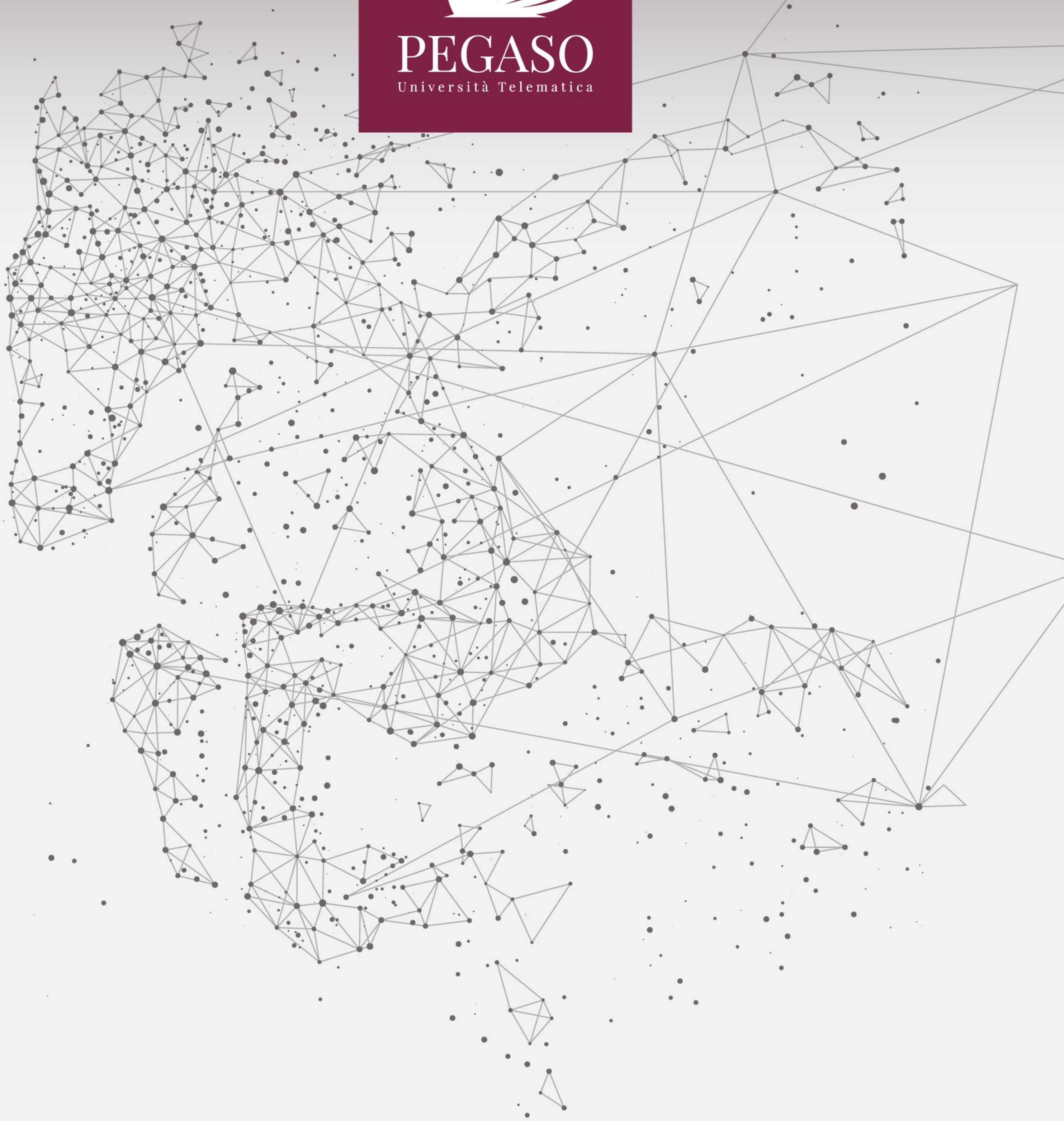
PEGASO
Università Telematica



Prodotto e potenze di matrici

Questa dispensa è dedicata all'introduzione dell'operazione fondamentale di prodotto fra matrici. Dopo aver specificato la condizione di compatibilità di base che deve esser soddisfatta affinchè il prodotto fra due matrici sia eseguibile, vedremo come tale prodotto viene definito. L'operazione di prodotto matriciale permette di produrre una nuova matrice a partire da due matrici compatibili per il prodotto. Tale operazione è più delicata rispetto alle operazioni di somma matriciale e di prodotto di una matrice per un numero reale, sia per quanto riguarda la definizione, sia per quanto riguarda le relative proprietà. Infatti, a differenza delle altre due suddette operazioni, relativamente all'operazione di prodotto matriciale non tutte le note proprietà che valgono per l'operazione di prodotto di due numeri reali (in particolare, come vedremo, la proprietà commutativa) sono conservate. In altri termini, il prodotto matriciale "si comporta" in modo generalmente diverso rispetto al prodotto fra numeri reali. Oltre alla non sussistenza della proprietà commutativa, un'altra rilevante differenza è la non validità della legge di annullamento del prodotto.
Nella parte finale della dispensa estenderemo l'operazione di prodotto matriciale in modo naturale con le definizioni di potenza di matrici e di polinomio matriciale (quest'ultima definizione combina le tre operazioni di somma matriciale, di prodotto di una matrice per un numero, e di prodotto fra matrici).

1 Prodotto di matrici

Prima di definire il prodotto di due matrici A e B, precisiamo le condizioni che devono soddisfare A e B affinchè il prodotto AB sia definito. Tali condizioni, dette di compatibilità o di conformabilità, riguardano esclusivamente i tipi di A e di B, e sono indispensabili per poter definire il prodotto di A e B nel modo universalmente adottato (vedi Osservazione 1.6), ovvero come prodotto "righe per colonne".

1.1 Matrici compatibili per il prodotto

Definizione 1.1. *Data una matrice A di tipo (m,p) e una matrice B di tipo (q,n), diremo che A* ***è compatibile con*** *B* ***per il prodotto*** *(o che A è conformabile con B) se risulta $p = q$, ovvero se il numero delle colonne di A coincide con il numero delle righe di B.*

Osservazioni

1) La matrice prodotto AB verrà definita come una matrice di tipo (m,n).

2) Se A è conformabile con B, non è detto che B sia conformabile con A.

Esempi

1. Sia X un generico vettore riga ad n componenti, ed Y un generico vettore colonna ad n componenti

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}, \qquad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Allora, X è compatibile con Y per il prodotto ed XY è di tipo $(1,1)$ (ovvero una matrice costituita da un solo numero). Anche Y è compatibile con X per il prodotto, e la matrice YX è di tipo (n,n) (cioè quadrata di ordine n).

2. Sia Y un generico vettore colonna ad m componenti, ed X un generico vettore riga ad n componenti

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix},$$

allora Y è compatibile con X per il prodotto, e YX è di tipo (m,n). Invece, X è compatibile con Y se e solo se $m = n$, ed, in questo caso, il prodotto XY è di tipo $(1,1)$

3. Siano A una matrice di tipo (m,n) ed U un vettore colonna ad n componenti

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix},$$

allora A è compatibile con U per il prodotto, ed AU è un vettore colonna ad m componenti. Invece, U non è compatibile con A (a meno che sia $m = 1$).

4. Siano V un vettore riga ad m componenti, ed A una matrice di tipo (m, n)

$$V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_m \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

allora V è compatibile con A per il prodotto, e VA è un vettore riga ad n componenti. Invece, A non è compatibile con V (a meno che sia $n = 1$).

5. Considerate le matrici A di tipo $(2, 4)$, e B di tipo $(4, 3)$ date da

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ x & y & 1 \\ z & w & 2 \end{bmatrix},$$

allora A è compatibile con B per il prodotto, ed AB è di tipo $(2, 3)$. Invece, B non è compatibile con A.

6. Se A e B sono due matrici quadrate dello *stesso ordine* n, allora A è compatibile con B per il prodotto, e viceversa. Entrambe le matrici prodotto AB, BA sono ancora matrici quadrate di ordine n.

1.2 Definizione di prodotto matriciale

Definizione 1.2. *Sia la matrice $A = [a_{ij}]$ di tipo (m, p) compatibile per il prodotto con la matrice $B = [b_{ij}]$ di tipo (p, n). Definiamo* ***prodotto di** A **e** B* *la matrice, denotata con $AB = [c_{ij}]$ e di tipo (m, n), i cui elementi sono dati da*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \,.$$

Dalla definizione abbiamo che il generico elemento c_{ij} (di riga $i-$esima e di colonna $j-$esima) della matrice prodotto AB si ottiene sommando i prodotti degli elementi della $i-$esima riga di A per gli elementi della $j-$esima colonna di B. La definizione ha quindi senso se il numero degli elementi di ogni riga di A, che coincide con il numero di colonne di A, è uguale al numero degli elementi di ogni colonna di B, che coincide con il numero di righe di B. Per questo motivo, il numero di colonne di A deve essere uguale al numero di righe di B, e questo giustifica l'introduzione della Definizione 1.1.

Osservazione 1.1. Come abbiam visto negli esempi sopra, se una matrice A è conformabile con una matrice B, allora non è detto che B sia conformabile con A.
Vediamo alcuni esempi, utili anche come esempi di calcolo di matrici prodotto.

1. Siano A e B le matrici date da
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} x & y & z \\ u & v & w \end{bmatrix}.$$
La matrice A è di tipo $(2, 2)$, e la matrice B è di tipo $(2, 3)$. Quindi il prodotto AB è ben definito e dato dalla matrice di tipo $(2, 3)$ ottenuta applicando la Definizione 1.2, ovvero
$$AB = \begin{bmatrix} ax + bu & ay + bv & az + bw \\ cx + du & cy + dv & cz + dw \end{bmatrix}.$$
Vediamo che, ad esempio, l'elemento di riga 1 e colonna 2 della matrice prodotto AB si ottiene sommando i prodotti degli elementi di riga 1 di A con gli elementi di colonna 2 di B; l'elemento di riga 2 e colonna 3 di AB si ottiene sommando i prodotti degli elementi di riga 2 di A con gli elementi di colonna 3 di B, e così via. Osserviamo che, per le matrici A e B assegnate, il prodotto BA non è definito!

2. Siano A e B le matrici date da
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \\ g & h \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} x & y & z \\ u & v & w \end{bmatrix}.$$
Vediamo che A è di tipo $(4, 2)$, e B è di tipo $(2, 3)$. Quindi, il prodotto AB è ben definito e dato dalla matrice di tipo $(4, 3)$ seguente
$$AB = \begin{bmatrix} ax + bu & ay + bv & az + bw \\ cx + du & cy + dv & cz + dw \\ ex + fu & ey + fv & ez + fw \\ gx + hu & gy + hv & gz + hw \end{bmatrix}.$$
Tuttavia, B non è compatibile con A per il prodotto, ovvero il prodotto BA non è definito.

Osservazione 1.2. Sia A di tipo (m, p) e B di tipo (q, n). Allora, entrambi i prodotti AB e BA sono ben definiti se e solo se $p = q$, $m = n$. In questo caso AB è una matrice quadrata di ordine m, mentre BA è una matrice quadrata di ordine p. Supponendo che sia soddisfatta la condizione

$$p = q\,, \qquad m = n\,,$$

la quale permette ad entrambi i prodotti AB e BA di essere eseguibili, possiamo, a questo punto, distinguere i seguenti due casi

- $p = q \neq m = n$. In questo caso $AB \neq BA$, poichè AB è quadrata di ordine $m = n$, mentre BA è quadrata di ordine $p = q$ e gli ordini di AB e BA sono diversi;

- $p = q = m = n$. In questo caso AB e BA sono quadrate dello stesso ordine. Tuttavia, *in generale* può risultare ancora $AB \neq BA$, come mostra l'esempio seguente:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Abbiamo allora

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi, per le due matrici AB e BA, entrambe quadrate di ordine 2, risulta $AB \neq BA$.

Come altro semplice esempio possiamo considerare le matrici seguenti

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Abbiamo allora

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 3 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 & 0 \cdot 3 + 0 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e quindi risulta ancora $AB \neq BA$.

Le Osservazioni 1.1 ed 1.2 servono a sottolineare il fatto che *è essenziale specificare l'ordine* con il quale le matrici A e B vengono moltiplicate, quando si vuole eseguire il prodotto fra le due matrici. In altri termini, data una matrice A, occorre sempre precisare se tale matrice viene moltiplicata a destra oppure a sinistra dalla matrice B. Infatti (cf. Osservazione 1.2), anche quando entrambi i prodotti AB e BA sono definiti e sono matrici dello stesso tipo, può risultare lo stesso, in generale, che $AB \neq BA$. Quindi, *per l'operazione di prodotto matriciale non sussiste la proprietà commutativa*, a differenza di quanto invece per l'operazione di prodotto fra numeri reali. Ovviamente, questo non vuol dire che risulta sempre $AB \neq BA$ per ogni coppia di matrici A e B per le quali entrambi i prodotti siano eseguibili. Un esempio semplicissimo è dato prendendo una generica matrice quadrata A di ordine n, e $B = I_n$. In questo caso si verifica subito che $AB = AI_n = A = I_nA = BA$.

Le Osservazioni 1.1 ed 1.2 e le considerazioni appena fatte motivano l'introduzione della definizione di commutatore di due matrici quadrate.

Definizione 1.3. *Siano $A, B \in \mathbb{M}_n$ due matrici quadrate dello stesso ordine. Definiamo* ***commutatore di** A **e** B *la matrice quadrata data da*

$$[A, B] = AB - BA\,.$$

Diremo che A e B ***commutano*** *(o che sono* ***permutabili****) se e solo se $[A, B] = O_n$, ovvero se e solo se $AB = BA$.*

Quindi, le matrici quadrate di ordine 2 dell'ultimo esempio sopra *non* commutano. Il loro commutatore è dato dalla seguente matrice

$$[A, B] = AB - BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \neq O_2\,.$$

Osservazione 1.3. Siano $A \in \mathbb{M}_{m,p}$ e $B \in \mathbb{M}_{p,n}$ due matrici generiche di tipo (m, p) e (p, n), rispettivamente, entrambe diverse dalla matrice nulla, ovvero

$$A \neq O_{m,p}\,, \qquad B \neq O_{p,n}\,.$$

Allora, *non è detto* che anche la matrice prodotto AB sia diversa dalla matrice nulla, ovvero che $AB \neq O_{m,n}$. Come esempio, consideriamo infatti le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esse sono entrambe diverse dalla matrice nulla; tuttavia, come si verifica immediatamente, risulta $AB = O_2$. Infatti

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O_2\,.$$

Questa osservazione mostra un'altra rilevante differenza fra le operazioni di prodotto matriciale e di prodotto fra numeri reali. Infatti, mentre nell'ambito dei numeri reali la legge di annullamento del prodotto è valida (se $a, b \in \mathbb{R}$ sono tali che $ab = 0$, allora $a = 0$, oppure $b = 0$; questo è equivalente a scrivere che se $a, b \in \mathbb{R}$ sono tali che $a, b \neq 0$, allora abbiamo anche $ab \neq 0$), *nell'ambito matriciale la legge di annullamento del prodotto non vale.*

Come altro esempio, possiamo considerare le matrici seguenti

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si vede immediatamente che, pur essendo $A, B \neq O_2$, tuttavia risulta $AB = O_2$.

1.3 Proprietà del prodotto matriciale

Come per le operazioni di somma di matrici e di prodotto di una matrice per un numero, anche l'operazione di prodotto matriciale gode di alcune semplici e fondamentali proprietà che vengono enunciate nel seguente

Teorema 1.1 (Proprietà del prodotto di matrici)**.** *Siano A, B, C tre matrici ed α un numero reale. Allora valgono le seguenti proprietà*

i) $(AB)C = A(BC)$ *(proprietà associativa)*

ii) $(A + B)C = AC + BC\,,\ C(A + B) = CA + CB$ *(proprietà distributive)*

iii) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

iv) $(AB)^t = B^t A^t$

v) $AI = A\,, \qquad IA = A$

vi) $AO = O\,, \qquad OA = O$,

dove si sta supponendo che A, B, C, I, O siano compatibili con tutte le operazioni indicate. Più precisamente, si intende che, se sono eseguibili le operazioni in uno dei membri nelle uguaglianze che figurano in i)–iv), allora sono eseguibili anche le operazioni nell'altro membro, e le matrici ottenute nei due membri sono uguali.

Osservazione 1.4. Se A è di tipo (m, n) con $m \neq n$, le matrici unità in v), e nulle in vi), sono *diverse*, poichè sono di ordini n ed m, rispettivamente.

Osservazione 1.5. In virtù della i), le due matrici uguali $(AB)C$ e $A(BC)$ possono esser denotate senza ambiguità come ABC. Inoltre, le proprietà i)–iv) si possono estendere in modo naturale ad un numero finito e arbitrario di matrici. Ad esempio, la iv) estesa a tre matrici diventa

$$(ABC)^t = C^t B^t A^t .$$

Infatti, abbiamo

$$(ABC)^t = ((AB)C)^t = C^t (AB)^t = C^t (B^t A^t) = C^t B^t A^t .$$

Osservazione 1.6. È possibile definire altri tre prodotti matriciali in modo analogo a quanto fatto nella Definizione 1.2, ovvero il prodotto "righe per righe", il prodotto "colonne per righe" e il prodotto "colonne per colonne". Tuttavia, nessuno di questi gode della proprietà associativa e per questo motivo nessuno di questi viene utilizzato.

2 Esempi di calcolo di prodotti di matrici

Riprendendo gli esempi visti nella Sottosezione 1.1, calcoliamo, per i vettori e matrici compatibili ivi considerati, il relativo prodotto matriciale (seguiamo la stessa numerazione della Sottosezione 1.1).

1. Se X un generico vettore riga ad n componenti, ed Y un generico vettore colonna ad n componenti

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}, \qquad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

allora abbiamo

$$XY = [x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots x_n y_n] .$$

Poichè la matrice prodotto XY è, in questo caso, di tipo $(1,1)$, ovvero rappresentabile con un solo numero reale, tale matrice si può identificare con il numero stesso, e quindi, per semplicità, scrivere

$$XY = \sum_{k=1}^{n} x_k \, y_k . \tag{2.1}$$

Anche Y è compatibile con X per il prodotto, e la matrice YX è di tipo (n, n) (cioè quadrata di ordine n), e data da

$$YX = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1x_1 & y_1x_2 & \cdots & y_1x_n \\ y_2x_1 & y_2x_2 & \cdots & y_2x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_nx_1 & y_nx_2 & \cdots & y_nx_n \end{bmatrix}.$$

Notiamo quindi la notevole differenza che si ottiene permutando l'ordine con il quale il prodotto dei vettori X ed Y viene eseguito (sottolineiamo che in questo caso entrambi i prodotti sono eseguibili). Infatti, in un caso, ovvero per il prodotto XY, otteniamo semplicemente un numero reale, mentre nell'altro caso, cioè per il prodotto YX, otteniamo addirittura una matrice quadrata di ordine n, avente come elementi gli n^2 numeri reali dati da $y_i\, x_k$, dove $i, k = 1, \ldots, n$.

2. Sia Y un generico vettore colonna ad m componenti, ed X un generico vettore riga ad n componenti

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix},$$

allora Y è compatibile con X per il prodotto, e YX è di tipo (m, n). Tale matrice prodotto si ottiene, applicando la Definizione 1.2, in modo analogo a quanto visto nell'esempio precedente (con la sola differenza che, nel presente caso, la matrice YX è, in generale, rettangolare, mentre nell'esempio sopra YX è quadrata). Abbiamo quindi

$$YX = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1x_1 & y_1x_2 & \cdots & y_1x_n \\ y_2x_1 & y_2x_2 & \cdots & y_2x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_mx_1 & y_mx_2 & \cdots & y_mx_n \end{bmatrix}.$$

Invece, X è compatibile con Y se e solo se $m = n$, ed, in questo caso, il prodotto XY è di tipo $(1, 1)$, Il suo calcolo è già stato mostrato nell'esempio precedente, vedi la (2.1).

3. Siano A una matrice di tipo (m, n) ed U un vettore colonna ad n componenti

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix},$$

allora A è compatibile con U per il prodotto, ed AU è il vettore colonna ad m componenti ottenuto applicando la Definizione 1.2

$$AU = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \cdots a_{1n}u_n \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \cdots a_{2n}u_n \\ \vdots \\ a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + \cdots a_{mn}u_n \end{bmatrix}.$$

Si può quindi scrivere, per la generica componente $i-$esima del vettore colonna AU, che indichiamo con $(AU)_i$

$$(AU)_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}u_k \,, \qquad i = 1, \ldots, m\,.$$

4. Siano V un vettore riga ad m componenti, ed A una matrice di tipo (m, n)

$$V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_m \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

V è compatibile con A per il prodotto, e VA è il vettore riga ad n componenti dato da

$$VA = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} v_1a_{11} + v_2a_{21} + \cdots + v_ma_{m1} & v_1a_{12} + v_2a_{22} + \cdots + v_ma_{m2} & \cdots & v_1a_{1n} + v_2a_{2n} + \cdots + v_ma_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{m} v_k a_{k1} & \sum_{k=1}^{m} v_k a_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{m} v_k a_{kn} \end{bmatrix}.$$

In altri termini, la $i-$esima componente del vettore riga VA, denotata con $(VA)_i$, è data da

$$(VA)_i = \sum_{k=1}^{m} a_{ki}v_k \,, \qquad i = 1, \ldots, n\,.$$

5. Considerate le matrici A di tipo $(2,4)$, e B di tipo $(4,3)$ date da

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ x & y & 1 \\ z & w & 2 \end{bmatrix},$$

allora A è compatibile con B per il prodotto, e la matrice AB, di tipo $(2,3)$, è data da

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ x & y & 1 \\ z & w & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1\cdot 4 + 3\cdot 2 + 0\cdot x + 1\cdot z & 1\cdot 5 + 3\cdot 1 + 0\cdot y + 1\cdot w & 1\cdot 0 + 3\cdot 0 + 0\cdot 1 + 1\cdot 2 \\ 2\cdot 4 + 1\cdot 2 + 7\cdot x + 0\cdot z & 2\cdot 5 + 1\cdot 1 + 7\cdot y + 0\cdot w & 2\cdot 0 + 1\cdot 0 + 7\cdot 1 + 0\cdot 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10+z & 8+w & 2 \\ 10+7x & 11+7y & 7 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

6. Date le matrici quadrate di ordine 3 seguenti

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ x & 1 & 1 \\ 0 & y & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & x \end{bmatrix},$$

calcoliamo le matrici prodotto AB e BA (entrambi i prodotti sono eseguibili e sono ancora matrici quadrate del terzo ordine). Per AB abbiamo

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ x & 1 & 1 \\ 0 & y & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & x \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0\cdot 1 + 2\cdot 2 + (-1)\cdot 1 & 0\cdot 0 + 2\cdot(-1) + (-1)\cdot(-2) & 0\cdot 0 + 2\cdot 3 + (-1)\cdot x \\ x\cdot 1 + 1\cdot 2 + 1\cdot 1 & x\cdot 0 + 1\cdot(-1) + 1\cdot(-2) & x\cdot 0 + 1\cdot 3 + 1\cdot x \\ 0\cdot 1 + y\cdot 2 + 3\cdot 1 & 0\cdot 0 + y\cdot(-1) + 3\cdot(-2) & 0\cdot 0 + y\cdot 3 + 3\cdot x \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 6-x \\ x+3 & -3 & 3+x \\ 2y+3 & -y-6 & 3y+3x \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Per BA abbiamo

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ x & 1 & 1 \\ 0 & y & 3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1\cdot 0 + 0\cdot x + 0\cdot 0 & 1\cdot 2 + 0\cdot 1 + 0\cdot y & 1\cdot(-1) + 0\cdot 1 + 0\cdot 3 \\ 2\cdot 0 + (-1)\cdot x + 3\cdot 0 & 2\cdot 2 + (-1)\cdot 1 + 3\cdot y & 2\cdot(-1) + (-1)\cdot 1 + 3\cdot 3 \\ 1\cdot 0 + (-2)\cdot x + x\cdot 0 & 1\cdot 2 + (-2)\cdot 1 + x\cdot y & 1\cdot(-1) + (-2)\cdot 1 + x\cdot 3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -x & 3+3y & 6 \\ -2x & xy & -3+3x \end{bmatrix}.$$

Osserviamo che, essendo, ad esempio, $(AB)_{11} = 3 \neq 0 = (BA)_{11}$, allora risulta $AB \neq BA$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, cioè le due matrici A e B non commutano per nessun valore di x ed y.

3 Potenze e polinomi matriciali

Utilizzando l'operazione prodotto di matrici possiamo poi definire anche la potenza $k-$esima di una matrice.

Definizione 3.1. *Sia A una matrice quadrata di ordine n. Se $k \in \mathbb{N}$, allora definiamo **potenza k-esima** di A la matrice denotata con A^k e data da*

$$A^k = \underbrace{AA\ldots A}_{k \text{ volte}}, \quad \text{se } k \geqslant 1, \qquad A^0 = I_n.$$

Le proprietà delle potenze di matrici quadrate si ottengono immediatamente dalla definizione sopra.

Teorema 3.1 (Proprietà delle potenze di matrici quadrate)**.** *Sia $A \in \mathbb{M}_n$. Allora, se $k, h \in \mathbb{N}$, valgono le seguenti proprietà*

$$A^k A^h = A^{k+h}, \qquad (A^k)^h = A^{kh}.$$

Siano $A, B \in \mathbb{M}_n$, con $[A, B] = O_n$. Allora, si ha

$$(AB)^k = A^k B^k.$$

Tutte le operazioni definite finora consentono poi di definire anche la matrice polinomio di una data matrice quadrata (naturalmente, non bisogna confondere il grado del polinomio con l'ordine della matrice considerata, che, in generale, saranno diversi).

Definizione 3.2. *Sia $P(t)$ un polinomio di grado q, con $q \in \mathbb{N}$, nella variabile t, a coefficienti $a_0, a_1, \dots a_q \in \mathbb{R}$, cioè*

$$P(t) = a_0 t^q + a_1 t^{q-1} + \cdots + a_{q-1} t + a_q \,.$$

Sia poi A una matrice quadrata di ordine n. Definiamo polinomio in A corrispondente a $P(t)$ la matrice denotata da $P(A)$ e data da

$$P(A) = a_0 A^q + a_1 A^{q-1} + \cdots + a_{q-1} A + a_q I_n \,.$$

In altri termini, la matrice $P(A)$ si ottiene sostituendo, alla varaibile t del polinomio $P(t)$, la matrice A assegnata.

Osservazione 3.1. *Siano $P(t)$ e $Q(t)$ due polinomi qualsiasi nella variabile t (con gradi e coefficienti in generale diversi). Poichè $[A^k, A^h] = O_n$, per ogni $k, h \in \mathbb{N}$, allora è immediato vedere che*

$$[P(A), Q(A)] = O_n \qquad \forall A \in \mathbb{M}_n \,.$$

Quindi, due qualsiasi polinomi nella stessa matrice quadrata A sono sempre permutabili.

Riferimenti

1) E. Dedò, A. Varisco, Algebra lineare, elementi ed esercizi, CLUP, 1988, Capitolo 3

2) U. Gasapina, Algebra delle matrici, Masson, 1988.

TEST di AUTOVALUTAZIONE

1. Siano A, B, C le matrici date da

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} z & 0 & y \\ x & 3 & -3 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

quali dei seguenti prodotti sono tuttti eseguibili?

a) AB, AC, BC, CB

b) CA, AC, BC, CB

c) AB, CA, BA, AC

d) BA, AC, BC, CB

2. Siano x, y due numeri reali da determinarsi, ed A, B, X le matrici quadrate del secondo ordine date da

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 3y & 0 \end{bmatrix}.$$

Determinare tutte le coppie ordinate $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, per le quali la seguente equazione matriciale è soddisfatta

$$A^t X = B\,.$$

a) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ qualsiasi

b) nessuna coppia ordinata $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

c) $(x, y) = (2, 1)$

d) $(x, y) = (1, 2)$

3. Siano A e B le matrici quadrate del secondo ordine seguenti

$$A = \begin{bmatrix} x^2 & 1 \\ 1 & y^3 \sin x \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} x^3 \cos y & 6 \\ 6 & x^4 + y^2 \end{bmatrix},$$

e C la matrice definita da

$$C = \alpha(AB + BA) - \beta I_2\,,$$

dove x, y, α, β sono numeri reali. Allora, C è simmetrica se e solo se

a) $x = 0$, $y = \pi$, ed α, β sono reali qualsiasi

b) $x = \pi$, $y = 0$, ed α, β sono reali qualsiasi

c) x, y, α sono reali qualsiasi, e $\beta = 0$

d) x, y, α, β sono reali qualsiasi

4. Assegnate le matrici A e B seguenti

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix},$$

quali delle seguenti affermazioni è corretta?

a) $(AB)^2 = A^2B^2$

b) $(AB)^2 = 2\begin{bmatrix} 35 & -12 \\ -8 & 3 \end{bmatrix}$

c) $(AB)^2 = AB^2A$

d) $(AB)^2 = 2\begin{bmatrix} 35 & 12 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$

5. Indicando, nel seguito, con A una generica matrice quadrata di ordine 2, quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) Ogni matrice A tale che risulti $A^2 = O_2$ coincide necessariamente con la matrice nulla O_2

b) Esistono infinite matrici $A \neq O_2$ tale che $A^2 = O_2$ (in questo caso, determinarne almeno una)

c) Esiste una sola matrice $A \neq O_2$ tale che $A^2 = O_2$ (in questo caso, determinarla)

d) Non esiste nessuna matrice $A \neq O_2$ tale che $A^2 = O_2$

6. Siano X, Y, A tre matrici quadrate di ordine n, con X e Y entrambe permutabili con A. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

   a) $X + Y$ è permutabile con A e XY non lo è

   b) $X + Y$ e XY sono entrambe permutabili con A

   c) XY è permutabile con A e $X + Y$ non lo è

   d) Nessuna delle matrici $X + Y$ e XY è permutabile con A

7. Siano A, B, C, D quattro matrici tali che la matrice $P = A(B + C)D$ sia definita. Quale delle seguenti uguaglianze matriciali è corretta?

   a) $P^t = A^t(B^t + C^t)D^t$

   b) $P^t = D^t(C^t + B^t)A^t$

   c) $P^t = D^tA^t(B^t + C^t)$

   d) $P^t = (B^t + C^t)D^tA^t$

8. Siano $A, B \in \mathbb{M}_n$ due matrici assegnate qualsiasi. Quale delle seguenti affermazioni è sempre corretta?

   a) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$

   b) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ se e solo se $\big(A = O_n$, oppure $B = O_n\big)$

   c) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ se e solo se $[A, B] = O_n$
   (ovvero, se e solo se A e B commutano)

   d) $(A + B)(A - B) = A^2 + B^2$

9. Siano A e B due matrici quadrate linearmente dipendenti e k un intero positivo. Allora A^k e B^k sono linearmente dipendenti

   a) se e solo se $k = 1$

   b) per ogni k intero positivo

   c) se e solo se $(A = I$ oppure $B = I)$

   d) per nessun $k > 1$

10. Siano $A_{x,y}$ la matrice data da

$$A_{x,y} = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 0 & y \end{bmatrix},$$

dove x, y sono numeri reali, e $P(t)$ il polinomio dato da

$$P(t) = t^2 - 2t\,.$$

Sia poi E l'insieme definito da

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, P(A_{x,y}) = O_2\}\,.$$

Quali delle seguenti è corretta?

a) $E = \varnothing$

b) $E = \{(0, -2)\,,\,(-2, 0)\}$

c) $E = \mathbb{R}^2$

d) $E = \{(0, 2)\,,\,(2, 0)\}$