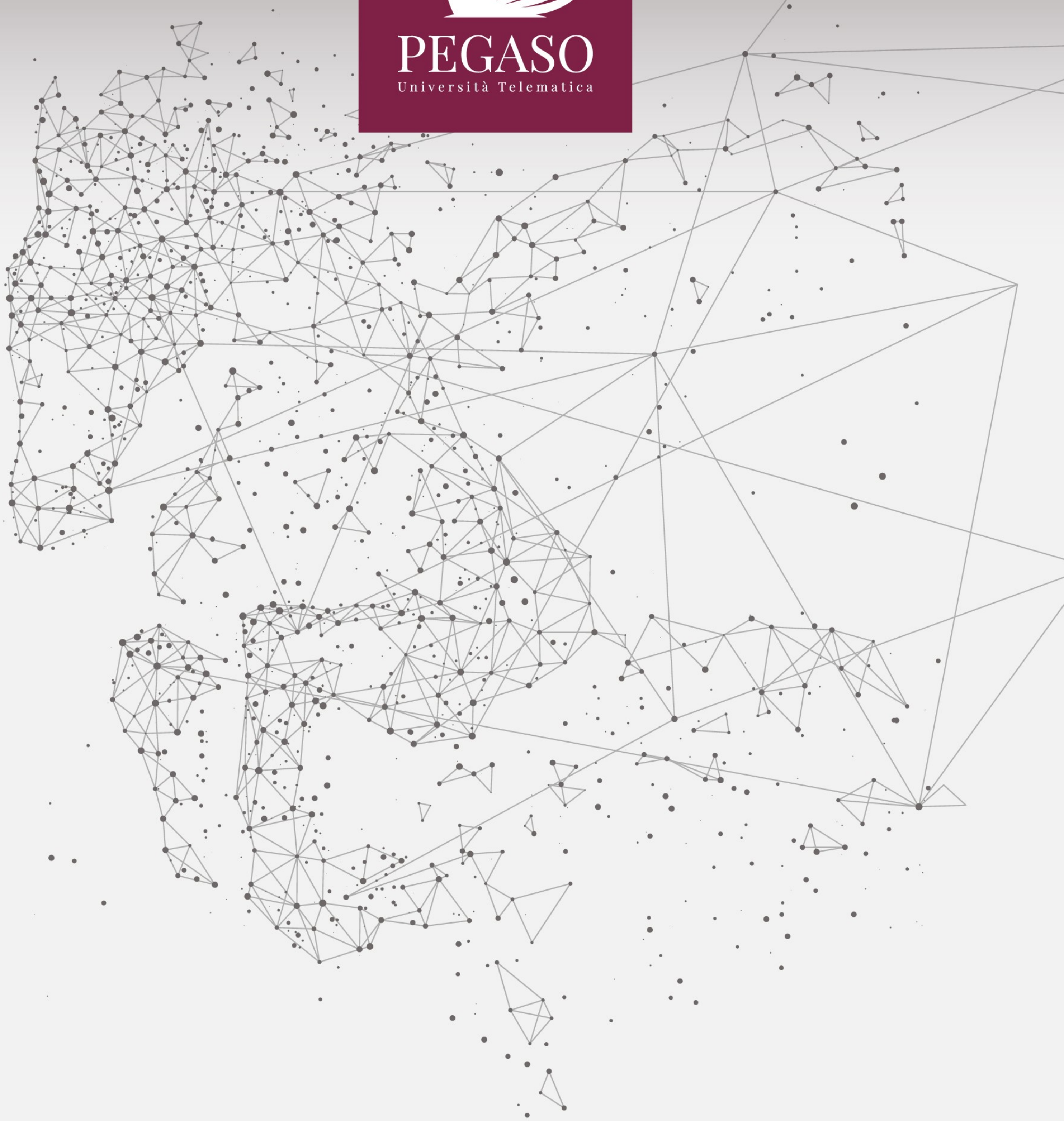
PEGASO

Università Telematica



Indice

1. Notazione asintotica

Parliamo di "complessità asintotica" (e dunque di "notazione asintotica" in ordine di grandezza) di una funzione, quando si vuole stimare quanto aumenta il tempo di calcolo al crescere della dimensione n dell'input. Tale notazione ci consente inoltre di comparare il tasso di crescita (cioè, il comportamento asintotico) di una funzione nei confronti di un'altra.

Esistono tre notazioni asintotiche:

- **Notazione asintotica O** (notazione O grande): limite superiore asintotico.
- **Notazione asintotica Ω** (notazione Omega): limite inferiore asintotico.
- **Notazione asintotica θ** (notazione Theta): limite asintotico stretto.

La **notazione asintotica** O è il limite superiore asintotico.

Date due funzioni $f(n)$ e $g(n)$, si dice che $f(n) = O(g(n))$ se esiste un valore $c > 0$ tale che $0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)$ per ogni $n \geq n_0$.

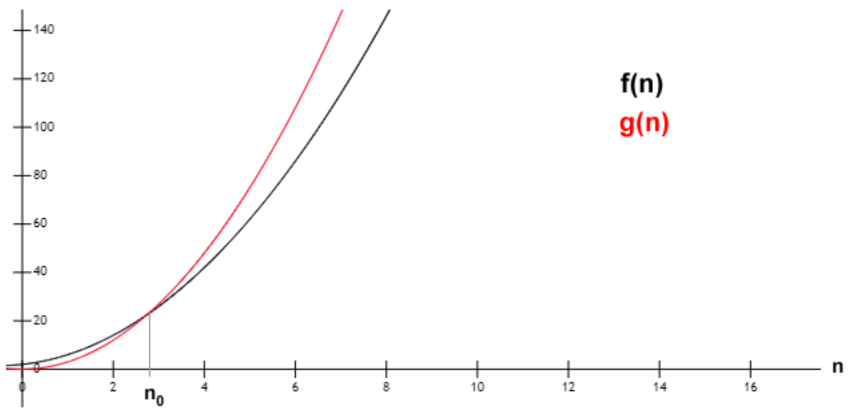


***Figura** 1 - Notazione asintotica O*

La **notazione asintotica** Ω è il limite asintotico inferiore.

Date due funzioni $f(n)$ e $g(n)$, si dice che $f(n) = \Omega(g(n))$ se esiste un valore $c > 0$ tale che $0 \leq c \cdot g(n) \leq f(n)$ per ogni $n \geq n_0$.

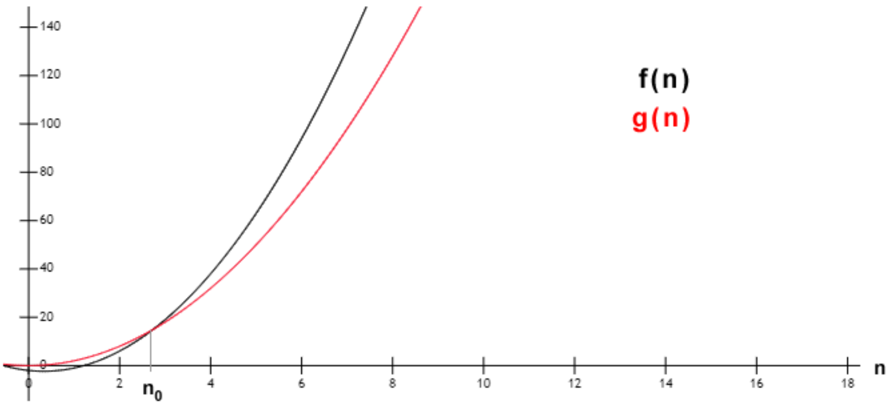


Figura 2 *- Notazione asintotica Omega*

La **notazione asintotica** θ è il limite asintotico stretto.

Date due funzioni $f(n)$ e $g(n)$, si dice che $f(n) = \theta(g(n))$ se esistono due valori $c_1 > 0$ e $c_2 > 0$ tali che $0 \leq c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)$ per ogni $n \geq n_0$.

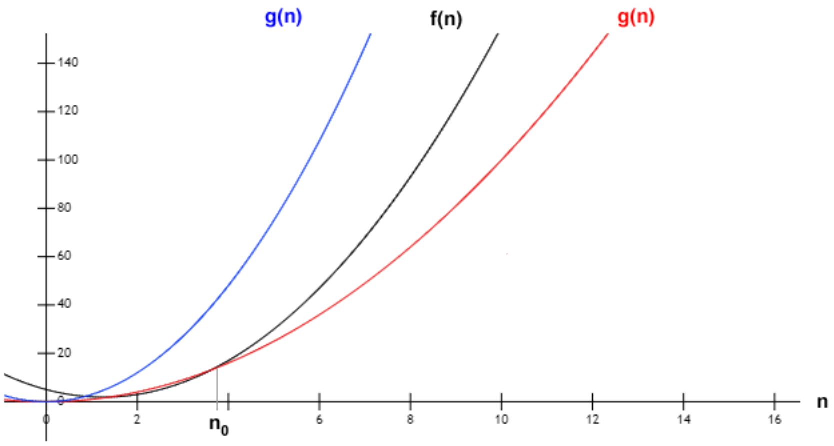


Figura 3 *- Notazione asintotica Theta*

Espressioni polinomiali

Consideriamo la seguente espressione polinomiale generica:

$$f(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0$$

con $a_k > 0$

Andiamo a dimostrare che $f(n) = \theta(n^k)$

Per eseguire tale dimostrazione occorre verificare che:

1. Il limite superiore è di ordine n^k
2. Il limite inferiore è di ordine n^k

Dimostriamo che il limite superiore è di ordine n^k:

$$\begin{aligned} f(n) &= a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0 \\ &\le a_k n^k + |a_{k-1}| n^{k-1} + \cdots + |a_1| n + |a_0| \\ &\le a_k n^k + |a_{k-1}| n^k + \cdots + |a_1| n^k + |a_0| n^k \\ &= (a_k + |a_{k-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|) n^k \le c n^k \end{aligned}$$

Questa è vera:

- Per $c \ge = (a_k + |a_{k-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|) > 0$
- Per ogni $n \ge n_0$ (in particolare $n_0 = 1$)

Dimostriamo che il limite inferiore è di ordine n^k:

$$\begin{aligned} f(n) &= a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0 \\ &\ge a_k n^k - |a_{k-1}| n^{k-1} - \cdots - |a_1| n - |a_0| \\ &\ge a_k n^k - |a_{k-1}| n^{k-1} - \cdots - |a_1| n^{k-1} - |a_0| n^{k-1} \ge d n^k \end{aligned}$$

Questa è vera:

- Per $d \le \left(a_k - \frac{|a_{k-1}|}{n} - \cdots - \frac{|a_1|}{n} - \frac{|a_0|}{n}\right) > 0$
- Per ogni $n \ge n_0$ (in particolare $n_0 \ge \frac{|a_{k-1}| + \cdots + |a_0|}{a_k}$)

In sostanza tale dimostrazione passa per l'individuazione di un limite superiore ed un limite inferiore che sono dello stesso ordine e pertanto $f(n) = O(n^k) = \Omega(n^k) = \theta(n^k)$

Proprietà

Analizziamo ora alcune delle proprietà più interessanti in notazione asintotica.

Eliminazione delle costanti:

$$f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow af(n) = O(g(n));\ \forall a > 0$$
$$f(n) = \Omega(g(n)) \Leftrightarrow af(n) = \Omega(g(n));\ \forall a > 0$$

Dimostrazione:

$$f(n) = O(g(n) \Leftrightarrow f(n) \le cg(n); \forall n \ge n_0$$
$$\Leftrightarrow af(n) \le acg(n);\ \forall n \ge n_0; \forall a \ \ge 0$$
$$\Leftrightarrow af(n) \le c'g(n);\ \forall n \ge n_0;\ c' = ac > 0$$
$$\Leftrightarrow af(n) = O(g(n))$$

Sommatoria:

$$f_1(n) = O(g_1(n));\ f_2(n) = O(g_2(n)) \ \Rightarrow\ f_1(n) + f_2(n) = O(max(g_1(n); g_2(n)))$$
$$f_1(n) = \Omega(g_1(n));\ f_2(n) = \Omega(g_2(n)) \ \Rightarrow\ f_1(n) + f_2(n) = \Omega(max(g_1(n); g_2(n)))$$

Dimostrazione:

$$f_1(n) = O(g_1(n)) \ \wedge\ f_2(n) = O(g_2(n)) \ \Rightarrow$$
$$f_1(n) \le c_1 g_1(n) \ \wedge\ f_2(n) \ \le c_2 g_2(n) \ \Rightarrow$$
$$f_1(n) + f_2(n) \ \le c_1 g_1(n) + c_2 g_2(n) \ \Rightarrow$$
$$f_1(n) + f_2(n) \le max\{c_1, c_2\}(2 * max(g_1(n); g_2(n))) \ \Rightarrow$$
$$f_1(n) + f_2(n) = O(max(g_1(n); g_2(n)))$$

Dualità:

$$f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \Omega(f(n))$$

Dimostrazione:

$$f(n) = O\big(g(n)\big) \Leftrightarrow f(n) \le cg(n); \forall n \ge n_0 \Leftrightarrow\ g(n) \ge \frac{1}{c} f(n);\ \forall n \ge n_0 \Leftrightarrow g(n)$$
$$\ge\ c' f(n);\ \forall n \ge n_0, c' = \frac{1}{c} \Leftrightarrow g(n) = \ \Omega(f(n))$$

Simmetria:

$$f(n) = \theta(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \theta(f(n))$$

Dimostrazione:

$$f(n) = \theta(g(n)) \Rightarrow f(n) = O(g(n)) \Rightarrow g(n) = \Omega(f(n))$$
$$f(n) = \theta(g(n)) \Rightarrow f(n) = \Omega(g(n)) \Rightarrow g(n) = O(f(n))$$

Transitiva:

$$f(n) = O\big(g(n)\big), g(n) = O(h(n)) \Rightarrow f(n) = O(h(n))$$

Dimostrazione:

$$f(n) = O(g(n)) \wedge g(n) = O(h(n)) \Rightarrow$$
$$f(n) \leq c_1 g(n) \wedge g(n) \leq c_2 h(n) \Rightarrow$$
$$f(n) \leq c_1 c_2 h(n) \Rightarrow$$
$$f(n) = O(h(n))$$

2. Limiti asintotici

Per determinare i limiti asintotici di due funzioni $f(n)$ e $g(n)$ si utilizza il metodo del limite del rapporto $f(n)/g(n)$.

Se il limite del rapporto $f(n)/g(n)$ per $n \to \infty$ è zero, allora la funzione $f(n)$ è $O(g(n))$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \; se \; e \; solo \; se \; f(n) = O(g(n))$$

Se il limite del rapporto $f(n)/g(n)$ per $n \to \infty$ è infinito, allora la funzione $f(n)$ è $\Omega(g(n))$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty \; se \; e \; solo \; se \; f(n) = \Omega(g(n))$$

Se il limite del rapporto $f(n)/g(n)$ per $n \to \infty$ tende a un numero finito k, allora la funzione $f(n)$ è $\theta(g(n))$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = k \; se \; e \; solo \; se \; f(n) = \theta(g(n))$$

I limiti asintotici hanno le seguenti proprietà:

- Transitiva.
- Riflessiva.
- Simmetrica.
- Simmetrica trasposta.

Notazioni piccole

Nella O grande è sufficiente che sia almeno un $c > 0$ tale che $0 \le f(n) \le cg(n)$ per ogni $n > n_0$. Nella o piccola, invece, per ogni $c > 0$ esiste un $n_0 > 0$ tale che $0 \le f(n) \le cg(n)$.

Quindi, la $o(g(n))$ piccola implica la $O(g(n))$ grande.

Nella omega grande Ω è sufficiente che sia almeno un $c > 0$ tale che $0 \le cg(n) \le f(n)$ per ogni $n > n_0$. Nella omega piccola ω, invece, per ogni $c > 0$ esiste un $n_0 > 0$ tale che $0 \le cg(n) \le f(n)$.

Quindi, la $\omega(g(n))$ piccola implica la $\Omega(g(n))$ grande.

3. La scala della complessità

Riportiamo di seguito la scala della complessità in base all'analisi delle funzioni:

- $O(k)$ → complessità costante
- $O(log\ n)$ → complessità logaritmica
- $O(n \cdot log\ n)$→ complessità pseudolineare
- $O(n)$ → complessità lineare (complessità minima)
- $O(n^2)$ → complessità quadratica (complessità media)
- $O(n^3)$ → complessità cubica
- $O(n^k)$ con $k > 0$ → complessità polinomiale
- $O(k^n)$ con $k > 0$ → complessità esponenziale
- $O(n!)$ con $k > 0$ → complessità fattoriale (complessità massima)

Da un punto di vista grafico:

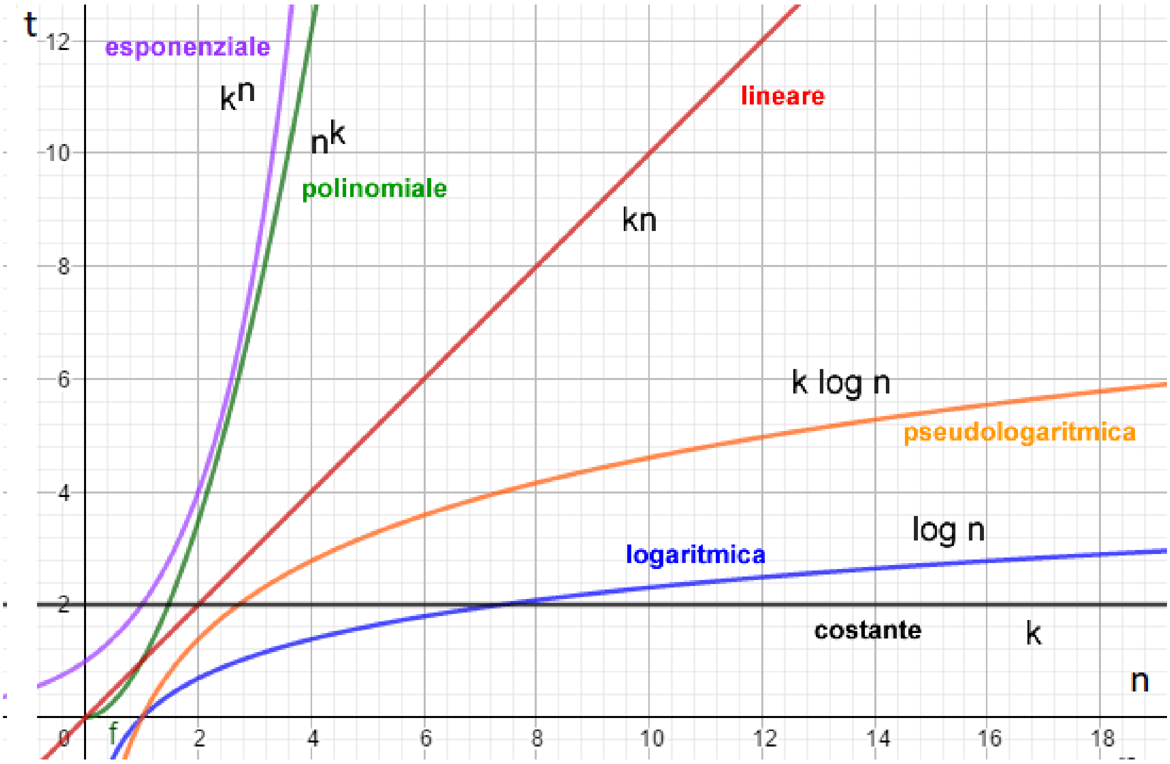


Figura 4 *- Scala della complessità*

Bibliografia

- Alan Bertossi, Alberto Motresor: Algoritmi e strutture di dati, Città Studi Edizioni, terza edizione.
- C. Demetrescu, I. Finocchi, G. F. Italiano: Algoritmi e strutture dati, McGraw-Hill, seconda edizione.
- Crescenzi, Gambosi, Grossi: Strutture di Dati e Algoritmi, Pearson/Addison-Wesley.
- Sedgewick: Algoritmi in C, Pearson, 2015.
- https://www.andreaminini.com/