Distribuzioni di probabilità per v.c. discrete

Paolo Sciattella

Distribuzione Uniforme discreta

Distribuzione Uniforme discreta

Definizione: una v.c. Uniforme discreta, indicata con $X \sim Ud(a, s)$, è una v.c. che può assumere solo i valori interi compresi in un certo intervallo. Sia s il numero dei possibili valori e a il più piccolo valore assumibile; la funzione di probabilità Uniforme è definita come:

$$P(x) = \frac{1}{s}$$

per $x = \underbrace{a, a+1, a+2, \dots, a+s-1}_{s\text{ - valori}}$

Esempio: $s = 5, a = 2$;
I possibili valori di $X \sim Ud(2,5)$, sono $x = 2, 3, 4, 5, 6$
dove $6 = a + s - 1 = 2 + 5 - 1$

Distribuzione Uniforme discreta

Sono v. c. uniformi discrete le seguenti prove:

- **Lancio di un dado regolare**
  - Valori possibili: 1, 2, 3, 4, 5, 6
  - $P(x) = \frac{1}{6}$
- **Estrazione di un numero al lotto**
  - Valori possibili: 1, 2, 3, …, 90
  - $P(x) = \frac{1}{90}$

Distribuzione Uniforme discreta

La media e la varianza di una v.c. Uniforme discreta sono date da:

$$E(x) = a + \frac{s-1}{2} \qquad \text{e} \qquad V(x) = \frac{s^2-1}{12}$$

Dimostrazione del valore atteso:

$$E(X) = \sum_{i=a}^{a+s-1} x_i P(x_i) = \frac{1}{s} \sum_{i=a}^{a+s-1} x_i$$

In generale, la somma dei primi s numeri interi è data da:

$$\sum_{i=1}^{s} x_i = \frac{s(s+1)}{2}$$

Distribuzione Uniforme discreta

Nella formula generale della somma dei primi s elementi:

$$\sum_{i=1}^{s} x_i = \frac{s(s+1)}{2}$$

$a = 1$ e l'ultimo valore è pari a: $a + s - 1 = s$

In generale, la formula della somma di s numeri interi consecutivi è:

$$\sum_{i=a}^{a+s-1} x_i = \frac{s(a+s-1+a)}{2} = \frac{s}{2} \cdot (2a+s-1)$$

Distribuzione Uniforme discreta

Quindi per dimostrare che $E(x) = a + \frac{s-1}{2}$ utilizziamo le formule appena introdotte:

$$E(X) = \sum_{i=a}^{a+s-1} x_i P(x_i) = \frac{1}{s} \sum_{i=a}^{a+s-1} x_i = \frac{1}{s} \cdot \frac{s}{2} \cdot (a + a + s - 1) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (2a + s - 1) = \frac{2}{2} a + \frac{s-1}{2} = a + \frac{s-1}{2}$$

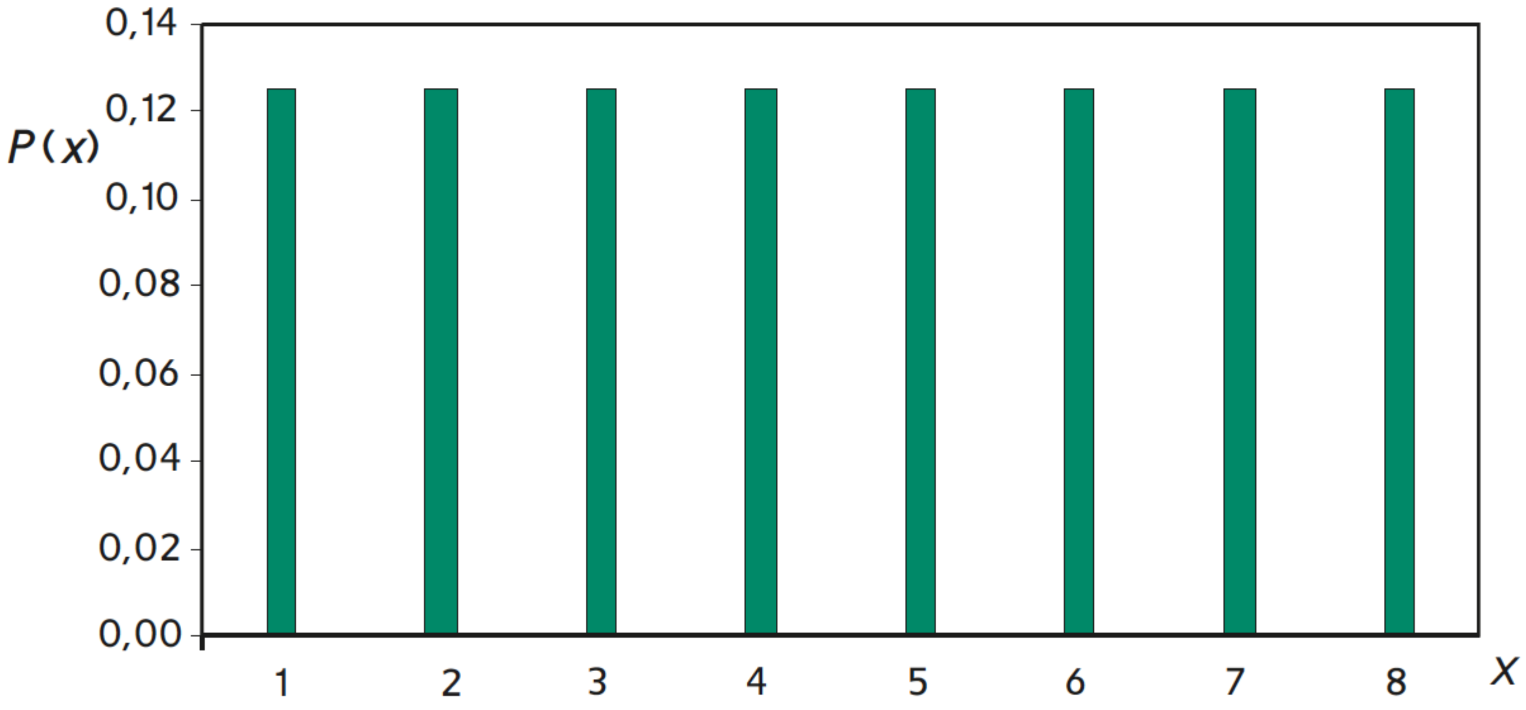
Distribuzione Uniforme discreta

Esempio: Consideriamo la prova consistente nell'estrazione casuale di una pallina da un'urna contenente 8 palline numerate, dal n. 1 al n. 8. La v. c. Uniforme X N della pallina estratta, può assumere, con eguale probabilità, tutti i valori interi compresi tra 1 e 8.

Si ha quindi $P(X) = 1/8$

Distribuzione Uniforme discreta

Esempio: consideriamo la prova consistente nell'estrazione casuale di una pallina da un'urna contenente 8 palline numerate, dal n. 1 al n. 8. La funzione di probabilità è rappresentata nella figura seguente:



Distribuzione Uniforme discreta

Il valore atteso di X è dato da:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{8} x_i P(x_i)$$

$$= \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} x_i = \frac{1+2+3+4+5+6+7+8}{8} = \frac{8(8+1)/2}{8} = \frac{36}{8} = 4{,}5$$

Utilizzando la formula del valore atteso di $X \sim Ud(a, s)$ con $\mathrm{a} = 1$ e $\mathrm{s} = 8$ si ottiene:

$$E(x) = a + \frac{s-1}{2} = 1 + \frac{8-1}{2} = 1 + 3{,}5 = 4{,}5$$

Distribuzione Uniforme discreta

La varianza di X è data da:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} x_i^2 = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2}{8} - 4{,}5^2 = \frac{204}{8} - 20{,}25$$

$$= 25{,}5 - 20{,}25 = 5{,}25$$

Applicando la formula della varianza di X con $\mathrm{a} = 1$ e $\mathrm{s} = 8$ si ottiene:

$$V(X) = \frac{s^2 - 1}{12} = \frac{8^2 - 1}{12} = \frac{64 - 1}{12} = 5{,}25$$

Distribuzione di Bernoulli

Distribuzione di Bernoulli

- Consideriamo una prova nella quale ha interesse solo verificare se un certo evento si è o meno verificato.
- La v. c. generata da tale prova assumerà, per convenzione, il valore 1 se l'evento si è verificato e il valore 0 in caso contrario.
- Tale variabile casuale viene detta **v. c. di Bernoulli**.

Distribuzione di Bernoulli

Tutte le prove che producono **solo due possibili risultati** generano **v. c. di Bernoulli**:

- il lancio di una moneta, il sesso di un nascituro, il superamento o meno di un esame universitario, il verificarsi di un “doppio 6” nel lancio di due dadi, la presenza/assenza di una certa caratteristica e così via.

Distribuzione di Bernoulli

Definizione: Una variabile casusale di Bernoulli, indicata con $X \sim Bernoulli(\pi)$, può assumere il valore 1 con probabilità π e il valore 0 con probabilità $1 - \pi$; la sua funzione di probabilità può essere espressa come:

$$P(X = x) = \pi^x \cdot (1 - \pi)^{1-x}$$

per $x = 0, 1$

Distribuzione di Bernoulli

La media e la varianza di una v.c. di Bernoulli sono date da:

$$E(x) = \pi \qquad \text{e} \qquad V(x) = \pi \cdot (1 - \pi)$$

Dimostrazione del valore atteso:

$$E(X) = \sum_i x_i P(x_i) = 1 \cdot P(1) + 0 \cdot P(0) =$$

$$= 1 \cdot \pi + 0 \cdot (1 - \pi) = \pi$$

Distribuzione di Bernoulli

Dimostrazione della varianza:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \sum_i x_i^2 \, P(x_i) - \pi^2 =$$

$$= 1^2 \cdot \pi + 0^2 \cdot (1 - \pi) - \pi^2 = \pi - \pi^2 =$$

$$\pi \cdot (1 - \pi)$$

Distribuzione di Bernoulli: esempio

Distribuzione di Bernoulli: esempio

- Un’azienda farmaceutica ha sviluppato un nuovo test rapido per diagnosticare una malattia.
- Il test ha una probabilità del 90% di identificare correttamente un paziente malato (positivo al test) e una probabilità del 10% di non identificare correttamente il paziente malato (falso negativo).

Distribuzione di Bernoulli: esempio

Se selezioniamo casualmente un paziente **che sappiamo essere malato** e lo sottoponiamo al test, definiamo la variabile aleatoria $X \sim Bernoulli(\pi)$, come:

$$X = \begin{cases} 1 \; se \; il \; test \; rileva \; la \; malattia \; (vero \; positivo) \\ 0 \; se \; il \; test \; non \; rileva \; la \; malattia \; (falso \; negativo) \end{cases}$$

Distribuzione di Bernoulli: esempio

Calcoliamo:

1. ***la probabilità che il test dia un risultato positivo***
2. ***la probabilità che dia un risultato negativo***
3. ***il valore atteso*** $E(X)$
4. ***La varianza*** $V(X)$

Distribuzione di Bernoulli: esempio

Svolgimento:

1. Qual è la probabilità che il test dia un risultato positivo?

Sappiamo che Il test ha una probabilità del 90% di identificare correttamente un paziente malato, quindi deduciamo che la probabilità che il test dia un risultato positivo $\pi = 0{,}9$

2. Qual è la probabilità che dia un risultato negativo?

La probabilità che il test dia un risultato negativo è pari a

$$1 - \pi = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$$

Distribuzione di Bernoulli: esempio

3. ***Il valore atteso $E(X)$***

Il valore atteso $E(X) = \pi = 0{,}9$

2. ***La varianza $V(X)$***

La varianza $V(X) = \pi(1 - \pi) = 0{,}9 \cdot (1 - 0{,}9) =$

$$= 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 0{,}09$$