PEGASO

Università Telematica

Indice

1. Grafo

Un grafo è una struttura relazionale formata da un numero finito V di **vertici** (**nodi**) e un numero finito E di **segmenti** (**archi**) che collegano ogni nodo agli altri.

Di seguito un esempio di grafo:

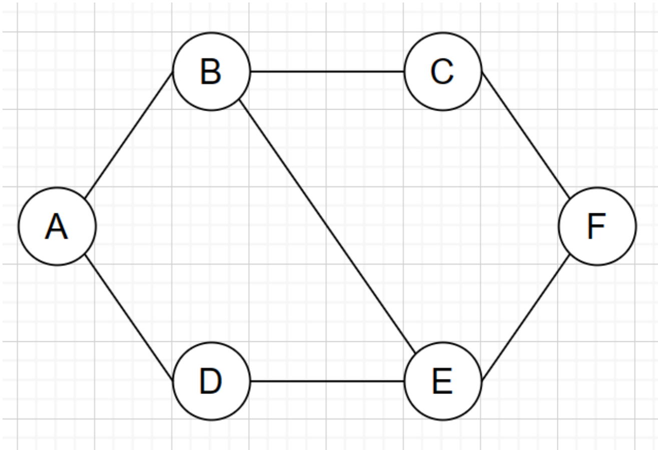

Figura 1: Esempio di grafo

Tale grafo può essere dunque identificato come: $G = (V, E)$

- $V(G) = \ vertici\ del\ grafo\ = \ \{A, B, C, D, E, F\}$
- Ordine del grafo = numero dei nodi

Relativamente agli archi, un arco è una relazione binaria tra 2 nodi:

- $\alpha = (a,\ b)$ con $\alpha \in E$, $a \in V$ e $b \in V$; a e b sono nodi del grafo e sono detti "estremi" dell'arco α
- $E(G) = \ archi\ del\ grafo\ = \ \{(A, B),\ (B, C),\ (C, F),\ (F, E),\ (E, D),\ (D, A),\ (B, E)\}$

Tale "relazione binaria" può essere definita come coppia ordinata o non ordinata a seconda se sia indicato un verso. Nel caso di coppie non ordinate, le generiche coppie (a, b) e (b, a) indicano lo stesso arco del grafo. Viceversa, nel caso delle coppie ordinate le coppie (a, b) e (b, a) indicano un verso differente sullo stesso arco, rispettivamente a → b e b → a.

Possiamo inoltre parlare di "orientamento" del grafo, in particolare:

- Grafo orientato (grafo diretto o digrafo): è un grafo i cui archi hanno una direzione ed un verso; in questo caso gli archi sono frecce
- **Grafo non orientato: è un grafo i cui archi hanno con una relazione biunivoca tra i nodi**

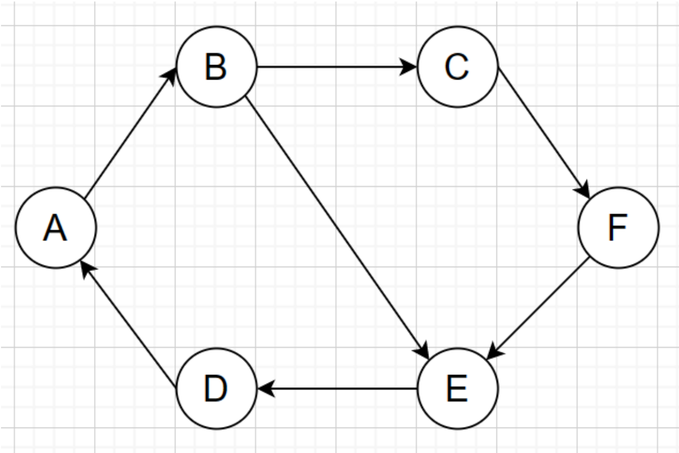

Figura 2 - Grafo orientato

ATTENZIONE: direzione e verso nel linguaggio parlato hanno entrambi il significato di senso o punto di arrivo di un oggetto in movimento; in geometria, invece, sono due cose diverse: la direzione indica ad esempio lo spostamento di un oggetto lungo una retta e il verso ne indica l'orientamento

Il grafo di fig. 2 è un grafo orientato, per cui si può ad es. andare dal nodo A al nodo B direttamente, ma non viceversa: se volessi andare da B ad A dovrei fare uno dei percorsi:

- B → E → D → A
- B → C → F → E → D → A

2. Terminologia

A livello di terminologia, nei grafi orientati, si parla di "archi" mentre in quelli non orientati di parla di "spigoli". Pertanto:

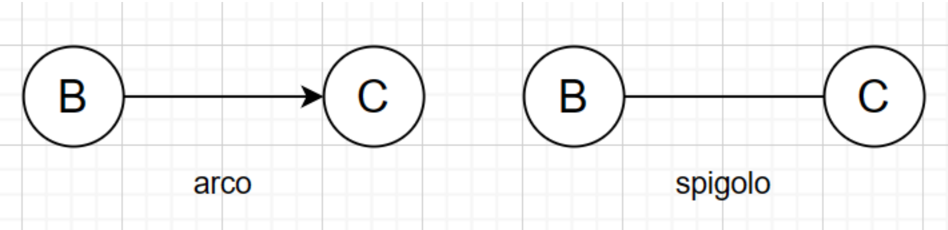

Figura 3 - arco vs spigolo

Sempre da un punto di vista di terminologia, quando si parla di archi, si dice che gli estremi che un arco congiunge sono detti nodi e l'arco tra 2 nodi è detto incidente. Nel caso invece di spigoli, gli estremi sono detti vertici. Pertanto:

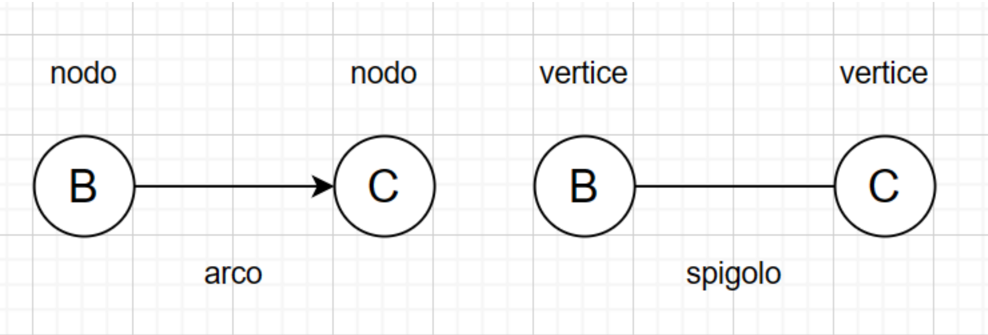

Figura 4 - nodo vs vertice

Se un arco/spigolo ha gli estremi coincidenti in un solo vertice, questo si dice anello.

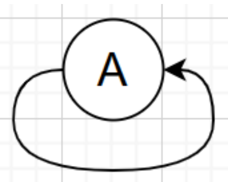

Figura 5 - anello

Due archi/spigoli sono detti adiacenti se hanno un vertice estremo in comune.

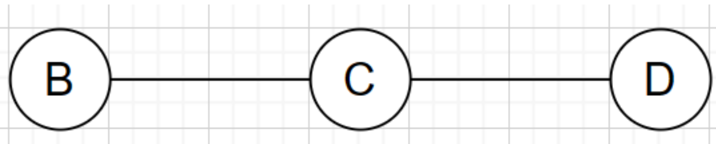

Figura 6 - spigoli adiacenti

Consideriamo il seguente grafo:

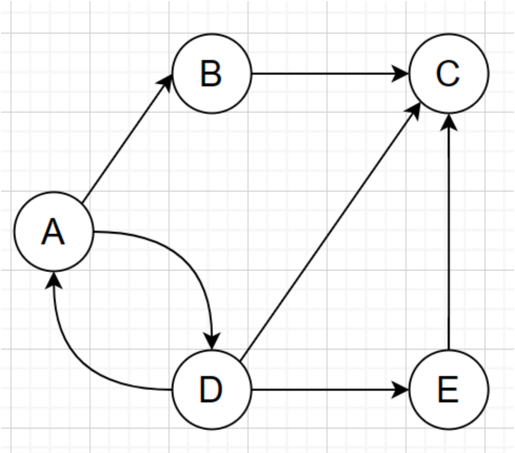

Figura 7 - adiacenze ed incidenze

In termini di adiacenze / incidenze abbiamo:

- (A, B) è incidente da A a B
- (A, D) è incidente da A a D
- (D, A) è incidente da D ad A
- […]
- B è adiacente ad A
- D è adiacente ad A
- A è adiacente a D
- […]

Il grado di un nodo è il numero di archi incidenti su di esso. Distinguiamo tra grafo orientato e grafo non orientato:

- Nel grafo non orientato si parla semplicemente di "grado" come numero di archi incidenti
- Nel grafo orientato si parla di:
  - grado entrante: numero di archi incidenti su di esso
  - grado uscente: numero di archi incidenti da esso

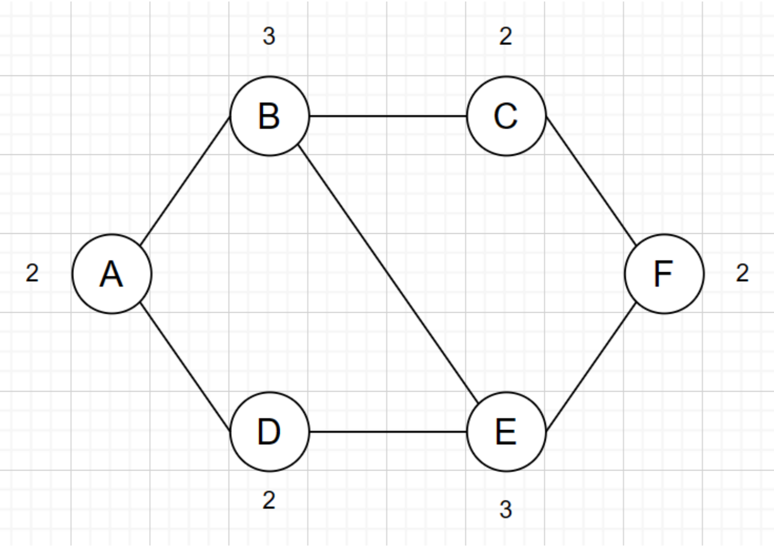

Figura 8 - Grado in grafo non orientato

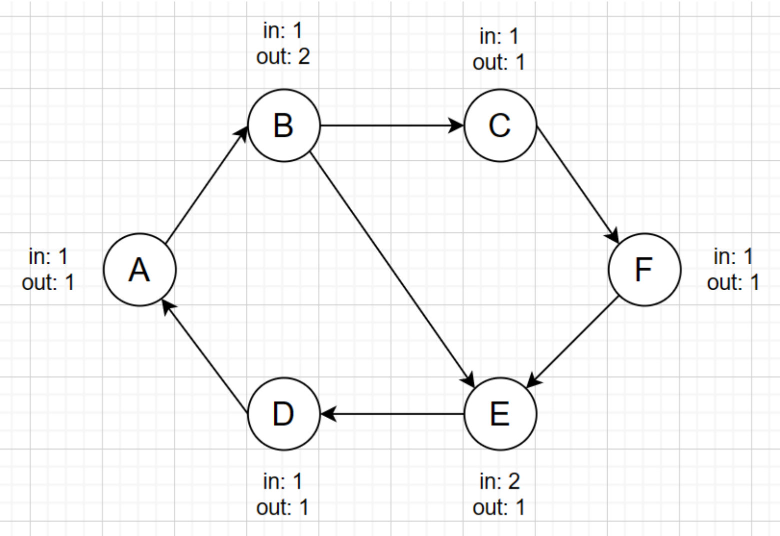

Figura 9 - Grado in grafo orientato

Un grafo con un arco fra tutte le coppie di nodi è detto completo.

In un grafo completo con m nodi:

$$m = numeri\ di\ archi = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$$

Un grafo è detto connesso se, per ogni coppia di vertici $(u, v) \in V$ esiste un cammino che collega u a v.

Cammino: il cammino da un nodo di origine X ad un nodo di destinazione Y è una sequenza di nodi adiacenti per andare da X ad Y, senza nodi ripetuti

Percorso: il percorso da un nodo di origine X ad un nodo di destinazione Y è una sequenza di nodi adiacenti per andare da X ad Y con alcuni nodi ripetuti

Quando si parla di cammino ci si riferisce sia al caso di grafo orientato che non orientato.

A volte ci si riferisce al cammino senza nodi ripetuti come cammino semplice mentre al percorso come cammino generico.

Lunghezza (cardinalità): numero degli archi nella sequenza (sia nel caso di cammino che di percorso)

Distanza: numero di nodi della sequenza

Il cammino ottimale ed il percorso ottimale sono rispettivamente il cammino ed il percorso con il costo più basso.

Solitamente ci si riferisce al termine cammino quando si considera un grafo orientato: in un grafo orientato $G = (V, E)$, un cammino di lunghezza $\boldsymbol{k}$ è una sequenza di vertici $u_0, u_1, \ldots, u_k$, tale che $(u_i, u_{i+1}) \in E \; per \; 0 \leq i \leq k-1$.

In un grafo non orientato si parla invece di catena: in un grafo non orientato $G = (V, E)$, una catena di lunghezza $\boldsymbol{k}$ è una sequenza di vertici $u_0, u_1, \ldots, u_k$, tale che $[u_i, u_{i+1}] \in E \; per \; 0 \leq i \leq k-1$.

Distinguiamo inoltre tra ciclo e circuito:

- in un grafo orientato $G = (V, E)$, un ciclo di lunghezza $\boldsymbol{k}$ è una sequenza di vertici $u_0, u_1, \ldots, u_k$, tale che $(u_i, u_{i+1}) \in E \; per \; 0 \leq i \leq k-1$, $u_0 = u_k \; e \; k > 2$
- in un grafo non orientato $G = (V, E)$, una catena di lunghezza $\boldsymbol{k}$ è una sequenza di vertici $u_0, u_1, \ldots, u_k$, tale che $[u_i, u_{i+1}] \in E \; per \; 0 \leq i \leq k-1$, $u_0 = u_k \; e \; k > 2$

Un ciclo è detto semplice se tutti i suoi nodi sono distinti (ad esclusione del primo e dell'ultimo).

Un grafo senza cicli è detto aciclico; un grafo orientato aciclico è chiamato DAG (Directed Acyclic Graph).

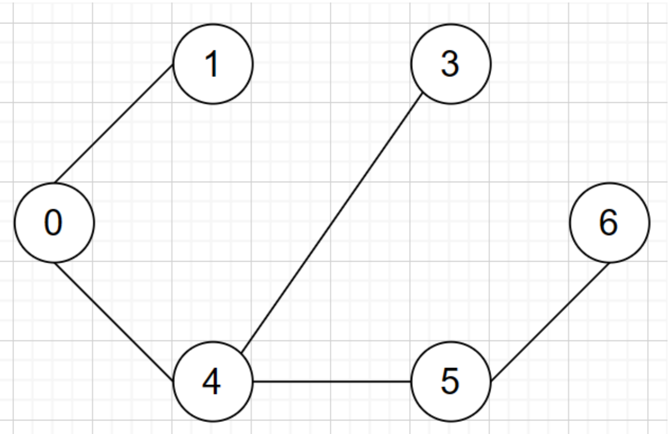

Figura 10 - Grafo aciclico

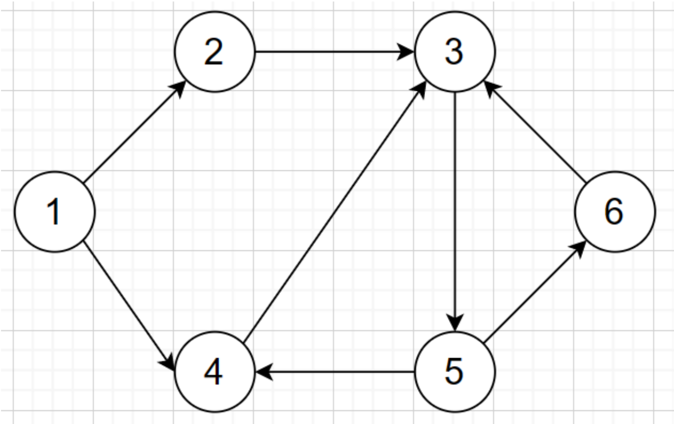

Figura 11 - Grafo non aciclico

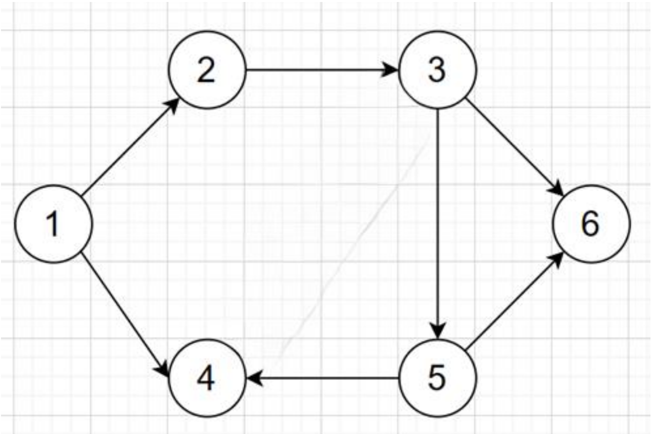

Figura 12 – DAG

In teoria dei grafi, definiamo inoltre un grafo come pesato se ogni arco ha associato un peso o un costo numerico. Questo valore numerico rappresenta una qualche misura di distanza, costo, tempo o altra grandezza associata all'arco del grafo.

3. Alcune tipologie di grafo

Alcuni casi "particolari" di grafo sono:

- Free Tree (albero libero): è un grafo connesso con $m = n - 1$
- Rooted Tree (albero radicato): è un grafo connesso con $m = n - 1$ in cui uno dei nodi è designato come radice (root)
- Foresta: è un insieme di alberi

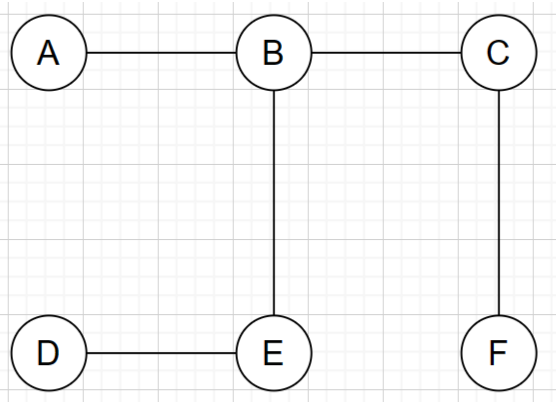

Figura 13 - Free Tree

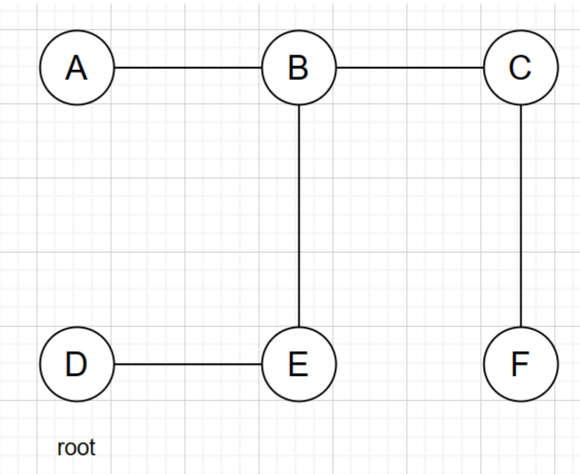

Figura 14 - Rooted Tree

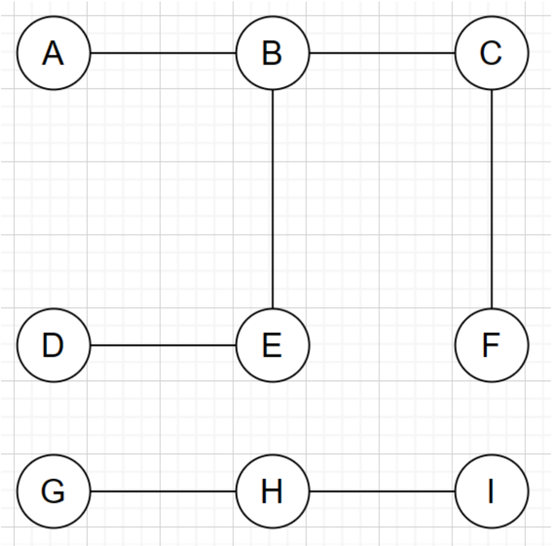

Figura 15 - Forest

In un grafo non orientato $G = (V, E)$, un albero di copertura T è un albero libero $T = (V, E')$ composto da tutti i nodi di V e da un sottoinsieme degli archi $(E' \subseteq E)$, tale per cui tutte le coppie di nodi del grafo sono connesse da una sola catena nell'albero.

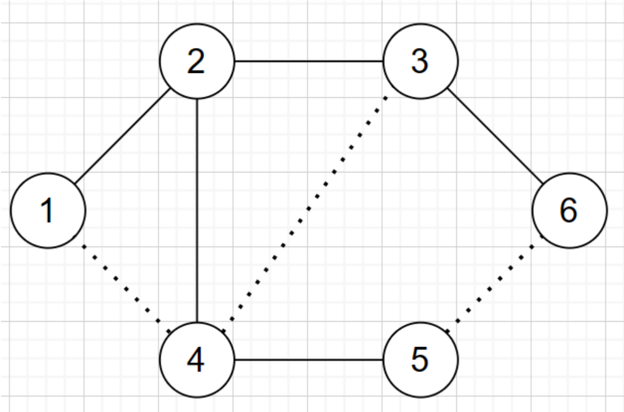

Figura 16 - Albero di copertura

4. Complessità

In termini di "dimensioni" di un grafo abbiamo:

- Numero di nodi: $n = |V|$
- Numero di archi: $m = |E|$

La complessità nei grafi è espressa in termini sia di n che di m (ad es. $O(n + m)$)

Alcune relazioni fra n e m:

- In un grafo non orientato: $m \leq \frac{n(n-1)}{2} = O(n^2)$
- In grafo orientato: $m \leq n^2 - n = O(n^2)$

Informalmente (anche se non c'è accordo sulla definizione), un grafo si dice:

- sparso se ha "pochi archi"; i grafi con $m = O(n)$ o $m = O(n \log_2 n)$ sono considerati sparsi
- denso se ha "tanti archi"; i grafi con $m = \Omega(n^2)$ sono considerati densi

5. Bibliografia

- Alan Bertossi, Alberto Motresor: Algoritmi e strutture di dati, Città Studi Edizioni, terza edizione;
- C. Demetrescu, I. Finocchi, G. F. Italiano: Algoritmi e strutture dati, McGraw-Hill, seconda edizione;
- Crescenzi, Gambosi, Grossi: Strutture di Dati e Algoritmi, Pearson/Addison-Wesley;
- Sedgewick: Algoritmi in C, Pearson, 2015;
- Cormen Leiserson Rivest Stein-Introduzione Agli Algoritmi E Strutture Dati-Prima Edizione.