c^2 \end{pmatrix} = \Sigma$$

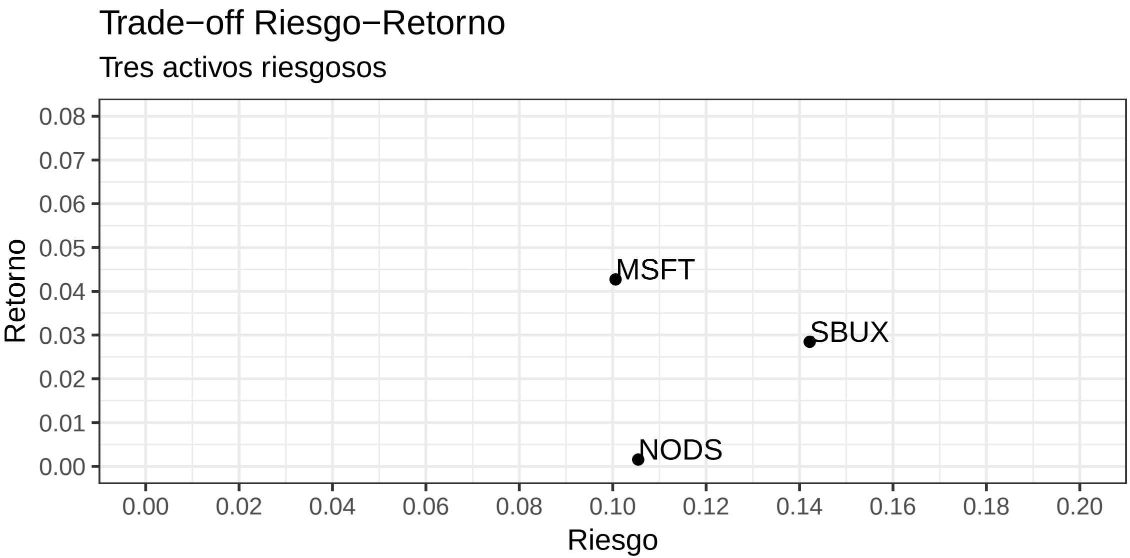
Notar que la matriz de covarianza es simétrica ($\Sigma = \Sigma'$).
Para construir las matrices anteriores en R:

```
# Promedio
mean <- apply(stocks[2:4], 2 , function(x) mean(x))
# Desviación Estandar
sd   <- apply(stocks[2:4], 2 , function(x) sd(x))
# Covarianza
cov  <- cov(stocks[2:4])
```

Graficando Trade-off retorno-riesgo

A continuación graficamos el trade-off retorno riesgo de cada activo riesgoso:

```
# graficamos el trade-off riesgo-retorno
g1 <- ggplot(mapping = aes(sd, mean, label = c("NODS","SBUX","MSFT"))) + geom_point()
g1 <- g1 + geom_text(hjust = 0, vjust = 0)
g1 <- g1 + scale_y_continuous(breaks = seq(0,0.2, by = 0.01),limits = c(0,0.08))
g1 <- g1 + scale_x_continuous(breaks = seq(0,0.2, by = 0.02),limits = c(0,0.2))
g1 <- g1 + theme_bw() + xlab("Riesgo") + ylab("Retorno")
g1 <- g1 + ggtitle("Trade-off Riesgo-Retorno",subtitle = "Tres activos riesgosos")
g1
```


Trade−off Riesgo−Retorno
Tres activos riesgosos
Retorno
0.08
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0.00
MSFT
SBUX
NODS
0.00
0.02
0.04
0.06
0.08
0.10
0.12
0.14
0.16
0.18
0.20
Riesgo

Construcción portafolio con pesos iguales

El retorno de un portafolio usando notación matricial es:

$$\mathbf{R_{p,x}} = \mathbf{x}^{'}\mathbf{R} = (x_a, x_b, x_c) \cdot \begin{pmatrix} R_a \\ R_b \\ R_c \end{pmatrix} = x_a R_a + x_b R_b + x_c R_c$$

La varianza del portafolio es:

$$\sigma^2_{\mathbf{p,x}} = var(\mathbf{x}' R) = \mathbf{x}'\Sigma\mathbf{x}' = (x_a, x_b, x_c) \begin{pmatrix} \sigma_a^2 & \sigma_{ab} & \sigma_{ac} \\ \sigma_{ab} & \sigma_b^2 & \sigma_{bc} \\ \sigma_{ac} & \sigma_{bc} & \sigma_c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{pmatrix}$$

```r
# construimos los pesos
weights <- rep(1,3)/3

# construimos el portfolio
getPortfolio(mean, cov, weights)
```

```
## Call:
## getPortfolio(er = mean, cov.mat = cov, weights = weights)
##
## Portfolio expected return:     0.02423925
## Portfolio standard deviation:  0.07651378
## Portfolio weights:
## Nordstrom Starbucks Microsoft
##    0.3333    0.3333    0.3333
```

Portafolio de Mínima Varianza

Calculando Portafolio de Mínima Varianza

El portafolio de mínima varianza $\mathbf{m} = (m_a, m_b, m_c)'$ para tres activos puede ser resuelto:

$$\min_{m_a, m_b, m_c} \sigma^2_{p,m} = m_a^2\sigma_a^2 + m_b^2\sigma_b^2 + m_c^2\sigma_c^2 + 2m_a m_b \sigma^2_{ab} + 2m_a m_c \sigma^2_{ac} + 2m_b m_c \sigma^2_{bc}$$

$$\text{s.t.} \quad m_a + m_b + m_c = 1$$

Usando la manera matricial se puede expresar como:

$$\min_{m} \sigma^2_{p,m} = \mathbf{m}'\Sigma\mathbf{m} \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{m}'\mathbf{1} = 1$$

Calculando Portafolio de Mínima Varianza Código

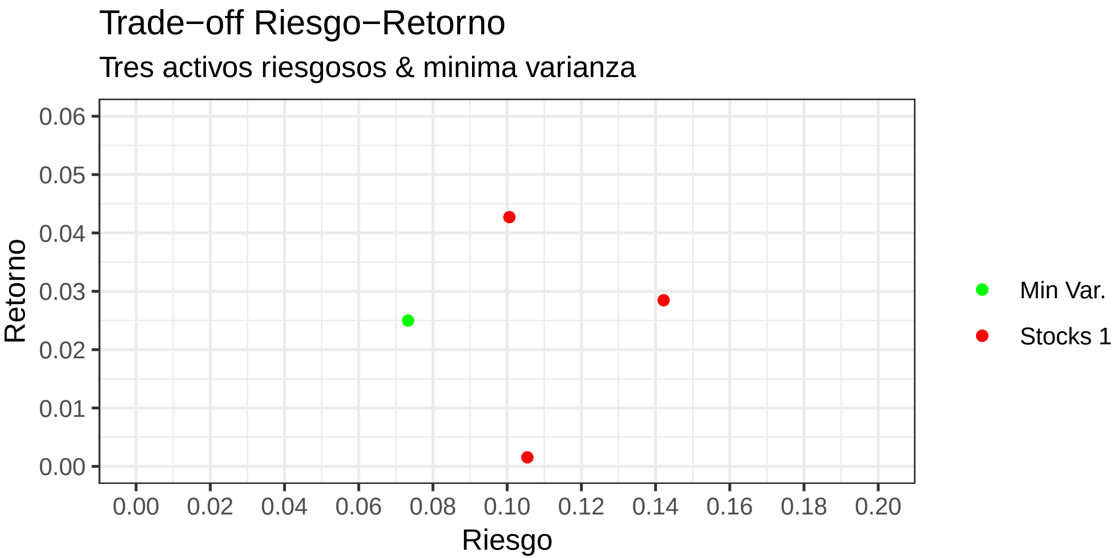
```r
# construimos el objeto
globalmin <- globalMin.portfolio(mean, cov, shorts = TRUE)

# vemos el objeto en la consola
globalmin
```

```
## Call:
## globalMin.portfolio(er = mean, cov.mat = cov, shorts = TRUE)
##
## Portfolio expected return:     0.02498393
## Portfolio standard deviation:  0.0733025
## Portfolio weights:
## Nordstrom Starbucks Microsoft
##    0.3636    0.1937    0.4427
```

Graficando Portafolio de Mínima Varianza

A continuación se grafica el portafolio de mínima varianza

```
g2 <- ggplot() + geom_point(mapping = aes(globalmin$sd, globalmin$er, color = "1"))
g2 <- g2 + geom_point(mapping = aes(sd, mean, color = "2"))
g2 <- g2 + scale_y_continuous(breaks = seq(0,0.2, by = 0.01),limits = c(0,0.06))
g2 <- g2 + scale_x_continuous(breaks = seq(0,0.2, by = 0.02),limits = c(0,0.2))
g2 <- g2 + scale_color_manual("", values = c("green", "red"), labels = c("Min Var.",
↪  "Stocks 1"))
g2 <- g2 + theme_bw() + xlab("Riesgo") + ylab("Retorno")
g2 <- g2 + ggtitle("Trade-off Riesgo-Retorno",
                   subtitle = "Tres activos riesgosos & minima varianza")
g2
```


Trade−off Riesgo−Retorno
Tres activos riesgosos & minima varianza
Retorno
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0.00
0.00
0.02
0.04
0.06
0.08
0.10
0.12
0.14
0.16
0.18
0.20
Riesgo
Min Var.
Stocks 1

Portfolio de minima varianza sujeto a un retorno objetivo

Calculando portfolio de minima varianza sujeto a un retorno objetivo

Sea $\sigma^2_{p,0}$ el nivel de riesgo, el problema de maximización es acotado a:

$$\max_{x} \mu_p = \mathbf{x}'\mu$$
$$\text{s.t.} \quad \sigma^2_p = \mathbf{x}'\Sigma\mathbf{x} = \sigma^2_{p,0} \quad y \quad \mathbf{x}'\mathbf{1} = 1$$

El problema dual para la minimización:

$$\min_{x} \sigma^2_{p,x} = \mathbf{x}'\Sigma\mathbf{x}$$
$$\text{s.t.} \quad \mu_p = \mathbf{x}'\mu = \mu_{p,0} \quad y \quad \mathbf{x}'\mathbf{1} = 1$$

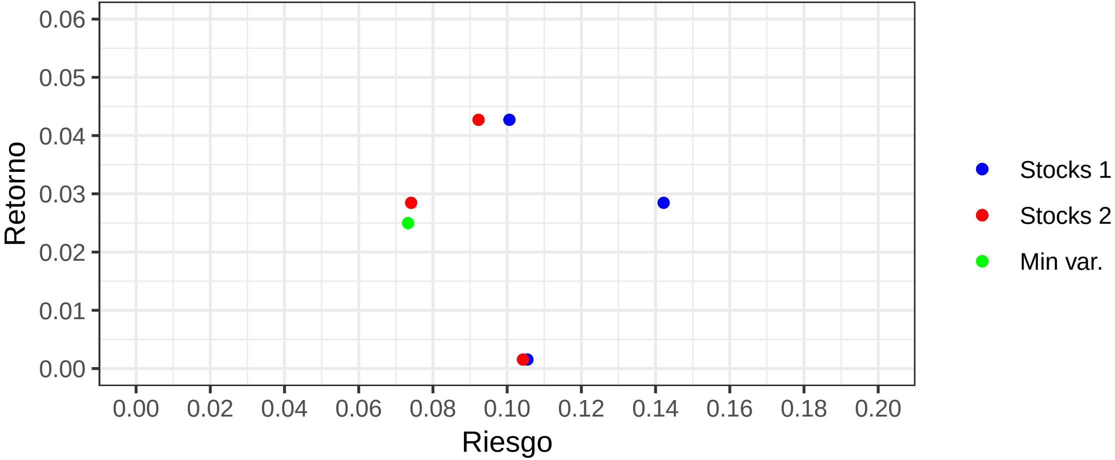
```r
# retorno igual a Nordstrom
port.nods <- efficient.portfolio(mean, cov, mean[1], shorts = TRUE)

# retorno igual a Starbucks
port.sbux <- efficient.portfolio(mean, cov, mean[2], shorts = TRUE)

# retorno igual a Microsoft
port.msft <- efficient.portfolio(mean, cov, mean[3], shorts = TRUE)

# construimos objeto con los retornos y desviaciones estandar
mean.2 <- c(port.nods$er, port.sbux$er, port.msft$er)
sd.2 <- c(port.nods$sd, port.sbux$sd, port.msft$sd)
```

A continuación se grafican los portafolios eficientes

```r
g3 <- ggplot() + geom_point(mapping = aes(sd, mean, color = "1"))
g3 <- g3 + geom_point(mapping = aes(sd.2, mean.2, color = "2"))
g3 <- g3 + geom_point(mapping = aes(globalmin$sd, globalmin$er, color = "3"))
g3 <- g3 + scale_y_continuous(breaks = seq(0,0.2, by = 0.01),limits = c(0,0.06))
g3 <- g3 + scale_x_continuous(breaks = seq(0,0.2, by = 0.02),limits = c(0,0.2))
g3 <- g3 + scale_color_manual("", values = c("blue", "red", "green"),
                               labels = c("Stocks 1", "Stocks 2", "Min var."))
g3 <- g3 + theme_bw() + xlab("Riesgo") + ylab("Retorno")
g3 <- g3 + ggtitle("Trade-off Riesgo-Retorno",
                   subtitle = "Tres activos riesgosos & minima varianza")
g3
```

Trade−off Riesgo−Retorno

Tres activos riesgosos & minima varianza



Portafolio tangente

Cálculo Portafolio tangente

El portafolio tangente es el portafolio de activos riesgosos que tiene el mayor ratio de sharpe. El portafolio tangente (pesos), denominado $\mathbf{t} = (t_{aapl}, t_{msft}, t_{nvda})'$ resuelve:

$$\max_{\mathbf{t}} \quad \frac{\mathbf{t}'\mu - r_f}{(\mathbf{t}'\Sigma\mathbf{t})^{1/2}} = \frac{\mu_{p,t} - r_f}{\sigma_{p,t}}$$
$$\text{s.t.} \quad \mathbf{t}'\mathbf{1} = 1$$

resolviendo:

$$\mathbf{t} = \frac{\Sigma^{-1}(\mu - rf \cdot \mathbf{1})}{\mathbf{1}'\Sigma^{-1}(\mu - rf \cdot \mathbf{1})}$$

El caso usual es cuando el ratio de sharpe es positivo, $\mu_{p,m} > r_f$.

Fijamos una tasa libre de riesgo

```r
# Tasa libre de riesgo
risk_free <- 0.005
```

Procedemos a calcular el portafolio tangente:

```r
# Portafolio tangente
port.tang <- tangency.portfolio(mean, cov, risk_free, shorts = TRUE)
```

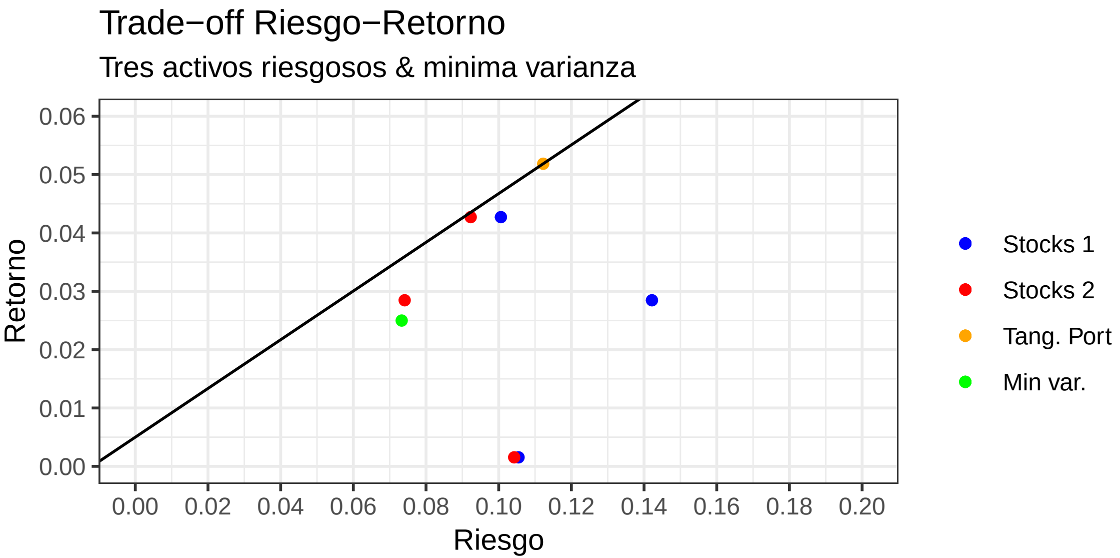
Finalmente el ratio de sharpe:

```r
#sharpe ratio
sharpe.ratio <- (port.tang$er - risk_free)/port.tang$sd
```

Graficando calculo portafolio tangente

A continuación se grafica el portafolio eficiente:

```r
g4 <- ggplot() + geom_point(mapping = aes(sd, mean, color = "1"))
g4 <- g4 + geom_point(mapping = aes(sd.2, mean.2, color = "2"))
g4 <- g4 + geom_point(mapping = aes(port.tang$sd, port.tang$er, color = "3"))
g4 <- g4 + geom_point(mapping = aes(globalmin$sd, globalmin$er, color = "4"))
g4 <- g4 + geom_abline(intercept = risk_free, slope = sharpe.ratio)
g4 <- g4 + scale_y_continuous(breaks = seq(0,0.2, by = 0.01),limits = c(0,0.06))
g4 <- g4 + scale_x_continuous(breaks = seq(0,0.2, by = 0.02),limits = c(0,0.2))
g4 <- g4 + scale_color_manual("", values = c("blue", "red", "orange", "green"),
                             labels = c("Stocks 1",  "Stocks 2", "Tang. Port", "Min
                             ↪  var."))
g4 <- g4 + theme_bw() + xlab("Riesgo") + ylab("Retorno")
g4 <- g4 + ggtitle("Trade-off Riesgo-Retorno",
                  subtitle = "Tres activos riesgosos & minima varianza")
g4
```


Trade−off Riesgo−Retorno
Tres activos riesgosos & minima varianza
Retorno
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0.00
0.00
0.02
0.04
0.06
0.08
0.10
0.12
0.14
0.16
0.18
0.20
Riesgo
Stocks 1
Stocks 2
Tang. Port
Min var.

Frontera eficiente

Construcción frontera eficiente

Para formar la frontera eficiente (punto) se necesita encontrar dos portafolios eficientes (realizado anteriormente). Sea $\mathbf{x} = (x_a, x_b, x_c)'$ e $\mathbf{x} = (y_a, y_b, y_c)'$ con retornos esperados distintos (*target*) $\mathbf{x}'\mu = \mu_{p,0} \neq \mathbf{y}'\mu = \mu_{p,1}$, donde $\mathbf{x}$ resuelve:

$$\min_{x} \sigma^2_{p,x} = \mathbf{x}'\Sigma\mathbf{x}$$
$$\text{s.t.} \quad \mu_p = \mathbf{x}'\mu = \mu_{p,0} \quad y \quad \mathbf{x}'\mathbf{1} = 1$$

y el portafolio $\mathbf{y}$:

$$\min_{x} \sigma^2_{p,y} = \mathbf{y}'\Sigma\mathbf{y}$$
$$\text{s.t.} \quad \mu_p = \mathbf{y}'\mu = \mu_{p,1} \quad y \quad \mathbf{y}'\mathbf{1} = 1$$

Sea α cualquier constante y definiendo el portafolio $\mathbf{z}$ como una combinación lineal de portafolios $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= \alpha \cdot \mathbf{x} + (1-\alpha) \cdot \mathbf{y} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha x_a + (1-\alpha) y_a \\ \alpha x_b + (1-\alpha) y_b \\ \alpha x_c + (1-\alpha) y_c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Entonces:

1. El portafolio $\mathbf{z}$ es un portafolio de minima varianza con retorno esperado y varianza dado por:

$$\begin{aligned} \mu_{p,z} &= \mathbf{z}'\mu = \alpha \cdot \mu_{p,x} + (1-\alpha) \cdot \mu_{p,y} \\ \sigma^2_{p,z} &= \mathbf{z}'\Sigma\mathbf{z} = \alpha^2\sigma^2_{p,x} + (1-\alpha)^2\sigma^2_{p,y} + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{xy} \end{aligned}$$

donde

$$\sigma^2_{p,x} = \mathbf{z}'\Sigma\mathbf{z}, \sigma^2_{p,y} = \mathbf{y}'\Sigma\mathbf{y}, \sigma_{xy} = \mathbf{x}'\Sigma\mathbf{y}$$

2. Si $\mu_{p,z} \geq \mu_{p,m}$ donde $\mu_{p,m}$ es el retorno esperado del portafolio de mímina varianza, entonces el portafolio $\mathbf{z}$ es un portafolio eficiente

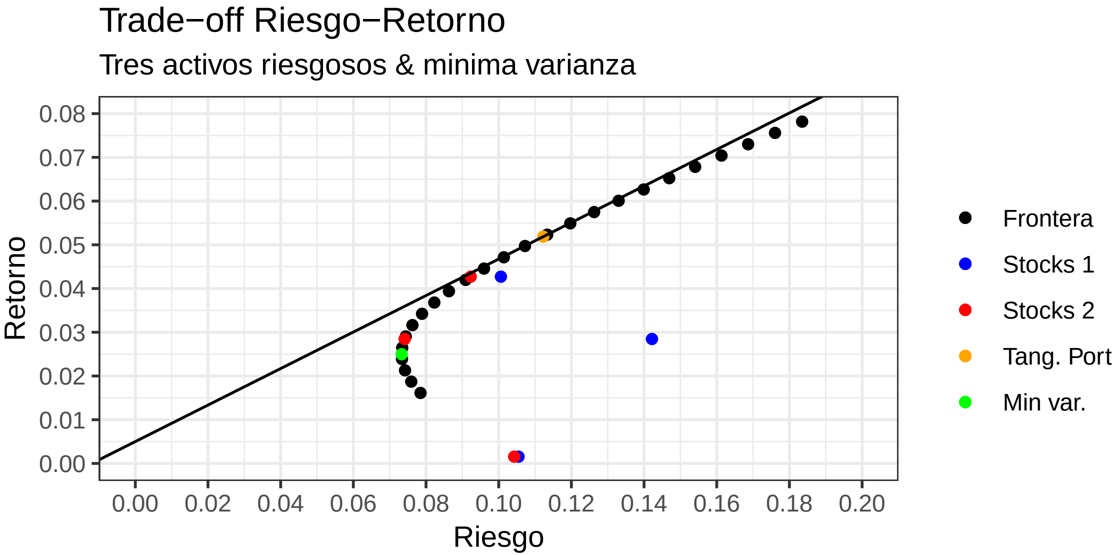
```r
eff.front.short <- efficient.frontier(mean, cov, nport = 25, alpha.min = -2,
                                     alpha.max = 1.5, shorts = TRUE)
eff.front.short
```

```
## Call:
## efficient.frontier(er = mean, cov.mat = cov, nport = 25, alpha.min = -2,
##     alpha.max = 1.5, shorts = TRUE)
##
## Frontier portfolios' expected returns and standard deviations
##    port 1 port 2 port 3 port 4 port 5 port 6 port 7 port 8 port 9 port 10
## ER 0.0782 0.0756 0.0730 0.0704 0.0678 0.0652 0.0627 0.0601 0.0575  0.0549
## SD 0.1835 0.1760 0.1686 0.1613 0.1541 0.1469 0.1399 0.1330 0.1263  0.1197
##    port 11 port 12 port 13 port 14 port 15 port 16 port 17 port 18 port 19
## ER  0.0523  0.0497  0.0471  0.0446  0.0420  0.0394  0.0368  0.0342  0.0316
## SD  0.1133  0.1072  0.1014  0.0960  0.0909  0.0863  0.0823  0.0789  0.0763
##    port 20 port 21 port 22 port 23 port 24 port 25
## ER  0.0290  0.0265  0.0239  0.0213  0.0187  0.0161
## SD  0.0744  0.0735  0.0734  0.0742  0.0759  0.0785
```

Gráficando frontera eficiente

A continuación se grafican la frontera eficiente con venta corta

```
g5 <- ggplot() + geom_point(mapping = aes(eff.front.short$sd, eff.front.short$er,
                                          color = "1"))
g5 <- g5 + geom_point(mapping = aes(sd, mean, color = "2"))
g5 <- g5 + geom_point(mapping = aes(sd.2, mean.2, color = "3"))
g5 <- g5 + geom_point(mapping = aes(port.tang$sd, port.tang$er, color = "4"))
g5 <- g5 + geom_point(mapping = aes(globalmin$sd, globalmin$er, color = "5"))
g5 <- g5 + geom_abline(intercept = risk_free, slope = sharpe.ratio)
g5 <- g5 + scale_y_continuous(breaks = seq(0,0.2, by = 0.01), limits = c(0,0.08))
g5 <- g5 + scale_x_continuous(breaks = seq(0,0.2, by = 0.02), limits = c(0,0.2))
g5 <- g5 + scale_color_manual("", values = c("black","blue", "red", "orange", "green"),
                              labels = c("Frontera", "Stocks 1", "Stocks 2",
                                         "Tang. Port","Min var."))
g5 <- g5 + theme_bw() + xlab("Riesgo") + ylab("Retorno")
g5 <- g5 + ggtitle("Trade-off Riesgo-Retorno",
                   subtitle = "Tres activos riesgosos & minima varianza")
g5
```


Trade−off Riesgo−Retorno
Tres activos riesgosos & minima varianza
Retorno
0.08
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0.00
0.00
0.02
0.04
0.06
0.08
0.10
0.12
0.14
0.16
0.18
0.20
Riesgo
Frontera
Stocks 1
Stocks 2
Tang. Port
Min var.

Referencia I

Eric Zivot. “Chapter 1: Portfolio Theory with Matrix Algebra”. In: *Lecture Notes for ECON 424 and MATH 462: Computational Finance and Financial Econometrics* (2013), pp. 25–27.