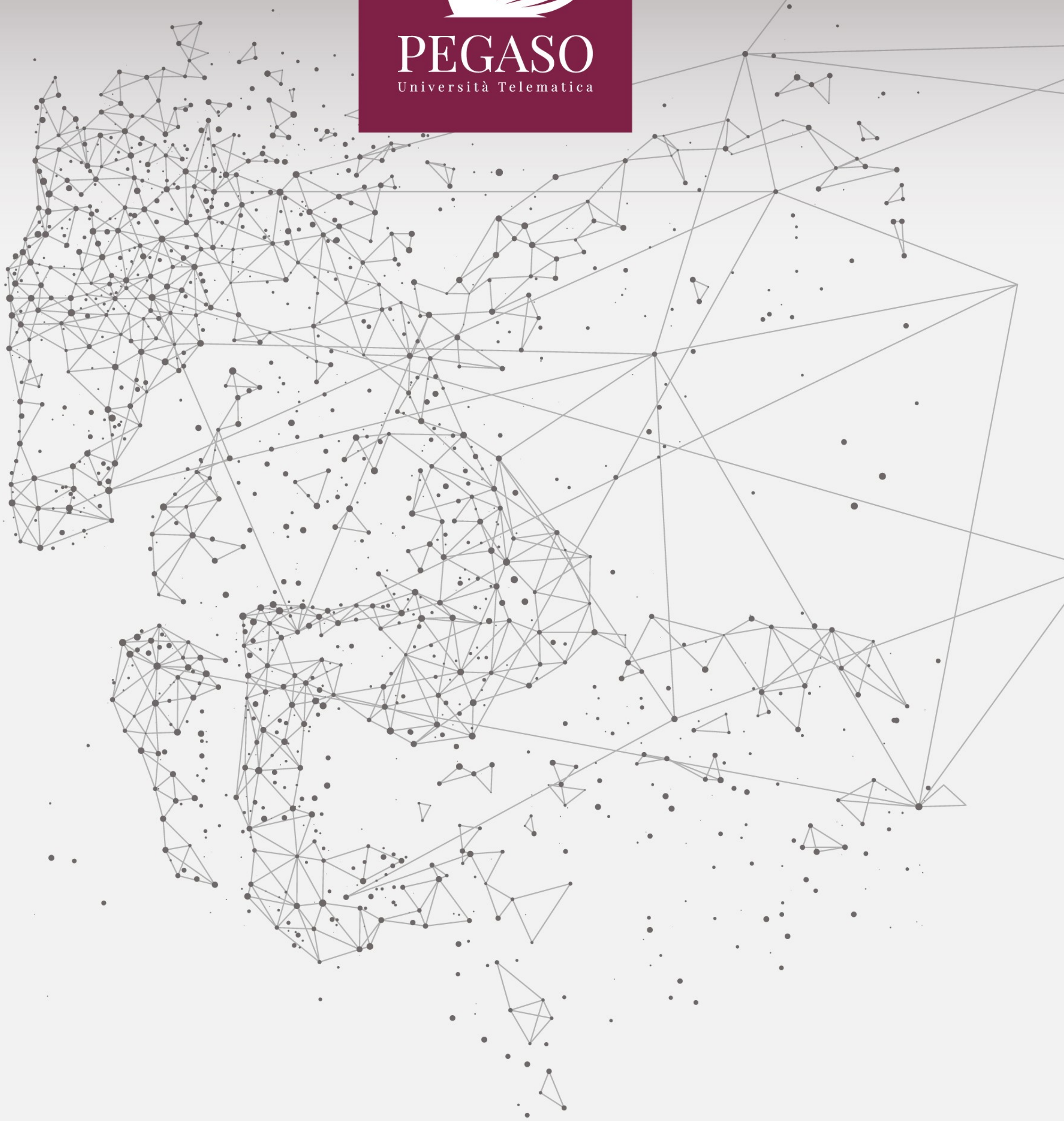
PEGASO
Università Telematica



Distribuzione di Poisson

Paolo Sciattella

Caratteristiche

PEGASO
Università Telematica

Caratteristiche

- La v. c. di Poisson si presta bene a rappresentare il numero di eventi che si possono presentare in un periodo di tempo fissato come, per esempio, il numero di clienti che si presentano a uno sportello bancario in un giorno, il numero di autovetture che attraversano un casello autostradale in un'ora fissata, il numero di temporali che si verificano a Roma in un anno.

PEGASO
Università Telematica

Caratteristiche

Definizione: una v. c. Poisson, indicata con $X \sim Poisson(\lambda)$, è una v. c. discreta che può assumere qualsiasi valore intero $x \geq 0$.

La distribuzione di probabilità della Poisson è data da:

$$\mathrm{P}(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

$x = 0, 1, \dots, n; \quad 0 < \lambda < +\infty;$

PEGASO
Università Telematica

Caratteristiche

Esempio: siamo interessati a studiare la frequenza delle chiamate a un certo centralino telefonico di emergenza, per essere in grado di migliorare il servizio verso l'utenza.

Decidiamo di focalizzare la nostra attenzione sul numero di chiamate ricevute tra le 22:00 e le 23:00.

La v. c. X di interesse sarà quindi il *Numero di chiamate ricevute nel periodo di tempo fissato*, ossia una variabile casuale discreta che può assumere i valori 0, 1, 2, ...

PEGASO
Università Telematica

Caratteristiche

Ipotizziamo che $X \sim Poisson(2)$, ne risulta che:

$$P(X=0)=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}=\frac{2^0}{0!}e^{-2}=\frac{1}{1}e^{-2}=0{,}1353$$

$$P(X=1)=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}=\frac{2^1}{1!}e^{-2}=\frac{2}{1}e^{-2}=0{,}2767$$

$$P(X=2)=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}=\frac{2^2}{2!}e^{-2}=\frac{4}{2}e^{-2}=0{,}2767$$

PEGASO
Università Telematica

Caratteristiche

Continuando si ottiene:

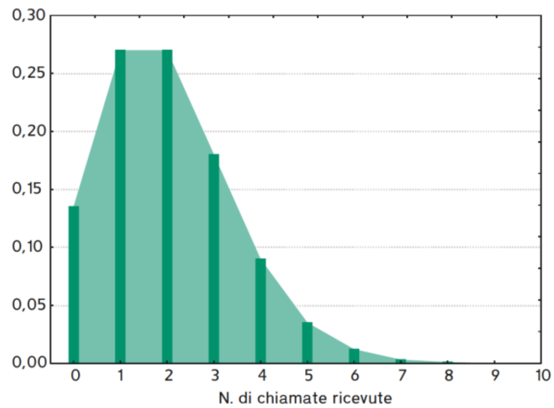
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P(x)$	0,1353	0,2707	0,2707	0,1804	0,0902	0,0361	0,0120	0,0034	0,0009	0,0002

ossia, la probabilità di ricevere 0 chiamate tra le 22:00 e le 23:00 è pari a 0,1353; la probabilità di riceverne 1 o 2 è uguale e pari a 0,2767; la probabilità di riceverne 9 è pari a 0,0002. Valori di $X > 9$ possiedono probabilità così piccole che possono essere trascurate.

PEGASO
Università Telematica

Caratteristiche

Graficamente, la distribuzione di probabilità è la seguente:



Caratteristiche

Per la v. c. $X \sim Poisson(\lambda)$, la media e la varianza sono date da:

$E(X) = \lambda \;\; e \;\; V(X) = \lambda$

In altre parole, la media e la varianza sono uguali al valore dell'unico parametro, λ, della distribuzione.

PEGASO
Università Telematica

Postulati e proprietà

Postulati e proprietà

- Ci si può chiedere quando una variabile casuale X che rappresenti un conteggio segua effettivamente una distribuzione di Poisson.

- A questo riguardo sono stati introdotti i cosiddetti **postulati di Poisson**.

Postulati e proprietà

Sia X una v. c. discreta che rappresenta il numero di realizzazioni di un evento aleatorio in un dato intervallo di tempo. Se siamo in grado di suddividere tale intervallo in tanti sottointervalli per i quali valgano le seguenti condizioni:

- la probabilità di osservare esattamente un successo nel sottointervallo è costante;
- la probabilità di osservare più di un successo nel sottointervallo è zero;
- il verificarsi di un successo in un sottointervallo è indipendente dal verificarsi del successo in un altro sottointervallo.

Allora si ha $X \sim Poisson(\lambda)$

Postulati e proprietà

Riprendiamo l'esempio relativo alla v. c X: *frequenza delle chiamate a un centralino telefonico di emergenza tra le 22:00 e le 23:00*.

con $\lambda = 2$, $E(X) = 2$ e con la seguente distribuzione di probabilità:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P(x)$	0,1353	0,2707	0,2707	0,1804	0,0902	0,0361	0,0120	0,0034	0,0009	0,0002

PEGASO
Università Telematica

Postulati e proprietà

È possibile suddividere l'intervallo di tempo di un'ora rispetto a cui è definita la v. c. X, in tanti sottointervalli di 1 minuto, in cui:

- il numero atteso di chiamate in un minuto è costante e pari a $\mathrm{E(X)}/60 = 2/60 = 0{,}033$;
- la probabilità di osservare più di una chiamata in un minuto è vicina allo zero (< 0,001);
- l'arrivo di una chiamata in un certo minuto è indipendente dall'arrivo di una chiamata.

La v. c. X rispetta quindi i postulati di Poisson!

Postulati e proprietà

Per verificare il postulato 2 «la probabilità di osservare più di una chiamata in un minuto è vicina allo zero (< 0,0010)» dobbiamo considerare che per la v. c. X *numero di chiamate in un minuto* si ha:

$$\lambda = \frac{2}{60} = 0{,}033$$

Quindi per calcolare la probabilità di osservare più di una chiamata dobbiamo calcolare:

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]$$

PEGASO
Università Telematica

Postulati e proprietà

Ricordando che:

$$P(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

Avremo che:

$$P(X = 0) = \frac{0{,}033^0}{0!} e^{-0{,}033} = 1 \cdot e^{-0{,}033} = 0{,}9675$$

$$P(X = 1) = \frac{0{,}033^1}{1!} e^{-0{,}033} = 0{,}033 \cdot e^{-0{,}033} = 0{,}0319$$

Quindi:

$$P(X > 1) = 1 - 0{,}9675 - 0{,}0319 = 0{,}0005$$

PEGASO
Università Telematica

Postulati e proprietà

Proprietà della distribuzione di Poisson:

1. Una somma di v. c. di Poisson indipendenti è ancora una v. c. di Poisson. In particolare, siano $X_1, X_2, \dots, X_n$ v. c. di Poisson con media, rispettivamente, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$;
allora la v. c. somma $\mathrm{Y} = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ è ancora una v. c. di Poisson con media $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$
2. La v. c. Binomiale, al crescere di n (numero di prove) e al diminuire di π (probabilità di successo), così da mantenere np costante, tende a una v. c. di Poisson con parametro $\lambda = n\pi$

PEGASO
Università Telematica

Esempio

Esempio

In un ospedale, il numero di pazienti che arrivano al pronto soccorso in un’ora segue una distribuzione di Poisson con media $\lambda = 5$ (in media 5 pazienti all’ora).

- Qual è la probabilità che in un’ora arrivino esattamente 3 pazienti?
- Qual è la probabilità che arrivino al massimo 2 pazienti in un’ora?
- Qual è la probabilità che in un’ora arrivino più di 3 pazienti?

PEGASO
Università Telematica

Esempio

In base alle informazioni date, possiamo considerare la v. c. $X \sim Poisson(5)$ per la quale abbiamo che:

$$\mathrm{P}(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

Quindi la probabilità che arrivino esattamente 3 pazienti è pari a:

$$P(X = 3) = \frac{5^3}{3!} e^{-5} = \frac{125}{3 \cdot 2} e^{-5} = \frac{125}{6} 0{,}0067 = 0{,}1404$$

PEGASO
Università Telematica

Esempio

Per calcolare la probabilità che arrivino al massimo 2 pazienti, dobbiamo calcolare:

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

ossia:

$$P(X = 0) = \frac{5^0}{0!}e^{-5} = \frac{1}{1}e^{-5} = 0{,}0067$$

$$P(X = 1) = \frac{5^1}{1!}e^{-5} = \frac{5}{1}e^{-5} = 5 \cdot 0{,}0067 = 0{,}0337$$

$$P(X = 2) = \frac{5^2}{2!}e^{-5} = \frac{25}{2}e^{-5} = 12{,}5 \cdot 0{,}0067 = 0{,}0842$$

quindi:

$$P(X \leq 2) = 0{,}0067 + 0{,}0337 + 0{,}0842 = 0{,}1246$$

PEGASO
Università Telematica

Esempio

Infine, per calcolare la probabilità che in un'ora arrivino più di 3 pazienti, dobbiamo calcolare:

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3)$$

Sfruttando le probabilità calcolate nei punti precedenti, possiamo scrivere:

$$P(X \leq 3) = P(X \leq 2) + P(X = 3)$$

quindi

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 2) - P(X = 3) =$$
$$= 1 - 0{,}1246 - 0{,}1404 = 0{,}7350$$

Esempio

Come visto nel paragrafo precedente, al crescere delle prove n e per piccoli valori della probabilità di successo π, una v. c. Binomiale tende a una v. c. di Poisson con parametro $\lambda = n\pi$.

Esempio:

Un'azienda produce schede elettroniche e, in media, l'1,2% delle schede ha un difetto di fabbricazione.

Selezionando casualmente 100 schede, qual è la probabilità che esattamente 3 schede siano difettose?

PEGASO
Università Telematica

Esempio

In questo caso potremmo risolvere l'esercizio usando la distribuzione binomiale, di parametri n e π. Ossia

$X \sim Binomiale(n, \pi)$ con $n = 100$ e $\pi = 0{,}012$

Si ha quindi

$P(x) = \binom{n}{x}\pi^x(1-\pi)^{n-x}$ e

$$P(X=3) = \binom{100}{3} 0{,}012^3(1-0{,}012)^{100-3} = 0{,}0866$$

161.700

Esempio

In alternativa, potremmo risolvere l'esercizio usando la distribuzione di Poisson con parametro $\lambda = n\pi$. Ossia

$X \sim Poisson(\lambda)$ con $\lambda = n\pi = 100 * 0{,}012 = 1{,}2$

Si ha quindi:

$$\mathrm{P}(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

$$P(X = 3) = \frac{1{,}2^3}{3!} e^{-1{,}2} = \frac{1{,}728}{6} 0{,}3012 = 0{,}0867$$

I risultati sono sovrapponibili: 0,0866 con Binomiale e 0,0867 con Poisson