PEGASO
Università Telematica

Normale Standardizzata - Esercitazione

Paolo Sciattella

Esercizio 1

PEGASO
Università Telematica

Esercizio 1

Calcolare la probabilità che la variabile casuale Normale standardizzata $Z \sim N(0,1)$ assuma:

1) **Un valore inferiore a 1,45**
2) Un valore inferiore a – 1,95
3) Un valore compreso tra 0 e 1

PEGASO
Università Telematica

Esercizio 1

Svolgimento

Per calcolare la probabilità che la variabile casuale Normale standardizzata assuma un valore inferiore ad un determinato valore, dobbiamo ricordare la definizione di funzione di ripartizione di $Z{\sim}N(0{,}1)$, ossia:

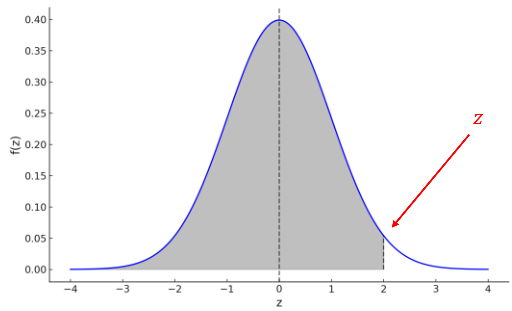
$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} f(z)dz = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

PEGASO
Università Telematica

Esercizio 1

Svolgimento

La funzione di ripartizione $\Phi(z)$, infatti, indica la probabilità di osservare un valore della v. c. $Z \leq z$



Esercizio 1

Svolgimento

Per calcolare i valori della funzione di ripartizione della variabile casuale Normale standardizzata, dobbiamo ricorrere alle **tavole statistiche**, che riportano proprio i valori $\Phi(z_\alpha)$ al variare di $z_\alpha > 0$

$$\Phi(z_\alpha) = P(Z \leq z_\alpha) = 1 - \alpha$$

PEGASO
Università Telematica

Esercizio 1

Svolgimento

Per calcolare la probabilità che la variabile casuale Normale standardizzata $Z \sim N(0,1)$ assuma un valore inferiore a 1,45 è sufficiente calcolare la probabilità:

$$P(Z \leq 1{,}45) = \Phi(1{,}45)$$

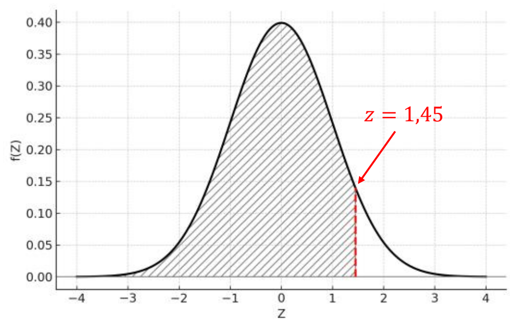
ossia il valore della funzione di ripartizione della v. c. Normale standardizzata per $z = 1{,}45$.

PEGASO
Università Telematica

Esercizio 1

Svolgimento

$P(Z \leq 1{,}45) = \Phi(1{,}45)$ corrisponde all'area sottesa da $f(z)$:



Esercizio 1

Il valore $\Phi(1{,}45) = \mathrm{P}(\mathrm{Z} \leq 1{,}45)$ è pari a $0{,}9265$

Z	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441

PEGASO
Università Telematica

Esercizio 1

Svolgimento

La probabilità che la variabile casuale Normale standardizzata $Z \sim N(0,1)$ assuma un valore inferiore a 1,45 è pari a:

$$P(Z \leq 1{,}45) = \Phi(1{,}45) = 0{,}9265$$

PEGASO
Università Telematica

Esercizio 2

Esercizio 2

Calcolare la probabilità che la variabile casuale Normale standardizzata $Z \sim N(0,1)$ assuma:

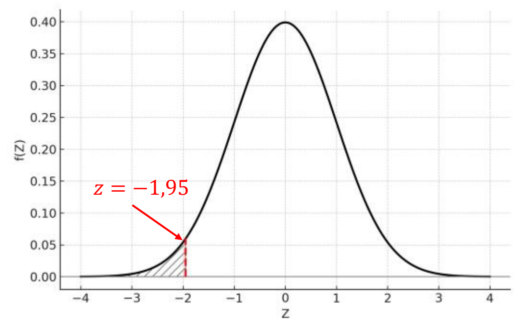
1) Un valore inferiore a 1,45
2) **Un valore inferiore a – 1,95**
3) Un valore compreso tra 0 e 1

PEGASO
Università Telematica

Esercizio 2

Svolgimento

La probabilità che $Z \sim N(0,1)$ assuma un valore inferiore a -1,95, ossia $P(Z \leq -1{,}95) = \Phi(-1{,}95)$, corrisponde all'area:



Esercizio 2

Svolgimento

Poiché le tavole statistiche contengono solo valori di $z > 0$, per calcolare $\Phi(-1{,}95)$ dobbiamo ricordare la proprietà della simmetria della v. c. Normale standardizzata, ossia la relazione:

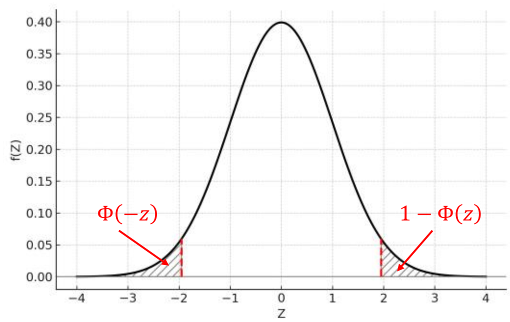
$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$$

PEGASO
Università Telematica

Esercizio 2

Svolgimento

Graficamente, la relazione $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ corrisponde a:



Esercizio 2

Svolgimento

Abbiamo quindi che

$$P(Z \leq -1{,}95) = 1 - P(Z \leq 1{,}95) = 1 - \Phi(1{,}95)$$

Per calcolare $\Phi(1{,}95)$ è possibile utilizzare le tavole statistiche, individuando il valore della funzione di ripartizione in corrispondenza del valore 1,95.

Esercizio 2

Svolgimento

Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

Esercizio 2

Svolgimento

Possiamo quindi calcolare la probabilità come

$$P(Z \leq -1{,}95) = 1 - \Phi(1{,}95) = 1 - 0{,}9744 = 0{,}0256$$

La probabilità che la variabile casuale Normale standardizzata $Z \sim N(0{,}1)$ assuma un valore inferiore a -1,95 è pari a 0,0256.

PEGASO
Università Telematica

Esercizio 3

PEGASO
Università Telematica

Esercizio 3

Calcolare la probabilità che la variabile casuale Normale standardizzata $Z \sim N(0,1)$ assuma:

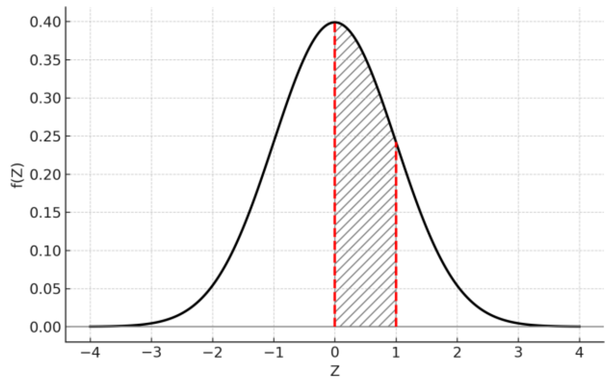
1) Un valore inferiore a 1,45
2) Un valore inferiore a – 1,95
3) **Un valore compreso tra 0 e 1**

PEGASO
Università Telematica

Esercizio 3

Svolgimento

La probabilità che $Z \sim N(0{,}1)$ assuma un valore compreso tra 0 e 1, ossia $P(0 \leq Z \leq 1)$ corrisponde all'area:



Esercizio 3

Svolgimento

In questo caso, la probabilità è data dalla formula:

$$P(0 \leq Z \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(0)$$

Dobbiamo quindi calcolare la funzione di ripartizione in 0 e in 1.

PEGASO
Università Telematica

Esercizio 3

Svolgimento

Z	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

PEGASO
Università Telematica

Esercizio 3

Svolgimento

Possiamo quindi calcolare la probabilità come

$$P(0 \leq Z \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(0) = 0{,}8413 - 0{,}500 = 0{,}3413$$

La probabilità che la variabile casuale Normale standardizzata $Z \sim N(0{,}1)$ assuma un valore compreso tra 0 e 1 è pari a 0,3413.

Esercizio 3

Svolgimento

Nota: per calcolare il valore $\Phi(0)$ non erano necessarie le tavole statistiche in quanto sappiamo che la distribuzione normale standardizzata $Z \sim N(0,1)$ è simmetrica rispetto alla media, ossia rispetto a $z = 0$.

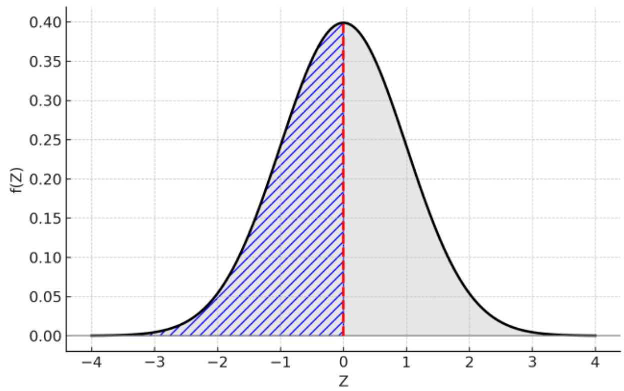
Questo significa che la probabilità cumulativa fino a $z = 0$ rappresenta esattamente la metà dell'area totale sotto la curva, poiché la distribuzione ha media 0 e deviazione standard 1.

PEGASO
Università Telematica

Esercizio 3

Svolgimento

L'area sottesa dalla $f(z)$ tra $-\infty$ e $+\infty$ è pari a 1, quindi quella sottesa tra $-\infty$ e 0 è pari a 1/2



PEGASO
Università Telematica