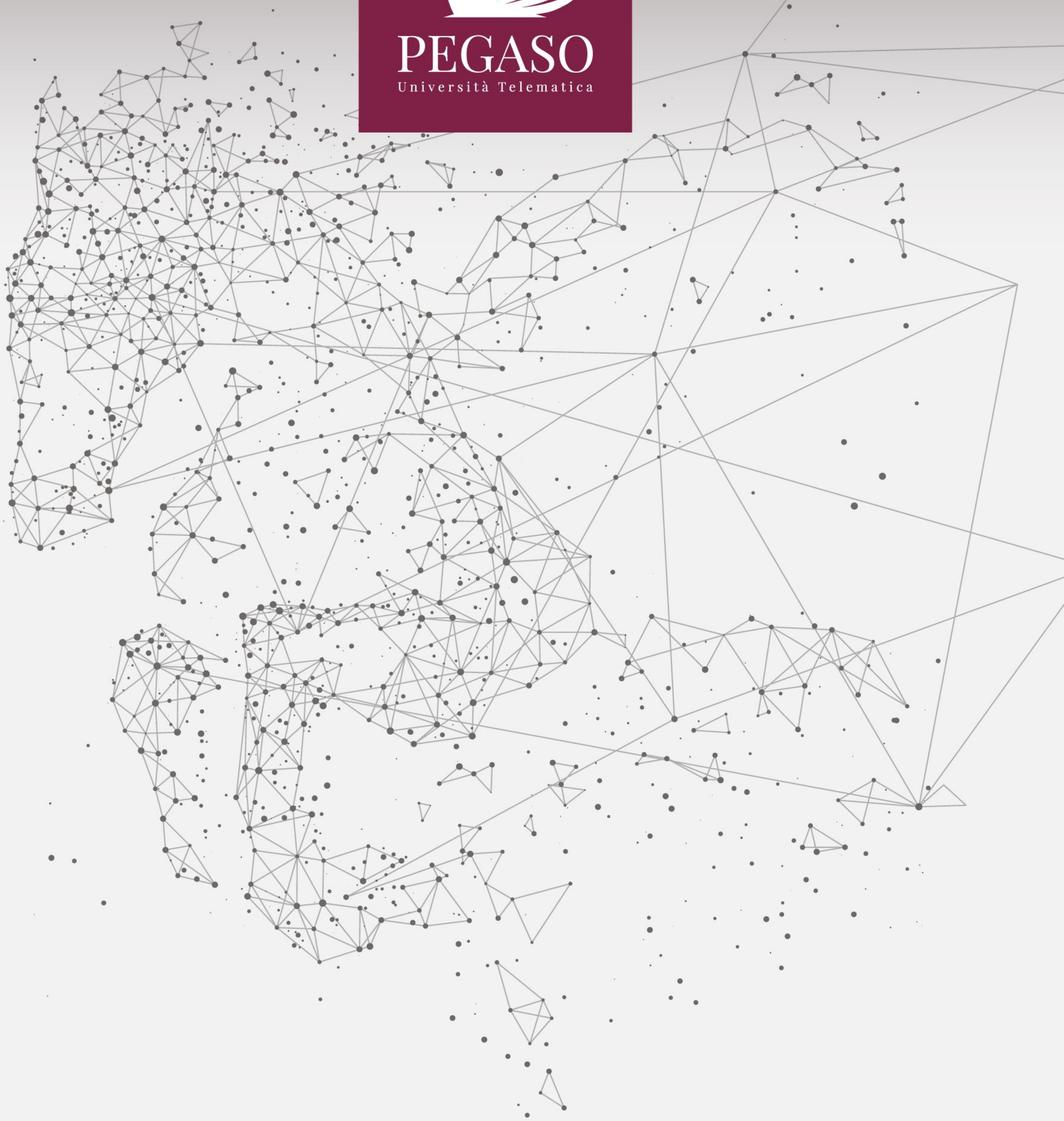
PEGASO
Università Telematica



Basi e dimensioni di spazi vettoriali

Corso di Geometria

Laurea in Ingegneria Civile

Nel corso dello studio dell'algebra lineare, uno degli obiettivi principali è imparare a descrivere gli spazi vettoriali in modo semplice ed efficiente, individuando gli elementi essenziali che permettono di generare tutto lo spazio. Questo ci porta naturalmente a introdurre due concetti chiave: la **base** di uno spazio vettoriale e la sua **dimensione**.

Una base è, in qualche modo, un "sistema di riferimento" interno allo spazio: un insieme minimo di vettori che, combinati linearmente, permettono di generare qualunque vettore dello spazio. Non si tratta però di un insieme qualsiasi: i vettori di una base devono essere tra loro linearmente indipendenti, ovvero non devono contenere ridondanze. Il numero di vettori che compongono una base ci dice qual è la **dimensione** dello spazio vettoriale, ovvero un'informazione fondamentale per comprendere le proprietà dello spazio stesso e per lavorare in modo efficiente con esso.

Oltre a studiare singoli spazi vettoriali, è spesso necessario considerare insiemi che derivano dall'intersezione o dalla somma di due sottospazi. Ad esempio, può capitarci di avere due insiemi di soluzioni che rappresentano condizioni diverse in un problema strutturale o fisico, e voler capire cosa hanno in comune (intersezione) oppure quale sia lo spazio complessivo che si ottiene combinandoli (somma). La somma di due sottospazi non è un'unione semplice, ma un insieme che contiene tutte le possibili combinazioni lineari tra vettori dei due sottospazi: è ancora un sottospazio, ma di dimensione che dipende dalla dimensione di ciascun sottospazio e da quanto essi si sovrappongono.

Per legare in modo preciso la dimensione della somma di due sottospazi alla dimensione delle loro parti e della loro intersezione, utilizzeremo una formula molto importante: la **formula di Grassmann**. Questa relazione ci permette di calcolare la dimensione della somma di due sottospazi conoscendo la dimensione dei singoli spazi e della loro intersezione:

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

Essa può essere vista come un'estensione del principio di inclusione-esclusione degli insiemi, adattato al contesto vettoriale.

Attraverso lo studio di questi concetti — base, dimensione, somma e intersezione di sottospazi — ci si dota di strumenti fondamentali per analizzare la struttura interna degli spazi vettoriali, per riconoscere relazioni tra vettori e per affrontare con rigore i problemi di natura lineare che si incontrano in ambito ingegneristico.

1 Base e dimensione di uno spazio vettoriale

Nella lezione precedente, abbiamo visto come la nozione di spazio vettoriale sia legata al concetto di combinazione lineare, e quindi di dipendenza e indipendenza lineare.

Iniziamo dunque dalla seguente importante definizione

Definizione 1.1. Si dice *base* di uno spazio vettoriale V un suo sistema di generatori linearmente indipendente.

La *dimensione* di uno spazio vettoriale V, denotata come $\dim(V)$, è il numero di elementi n di una qualunque base B di V.

Osservazione 1.2. In questo corso assumeremo sempre che lo spazio vettoriale di interesse sia *finitamente generato*, ovvero ammetta un insieme di generatori che sia di cardinalità finita: non è sempre questo il caso.

Infine, se $V = \{\mathbf{0}\}$, allora diremo che $\dim(V) = 0$.

Esempio 1.3. Verifichiamo che $\mathbb{R}^3$ sia uno spazio vettoriale di dimensione 3. Riprendendo l'esempio visto nella lezione precedente, avevamo verificato che $B = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ è un sistema di generatori per $\mathbb{R}^3$, dove

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Rimane ora da verificare che questo insieme B sia un insieme di vettori linearmente indipendenti. A tal proposito, possiamo agire in due modi:

- possiamo verificare se sia possibile scrivere il vettore nullo $\mathbf{0} = (0,0,0)^T$ come combinazione lineare (con coefficienti non tutti nulli) di $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$;
- possiamo verificare se sia possibile scrivere uno dei tre vettori $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ come combinazione lineare degli altri due.

Seguendo la prima via, possiamo vedere che una qualunque combinazione lineare di $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ è data da

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Imponendo l'uguaglianza della combinazione lineare precedente con il vettore nullo $\mathbf{0} = (0,0,0)$ otteniamo che necessariamente devono valere:

$$\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = 0 \qquad \lambda_3 = 0$$

Quindi l'unica combinazione lineare che fornisce il vettore nullo è quella a coefficienti tutti nulli. Otteniamo quindi che $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti.

Alternativamente, possiamo scegliere uno degli altri vettori, diciamo ad esempio $\boldsymbol{e}_1$, e vedere se può essere scritto come una combinazione lineare degli altri vettori. Avremmo quindi

$$\lambda_2 \boldsymbol{e}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{e}_1$$

Vediamo quindi che non c'è nessun modo di ottenere $\boldsymbol{e}_1$ come combinazione lineare degli altri, indipendentemente dalla scelta di λ_2 e λ_3. Deduciamo quindi che $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti.

In entrambi i casi, abbiamo ottenuto che $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ è un sistema di generatori per $\mathbb{R}^3$ ed un insieme di vettori linearmente indipendenti, quindi è una **base** di $\mathbb{R}^3$, e $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$.

Osservazione 1.4. Si può verificare che in $\mathbb{R}^n$ vale sempre che $\dim(\mathbb{R}^n) = n$, ed una sua base è data dai vettori $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$, dove $\boldsymbol{e}_i$ è il vettore che ha zero su tutte le componenti, tranne la i-esima che è uguale ad 1:

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \cdots \qquad \boldsymbol{e}_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'insieme $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ viene anche detto **base canonica** (o base **naturale**) di $\mathbb{R}^n$.

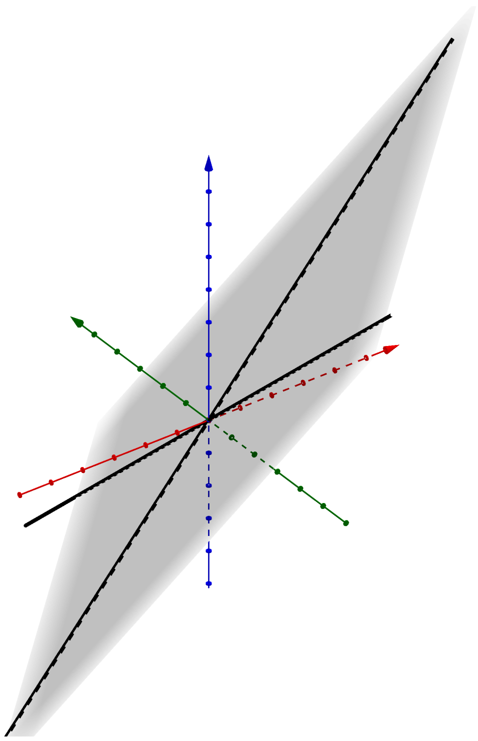
Esempio 1.5. Avendo introdotto la nozione di dimensione, possiamo vedere come una retta passante per l'origine in $\mathbb{R}^n$ sia un sottospazio 1-dimensionale di $\mathbb{R}^n$. Analogamente, un piano passante per l'origine è un sottospazio 2-dimensionale, e così via.

Osservazione 1.6. Abbiamo che se uno spazio vettoriale V ammette una base costituita da n elementi, allora **ogni** sottoinsieme linearmente indipendente di V contiene al più n vettori.

Come conseguenza, se $\dim(V) = n$ e abbiamo un sottospazio W di V tale che $\dim(W) = n$, allora necessariamente $W = V$.

2 Somma e intersezione di sottospazi

Dato uno spazio vettoriale V e due suoi sottospazi W_1 e W_2, vorremmo dare una nozione di sottospazio che comprenda sia W_1 che W_2. Tornando all'analogia geometrica, immaginiamo che V sia lo spazio cartesiano $\mathbb{R}^3$, e siano W_1 e W_2 due rette distinte passanti per l'origine. Sappiamo che W_1 e W_2 sono due sottospazi di V, e sappiamo anche che queste due rette devono essere contenute dentro un piano (si faccia riferimento anche al disegno sottostante). Dato che anche questo piano passa per l'origine, sappiamo pure che deve essere un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$. Come scrivere quindi questo piano?



La prima idea potrebbe essere di considerare l'unione insiemistica tra W_1 e W_2. Tuttavia, questo non risulta sufficiente: nello scrivere infatti l'insieme $W_1 \cup W_2$, stiamo considerando solo i punti che appartengono ad entrambe le rette, e non i punti che sono pure sul piano, ma che non sono sulle rette. La soluzione, quindi, consiste nel considerare la chiusura lineare di $W_1 \cup W_2$:

Definizione 2.1. Siano W_1 e W_2 sottospazi dello spazio vettoriale V. Si dice *somma* di W_1 e W_2 il sottospazio

$$W_1 + W_2 = L(W_1 \cup W_2) = \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$$

Chiaramente, $W_1 + W_2$ è il **più piccolo sottospazio di V che contiene sia W_1 che W_2** (essendo la chiusura lineare dell'unione).

Si può verificare, invece, che l'intersezione tra due spazi vettoriali è sempre uno spazio vettoriale: pertanto, $W_1 \cap W_2$ è il **più grande sottospazio di V contenuto in W_1 e W_2**.

3 Relazione di Grassmann

Theorem 3.1 (Relazione di Grassmann)**.** Se W_1 e W_2 sono sottospazi vettoriali di V si ha:

$$\dim(W_1) + \dim(W_2) = \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2)$$

Esempio 3.2. Verifichiamo la formula di Grassmann sull'esempio grafico visto sopra. In questa situazione, W_1 e W_2 sono due rette passanti per l'origine: abbiamo visto che una tale retta può essere vista come uno spazio vettoriale di dimensione 1. Pertanto, abbiamo $\dim(W_1) = \dim(W_2) = 1$.

L'intersezione tra queste due rette è precisamente l'origine dello spazio cartesiano: per quanto visto precedentemente, questo costituisce uno spazio vettoriale (triviale) di dimensione 0; quindi, $\dim(W_1 \cap W_2) = 0$.

La somma invece di queste due rette, $W_1 + W_2$, è il piano che le contiene, rappresentato sopra. Dato che un piano passante per l'origine è uno spazio 2-dimensionale, abbiamo che $\dim(W_1 + W_2) = 2$.

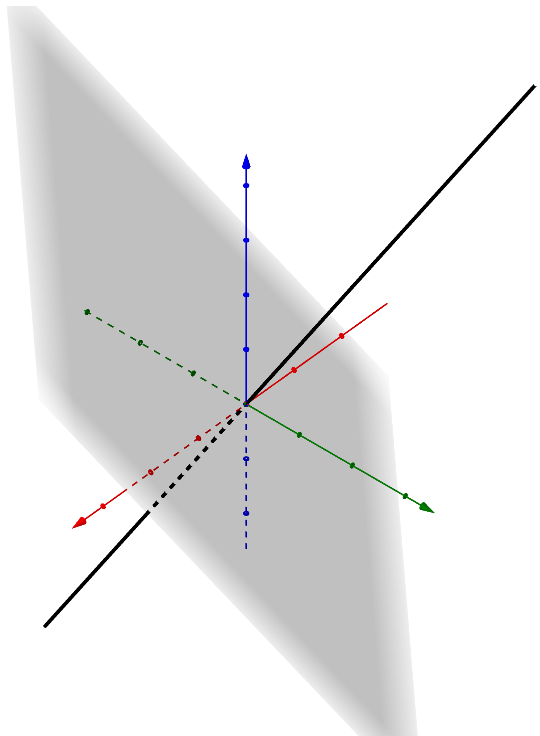
Sostituendo le varie dimensioni trovate nella formula di Grassmann, vediamo che effettivamente l'identità è verificata:

$$\dim(W_1) + \dim(W_2) = \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2)$$
$$1 + 1 = 2 + 0$$

Come ormai abbiamo visto, sovente è utile interrogarsi su cosa possa succedere nei casi estremi delle indentità che vengono studiate mano a mano. In questo caso:

Definizione 3.3. Due sottospazi vettoriali W_1 e W_2 vengono detti *indipendenti* se $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$. In tal caso, il loro spazio somma sarà detto *somma diretta* di W_1 e W_2, e indicato con $W_1 \oplus W_2$. Se $V = W_1 \oplus W_2$, diremo che V è *somma diretta* di W_1 e W_2.

Esempio 3.4. Consideriamo adesso la situazione in cui abbiamo una retta passante per l'origine, ed un piano passante per l'origine, nel caso in cui la retta **non** appartiene al piano:



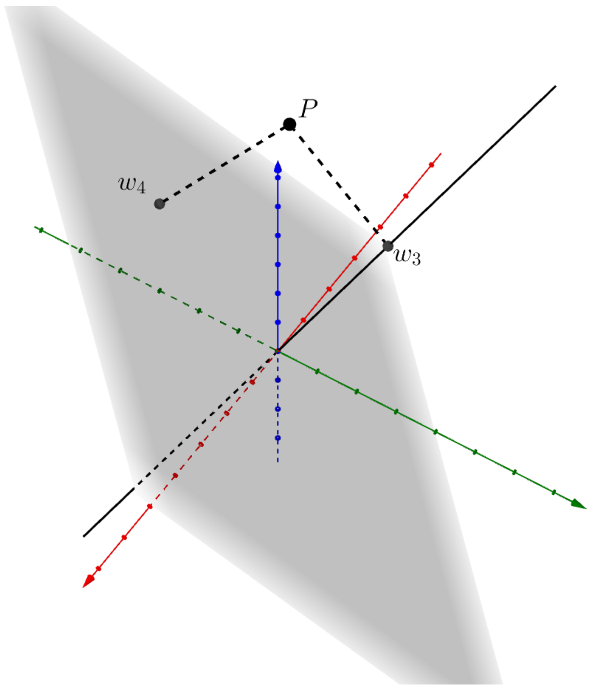
Ribadendo ancora una volta che la retta costituisce un sottospazio 1-dimensionale di $\mathbb{R}^3$, denotandolo con W_3, mentre il piano è un sottospazio 2-dimensionale di $\mathbb{R}^3$, diciamo W_4, possiamo applicare la formula di Grassmann per trovare la dimensione dello spazio somma.

Innanzitutto, verifichiamo immediatamente che l'intersezione tra W_3 e W_4 è il sottospazio banale $\{\mathbf{0}\}$, pertanto $\dim(W_3 \cap W_4) = 0$. Dalla formula di Grassmann quindi:

$$\begin{aligned} \dim(W_3) + \dim(W_4) &= \dim(W_3 + W_4) + \dim(W_3 \cap W_4) \\ 1 + 2 &= \dim(W_3 + W_4) + 0 \\ 3 &= \dim(W_3 + W_4) \end{aligned}$$

Otteniamo quindi che $\dim(W_3 + W_4) = 3$. Tuttavia, stiamo osservando un sottospazio di dimensione 3, che deve essere contenuto dentro $\mathbb{R}^3$. Pertanto, abbiamo che necessariamente $\mathbb{R}^3 = W_3 + W_4$, quindi $\mathbb{R}^3$ è somma diretta di W_3 e W_4.

Nella pratica, questo significa che ogni punto P dello spazio $\mathbb{R}^3$ può essere "scomposto" nelle sue proiezioni sulla retta w_3 e sul piano w_4, quindi $P = w_3 + w_4$, come rappresentato nella seguente figura:



4 Completamento ad una base

La formula di Grassmann e la somma di sottospazi suggerisce inoltre un'altra interessante applicazione pratica.

Infatti, nel caso in cui ci venga fornito un insieme di vettori X, che supponiamo essere linearmente indipendenti, possiamo sempre cercare di costruire una base dello spazio vettoriale a partire da esso: la strategia, fondamentalmente, consiste nel cercare vettori che non siano nella chiusura lineare di X. Questi esistono sicuramente, perchè altrimenti $L(X) = V$ e X sarebbe già una base per V.

Una volta preso un vettore $\boldsymbol{v} \notin L(X)$, possiamo considerare la sua chiusura lineare $L(\{\boldsymbol{v}\})$: questo sarà uno spazio vettoriale di dimensione 1, *indipendente* da $L(X)$, quindi da Grassmann

$$\dim(L(\{\boldsymbol{v}\}) + L(X)) = \dim(L(\{\boldsymbol{v}\})) + \dim(L(X)) = 1 + \dim(L(X))$$

Dato che X è un insieme di vettori linearmente indipendenti, abbiamo che $\dim(L(X)) = |X|$ (la cardinalità di X), quindi la dimensione dello spazio somma $L(\{\boldsymbol{v}\}) + L(X)$ è $|X| + 1$. Questo implica che v sia linearmente indipendente dai vettori di X, e quindi $X \cup \{v\}$ è ancora un insieme di vettori linearmente indipendenti.

Possiamo quindi procedere iterativamente ad aggiungere vettori dentro l'insieme X, finchè non cade l'ipotesi fatta all'inizio dell'algoritmo, ovvero finchè **non riusciamo a trovare vettori** $v \notin L(X)$. Questo significa che X genera tutto lo spazio vettoriale V, e quindi che X è una base per V.

Abbiamo quindi dimostrato in maniera discorsiva il seguente risultato:

Theorem 4.1 (Completamento a una base)**.** Sia V uno spazio vettoriale avente dimensione n e sia X un sottoinsieme di V costituito di vettori linearmente indipendenti, avente cardinalità $h < n$. Allora esiste sempre un sottoinsieme X' di V avente cardinalità $n - h$ e tale che $X \cup X'$ sia una base di V.

Esempio 4.2. Considerato lo spazio $\mathbb{R}^4$, completiamo $X = \{(2, -1, 0, 1)^T, (3, 0, 0, 2)^T\}$ ad una base.

Innanzitutto, sappiamo che $\dim(R^4) = 4$, quindi dobbiamo aspettarci di trovare un insieme di generatori avente 4 vettori linearmente indipendenti.

Come primo passaggio, verifichiamo che i due vettori contenuti in X siano tra loro linearmente indipendenti. A tale scopo, è sufficiente verificare che non esista nessun coefficiente $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Questo segue immediatamente: ad esempio, affinchè le prime coordinate siano uguali dovremmo avere $2 = 3\alpha$, quindi $\alpha = 2/3$, mentre affinchè le ultime coordinate siano uguali dovremmo avere $1 = 2\alpha$, ovvero $\alpha = 1/2$. Dato che le due condizioni non possono essere verificate contemporaneamente, segue che i due vettori sono tra loro indipendenti.

Guardiamo quindi a cosa corrisponderebbe $L(X)$: dobbiamo considerare tutte le combinazioni lineari di questi due vettori, ottenendo quindi

$$\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha + 3\beta \\ -\alpha \\ 0 \\ \alpha + 2\beta \end{pmatrix}$$

Una prima osservazione che possiamo fare è notare che per queste due scelte di vettori la terza coordinata di $L(X)$ sarà sempre pari a 0. Pertanto, qualunque vettore avente terza componente non nulla sarà indipendente dagli altri. La scelta più naturale, quindi, è di aggiungere il vettore $\boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1, 0)^T$ all'insieme X. Abbiamo quindi che $L(X \cup \{\boldsymbol{e}_3\})$ è dato da:

$$\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha + 3\beta \\ -\alpha \\ \gamma \\ \alpha + 2\beta \end{pmatrix}$$

Per trovare adesso un quarto vettore che sia linearmente indipendente dagli altri, possiamo seguire il seguente ragionamento: prendiamo un vettore $\boldsymbol{x}$ di componenti x_1, x_2, x_3, x_4, e cerchiamo di vedere se da qualche assegnazione casuale di queste componenti possiamo estrarre i valori parametri α, β e γ; possiamo notare anche che la seconda e la terza componente di un vettore in $L(X)$ sono rispettivamente $-\alpha$ e γ.

Immaginiamo quindi di prendere $x_2 = -1$ e $x_3 = 1$ (sono scelte casuali). Sotto queste condizioni, affinchè questo vettore appartenga ad $L(X)$ dobbiamo avere necessariamente $-\alpha = -1$ e $\gamma = 1$:

$$\begin{pmatrix} 2\alpha + 3\beta \\ -\alpha \\ \gamma \\ \alpha + 2\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ... \\ -1 \\ 1 \\ ... \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad -\alpha = -1 \qquad \gamma = 1$$

Ma quindi, se $\alpha = 1$ e $\gamma = 1$, il vettore di $L(X)$ deve avere per forza queste componenti:

$$\begin{pmatrix} 2+3\beta \\ -1 \\ 1 \\ 1+2\beta \end{pmatrix}, \text{ per un qualche } \beta \in \mathbb{R}$$

Ipotizziamo adesso che $x_4 = 1$. Questo implicherebbe che

$$\begin{pmatrix} 2+3\beta \\ -1 \\ 1 \\ 1+2\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ... \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow 1+2\beta = 1 \quad \Rightarrow \quad \beta = 0$$

Ma quindi, se $\beta = 0$, allora l'unico vettore in $L(X)$ avente $x_2 = -1$, $x_3 = 1$ e $x_4 = 1$ deve avere $x_1 = 2 + 3\beta = 2 + 3 \cdot 0 = 2$. Quindi ogni altro vettore $(y_1, -1, 1, 1)$, in cui $y_1 \neq 2$, non può essere contenuto dentro $L(X)$.

Concludiamo quindi scegliendo un y_1 qualunque, che non sia 2 (ad esempio $y_1 = 0$). Necessariamente il vettore $\boldsymbol{y} = (0, -1, 1, 1)$ sarà linearmente indipendente da $X \cup \{\boldsymbol{e}_3\}$, quindi $X \cup \{\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{y}\}$ sarà un sistema di generatori per $\mathbb{R}^4$, ed essendo linearmente indipendenti tra loro ne deduciamo che $X \cup \{\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{y}\}$ è una base per $\mathbb{R}^4$.

Test di autovalutazione

Si risponda alle seguenti domande sulla presente lezione. Ogni domanda ammette esattamente una risposta corretta.

1. Se B é una base di uno spazio vettoriale, allora:

   (A) non esiste una combinazione lineare di vettori di B che fornisce il vettore nullo.

   (B) se $\boldsymbol{v}$ appartiene a B, allora $-\boldsymbol{v}$ non appartiene a $\boldsymbol{v}$.

   (C) $\mathbf{0}$ appartiene a B.

   (D) B è costituito dai vettori canonici $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$.

2. Dati due sottospazi W_1 e W_2 di uno spazio vettoriale V

   (A) La loro unione $W_1 \cup W_2$ non può essere un sottospazio.

   (B) W_1 è contenuto dentro W_2.

   (C) La loro somma è lo spazio vettoriale V.

   (D) La loro intersezione contiene il vettore nullo $\mathbf{0}$.

3. La formula di Grassmann

   (A) mette in relazione le basi dei sottospazi di uno spazio vettoriale.

   (B) ha come conseguenza il fatto che $\dim(W_1 + W_2) \geq \dim(W_1) + \dim(W_2)$.

   (C) afferma che $\dim(W_1) + \dim(W_2) = \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2)$ per ogni W_1, W_2 sottoinsiemi di V.

   (D) ci permette di dire che se per due sottospazi W_1 e W_2 vale $\dim(W_1 \cap W_2) = 0$, allora la somma $W_1 + W_2$ è diretta.

4. In uno spazio vettoriale di dimensione 15 si consideri un sottospazio Udi dimensione 8 ed un sottospazio W di dimensione 7. Allora

   (A) Una base di U può essere ottenuta da W aggiungendo un vettore.

   (B) $8 \leq \dim(U + W) \leq 15$.

(C) $V \neq U + W$.

(D) Nessuna delle precedenti.

5. Dati due sottospazi vettoriali U e W, allora

(A) se $U \subset W$, allora ogni base di U può essere completata ad una base di W.

(B) $U + W$ ha dimensione almeno $\dim(U) + \dim(W)$.

(C) $U \cap W = \mathbf{0}$.

(D) È sempre possibile trovare un vettore che non appartenga a $U + W$.

6. Quale delle seguenti è una base di $\mathbb{R}^3$?

(A) $\{(0, 1, 8), (1, 0, 3), (1, 1, 0)\}$

(B) $L(\{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\})$

(C) $\{(1, 0, 0), (2, 3, 1), (-1, 4, -5), (0, 1, 5)\}$.

(D) $\{(2, 1, 1), (-1, 2, 0), (1, 3, 1)\}$

7. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

(A) È sempre possibile completare un insieme di vettori ad una base.

(B) Due spazi vettoriali in somma diretta non si intersecano.

(C) In uno spazio vettoriale di dimensione n, $n + 1$ vettori saranno sempre linearmente dipendenti.

(D) Una base di uno spazio vettoriale è chiusa linearmente.

8. La dimensione di uno spazio vettoriale

(A) Non può essere 0.

(B) È la cardinalità di un insieme di generatori.

(C) Dipende dalla base scelta.

(D) È il massimo numero di vettori linearmente indipendenti dello spazio.

9. Dati i sottospazi $U = L(\{(3, 1, 0), (0, 0, 1)\})$ e $W = L(\{(3, 1, 5)\})$ in $\mathbb{R}^3$

(A) $\dim(U + W) = 3$.

(B) $\dim(U \cap W) = 1$.

(C) U e W sono in somma diretta.

(D) $U \cap W = \mathbf{0}$.

10. Dato un insieme di generatori X di vettori linearmente dipendenti

(A) esiste un sottoinsieme di X che costituisce una base per lo spazio vettoriale.

(B) esiste un vettore $\boldsymbol{v}$ dello spazio tale che $L(X)$ sia in somma diretta con $L(\boldsymbol{v})$.

(C) X può essere completato ad una base.

(D) se lo spazio vettoriale ha dimensione n, allora $|X| \leq n$.