



# Le variabili causali discrete

Paolo Sciattella



# Introduzione

# Introduzione

- Una **variabile casuale** (o variabile aleatoria)  $X$  è una **funzione** definita sullo spazio campionario  $\Omega$  che associa a ogni risultato elementare  $\omega_i$  un unico numero reale.
- In particolare, si definisce **variabile casuale discreta**, una variabile casuale che può assumere un insieme discreto (finito o numerabile) di numeri reali.

# Introduzione

Poiché siamo in grado di associare una misura di probabilità a tutti gli eventi  $E \in \Omega$ , allora siamo in grado di associare una probabilità anche ai valori che può assumere la variabile casuale  $X$ .

In generale indicheremo  $P(X = x_i)$  la probabilità che la variabile casuale  $X$  assuma il valore  $x_i$ .

In alcuni casi utilizzeremo la semplice notazione  $P(x_i)$

# Introduzione

Data una variabile casuale  $X$ , la funzione che associa a ognuno dei possibili valori  $x_i$  la corrispondente probabilità  $P(X = x_i)$  viene chiamata **funzione di probabilità** di  $X$ .

Dalla definizione di funzione di probabilità derivano due proprietà:

1.  $\sum_i P(x_i) = 1$
2.  $P(x_i) \geq 0$

## Introduzione

La funzione di probabilità può essere rappresentata graficamente.

**Esempio:** considerando la prova *lancio di due dadi* e la variabile casuale  $X$  definita come somma dei punteggi ottenuti per ciascun dado, la distribuzione di probabilità di  $X$  è la seguente:

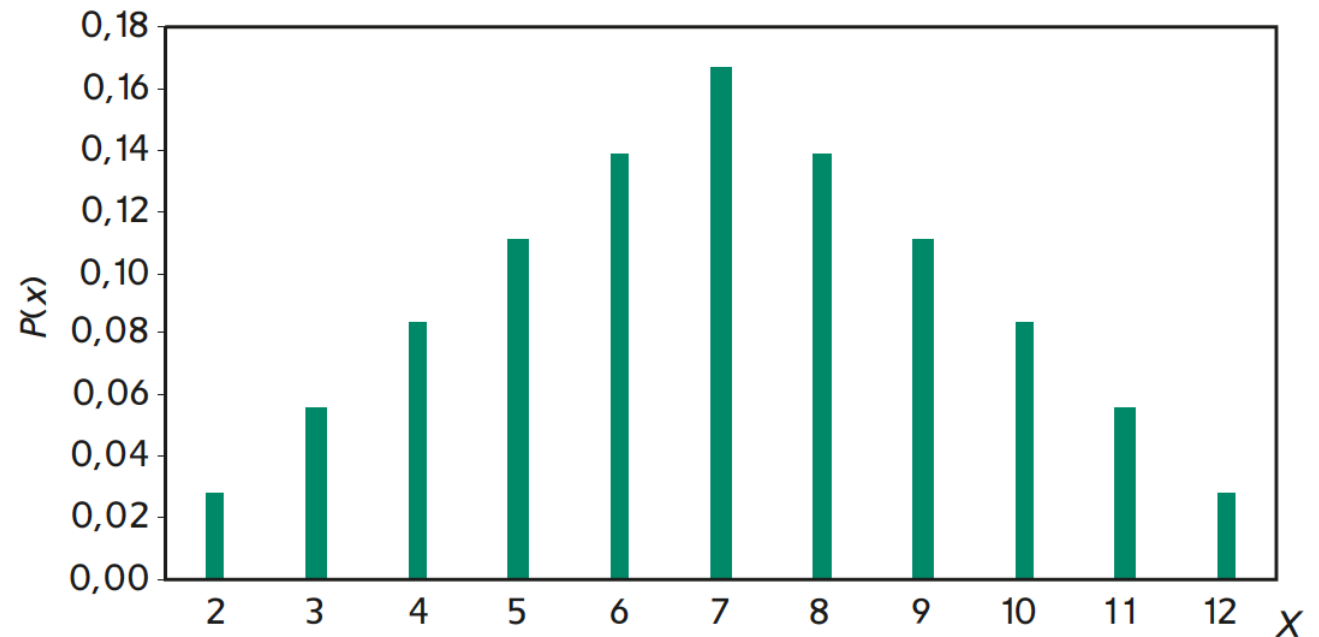
$$P(X = 2) = P(1^\circ \text{ dado} = 1) \cap P(2^\circ \text{ dado} = 1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

$$P(X = 5) = P[(1; 4) \cup (2; 3) \cup (3; 2) \cup (4; 1)] = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{4}{36}$$

$X$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(x)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

## Introduzione

La rappresentazione grafica della distribuzione di probabilità della variabile  $X$  è la seguente:



$X$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(x)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

---

La funzione di ripartizione per una v.c. discreta

## La funzione di ripartizione per una v.c. discreta

Abbiamo visto che la funzione di probabilità di una variabile casuale discreta è una funzione che associa a ognuno dei possibili valori  $x_i$  la corrispondente probabilità  $P(X = x_i)$ .

In alcune situazioni, potremmo essere interessati non alla probabilità che la variabile casuale  $X$  assuma uno specifico valore  $x_i$ , bensì alla probabilità che essa assuma un **valore minore o uguale** a un dato valore  $x_i$ .

In tal caso si devono considerare delle **probabilità cumulate**  $P(X \leq x_i)$ , che si riferiscono alla probabilità degli intervalli  $(-\infty; x_i]$

## La funzione di ripartizione per una v.c. discreta

Data una variabile casuale discreta  $X$ , la funzione che fa corrispondere ai valori  $x$  le probabilità cumulate  $P(X \leq x)$  viene detta **funzione di ripartizione** ed è indicata con:

$$F(X) = P(X \leq x) = \sum_{w \leq x} P(X = w)$$

## La funzione di ripartizione per una v.c. discreta

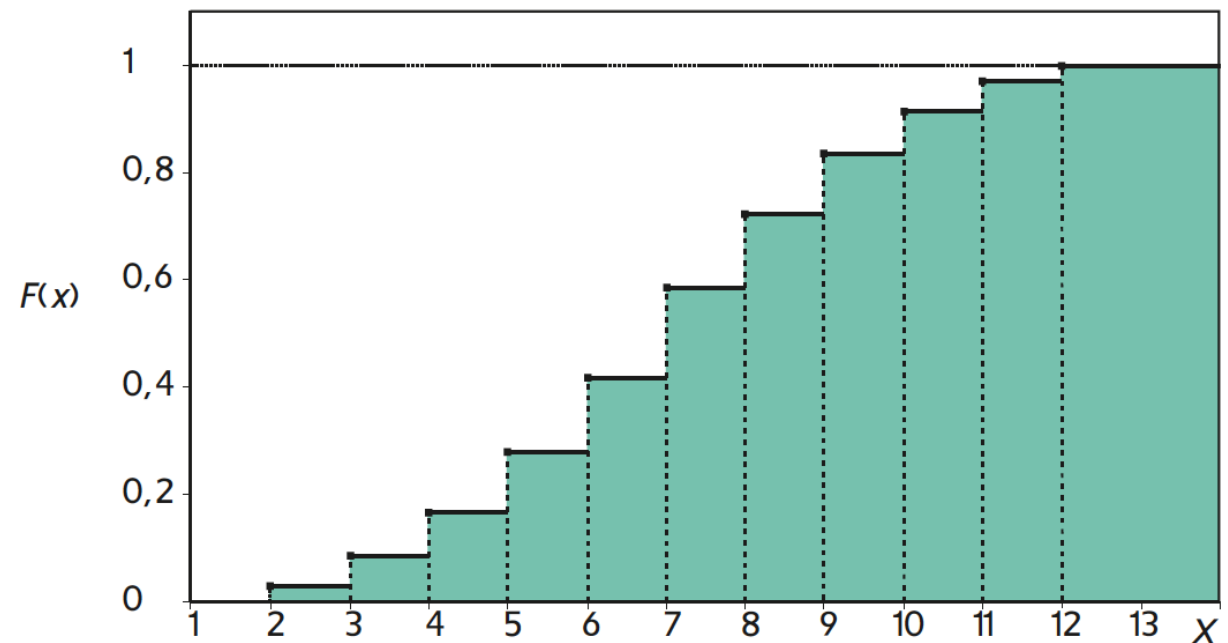
**Esempio:** considerando la prova *lancio di due dadi* e la variabile casuale  $X$  definita come somma dei punteggi ottenuti per ciascun dado.

Partendo dalla distribuzione di probabilità di  $X$ , possiamo costruire la corrispondente funzione di ripartizione:

$X$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(x)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36
$F(x)$	1/36	3/36	6/36	10/36	15/36	21/36	26/36	30/36	33/36	35/36	1

## La funzione di ripartizione per una v.c. discreta

La rappresentazione grafica della v.c.  $X$ : somma dei punteggi ottenuti per ciascun dado, è la seguente:



## La funzione di ripartizione per una v.c. discreta

Si noti che  $P(x)$  e  $F(x)$  sono definite anche per valori diversi da quelli riportati nella tabella (che sono gli unici assumibili da  $X$ ).

Ad esempio, per  $X = 1$  si ha  $P(1) = 0$  e  $F(1) = 0$ , mentre per  $X = 13$  si ha  $P(13) = 0$  e  $F(13) = 1$ .

## La funzione di ripartizione per una v.c. discreta

La **funzione di ripartizione** gode di tre importanti proprietà:

1.  $F(X)$  è non decrescente:

$$\text{ossia se } i < j \text{ allora } F(x_i) \leq F(x_j)$$

e

1.  $F(x)$  è continua a destra, ossia:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x) = F(x_0)$$

## La funzione di ripartizione per una v.c. discreta

$F(X)$  è non decrescente, ossia se  $i < j$  allora  $F(x_i) \leq F(x_j)$

**Spiegazione:** se  $x_i < x_j$ , allora l'insieme degli eventi  $X \leq x_i$  è contenuto nell'insieme degli eventi  $X \leq x_j$ :

$$\{X \leq x_i\} \subseteq \{X \leq x_j\}$$

e quindi  $P(X \leq x_i) \leq P(X \leq x_j)$  ossia  $F(x_i) \leq F(x_j)$

## La funzione di ripartizione per una v.c. discreta

Ipotizziamo che  $j = i + 1$ , sia il valore immediatamente successivo a  $i$

Avremo che  $F(x_i) = P(X \leq x_i)$  e  $F(x_j) = P(X \leq x_j)$

ma possiamo scrivere

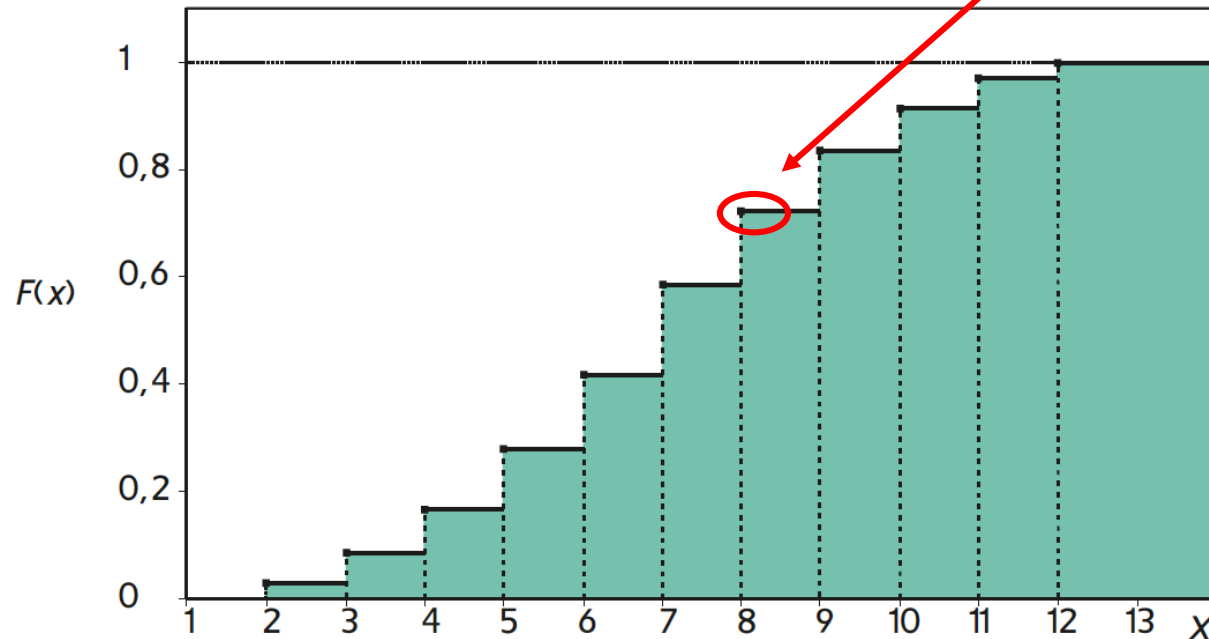
$$F(x_j) = F(x_i) + P(X = x_j)$$

Poiché  $P(X = x_j) \geq 0$

Avremo che  $F(x_j) \geq F(x_i)$

## La funzione di ripartizione per una v.c. discreta

La continuità a destra indica che, poiché la funzione di ripartizione di una variabile casuale discreta  $X$  cambia solo nei punti in cui la variabile casuale può assumere valori, per ogni  $x$ , il limite destro coincide con il valore della funzione in  $x$ . Ad esempio  $F(8,0001) = F(8) = 26/36$



---

Esempio di funzione di ripartizione per v.c. discreta

## Esempio di funzione di ripartizione per v.c. discreta

### ESEMPIO

Consideriamo un processo produttivo che genera coppie di pneumatici. Siamo interessati a misurare il numero di pneumatici difettosi in ogni coppia.

Possiamo definire una v. c.  $X$  che potrà quindi assumere i valori:

- 0: nessuno dei due pneumatici è difettoso
- 1: uno solo è difettoso
- 2: tutti e due sono difettosi.

Supponiamo che:

$$P(X = 0) = 0,80 ; P(X = 1) = 0,15; P(X = 2) = 0,05$$

## Esempio di funzione di ripartizione per v.c. discreta

Si ricava facilmente, per esempio, che:

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,80 + 0,15 = 0,95$$

mentre la funzione di ripartizione può essere espressa come:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < 0 \\ 0,80 & 0 \leq x < 1 \\ 0,95 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & 2 \leq x < +\infty \end{cases}$$

## Esempio di funzione di ripartizione per v.c. discreta

Il grafico della funzione di ripartizione della variabile casuale  $X$  è

