Distribuzione Binomiale

Paolo Sciattella

Caratteristiche

Caratteristiche

- Consideriamo una prova che può avere solo due possibili risultati: “successo” e “insuccesso”. Il risultato di tale prova può essere descritto da una v. c. di Bernoulli, che assume valore 1 per “successo” e valore 0 per “insuccesso”.
- Chiamiamo inoltre π la probabilità di successo in una prova. Supponiamo ora di effettuare n prove, **indipendenti** le une dalle altre e nelle **stesse identiche condizioni**

Caratteristiche

2

Chiamiamo X_1 il risultato della prima prova, X_2 il risultato della seconda prova, ..., X_n il risultato della $n-esima$ prova. Chiaramente ogni X_i è una v. c. di Bernoulli;

inoltre X_1 , X_2 , ..., X_n sono indipendenti e identicamente distribuite.

Poiché ogni X_i può assumere il valore 0 oppure il valore 1, è chiaro che la v. c. somma $\mathrm{X} = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$

corrisponde al numero di X_i uguali a 1.

Caratteristiche

Supponiamo, per esempio, che $n = 3$; si ha:

$X_1 = 0,\ X_2 = 0, X_3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{X} = 0 + 0 + 0 = 0$

$X_1 = 1,\ X_2 = 0, X_3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{X} = 1 + 0 + 0 = 1$

$X_1 = 0,\ X_2 = 1, X_3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{X} = 0 + 1 + 0 = 1$

…

$X_1 = 1,\ X_2 = 1, X_3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{X} = 1 + 1 + 0 = 2$

…

$X_1 = 1,\ X_2 = 1, X_3 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{X} = 1 + 1 + 1 = 3$

Caratteristiche

2

- In altre parole, la v. c. X rappresenta il numero di successi in n prove indipendenti ripetute nelle stesse condizioni, ossia la somma di n v. c. di Bernoulli indipendenti e identicamente distribuite, quindi con stesso valore del parametro π.
- La funzione di probabilità della v. c. risultante X è chiamata **funzione di probabilità Binomiale**, con parametri n (numero di prove) e π (probabilità di successo in una singola prova).

Caratteristiche

Definizione: una v. c. Binomiale, indicata con $X \sim Binomiale(\pi;\ n)$, rappresenta il numero di successi che si presentano in una sequenza di n sottoprove Bernoulliane indipendenti nelle quali è costante la probabilità di successo π.

Caratteristiche

La funzione di probabilità Binomiale è definita come:

$$P(x) = \binom{n}{x} \pi^x (1 - \pi)^{n-x}$$

per $x = 0,1,2, \dots, n$ (numero di successi)

con $0 \leq \pi \leq 1$

$\binom{n}{x}$ coefficiente binomiale

Caratteristiche

2

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}$$

Il simbolo $x!$, detto "x fattoriale", definito solo per valori x interi positivi, indica il prodotto dei numeri interi da 1 a x incluso:
$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (x-1) \cdot x$
Per convenzione viene posto $0! = 1$.

Il coefficiente binomiale indica il numero di combinazioni di n possibili prove ognuna delle quali dà come somma lo stesso valore x.

Caratteristiche

Per esempio,

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot (3)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot (1\cdot 2\cdot 3)} = \frac{120}{12} = 10$$

$$\binom{3}{3} = \frac{3!}{3!\,(3-3)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot (0)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot (1)} = \frac{6}{6} = 1$$

$$\binom{3}{0} = \frac{3!}{0!\,(3-0)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot (3)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{6}{6} = 1$$

Distribuzione Uniforme discreta

2

Sono v. c. uniformi discrete le seguenti prove:

- **Lancio di un dado regolare**
  - Valori possibili: 1, 2, 3, 4, 5, 6
  - $P(x) = \frac{1}{6}$
- **Estrazione di un numero al lotto**
  - Valori possibili: 1, 2, 3, …, 90
  - $P(x) = \frac{1}{90}$

Valore atteso e varianza

Valore atteso e varianza

Come detto, la v. c. $X \sim Binomiale(\pi;\ n)$, rappresenta la somma di n v. c. di Bernoulli indipendenti e identicamente distribuite, con probabilità di successo pari a π.

Possiamo scrivere, quindi:

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$$

e

$$V(X) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)$$

con $X_i \sim Bernoulli(\pi)$

Valore atteso e varianza

2

Ricordando che per una v. c. $Y \sim Bernoulli(\pi)$, si ha:

$$E(Y) = \pi \qquad \text{e} \qquad V(Y) = \pi \cdot (1 - \pi)$$

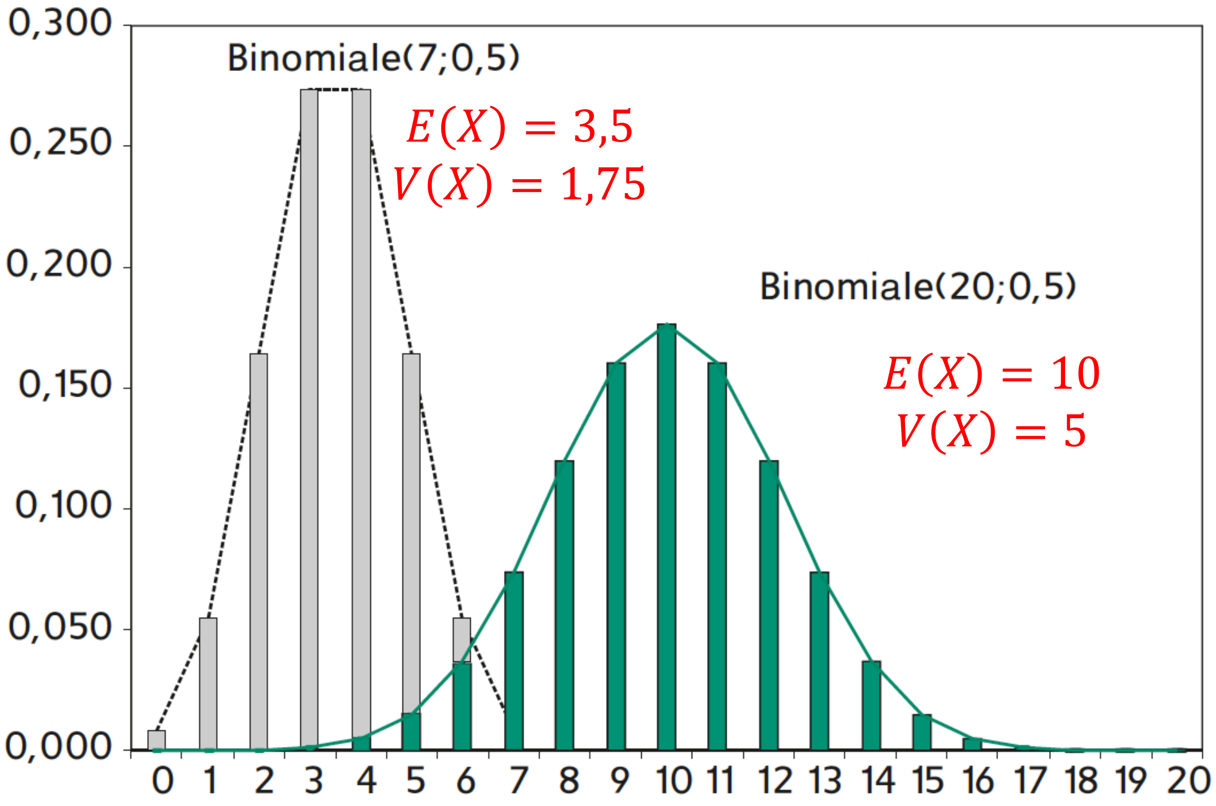
Possiamo scrivere

$$E(X) = E(X_1) + \cdots + E(X_n) = \pi + \cdots + \pi = n \cdot \pi$$

$$V(X) = V(X_1) + \cdots + V(X_n) = \pi(1 - \pi) + \cdots + \pi(1 - \pi)$$
$$= n \cdot \pi(1 - \pi) =$$

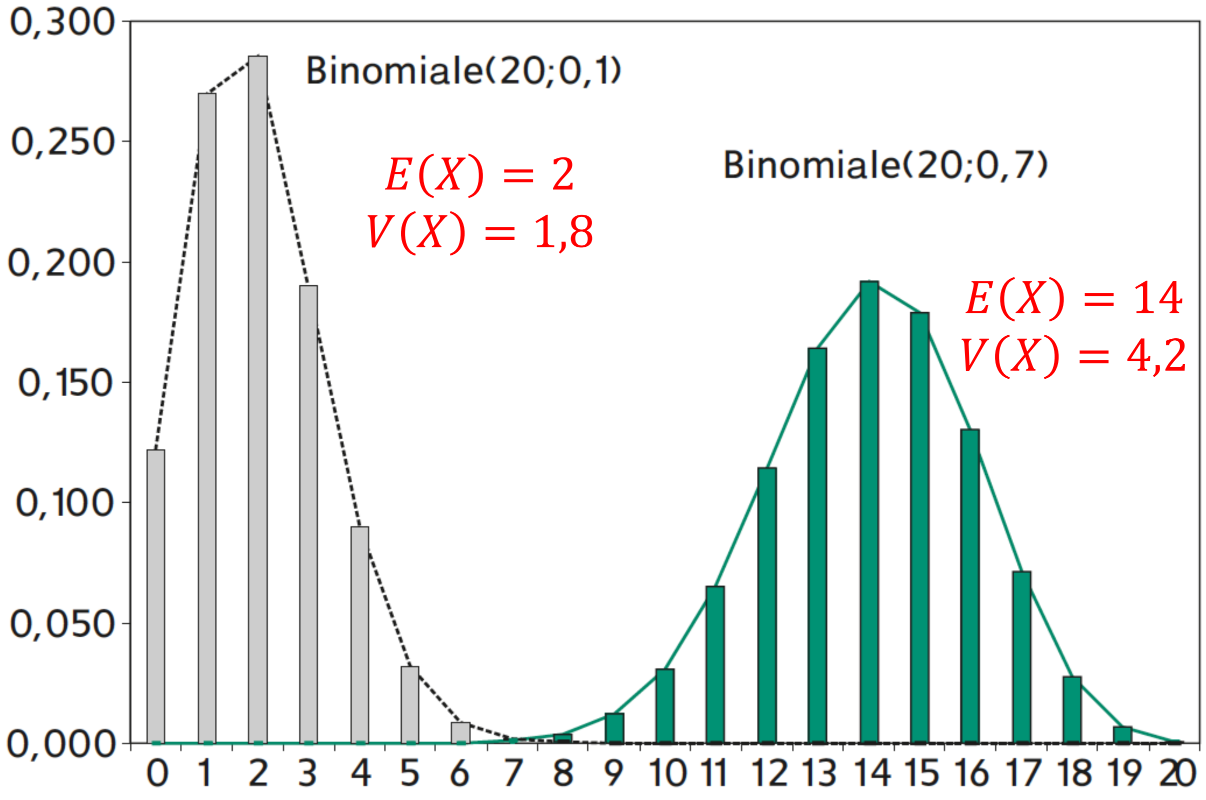
Valore atteso e varianza

Al variare dei parametri n e π si ottengono funzioni di probabilità che presentano una forma molto diversa



Valore atteso e varianza

Al variare dei parametri n e π si ottengono funzioni di probabilità che presentano una forma molto diversa



Valore atteso e varianza

La distribuzione Binomiale ha le seguenti proprietà:

1. Il valore atteso e la varianza crescono al crescere di n.

2. La distribuzione è simmetrica per $\pi = 0{,}5$ rispetto al proprio valore atteso che risulta pari a $n\pi = \frac{n}{2}$

3. La distribuzione tende in ogni caso a essere simmetrica rispetto al valore medio per $n \to +\infty$

Esempio

Esempio

Da un mazzo di 52 carte (13 di cuori, 13 di quadri, 13 di fiori e 13 di picche) ne vengono estratte 5 con reinserimento. Si è interessati alla variabile casuale X che descrive il numero di carte di cuori ottenute nelle estrazioni.

Si vuole determinare:

a) il valore atteso e la varianza della variabile X;

b) la probabilità di estrarre tre carte di cuori;

c) la probabilità di estrarre almeno tre carte di cuori.

Esempio

- Dato che l’estrazione delle carte dal mazzo di 52 avviene con ripetizione, la probabilità di ottenere una carta di cuori rimane costante per tutte le estrazioni.
- Le singole estrazioni, inoltre, sono indipendenti in quanto fisicamente separate.

Esempio

Alla luce di ciò, la variabile casuale X risulta essere una variabile casuale Binomiale di parametri

$n = 5$ e $p = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

Con funzione di probabilità pari a:

$$P(X = x) = \binom{5}{x} 0{,}25^x \cdot (1 - 0{,}25)^{5-x}\ ,\ \ con\ x = 0{,}1{,}2{,}3{,}4{,}5$$

Esempio

a) Il Valore atteso e la varianza risultano quindi pari a:

$$E(X) = n\pi = 5 \cdot 0{,}25 = 1{,}25$$

$$V(X) = n\pi(1 - \pi) = 5 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75 = 0{,}9375$$

Esempio

b) la probabilità di estrarre tre carte di cuori è pari a:

$$P(X=3)=\binom{5}{3}0{,}25^3\cdot(1-0{,}25)^{5-3}=$$

$$=\frac{5!}{3!\,(5-3)!}0{,}25^3\cdot(0{,}75)^2=$$

$$=\frac{5\cdot4\cdot3!}{3!\,2!}\cdot0{,}0156\cdot0{,}5625=\frac{5\cdot4}{2}\cdot0{,}00879=0{,}0879$$

Esempio

2

c) La probabilità di estrarre almeno tre carte di cuori:

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$$

$$= \binom{5}{3} 0{,}25^3 \cdot (0{,}75)^{5-3} + \binom{5}{4} 0{,}25^4 \cdot (0{,}75)^{5-4} + \binom{5}{5} 0{,}25^5 \cdot (0{,}75)^{5-5}$$

$$0{,}0879 + \frac{5!}{4!\,(5-4)!} 0{,}25^4 \cdot 0{,}75 + \frac{5!}{5!\,(5-5)!} 0{,}25^5 \cdot (0{,}75)^0$$

$$= 0{,}0879 + \frac{5 \cdot 4!}{4!\,(1)!} \cdot 0{,}0029 + 0{,}25^5$$

$$= 0{,}0879 + 5 \cdot 0{,}0029 + 0{,}0010$$

$$= 0{,}0879 + 0{,}0146 + 0{,}0010 = 0{,}1035$$