Le variabili causali continue

Paolo Sciattella

Introduzione

Introduzione

- Una **variabile casuale** (o variabile aleatoria) X è una **funzione** definita sullo spazio campionario Ω che associa a ogni risultato elementare ω_i un unico numero reale.
- In particolare, si definisce **variabile casuale continua**, una variabile casuale che può assumere tutti i valori compresi in un intervallo reale.

Introduzione

- Poiché la variabile casuale continua può assumere un’infinità non numerabile di valori, non avrebbe senso associare una misura di probabilità a ciascuno degli infiniti valori che tale variabile può assumere.
- Supponiamo per esempio che la v.c. X possa assumere tutti i valori dell’intervallo $[0,1]$, e che assuma ciascun valore con la stessa probabilità (diversa da zero): comunque si fissi tale probabilità si ha che la somma delle probabilità è infinita.

Introduzione

- Piuttosto che assegnare una misura di probabilità ai singoli valori, **possiamo** in questo caso **assegnare** una misura di **probabilità** a tutti **i possibili intervalli** sull'asse reale. A tale scopo si introduce la **funzione di densità** della v.c., tramite la quale siamo in grado di calcolare la probabilità di qualsiasi intervallo.

Introduzione

Chiameremo **funzione di densità** della variabile casuale continua X la funzione matematica $f(x)$ per cui l'area sottesa alla funzione, corrispondente a un certo intervallo, è uguale alla probabilità che X assuma un valore in quell'intervallo. Quindi in termini più formali la funzione di densità soddisfa, per ogni intervallo reale, la seguente condizione:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)$$

La funzione di densità

La funzione di densità

- Per comprendere il significato della **funzione di densità,** consideriamo l'esempio di una variabile casuale continua X che può assumere tutti i valori dell'intervallo reale $[0; 1]$ (che, come sappiamo, sono infiniti) in modo tale che tutti i sottointervalli di uguale ampiezza abbiano la stessa probabilità.

La funzione di densità

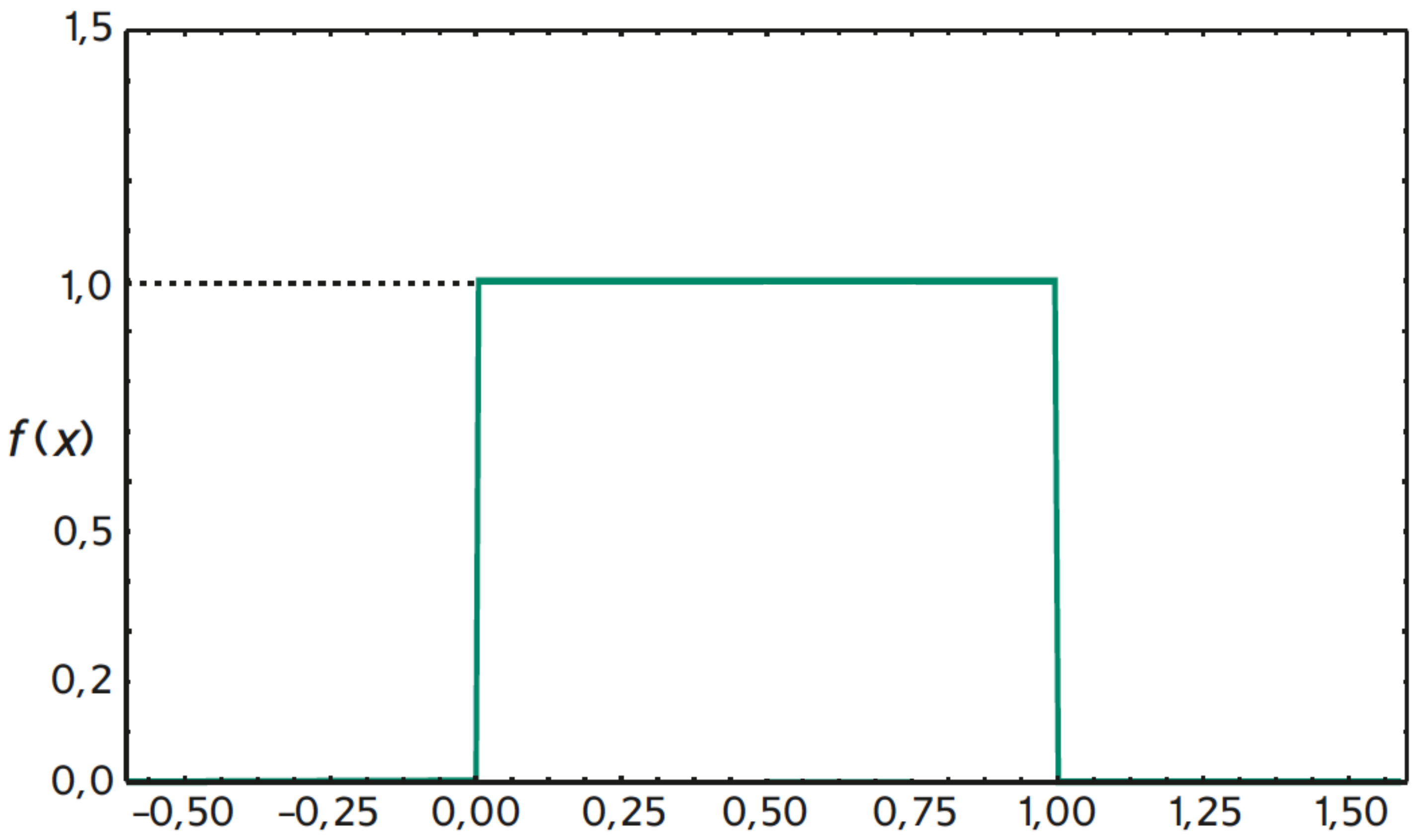
Se consideriamo la seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \ per \ x \ \notin [0; 1] \\ 1 \ per \ x \ \in [0; 1] \end{cases}$$

notiamo che essa assume valore 0 al di fuori dell'intervallo reale $[0; 1]$ in cui è definita X, mentre assume un valore costante, pari a 1, all'interno dell'intervallo. In questo caso si parla di **funzione di densità costante**

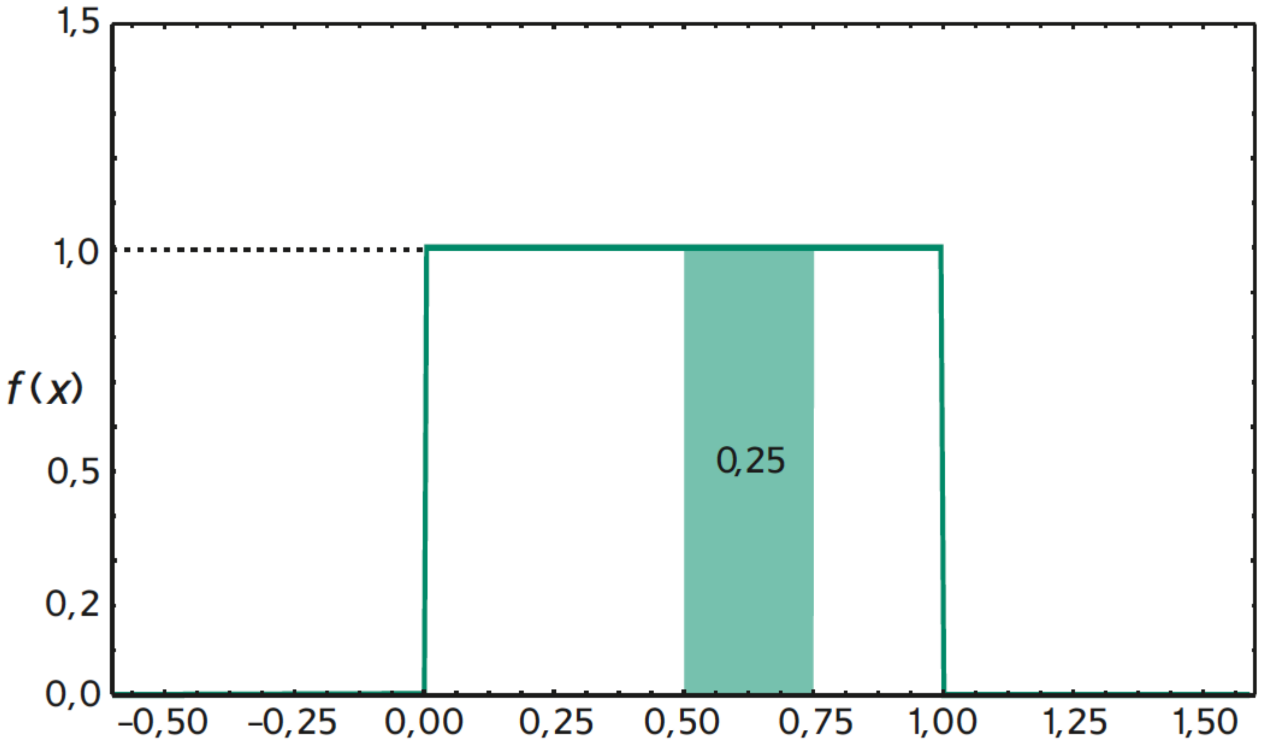
La funzione di densità

Graficamente, la funzione di densità risulta la seguente:



La funzione di densità

Quindi, la probabilità che la v.c. X assuma un valore in un intervallo corrisponde all'area sottesa dalla funzione $f(x)$ in quell'intervallo. Considerando l'intervallo $[0{,}50;\ 0{,}75]$, avremo
$P(0{,}50 \leq X \leq 0{,}75) = 0{,}25$



La funzione di densità

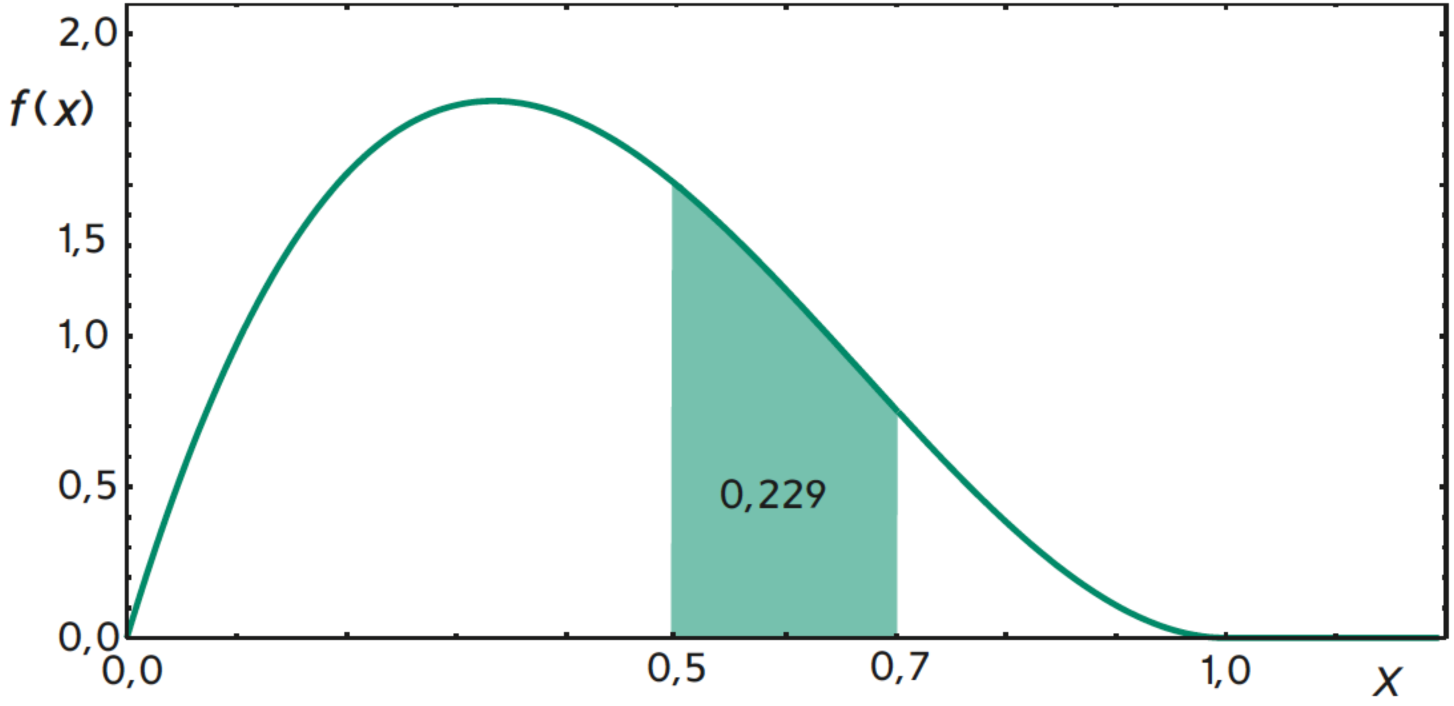
Consideriamo ora una v.c. X che può assumere tutti i valori dell'intervallo reale $[0; 1]$ con probabilità descritta dalla seguente funzione di densità:

$$f(x) = \begin{cases} 12x(1-x)^2 \; per \; x \in [0; 1] \\ \\ 0 \; per \; x \notin [0; 1] \end{cases}$$

In questo caso la v.c. X ha una funzione di densità che non assegna una probabilità costante all'interno dell'intervallo $[0; 1]$ (a parità di ampiezza dei sottointervalli). Si parla, quindi, di **funzione di densità non costante.**

La funzione di densità

Graficamente, la funzione di densità è rappresentata nella figura seguente.
Si nota come la probabilità che X assuma un valore nell'intervallo $[0{,}5;\ 0{,}7]$ è pari a 0,229, che corrisponde all'area sottesa alla funzione in quell'intervallo.



La funzione di densità

La funzione di densità gode di alcune importanti proprietà

1. Una funzione di densità non può mai assumere valori negativi, ossia $f(x) \geq 0$; ciò assicura che la probabilità che X cada in un qualsiasi intervallo sia non-negativa.

2. L’area totale sottesa alla funzione è uguale a 1, ossia

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

La funzione di densità

La funzione di densità gode di alcune importanti proprietà

3. La probabilità che la v.c. X assuma un particolare valore dell'intervallo è zero. Ciò è dovuto al fatto che un singolo valore corrisponde a un intervallo di ampiezza zero, quindi la corrispondente area è anch'essa zero. Questo implica, per esempio, che non ha influenza l'inclusione, nel calcolo della probabilità, degli estremi dell'intervallo, ossia:

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b)$$

La funzione di densità

La definizione di **funzione di ripartizione** per una v.c. continua è simile a quella vista nel caso discreto.

Data una v.c continua X, la funzione che fa corrispondere ai valori x le probabilità cumulate $P(X \leq x)$ viene detta **funzione di ripartizione** e indicata con:

$$F(X) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

La funzione di densità: esempio pratico

La funzione di densità: esempio pratico

Riprendiamo l'esempio della v.c. X che può assumere tutti i valori dell'intervallo reale [0;1] con probabilità descritta dalla funzione di densità:

$$f(x) = \begin{cases} 12x(1-x)^2 \; per \; x \in [0;1] \\ 0 \; per \; x \notin [0;1] \end{cases}$$

La funzione di densità: esempio pratico

Per calcolare la probabilità che la v.c. X assuma valori in un determinato intervallo $[a; b]$, compreso in $[0; 1]$, dobbiamo calcolare la funzione di ripartizione $F(x)$:

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

La funzione di densità: esempio pratico

Dobbiamo quindi risolvere l'integrale:

$$\int_{-\infty}^{x} 12x(1-x)^2 dx$$

Iniziamo sviluppando $f(x)$:

$$\int_{-\infty}^{x} 12x(1-x)^2 dx = \int_{-\infty}^{x} 12x(1-2x+x^2) dx =$$

$$\int_{-\infty}^{x} 12x - 24x^2 + 12x^3 dx$$

La funzione di densità: esempio pratico

Ricordando che

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

otteniamo:

$$\int_{-\infty}^{x} 12x - 24x^2 + 12x^3 dx = 12\frac{x^2}{2} - 24\frac{x^3}{3} + 12\frac{x^4}{4} =$$

$$= 6x^2 - 8x^3 + 3x^4$$

La funzione di densità: esempio pratico

Ipotizziamo di essere interessati alla probabilità che X assuma valori tra $[0{,}5; 0{,}7]$ dobbiamo calcolare:

$$\int_{0,5}^{0,7} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0,7} f(x)dx - \int_{-\infty}^{0,5} f(x)dx$$

Da quanto svolto in precedenza sappiamo che:

$$\int_{-\infty}^{x} 12x - 24x^2 + 12x^3 dx = 6x^2 - 8x^3 + 3x^4$$

La funzione di densità: esempio pratico

Ponendo $x = 0{,}7$ si ottiene

$$\int_{-\infty}^{0,7} f(x)dx = 6(0{,}7)^2 - 8(0{,}7)^3 + 3(0{,}7)^4 = 0{,}916$$

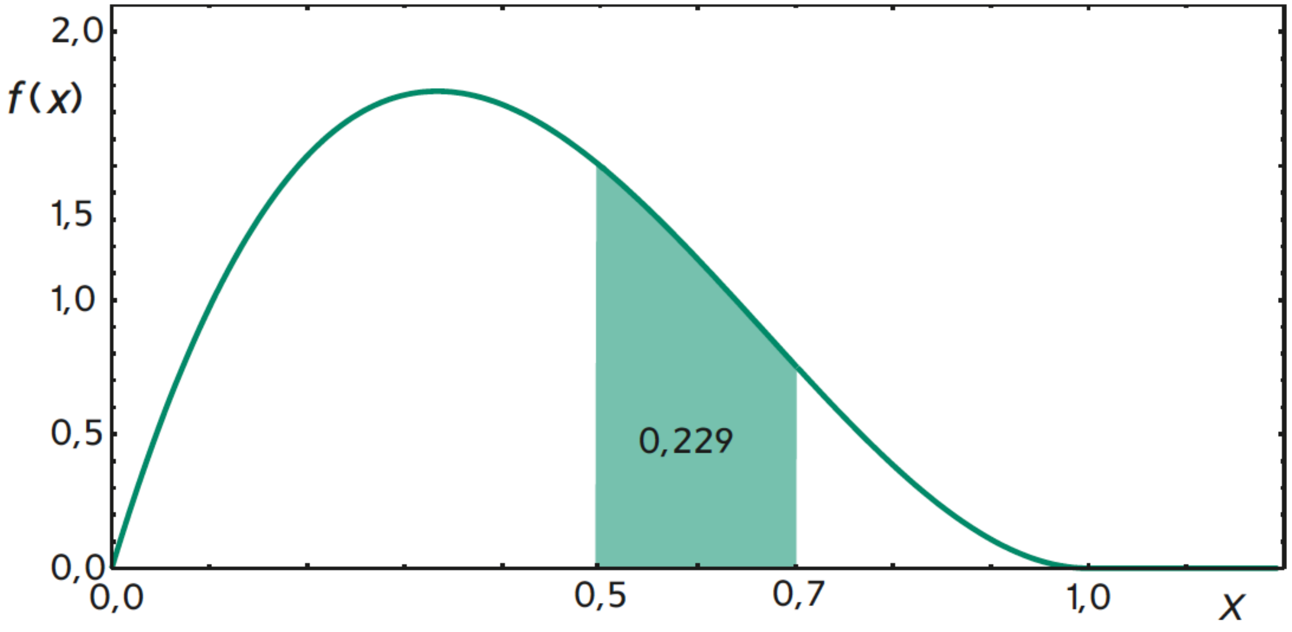
Ponendo $x = 0{,}5$ si ottiene

$$\int_{-\infty}^{0,5} f(x)dx = 6(0{,}5)^2 - 8(0{,}5)^3 + 3(0{,}5)^4 = 0{,}687$$

La funzione di densità: esempio pratico

Quindi

$$P(0{,}5 \leq x \leq 0{,}7) = \int_{0{,}5}^{0{,}7} f(x)dx = 0{,}916 - 0{,}687 = 0{,}229$$



La funzione di densità

Riprendiamo la proprietà della funzione di densità:

3. La probabilità che la v.c. X assuma un particolare valore dell'intervallo è zero.

$$P(X = a) \;\; può \; essere \; scritta \; come$$

$$P(a \leq X \leq a) = \int_a^a f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx - \int_{-\infty}^a f(x)dx = 0$$