Le variabili casuali: introduzione

Paolo Sciattella

Introduzione

Introduzione

- Nelle lezioni precedenti abbiamo introdotto gli eventi come possibili risultati di una prova.
- Abbiamo associato a ciascun evento una probabilità, che abbiamo visto possedere proprietà importanti.
- D’altra parte potrebbe essere molto scomodo trattare direttamente gli eventi e la trattazione diventa più semplice ed efficace se associamo delle quantità numeriche agli eventi.
- L’introduzione del concetto di variabile casuale (per brevità indicata a volte v.c.) permette di tenere conto proprio di questa esigenza.

Introduzione

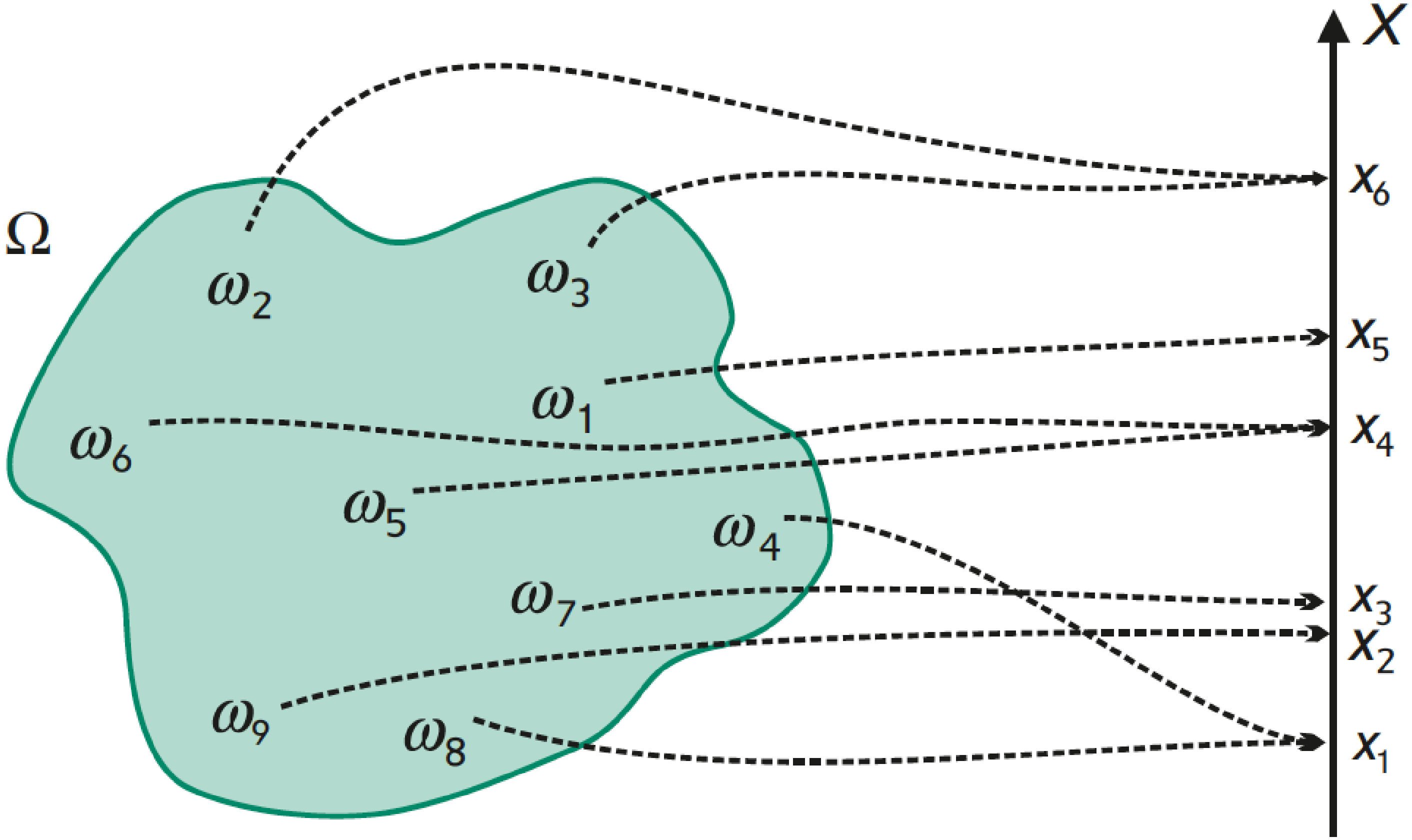
Introduciamo innanzitutto una definizione di variabile casuale. Si è visto come a una particolare ***prova*** sia possibile associare l'insieme degli eventi elementari $\omega_i \in \Omega$ (i diversi possibili esiti della prova) e la classe di tutti gli eventi $\varepsilon = [E_1, E_2, \dots, E_p]$, costituita da tutti i possibili sottoinsiemi di Ω ai quali è possibile assegnare la ***probabilità***.

Introduzione

- Una variabile casuale (o variabile aleatoria) X è una **funzione** definita sullo spazio campionario Ω che associa a ogni risultato elementare ω_i un unico numero reale.

- Come vedremo negli esempi che seguono, una variabile casuale è in sostanza una variabile il cui valore numerico è determinato dal risultato di una prova.

Introduzione



- Una variabile casuale X è una **funzione** definita sullo spazio campionario Ω che associa a ogni risultato elementare ω_i un unico numero reale x_i.

Esempi di variabile casuale

Esempi di variabile casuale

ESEMPIO: Lancio di un dado

In questo caso la v.c. associa a ogni faccia del dado (evento elementare) il numero impresso sulla faccia (ossia un valore intero compreso tra 1 e 6):

$X: lancio\ di\ un\ dado$
$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

$x_i = i$ con i=1,2,…,6

Esempi di variabile casuale

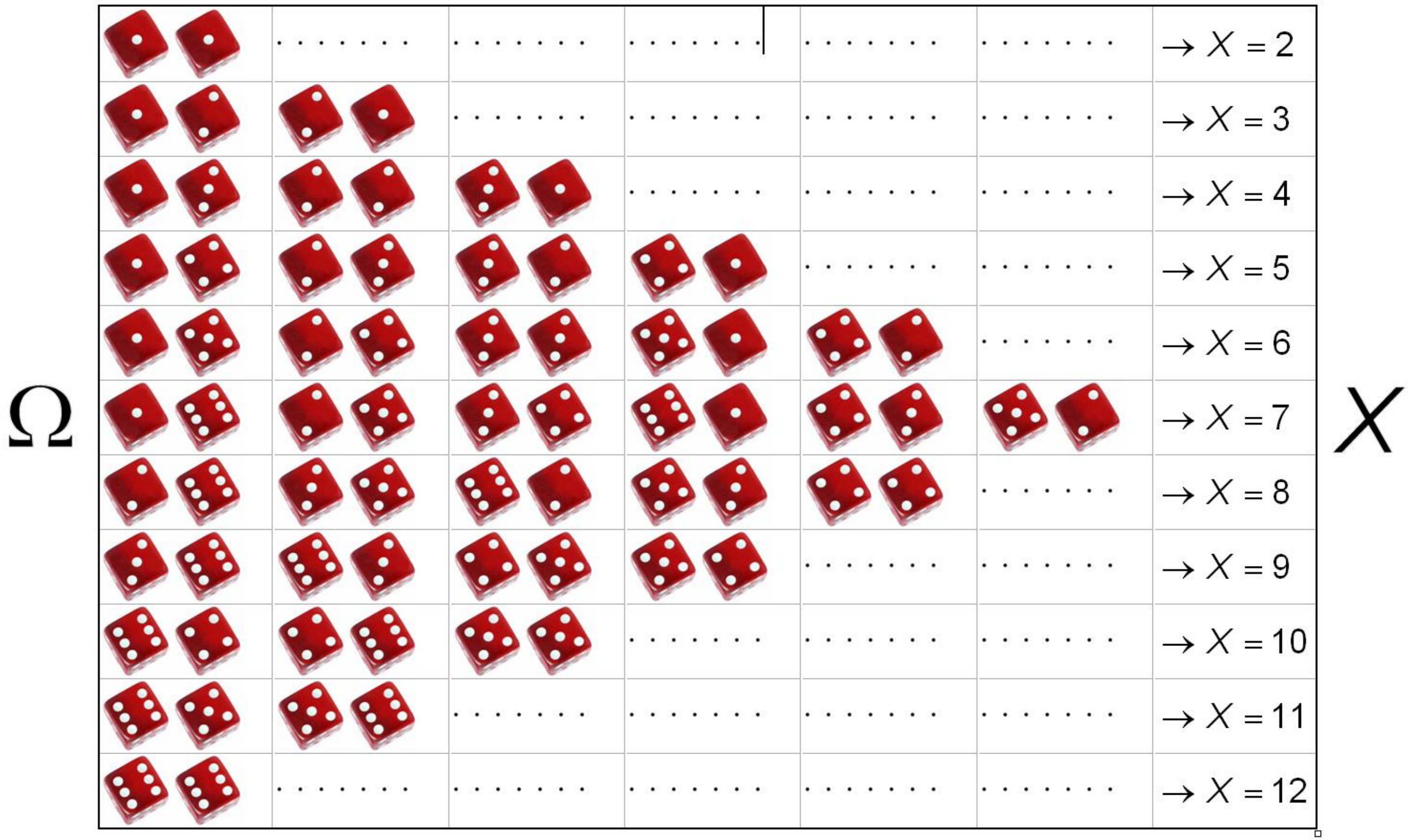
ESEMPIO: Lancio di 2 dadi

- Consideriamo ora il lancio di due dadi: possiamo definire la v.c. X come la somma dei punteggi ottenuti per ciascun dado.
- In tal caso, l'insieme dei valori che la v.c. può assumere è quello dei numeri interi compresi tra 2 e 12.
- È da notare che a uno stesso valore numerico della v.c. possono corrispondere più eventi elementari. Per esempio, il valore 3 è generato da due possibili eventi elementari: (1° dado = 1 , 2° dado = 2) e (1° dado = 2 , 2° dado = 1).
- In corrispondenza degli stessi eventi potremmo anche definire altre v.c., come il prodotto dei punteggi ottenuti oppure la loro differenza in valore assoluto.

Esempi di variabile casuale

ESEMPIO: Lancio di 2 dadi

Corrispondenza tra eventi e valori della variabile casuale X “somma dei punteggi”, nella prova “lancio di due dadi”.



Esempi di variabile casuale

ESEMPIO: Lancio di 2 dadi

Nel caso del lancio di due dadi, i risultati possibili (eventi elementari) sono 36 (1/6 x 1/6) mentre la v.c. X può assumere 11 possibili valori distinti, da 2 (1° dado = 1, 2° dado = 1) a 12 (1° dado = 6, 2° dado = 6).

Poiché il risultato del lancio del 1° dado è indipendente dal risultato del lancio del 2° dado (eventi indipendenti), la probabilità di ogni evento elementare (ad esempio: 1,1 o 1,2, o 3,4) è pari a $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

Esempi di variabile casuale

ESEMPIO: Lancio di 2 dadi

Poiché la probabilità di ogni evento elementare è pari a 1/36, risulta ad esempio che la probabilità che X sia uguale a 3 deriva dalla probabilità dell'unione dei due eventi elementari:

(1° dado=1 e 2° dado=2) e (1° dado=2 e 2° dado=1), ossia:

$$P(X = 3) = P[(1;2) \cup (2;1)] = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{2}{36}$$

Esempi di variabile casuale

ESEMPIO: Lancio di 2 dadi

Analogamente, la probabilità che X sia uguale a 5 deriva dalla probabilità dell’unione di tutti i possibili eventi elementari che danno come somme il valore 5:

- 1° dado=1 e 2° dado=4
- 1° dado=2 e 2° dado=3
- 1° dado=3 e 2° dado=2
- 1° dado=4 e 2° dado=1

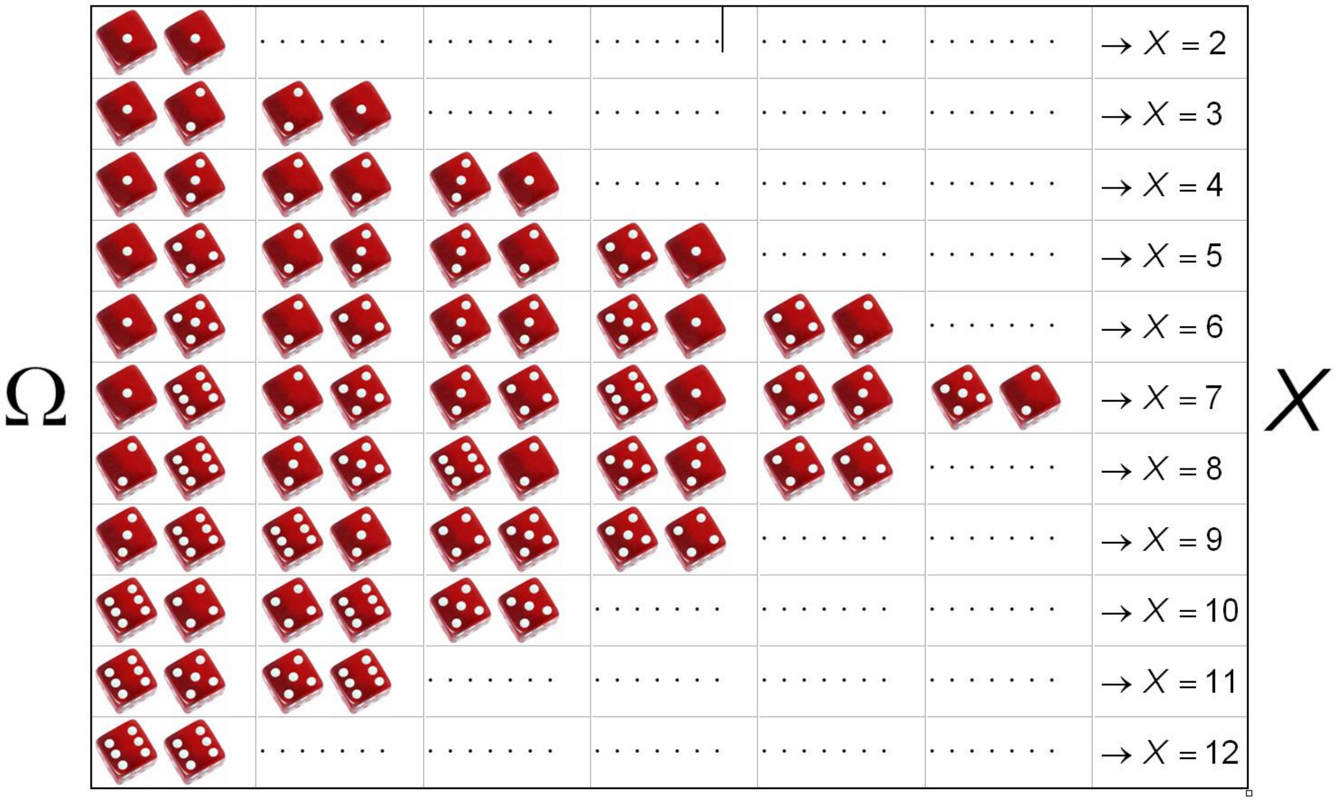
ossia:

$$P(X = 5) = P[(1;4) \cup (2;3) \cup (3;2) \cup (4;1)] = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{4}{36}$$

Esempi di variabile casuale

ESEMPIO: Lancio di 2 dadi

Dalla figura è facile ricavare la distribuzione di probabilità di X



X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(x)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Variabili casuali discrete e continue

Variabili casuali discrete e continue

È opportuno, ai fini della trattazione successiva, distinguere tra v.c. discrete e v.c. continue.

- Una **variabile casuale discreta** può assumere un insieme discreto (finito o numerabile) di numeri reali.
- Una **variabile casuale continua** può assumere tutti i valori compresi in un intervallo reale.

Variabili casuali discrete e continue

Una variabile casuale **discreta** assume un numero finito o numerabile di valori distinti. Possiamo immaginarla come una variabile che "salta" da un valore all'altro senza poter assumere quelli intermedi.

Esempi:

- Il numero di figli in una famiglia: può essere 0, 1, 2, 3, ecc., ma non 2,5.
- Il numero di scarpe vendute in un negozio in un giorno: può essere 1,2, 3, …, 10, 11, 12… ma non 10,3 scarpe
- Il numero di email ricevute in un giorno: può essere 0, 1, 2, ecc., ma non 1,7 email.

Variabili casuali discrete e continue

Una variabile casuale **continua** può assumere tutti i valori di un intervallo di numeri reali. È utile per descrivere grandezze che possono variare senza "salti" discreti.

Esempi:

- Il tempo di attesa alla fermata dell’autobus: potrebbe essere 3 minuti, 3,1 minuti, 3,12 minuti, 3,125 minuti, ecc.
- La distanza percorsa da un corridore in una gara: può essere 10,23 km, 10,235 km, 10,2356 km, ecc.
- La temperatura in una città: può assumere valori come 22,3°C, 22,31°C, 22,32°C e così via.

Variabili casuali discrete e continue

Se Ω è discreto, la v.c. sarà discreta mentre, se Ω è continuo, la v.c. può essere continua o discreta.

Esempio: Consideriamo una prova consistente nell'osservare l'altezza di un individuo. In tal caso Ω è continuo perché contiene un'infinità non numerabile di eventi (tutte le possibili altezze).

Variabili casuali discrete e continue

- La v.c. X Altezza (espressa, per esempio, in cm) è una v.c. **continua** in quanto può assumere, almeno in teoria, qualsiasi valore nell'intervallo [20;300) (gli estremi sono stati fissati arbitrariamente per comprendere, in modo certo, qualsiasi individuo). Per esempio, il valore 172,25 potrebbe corrispondere alla statura di un individuo adulto, mentre 80,43 potrebbe corrispondere a quella di un bambino.

Variabili casuali discrete e continue

Se però consideriamo i due eventi E_1 = “altezza superiore o uguale ai 150 cm” ed E_2 = “altezza inferiore ai 150 cm”, possiamo definire una v.c. X che assume valore 1 in corrispondenza di E_1 e valore 0 in corrispondenza di E_2.

In tal caso otteniamo una v.c. **discreta**.