

Teoría de portafolio

Usando R

Gabriel Cabrera G.

Universidad de Chile
Facultad de Economía y Negocios

23 de Marzo del 2019



✉ gcabrerag@fen.uchile.cl

🔗 gcabrerag.rbind.io

🐦 GaboC_g

🌀 GaboCg

📍 Facultad de Economía & Negocios, Universidad de Chile



- 1 Descargando la librería IntroCompFinR
- 2 Utilizando IntroCompFinR
- 3 Portafolio de Mínima Varianza
- 4 Portfolio de minima varianza sujeto a un retorno objetivo
- 5 Portafolio tangente
- 6 Frontera eficiente
- 7 Medidas de performance

Descargando la librería IntroCompFinR

Librería IntroCompFinR



Para la teoría de portfolio vamos a utilizar la librería IntroCompFinR (**Intro** to **Computational Finance** in **R**) creado por el profesor Eric Zivot (Zivot 2013).

1. Debemos instalar primero las librerías que utiliza IntroCompFinR:

```
1 if(!require("pacman")) install.packages("pacman")
2 p_load("PerformanceAnalytics", "quadprog", "xts")
```

2. Ya instaladas las dependencias, descargamos IntroCompFinR :

```
1 install.packages("IntroCompFinR", repos="http://R-Forge.R-project.org")
```

3. Otra opción es simplemente cargar las funciones, sin necesidad de instalar y cargar la librería. Estas quedarán en el *Global Environment*.

```
1 source(IntroComFinR/IntroComFinR.R)
```

A veces debemos instalar (`install.packages()`) muchas librerías y luego cargarlas (`library()`), esto puede ser muy invasivo y genera líneas de código innecesarias, una solución es usar la librería **pacman** (**P**ackage **M**anagement)

Función Pacman	Paquete equivalente	Descripción
<code>p_load</code>	<code>install.packages + library</code>	Carga e instala los paquetes
<code>p_install</code>	<code>install.packages</code>	Instala paquetes desde CRAN
<code>p_load_gh</code>	ninguno	Carga e instala del github

Existen más opciones, pero no serán necesarias para la sesión. Con la función `p_load` agregan¹ todos las librerías que deseen, si las tienen las carga (`library()`), si no, las instala (`install.packages()`) y luego las carga.

¹Deben escribir antes `if(!require("pacman")) install.packages("pacman")`

Funciones útiles de IntroCompFinR



Funciones	Descripciones
getPortfolio	Crea un portafolio (objeto)
globalMin.portfolio	Computa el portafolio de mínima varianza
efficient.portfolio	Computa el portafolio de mínima varianza sujeto a un retorno
tangency.portfolio	Computa el portafolio tangente
efficient.frontier	Computa la frontera eficiente

Utilizando IntroCompFinR

Cargando la librería y la base de datos



Una vez la instalada la librería, procedemos a cargarla en conjunto con aquellas que utilizaremos en esta ayudantía:

```
1 if(!require("pacman")) install.packages("pacman")  
2 p_load("IntroCompFinR", "readxl", "tidyverse")
```

Como ya está cargado readxl cargamos el archivo **stocks.xlsx**, que ya posee los retornos².

²si quieren replicarlo vean los videos



Portafolio con tres activos riesgosos

Considerando tres activos riesgosos (Starbucks, Nordstrom y Microsoft), definimos un vector columna 3x1 el que tendrá los retornos y los pesos:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} R_a \\ R_b \\ R_c \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{pmatrix}$$

El vector de retornos esperados es:

$$E[\mathbf{R}] = E \left[\begin{pmatrix} R_a \\ R_b \\ R_c \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} E[R_a] \\ E[R_b] \\ E[R_c] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_a \\ \mu_b \\ \mu_c \end{pmatrix} = \mu$$

La matriz 3x3 de varianza y covarianza de los retornos es:

$$\text{var}[\mathbf{R}] = \begin{pmatrix} \sigma_a^2 & \sigma_{ab} & \sigma_{ac} \\ \sigma_{ab} & \sigma_b^2 & \sigma_{bc} \\ \sigma_{ac} & \sigma_{bc} & \sigma_c^2 \end{pmatrix} = \Sigma$$

Notar que la matriz de covarianza es simétrica ($\Sigma = \Sigma'$).

Para construir las matrices anteriores en R:

```
1 # Promedio
2 mean <- apply(stocks[2:4], 2, function(x) mean(x))
3 # Desviación Estandar
4 sd <- apply(stocks[2:4], 2, function(x) sd(x))
5 # Covarianza
6 cov <- cov(stocks[2:4])
```



Graficando Trade-off retorno-riesgo

A continuación graficamos el trade-off retorno riesgo de cada activo riesgoso:

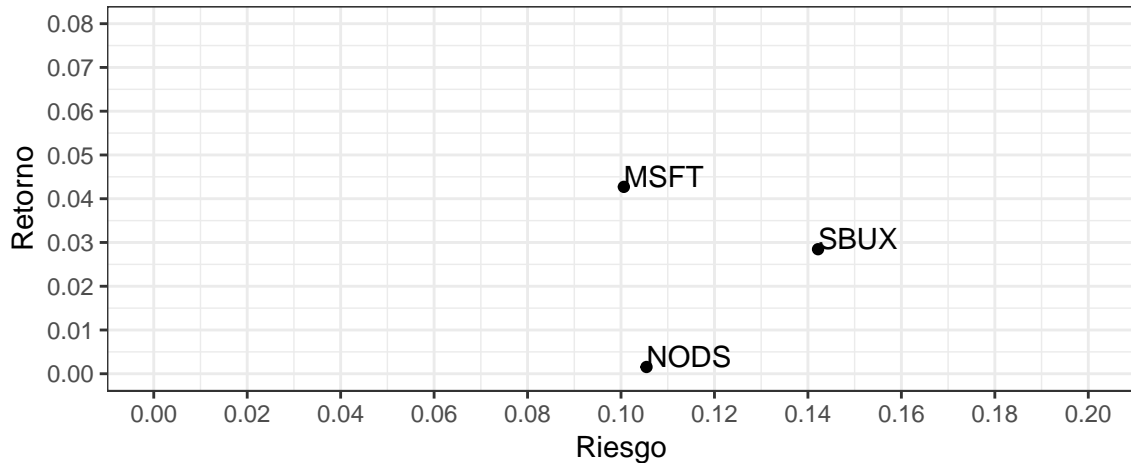
```

1 # graficamos el trade-off riesgo-retorno
2 g1 <- ggplot(mapping = aes(sd, mean, label = c("NODS", "SBUX", "MSFT"))) + geom_point()
3 g1 <- g1 + geom_text(hjust = 0, vjust = 0)
4 g1 <- g1 + scale_y_continuous(breaks = seq(0, 0.2, by = 0.01), limits = c(0, 0.08))
5 g1 <- g1 + scale_x_continuous(breaks = seq(0, 0.2, by = 0.02), limits = c(0, 0.2))
6 g1 <- g1 + theme_bw() + xlab("Riesgo") + ylab("Retorno")
7 g1 <- g1 + ggtitle("Trade-off Riesgo-Retorno", subtitle = "Tres activos riesgosos")
8 g1

```

Trade-off Riesgo–Retorno

Tres activos riesgosos





Construcción portafolio con pesos iguales

El retorno de un portafolio usando notación matricial es:

$$\mathbf{R}_{p,x} = \mathbf{x}' \mathbf{R} = (x_a, x_b, x_c) \cdot \begin{pmatrix} R_a \\ R_b \\ R_c \end{pmatrix} = x_a R_a + x_b R_b + x_c R_c$$

La varianza del portafolio es:

$$\sigma_{p,x}^2 = \text{var}(\mathbf{x}' \mathbf{R}) = \mathbf{x}' \Sigma \mathbf{x}' = (x_a, x_b, x_c) \begin{pmatrix} \sigma_a^2 & \sigma_{ab} & \sigma_{ac} \\ \sigma_{ab} & \sigma_b^2 & \sigma_{bc} \\ \sigma_{ac} & \sigma_{bc} & \sigma_c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{pmatrix}$$

```

1 # construimos los pesos
2 weights <- rep(1,3)/3
3
4 # construimos el portfolio
5 getPortfolio(mean, cov, weights)

```

```

## Call:
## getPortfolio(er = mean, cov.mat = cov, weights = weights)
##
## Portfolio expected return:      0.02423925
## Portfolio standard deviation:  0.07651378
## Portfolio weights:
## Nordstrom Starbucks Microsoft
##    0.3333    0.3333    0.3333

```


Portafolio de Mínima Varianza



Calculando Portafolio de Mínima Varianza

El portafolio de mínima varianza $\mathbf{m} = (m_a, m_b, m_c)'$ para tres activos puede ser resuelto:

$$\begin{aligned} \min_{m_a, m_b, m_c} \sigma_{p,m}^2 &= m_a^2 \sigma_a^2 + m_b^2 \sigma_b^2 + m_c^2 \sigma_c^2 + 2m_a m_b \sigma_{ab}^2 + 2m_a m_c \sigma_{ac}^2 + 2m_b m_c \sigma_{bc}^2 \\ \text{s.t. } m_a + m_b + m_c &= 1 \end{aligned}$$

Usando la manera matricial se puede expresar como:

$$\min_m \sigma_{p,m}^2 = \mathbf{m}' \Sigma \mathbf{m} \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{m}' \mathbf{1} = 1$$



Calculando Portafolio de Mínima Varianza Código

```
1 # construimos el objeto
2 globalmin <- globalMin.portfolio(mean, cov, shorts = TRUE)
3
4 # vemos el objeto en la consola
5 globalmin
```

```
## Call:
## globalMin.portfolio(er = mean, cov.mat = cov, shorts = TRUE)
##
## Portfolio expected return:      0.02498393
## Portfolio standard deviation:  0.0733025
## Portfolio weights:
## Nordstrom Starbucks Microsoft
##      0.3636      0.1937      0.4427
```



Graficando Portafolio de Mínima Varianza

A continuación se grafica el portafolio de mínima varianza

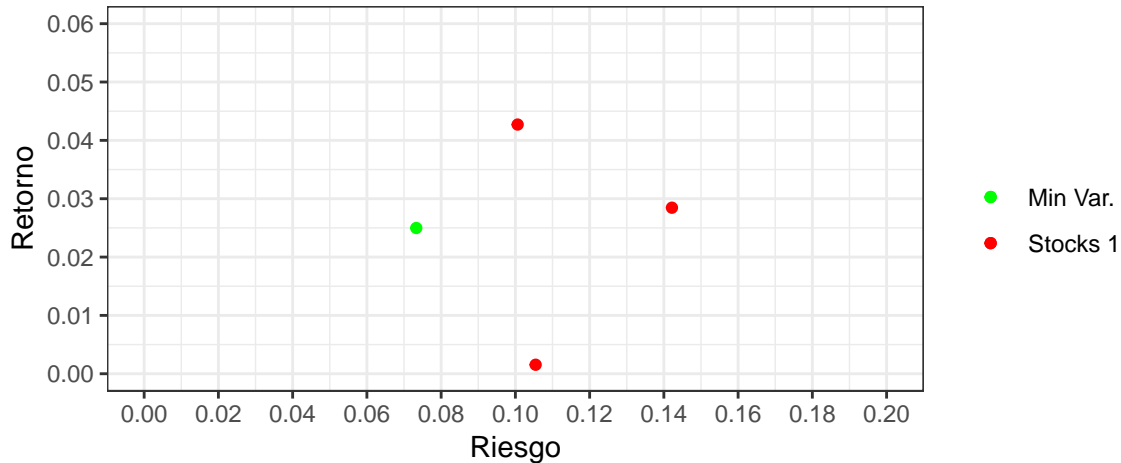
```

1 g2 <- ggplot() + geom_point(mapping = aes(globalmin$sd, globalmin$er, color = "1"))
2 g2 <- g2 + geom_point(mapping = aes(sd, mean, color = "2"))
3 g2 <- g2 + scale_y_continuous(breaks = seq(0,0.2, by = 0.01),limits = c(0,0.06))
4 g2 <- g2 + scale_x_continuous(breaks = seq(0,0.2, by = 0.02),limits = c(0,0.2))
5 g2 <- g2 + scale_color_manual("", values = c("green", "red"), labels = c("Min Var.",
  ↪ "Stocks 1"))
6 g2 <- g2 + theme_bw() + xlab("Riesgo") + ylab("Retorno")
7 g2 <- g2 + ggtitle("Trade-off Riesgo-Retorno",
8                   subtitle = "Tres activos riesgosos & minima varianza")
9 g2

```

Trade-off Riesgo–Retorno

Tres activos riesgosos & minima varianza



Portfolio de minima varianza sujeto a un retorno objetivo



Calculando portfolio de mínima varianza sujeto a un retorno objetivo

Sea $\sigma_{p,0}^2$ el nivel de riesgo, el problema de maximización es acotado a:

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x}} \mu_p &= \mathbf{x}'\boldsymbol{\mu} \\ \text{s.t. } \sigma_p^2 &= \mathbf{x}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{x} = \sigma_{p,0}^2 \quad y \quad \mathbf{x}'\mathbf{1} = 1 \end{aligned}$$

El problema dual para la minimización:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \sigma_{p,x}^2 &= \mathbf{x}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{x} \\ \text{s.t. } \mu_p &= \mathbf{x}'\boldsymbol{\mu} = \mu_{p,0} \quad y \quad \mathbf{x}'\mathbf{1} = 1 \end{aligned}$$

```
1 # retorno igual a Nordstrom
2 port.nods <- efficient.portfolio(mean, cov, mean[1], shorts = TRUE)
3
4 # retorno igual a Starbucks
5 port.sbox <- efficient.portfolio(mean, cov, mean[2], shorts = TRUE)
6
7 # retorno igual a Microsoft
8 port.msft <- efficient.portfolio(mean, cov, mean[3], shorts = TRUE)
9
10 # construimos objeto con los retornos y desviaciones estandar
11 mean.2 <- c(port.nods$er, port.sbox$er, port.msft$er)
12 sd.2 <- c(port.nods$sd, port.sbox$sd, port.msft$sd)
```


Graficando Portafolio de Mínima Varianza sujeto a un retorno objetivo



A continuación se grafican los portafolios eficientes

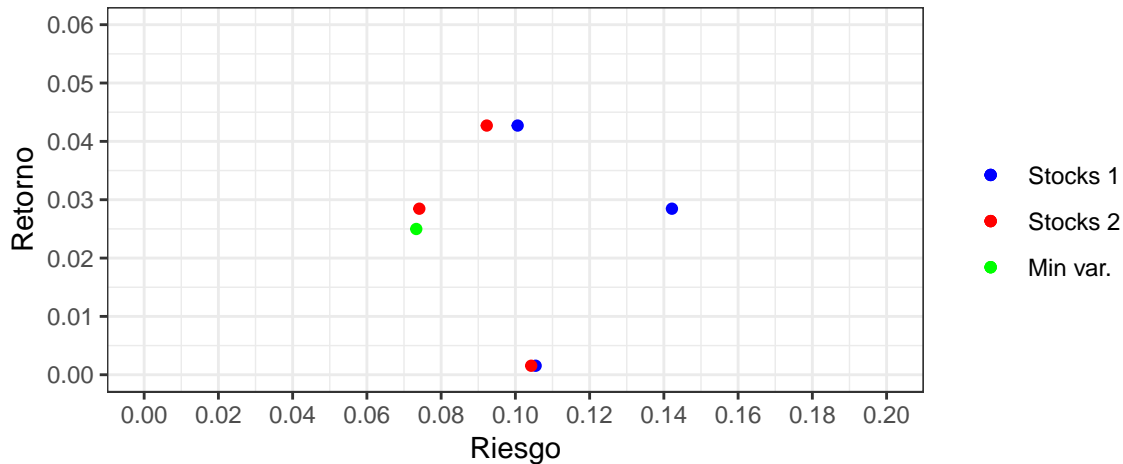
```

1 g3 <- ggplot() + geom_point(mapping = aes(sd, mean, color = "1"))
2 g3 <- g3 + geom_point(mapping = aes(sd.2, mean.2, color = "2"))
3 g3 <- g3 + geom_point(mapping = aes(globalmin$sd, globalmin$er, color = "3"))
4 g3 <- g3 + scale_y_continuous(breaks = seq(0,0.2, by = 0.01),limits = c(0,0.06))
5 g3 <- g3 + scale_x_continuous(breaks = seq(0,0.2, by = 0.02),limits = c(0,0.2))
6 g3 <- g3 + scale_color_manual("", values = c("blue", "red", "green"),
7                                     labels = c("Stocks 1", "Stocks 2", "Min var.))
8 g3 <- g3 + theme_bw() + xlab("Riesgo") + ylab("Retorno")
9 g3 <- g3 + ggtitle("Trade-off Riesgo-Retorno",
10                     subtitle = "Tres activos riesgosos & minima varianza")
11 g3

```

Trade-off Riesgo–Retorno

Tres activos riesgosos & mínima varianza



Portafolio tangente



Cálculo Portafolio tangente

El portafolio tangente es el portafolio de activos riesgosos que tiene el mayor ratio de sharpe. El portafolio tangente (pesos), denominado $\mathbf{t} = (t_{aapl}, t_{msft}, t_{nvda})'$ resuelve:

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{t}} \quad & \frac{\mathbf{t}'\boldsymbol{\mu} - r_f}{(\mathbf{t}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{t})^{1/2}} = \frac{\mu_{p,t} - r_f}{\sigma_{p,t}} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{t}'\mathbf{1} = 1 \end{aligned}$$

resolviendo:

$$\mathbf{t} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_f \cdot \mathbf{1})}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_f \cdot \mathbf{1})}$$

El caso usual es cuando el ratio de sharpe es positivo, $\mu_{p,m} > r_f$.

Fijamos una tasa libre de riesgo

```
1 # Tasa libre de riesgo
2 risk_free <- 0.005
```

Procedemos a calcular el portafolio tangente:

```
1 # Portafolio tangente
2 port.tang <- tangency.portfolio(mean, cov, risk_free, shorts = TRUE)
```

Finalmente el ratio de sharpe:

```
1 #sharpe ratio
2 sharpe.ratio <- (port.tang$er - risk_free)/port.tang$sd
```



Graficando calculo portafolio tangente

A continuación se grafica el portafolio eficiente:

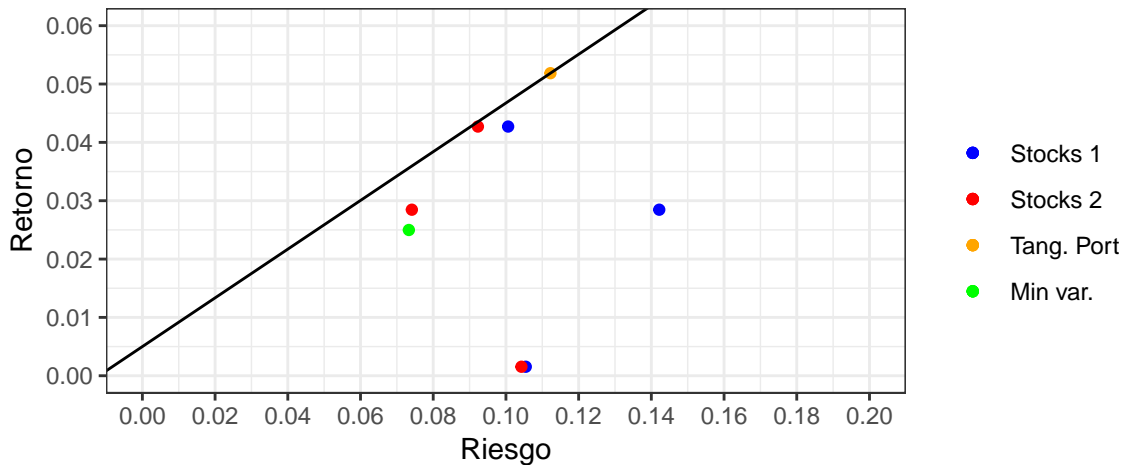
```

1 g4 <- ggplot() + geom_point(mapping = aes(sd, mean, color = "1"))
2 g4 <- g4 + geom_point(mapping = aes(sd.2, mean.2, color = "2"))
3 g4 <- g4 + geom_point(mapping = aes(port.tang$sd, port.tang$er, color = "3"))
4 g4 <- g4 + geom_point(mapping = aes(globalmin$sd, globalmin$er, color = "4"))
5 g4 <- g4 + geom_abline(intercept = risk_free, slope = sharpe.ratio)
6 g4 <- g4 + scale_y_continuous(breaks = seq(0,0.2, by = 0.01),limits = c(0,0.06))
7 g4 <- g4 + scale_x_continuous(breaks = seq(0,0.2, by = 0.02),limits = c(0,0.2))
8 g4 <- g4 + scale_color_manual("", values = c("blue", "red", "orange", "green"),
9                                     labels = c("Stocks 1", "Stocks 2", "Tang. Port", "Min
10                                                ↪ var."))
11 g4 <- g4 + theme_bw() + xlab("Riesgo") + ylab("Retorno")
12 g4 <- g4 + ggtitle("Trade-off Riesgo-Retorno",
13                   subtitle = "Tres activos riesgosos & minima varianza")

```

Trade-off Riesgo–Retorno

Tres activos riesgosos & minima varianza



Frontera eficiente



Construcción frontera eficiente

Para formar la frontera eficiente (punto) se necesita encontrar dos portafolios eficientes (realizado anteriormente). Sea $\mathbf{x} = (x_a, x_b, x_c)'$ e $\mathbf{y} = (y_a, y_b, y_c)'$ con retornos esperados distintos (*target*) $\mathbf{x}'\boldsymbol{\mu} = \mu_{p,0} \neq \mathbf{y}'\boldsymbol{\mu} = \mu_{p,1}$, donde \mathbf{x} resuelve:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \sigma_{p,\mathbf{x}}^2 &= \mathbf{x}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{x} \\ \text{s.t. } \mu_p &= \mathbf{x}'\boldsymbol{\mu} = \mu_{p,0} \quad y \quad \mathbf{x}'\mathbf{1} = 1 \end{aligned}$$

y el portafolio \mathbf{y} :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{y}} \sigma_{p,\mathbf{y}}^2 &= \mathbf{y}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{y} \\ \text{s.t. } \mu_p &= \mathbf{y}'\boldsymbol{\mu} = \mu_{p,1} \quad y \quad \mathbf{y}'\mathbf{1} = 1 \end{aligned}$$

Sea α cualquier constante y definiendo el portafolio \mathbf{z} como una combinación lineal de portafolios \mathbf{x} e \mathbf{y} .

$$\begin{aligned}\mathbf{z} &= \alpha \cdot \mathbf{x} + (1 - \alpha) \cdot \mathbf{y} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha x_a + (1 - \alpha)y_a \\ \alpha x_b + (1 - \alpha)y_b \\ \alpha x_c + (1 - \alpha)y_c \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Entonces:

1. El portafolio \mathbf{z} es un portafolio de mínima varianza con retorno esperado y varianza dado por:

$$\begin{aligned}\mu_{p,z} &= \mathbf{z}'\boldsymbol{\mu} = \alpha \cdot \mu_{p,x} + (1 - \alpha) \cdot \mu_{p,y} \\ \sigma_{p,z}^2 &= \mathbf{z}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{z} = \alpha^2\sigma_{p,x}^2 + (1 - \alpha)^2\sigma_{p,y}^2 + 2\alpha(1 - \alpha)\sigma_{xy}\end{aligned}$$

donde

$$\sigma_{p,x}^2 = \mathbf{z}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{z}, \sigma_{p,y}^2 = \mathbf{y}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{y}, \sigma_{xy} = \mathbf{x}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{y}$$

2. Si $\mu_{p,z} \geq \mu_{p,m}$ donde $\mu_{p,m}$ es el retorno esperado del portafolio de mínima varianza, entonces el portafolio **z** es un portafolio eficiente

```

1 eff.front.short <- efficient.frontier(mean, cov, nport = 25, alpha.min = -2,
2                                     alpha.max = 1.5, shorts = TRUE)
3 eff.front.short

```

```

## Call:
## efficient.frontier(er = mean, cov.mat = cov, nport = 25, alpha.min = -2,
##     alpha.max = 1.5, shorts = TRUE)
##
## Frontier portfolios' expected returns and standard deviations
##   port 1 port 2 port 3 port 4 port 5 port 6 port 7 port 8 port 9 port 10
## ER 0.0782 0.0756 0.0730 0.0704 0.0678 0.0652 0.0627 0.0601 0.0575 0.0549
## SD 0.1835 0.1760 0.1686 0.1613 0.1541 0.1469 0.1399 0.1330 0.1263 0.1197
##   port 11 port 12 port 13 port 14 port 15 port 16 port 17 port 18 port 19
## ER 0.0523 0.0497 0.0471 0.0446 0.0420 0.0394 0.0368 0.0342 0.0316
## SD 0.1133 0.1072 0.1014 0.0960 0.0909 0.0863 0.0823 0.0789 0.0763
##   port 20 port 21 port 22 port 23 port 24 port 25
## ER 0.0290 0.0265 0.0239 0.0213 0.0187 0.0161
## SD 0.0744 0.0735 0.0734 0.0742 0.0759 0.0785

```



Gráficando frontera eficiente

A continuación se grafican la frontera eficiente con venta corta

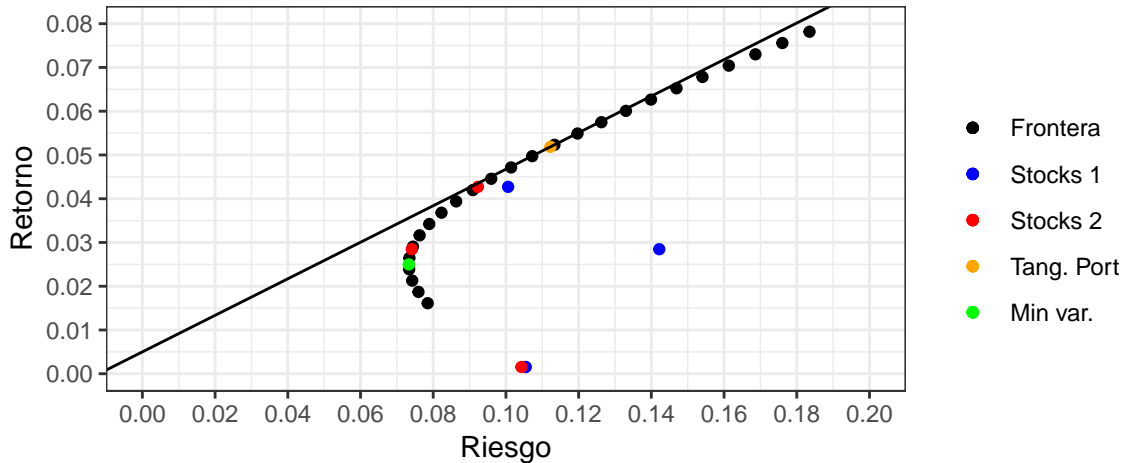
```

1 g5 <- ggplot() + geom_point(mapping = aes(eff.front.short$sd, eff.front.short$er,
2                                           color = "1"))
3 g5 <- g5 + geom_point(mapping = aes(sd, mean, color = "2"))
4 g5 <- g5 + geom_point(mapping = aes(sd.2, mean.2, color = "3"))
5 g5 <- g5 + geom_point(mapping = aes(port.tang$sd, port.tang$er, color = "4"))
6 g5 <- g5 + geom_point(mapping = aes(globalmin$sd, globalmin$er, color = "5"))
7 g5 <- g5 + geom_abline(intercept = risk_free, slope = sharpe.ratio)
8 g5 <- g5 + scale_y_continuous(breaks = seq(0,0.2, by = 0.01), limits = c(0,0.08))
9 g5 <- g5 + scale_x_continuous(breaks = seq(0,0.2, by = 0.02), limits = c(0,0.2))
10 g5 <- g5 + scale_color_manual("", values = c("black","blue", "red", "orange", "green"),
11                                           labels = c("Frontera", "Stocks 1", "Stocks 2",
12                                                       "Tang. Port","Min var."))
13 g5 <- g5 + theme_bw() + xlab("Riesgo") + ylab("Retorno")
14 g5 <- g5 + ggtitle("Trade-off Riesgo-Retorno",
15                   subtitle = "Tres activos riesgosos & minima varianza")
16 g5

```

Trade-off Riesgo-Retorno

Tres activos riesgosos & mínima varianza



Medidas de performance

Ratio de Sharpe



(Sharpe 1994)

Alpha de Jensen






(Jensen 1968)

Medida de Treynor



Referencia I



-  Michael C Jensen. “The performance of mutual funds in the period 1945–1964”. In: *The Journal of finance* 23.2 (1968), pp. 389–416.
-  William F Sharpe. “The sharpe ratio”. In: *Journal of portfolio management* 21.1 (1994), pp. 49–58.
-  Eric Zivot. “Chapter 1: Portfolio Theory with Matrix Algebra”. In: *Lecture Notes for ECON 424 and MATH 462: Computational Finance and Financial Econometrics* (2013), pp. 25–27.