PEGASO

Università Telematica

Matrici ed operazioni di base

1 DEFINIZIONI E NOTAZIONI

Introduciamo il concetto di matrice, limitandoci, per semplicità, al caso di matrici i cui elementi sono tutti numeri reali. Come al solito, indichiamo con $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali, e con $\mathbb{N}$ il sottoinsieme dei numeri interi maggiori o uguali a zero.

Definizione 1.1. *Si definisce* ***matrice ad*** m ***righe e ad*** n ***colonne****, o anche* ***matrice di tipo*** (m, n)*, una tabella formata da* $m \times n$ *numeri reali (detti elementi o componenti) ordinati su* m *linee orizzontali (righe) ed* n *linee verticali (colonne).*

Una matrice si può rappresentare in due modi:

1. mediante scrittura esplicita di tutti i suoi elementi; ad esempio, una generica matrice A di tipo (m, n) può esser scritta come

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

2. mediante scrittura abbreviata dei suoi elementi

$$A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}},$$

o anche $A = [a_{ij}]$, quando il tipo di A è sottinteso.

Notiamo che gli elementi a_{ij} della generica matrice A sono indicati con due indici, che sono relativi al "posto" occupato dall'elemento nella matrice. Più precisamente, il primo indice i è l'indice di riga, e il secondo indice j è l'indice di colonna. Quindi, l'elemento a_{ij} si trova all'intersezione della $i-$esima riga con la $j-$esima colonna della matrice. Diremo anche che a_{ij} è l'elemento di riga i e colonna j. Qualche volta si usa la seguente notazione per gli elementi di una matrice A, ovvero, l'elemento di riga i-esima e colonna $j-$esima viene indicato con $(A)_{ij}$, cioè si pone

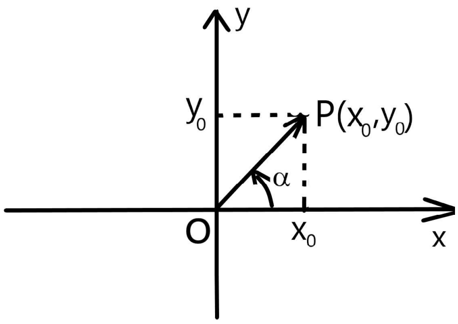
$$a_{ij} = (A)_{ij}\,.$$

Anche la seguente notazione ci tornerà utile nel seguito:

$$\mathbb{M}_{m,n} = \text{insieme di tutte le matrici di tipo } (m,n)\,.$$

1.1 Un'applicazione

La posizione di un punto P nel piano può esser univocamente individuata da una coppia ordinata di numeri reali (x_0, y_0) che coincidono con le sue *coordinate* x_0 e y_0. Questo è possibile a condizione di fissare un sistema di assi cartesiani ortogonali xOy, ed una unità di misura su ciascuno dei due assi (chiamiamo, per semplicità, tutto questo *sistema di riferimento cartesiano* xOy).
Ricordiamo come sono definite le coordinate x_0 e y_0 del punto P. La coordinata x_0 (ascissa) è un numero reale il cui valore assoluto coincide con la lunghezza (nella unità di misura scelta lungo l'asse x) del segmento che unisce l'origine O (ovvero l'intersezione dei due assi cartesiani x e y) con il punto che è la proiezione ortogonale di P sull'asse x (in figura, questo è il punto di intersezione fra l'asse x e la linea tratteggiata). Il segno di x_0 viene poi preso positivo se P si trova nel semipiano a destra dell'asse y, viene preso negativo se P è nel semipiano a sinsitra dell'asse y, e $x_0 = 0$ se infine P si trova sull'asse y. In modo analogo è poi definita la coordinata y_0 di P (ordinata).



Il punto P nel piano individua univocamente anche un segmento che ha come estremi l'origine O e P. Tale segmento viene preso orientato da O a P (l'orientamento è indicato da una freccia) e viene così chiamato *vettore posizione* OP. Il termine "vettore", in generale, indica una grandezza che viene specificata univocamente attraverso non solo un numero positivo o nullo (che rappresenta la sua intensità o modulo), ma anche da una direzione e un verso, che sono dati da una retta orientata (retta dotata di una freccia). Esempi di grandezze vettoriali sono la velocità di una particella, le forze, etc.. Nel nostro caso, per specificare univocamente la grandezza che potremmo chiamare "posizione di un punto nel piano", possiamo usare il vettore posizione OP. Tale vettore ha, come modulo, la distanza di P dall'origine O (ovvero, la lunghezza del segmento OP), come direzione quella individuata dalla retta passante per O e per P, e come verso quello dato dalla freccia da O verso P. Le proiezioni del vettore OP sugli assi x e y (prese con il loro segno) sono le componenti del vettore posizione OP, e vediamo che tali componenti coincidono con le coordinate x_0, y_0 di P. Infatti, risulta che

$$x_0 = |OP| \cos \alpha \,, \qquad y_0 = |OP| \sin \alpha \,,$$

dove $|OP|$ indica il modulo del vettore posizione OP (lunghezza del segmento OP), ovvero la distanza del punto P dall'origine O, ed α è l'angolo fra la direzione positiva dell'asse x e il vettore posizione OP (preso con il suo verso). Vedi figura.

Introduciamo ora la seguente matrice V di tipo $(1, 2)$ (vettore riga a 2 comp.)

$$V = \left[\begin{array}{cc} x_0 & y_0 \end{array} \right] .$$

Questa particolare matrice viene detta vettore riga a 2 componenti. La posizione del punto P è allora univocamente individuata (sempre in un dato e fissato sistema di riferimento cartesiano xOy) dal vettore riga V.

In alternativa, potremmo introdurre la matrice U di tipo $(2, 1)$, detta vettore colonna a 2 componenti, seguente

$$U = \left[\begin{array}{c} x_0 \\ y_0 \end{array} \right] ,$$

e potremmo naturalmente individuare univocamente il punto P anche tramite U.

Notiamo che, anche se il termine "vettore" viene usato più volte, è tuttavia opportuno distinguere l'oggetto geometrico "vettore posizione" OP dagli oggetti analitici "vettore riga" e "vettore colonna" V, U appena introdotti come casi particolari della Definizione 1.1. Ovviamente, abbiamo una corrispondenza biunivoca fra i tre oggetti.

Passiamo ora a considerare un numero finito qualsiasi di punti nel piano, ad esempio, 3 punti P_1, P_2, P_3. Tali punti (nello stesso sistema di riferimento cartesiano xOy) hanno coordinate date, rispettivamente, da x_1, y_1, da x_2, y_2, e da x_3, y_3. Possiamo quindi introdurre le seguenti matrici

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix},$$

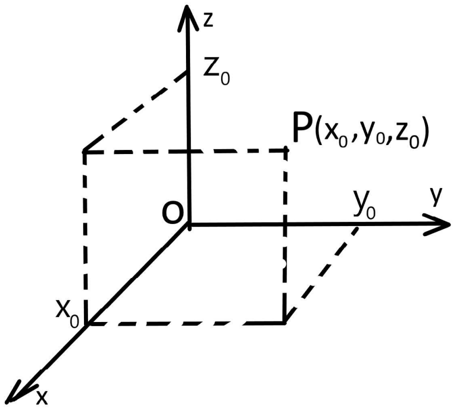
che sono, rispettivamente, di tipo $(3,2)$ e di tipo $(2,3)$. In analogia a quanto spiegato sopra per un punto solo e per i vettori riga e colonna V, U, è chiaro che una o l'altra di queste due matrici può esser usata per individuare univocamente *la terna* dei punti P_1, P_2, P_3.

In modo analogo, potremmo individuare univocamente una $N-$upla di punti $P_1, P_2, \ldots, P_N$ *nel piano* tramite una matrice di tipo $(N,2)$, oppure da una matrice di tipo $(2,N)$, date rispettivamente da

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_N & y_N \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_N \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_N \end{bmatrix},$$

dove (x_1, y_1), (x_2, y_2),..(x_N, y_N) sono le coordinate, rispettivamente, di $P_1, P_2, \ldots, P_N$. Supponendo quindi di avere, ad esempio, un sistema fisico di particelle interagenti in un piano, costituito da particelle che occupano ciascuna la posizione del punto $P_1 \ldots, P_N$, e che in generale descrivono certe traiettorie sotto l'azione delle interazioni reciproche e di eventuali azioni esterne, allora la configurazione geometrica di tale sistema, ad ogni istante temporale, può esser descritta in modo univoco (in un dato sistema di riferimento cartesiano) da una, o dall'altra, delle due matrici sopra.

Naturalmente, tutto quanto detto finora può esser esteso a un punto P o ad una $N-$upla di punti $P_1, P_2, \ldots, P_N$ nello spazio tridimensionale. In questo caso, per individuare univocamente P avremo bisogno di tre coordinate x_0, y_0, z_0, ovvero di una terna ordinata (x_0, y_0, z_0) di numeri reali che sono le sue coordinante (ascissa, ordinata e quota), definite in modo analogo a quanto fatto nel piano, cioè in uno spazio bidimensionale (vedi figura pagina successiva in alto).



Le matrici V e U che possiamo usare per individuare univocamente il punto P, in un dato e fissato sistema di riferimento cartesiano $xOyz$, saranno allora, rispettivamente, di tipo $(1,3)$ (vettore riga a 3 componenti), e di tipo $(3,1)$ (vettore colonna a 3 componenti), ovvero

$$V = \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}.$$

Una $N-$upla di punti $P_1, P_2, \dots, P_N$ nello spazio tridimensionale sarà poi individuata in modo univoco, tramite le loro coordinate $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_N, y_N, z_N)$, da una matrice di tipo $(N, 3)$, oppure da una matrice di tipo $(3, N)$, ovvero, rispettivamente, da una delle seguenti matrici

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_N & y_N & z_N \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_N \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_N \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_N \end{bmatrix}.$$

Tutte queste considerazioni possono essere infine estese considerando un punto o una $N-$upla di punti in uno spazio $d-$dimensionale, dove d è un intero anche maggiore di 3. Ovviamente, per $d \geqslant 4$, mancano la rappesentazione geometrica del sistema di riferimento cartesiano e l'interpretazione geometrica delle coordinate. Tuttavia, possiamo pensare allo spazio $d-$dimensionale come rappresentato dal seguente insieme

$$\mathbb{R}^d = \{(x_1, x_2, \dots, x_d) \, : \, x_1 \, , x_2 \, , \dots , x_d \text{ numeri reali } \},$$

costituito dalla totalità delle $d-$uple *ordinate* di numeri reali. Un punto P viene quindi identificato con una $d-$upla ordinata $(x_1, x_2, \dots, x_d)$, e i numeri $x_1, x_2, \dots, x_d$ sono ancora detti “coordinate” del punto P. Un punto P può allora esser individuato univocamente da matrici V e U, rispettivamente, di tipo $(1,d)$ (vettore riga a d componenti), e di tipo $(d,1)$ (vettore colonna a d componenti), ovvero

$$V = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_d \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{bmatrix}.$$

Una $N-$upla di punti $P_1, P_2, \ldots, P_N$ nello spazio $d-$dimensionale $\mathbb{R}^d$ sarà allora individuata in modo univoco, tramite le loro coordinate

$$(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1d}), \quad (x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2d}), \ldots, \ (x_{N1}, x_{N2}, \ldots, x_{Nd})$$

(con la notazione x_{ik} indichiamo la $k-$esima coordinata del punto $i-$esimo) da una matrice di tipo (N,d), oppure da una matrice di tipo (d,N), ovvero, rispettivamente, da una delle seguenti matrici

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1d} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2d} \\ \vdots & \vdots & & \\ & \vdots & \vdots & \\ x_{N1} & x_{N2} & \cdots & x_{Nd} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{N1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{N2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{1d} & x_{2d} & \cdots & x_{Nd} \end{bmatrix}.$$

Osservazione 1.1. Quando si vuole assegnare la posizione di una $N-$upla di punti in uno spazio $d-$dimensionale (con $d \geqslant 1$), occorre *prima di tutto* precisare la dimensione dello spazio in cui si sta lavorando, ovvero dello spazio nel quale i punti appartengono. La dimensione d fissa infatti il numero di colonne, o il numero di righe di una delle due matrici, di tipo (N,d), o di tipo (d,N), rispettivamente, che possono essere usate per rappresentare in modo univoco la nostra $N-$upla. Questo serve per evitare una ovvia ambiguità. Infatti, considerando, ad esempio, le matrici seguenti

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix},$$

tali matrici potrebbero, a priori, rappresentare *sia* i 3 punti P_1, P_2, P_3, di coordinate

$$P_1(1,2), \qquad P_2(3,4), \qquad P_3(5,6),$$

nel piano, ovvero nello spazio bidimensionale $\mathbb{R}^2$ $(d = 2)$, *sia* i 2 punti Q_1, Q_2 di coordinate

$$Q_1(1, 3, 5)\,, \qquad Q_2(2, 4, 6)\,.$$

nello spazio tridimensionale $\mathbb{R}^3$ $(d = 3)$.

1.2 Matrici notevoli

L'insieme costituito da tutte le matrici di tipo (m, n), al variare del tipo stesso (ovvero, l'insieme formato dalla *totalità* delle matrici di qualsiasi tipo), che potremmo indicare con

$$\mathcal{M} = \{A \in \mathbb{M}_{m,n} \,:\, m\,,\ n \text{ interi} \geqslant 1\}\,,$$

è estremamente ricco (è chiaramente un insieme costituito da un numero infinito di elementi). Di questo insieme hanno tuttavia una particolare importanza alcuni sottoinsiemi significativi di *matrici notevoli*, che ora descriviamo.

- **Vettori**. Per le matrici formate da una sola riga, dette *vettori riga*, avremo $m = 1$, ed n intero $\geqslant 1$. Tali matrici saranno quindi vettori riga ad n componenti. Analogamente, per le matrici formate da una sola colonna, dette *vettori colonna*, avremo $n = 1$, ed m intero $\geqslant 1$. Tali matrici saranno quindi vettori colonna ad m componenti.
  In entrambi i casi si userà una notazione ad un solo indice. Ad esempio, le matrici X ed Y, date da

  $$X = [x_1\ x_2\ \cdots\ x_n]\,, \qquad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}\,,$$

  sono, rispettivamente, un vettore riga X ad n componenti (più precisamente, nelle n componenti $x_1, x_2, \ldots, x_n$), e un vettore colonna Y ad m componenti (più precisamente, nelle m componenti $y_1, y_2, \ldots, y_m$).

- **Matrici quadrate**. Se $m = n$, la matrice A di tipo (n, n) è detta matrice *quadrata di ordine* n. Quindi, usando la rappresentazione mediante scrittura esplicita dei suoi elementi, una generica matrice quadrata A avrà la forma seguente

  $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\,.$$

Gli elementi $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ son detti *elementi principali (o diagonali).* Essi formano la *diagonale principale* di A.

L'insieme $\mathbb{M}_{n,n}$ di tutte le matrici di tipo (n, n), ovvero di tutte le matrici quadrate di ordine n, verrà più semplicemente denotato con $\mathbb{M}_n$

$$\mathbb{M}_n = \text{ insieme di tutte le matrici quadrate di ordine } n\,.$$

Nel caso in cui $n = 1$, la matrice quadrata di ordine 1 è costituita da un solo elemento. Ad esempio $A = [a]$ è una matrice (quadrata) che ha per unico elemento il numero reale a (in questo caso non avremo ovviamente bisogno di nessun indice). Una matrice A di tipo (m, n) per la quale risulti $m \neq n$ è detta *rettangolare.*

Nella classe $\mathbb{M}_n$ *delle matrici quadrate di un dato ordine* n sono particolarmente significative le seguenti *sottoclassi.*

a) Matrici diagonali. Diremo che una matrice quadrata $A = [a_{ij}]$ è una matrice *diagonale* se risulta che

$$a_{ij} = 0 \quad \text{per} \quad i \neq j\,.$$

La matrice A avrà pertanto la forma

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}, \tag{1.1}$$

dove notiamo che, per semplicità, gli unici elementi eventualmente $\neq 0$ di A, ovvero gli elementi sulla diagonale principale, possono essere denotati con un solo indice. Una notazione particolarmente comoda per indicare la matrice diagonale A in (1.1) è la seguente

$$A = \operatorname{diag}[a_1, a_2, \ldots, a_n]\,.$$

b) Matrice unità. La matrice unità di ordine n, denotata con I_n, è una matrice diagonale, nella quale tutti gli elementi della diagonale principale sono $= 1$. Con riferimento alla (1.1), la matrice A è la matrice unità I_n se e solo se $a_i = 1$, per ogni $i = 1, \ldots, n$. Avremo quindi

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice unità I_n di ordine n viene indicata anche con I quando l'ordine è sottinteso. Una notazione molto diffusa è di indicare gli elementi di I_n con δ_{ij}, dove δ_{ij} è il *simbolo di Kronecker*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se} \;\; i = j\,, \\ 0 & \text{se} \;\; i \neq j\,. \end{cases}$$

c) Matrice simmetrica. Una matrice *quadrata* $A = [a_{ij}]$ di ordine n è detta *simmetrica* se risulta $a_{ij} = a_{ji}$, per ogni $i, j = 1, \ldots, n$. In altri termini, una matrice simmetrica è una matrice quadrata in cui risultano identici, a due a due, gli elementi "simmetrici" rispetto alla diagonale principale, ovvero gli elementi che si ottengono uno dall'altro scambiando gli indici di riga e di colonna.

Ad esempio, una matrice simmetrica S del terzo ordine avrà sempre la seguente forma

$$S = \begin{bmatrix} u & x & y \\ x & v & z \\ y & z & w \end{bmatrix}.$$

Notiamo che, per una matrice quadrata simmetrica del terzo ordine, dei $3\times 3 = 9$ elementi della matrice solo 6 sono indipendenti (nell'esempio sopra, sono i 3 elementi diagonali u, v, w, e i tre elementi, simmetrici rispetto alla diagonale principale, x, y, z).

d) Matrice antisimmetrica (o emisimmetrica). Una matrice *quadrata* $A = [a_{ij}]$ di ordine n è detta *antisimmetrica* se risulta $a_{ij} = -a_{ji}$, per ogni $i, j = 1, \ldots, n$. In particolare, ponendo $i = j$, deve risultare anche che $a_{ii} = -a_{ii}$, e da questo segue che $a_{ii} = 0$, per ogni $i = 1, \ldots, n$. In altri termini, una matrice antisimmetrica è una matrice quadrata in cui gli elementi "simmetrici" rispetto alla diagonale principale risultano, a due a due, opposti, mentre gli elementi sulla diagonale principale sono tutti nulli.

Ad esempio, una matrice antisimmetrica E del terzo ordine avrà sempre la seguente forma

$$E = \begin{bmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{bmatrix}.$$

Notiamo che, per una matrice quadrata antisimmetrica del terzo ordine, dei $3 \times 3 = 9$ elementi della matrice solo 3 sono indipendenti (nell'esempio sopra, sono i 3 elementi x, y, z; gli altri simmetrici rispetto alla diagonale principale sono opposti a questi, e quelli diagonali sono nulli).

e) **Matrice triangolare inferiore**. Una matrice *quadrata* $A = [a_{ij}]$ di ordine n in cui sono nulli tutti gli elementi *sopra* la diagonale principale, ovvero tale che $a_{ij} = 0$, per ogni $i < j$ è detta *matrice triangolare inferiore*.

Ad esempio, una matrice triangolare inferiore T_{inf} del quarto ordine avrà sempre la seguente forma

$$T_{inf} = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ a & y & 0 & 0 \\ b & c & z & 0 \\ d & e & f & w \end{bmatrix}.$$

f) **Matrice triangolare superiore**. Una matrice *quadrata* $A = [a_{ij}]$ di ordine n in cui sono nulli tutti gli elementi *sotto* la diagonale principale, ovvero tale che $a_{ij} = 0$, per ogni $i > j$ è detta *matrice triangolare superiore*.

Ad esempio, una matrice triangolare superiore T_{sup} del quarto ordine avrà sempre la seguente forma

$$T_{sup} = \begin{bmatrix} x & a & b & c \\ 0 & y & d & e \\ 0 & 0 & z & f \\ 0 & 0 & 0 & w \end{bmatrix}.$$

- **Matrice nulla**. Una matrice $A = [a_{ij}]$ di tipo (m, n) avente elementi tutti nulli, ovvero $a_{ij} = 0$, per ogni i, j, è detta *matrice nulla* di tipo (m, n). Tale matrice viene indicata con $O_{m,n}$

$$O_{m,n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

e con O_n se quadrata di ordine n. Spesso si usa anche la notazione più semplice O, o anche $\mathbf{0}$, se il tipo è sottinteso.

Dopo aver introdotto la nozione di matrice, ed aver descritto le principali classi di matrici, possiamo definire che cosa si intende per uguaglianza fra due matrici.

Definizione 1.2. *Date due matrici $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$, diremo che A e B sono uguali, e scriveremo $A = B$, se e solo se*

i) *A e B sono dello stesso tipo (m, n);*

ii) *risulta $a_{ij} = b_{ij}$, per ogni $i = 1, \dots, m$ e per ogni $j = 1, \dots, n$.*

Quindi, $A \neq B$ significa che almeno una delle i), ii) non è vera. Con questa definizione è immediato verificare che la nozione di uguaglianza fra matrici gode delle seguenti proprietà:

(i) $A = A$ (proprietà riflessiva);

(ii) se $A = B$, allora $B = A$ (proprietà simmetrica);

(iii) se $A = B$ e $B = C$, allora $A = C$ (proprietà transitiva).

2 PRIME OPERAZIONI con le MATRICI

In questa sezione introduciamo le prime operazioni che si possono definire sulle matrici. Tali operazioni consentono, partendo da una matrice, di produrre una nuova matrice. In particolare, le operazioni che andiamo a definire sono: la trasposizione, e la generazione della matrice opposta.

2.1 Trasposizione di una matrice

Definizione 2.1. *Sia $A = [a_{ij}]$ una matrice di tipo (m, n). La trasposta di A è la matrice A^t (denotata anche con A^T) ottenuta da A scambiando ordinatamente le righe con le colonne. Posto quindi $A^t = [b_{ij}]$, avremo*

$$b_{ij} = a_{ji}\,, \qquad i = 1, \dots, n \qquad j = 1, \dots, m\,.$$

Di conseguenza, se A è di tipo (m, n), allora A^t è di tipo (n, m).

Usando la definizione di matrice trasposta possiamo dare delle definizioni equivalenti di matrice quadrata simmetrice ed antisimmetrica. Infatti, se A è una matrice quadrata di ordine n, allora

- A è simmetrica se e solo se $A = A^t$;
- A è antisimmetrica se e solo se $A = -A^t$.

Inoltre, è evidente che, applicando due volte l'operazione di trasposizione su una (qualsiasi) matrice, riotteniamo la matrice stessa, ovvero

$$(A^t)^t = A\,, \qquad \forall A \in \mathbb{M}_{m,n}\,. \tag{2.2}$$

Esempi.

$$A = \begin{bmatrix} x & u \\ y & v \\ z & w \end{bmatrix} \Longrightarrow A^t = \begin{bmatrix} x & y & z \\ u & v & w \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Longrightarrow B^t = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}.$$

Passando quindi da una matrice A alla sua trasposta, la prima riga di A diventa la prima colonna di A^t, la seconda riga di A diventa la seconda colonna di A^t, e così via.
Per una matrice quadrata, questa operazione è ovviamente equivalente a scambiare di posto gli elementi della matrice che sono simmetrici rispetto alla diagonale principale.

Notiamo poi, in particolare, che se $V = [a_1\ a_2\ \dots a_n]$ è un vettore riga (ad n componenti), il suo trasposto V^t è un vettore colonna (ovviamente, ancora ad n componenti)

$$V^t = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Viceversa, partendo da un vettore colonna U (ad m componenti), il suo trasposto U^t è un vettore riga (ad m componenti).

2.2 Matrice opposta

Definizione 2.2. *Sia $A = [a_{ij}]$ una matrice di tipo (m, n). La matrice opposta di A è la matrice $-A$ ottenuta da A cambiando segno a tutti i suoi elementi*

$$-A = [-a_{ij}]\,.$$

Ovviamente, se A è di tipo (m, n), allora $-A$ è ancora dello stesso tipo (m, n).

In analogia alla (2.2), è anche qui evidente che la matrice opposta della matrice opposta di A coincide con A, per una generica matrice A di tipo qualsiasi

$$-(-A) = A\,, \qquad \forall A \in \mathbb{M}_{m,n}\,.$$

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -5 & 8 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow -A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 5 & -8 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Combinando infine la definizione di matrice trasposta con quella di matrice opposta è immediato verificare la seguente uguaglianza

$$(-A)^t = -(A^t)\,,$$

valida per una qualsiasi matrice A di tipo (m, n) assegnato.

Esercizio conclusivo. Sia A la matrice quadrata di ordine 3 seguente

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & x-3y & z+2x \\ y-z & \beta & 0 \\ -1 & z & \gamma \end{bmatrix},$$

dove $\alpha, \beta, \gamma, x, y, z$ sono numeri reali da determinarsi.
1) Determinare tutti i valori di $\alpha, \beta, \gamma, x, y, z$ (se esistono) per i quali A risulti simmetrica, e per i quali A risulti antisimmetrica.

Abbiamo

$$A^t = \begin{bmatrix} \alpha & y-z & -1 \\ x-3y & \beta & z \\ z+2x & 0 & \gamma \end{bmatrix}.$$

Quindi, A è simmetrica, ovvero $A = A^t$, se e solo se

$$\begin{bmatrix} \alpha & x-3y & z+2x \\ y-z & \beta & 0 \\ -1 & z & \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & y-z & -1 \\ x-3y & \beta & z \\ z+2x & 0 & \gamma \end{bmatrix},$$

e questo si verifica se e solo se α, β, γ sono numeri reali qualsiasi, e x, y, z soddisfano contemporaneamente le seguenti condizioni

$$\begin{cases} x - 3y = y - z \\ z + 2x = -1 \\ 0 = z \end{cases}$$

Questo appena scritto è un esempio di un semplice sistema di equazioni lineari nelle tre incognite x, y, z e può esser naturalmente risolto facendo uso della teoria generale dei sistemi di equazioni lineari. Tuttavia, data la forma particolare di questo sistema, anche senza fare uso di tale teoria generale, possiamo facilmente determinarne la soluzione nel modo che segue. Infatti, l'ultima equazione dà subito $z = 0$. Sostituendo allora il valore 0 al posto di z nelle prime due equazioni, otteniamo che tutte le condizioni sopra sono verificate se e solo se

$$\begin{cases} x - 3y = y \\ 2x = -1 \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4y \\ x = -\frac{1}{2} \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -\frac{1}{2} = 4y \\ x = -\frac{1}{2} \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -\frac{1}{8} \\ x = -\frac{1}{2} \\ z = 0 \end{cases}$$

Concludiamo quindi che A è simmetrica se e solo se α, β, γ sono numeri reali qualsiasi, e risulta $x = -1/2$, $y = -1/8$, e $z = 0$. In questo caso A diventa

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & -\frac{1}{8} & -1 \\ -\frac{1}{8} & \beta & 0 \\ -1 & 0 & \gamma \end{bmatrix},$$

che si verifica subito essere simmetrica, come deve essere.

Poi, A è antisimmetrica, ovvero $A = -A^t$, sse

$$\begin{bmatrix} \alpha & x - 3y & z + 2x \\ y - z & \beta & 0 \\ -1 & z & \gamma \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \alpha & y - z & -1 \\ x - 3y & \beta & z \\ z + 2x & 0 & \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha & -(y - z) & 1 \\ -(x - 3y) & -\beta & -z \\ -(z + 2x) & 0 & -\gamma \end{bmatrix},$$

e questo si verifica se e solo se α, β, γ, e x, y, z soddisfano contemporaneamente le seguenti condizioni

$$\begin{cases} \alpha = -\alpha \\ \beta = -\beta \\ \gamma = -\gamma \\ x - 3y = -(y - z) \\ z + 2x = 1 \\ 0 = -z \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \beta = \gamma = 0 \\ x - 3y = -y + z \\ z + 2x = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

L'ultima equazione dà subito $z = 0$, e sostituendo $z = 0$ nelle due equazioni sopra questa, otteniamo che tutte le condizioni sono verificate se e solo se

$$\begin{cases} \alpha = \beta = \gamma = 0 \\ x - 3y = -y \\ 2x = 1 \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \beta = \gamma = 0 \\ x = 2y \\ x = \frac{1}{2} \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \beta = \gamma = 0 \\ y = \frac{1}{4} \\ x = \frac{1}{2} \\ z = 0 \end{cases}$$

Concludiamo quindi che A è antisimmetricase e solo se $\alpha = \beta = \gamma = 0$, e risulta $x = 1/2$, $y = 1/4$, e $z = 0$. In questo caso A diventa

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

che si verifica subito essere antisimmetrica, come deve essere.

2) Determinare tutti i valori di $\alpha, \beta, \gamma, x, y, z$ (se esistono) per i quali A risulti triangolare superiore e per i quali A risulti triangolare inferiore?

Osserviamo subito che, poichè $(A)_{31} = -1 \neq 0$ per ogni valore di $\alpha, \beta, \gamma, x, y, z$, allora A non può esser triangolare superiore per nessun valore di $\alpha, \beta, \gamma, x, y, z$. D'altra parte, la matrice A è triangolare inferiore se e solo se

$$\begin{cases} x = 0 \\ x - y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

e, in questo caso, si ha

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Riferimenti

1) E. Dedò, A. Varisco, Algebra lineare, elementi ed esercizi, CLUP, 1988, Capitolo 3

2) U. Gasapina, Algebra delle matrici, Masson, 1988.

TEST di AUTOVALUTAZIONE

1. Data la matrice
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$
quale delle seguenti affermazioni è vera?

   a) A è una matrice rettangolare di tipo $(3, 2)$

   b) A è una matrice unità

   c) A è una matrice rettangolare di tipo $(2, 3)$

   d) A è una matrice simmetrica

2. Data la matrice quadrata
$$A = \begin{bmatrix} 1 & z & x \\ z & 2 & 0 \\ -x & 0 & 3 \end{bmatrix},$$
dove x e z sono numeri reali, quale delle seguenti affermazioni è vera?

   a) A è simmetrica se e solo se $x = 0$

   b) A è antisimmetrica se e solo se $z = 0$

   c) A è diagonale se $x = 0$ e $z = 1$

   d) A è diagonale se $x = 1$ e $z = 0$

3. Data la matrice quadrata
$$A = \begin{bmatrix} x & y \\ y & -x \end{bmatrix},$$
dove x e y sono numeri reali, quale delle seguenti affermazioni è vera?

   a) A è antisimmetrica se e solo se $y = 0$, per ogni x

   b) A è simmetrica per ogni x e per ogni y

   c) A è antisimmetrica se e solo se $x = 0$, per ogni y

   d) A è triangolare superiore se e solo se $x = 0$, per ogni y

4. Per quali $t \in \mathbb{R}$ risulta vera l'uguaglianza seguente?

$$\begin{bmatrix} t & t+1 \\ 2-t & t-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Per nessun t

b) Per qualche t (e in questo caso determinare tutti i valori di t corrispondenti)

c) Per t intero pari

d) Per t intero dispari

5. Siano $\mathcal{S}$ ed $\mathcal{A}$ gli insiemi costituiti dalla totalità delle matrici quadrate (di ordine n fissato) rispettivamente simmetriche ed antisimmetriche, cioè

$$\mathcal{S} = \{A \in \mathbb{M}_n \; : \; A = A^t\}$$
$$\mathcal{A} = \{A \in \mathbb{M}_n \; : \; A = -A^t\}.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) $\mathcal{S} \cap \mathcal{A} = \{O_n, I_n\}$

b) $\mathcal{S} \cap \mathcal{A} = \{I_n\}$

c) $\mathcal{S} \cap \mathcal{A} = \varnothing$

d) $\mathcal{S} \cap \mathcal{A} = \{O_n\}$

6. Data la matrice A seguente

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) A è di tipo $(3, 4)$ e risulta $A^t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

b) A è di tipo $(3, 4)$ e risulta $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

c) A è di tipo $(4,3)$ e risulta $A^t = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

d) A è di tipo $(4,3)$ e risulta $A^t = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$

7. Sia A una matrice di tipo (m,n). Quale delle seguenti uguaglianze matriciali è corretta?

   a) $\left(-(-A)^t\right)^t = A$

   b) $\left((-A)^t\right)^t = A^t$

   c) $\left((-A)^t\right)^t = -A^t$

   d) $\left(-(-A)^t\right)^t = -A$

8. Sia $\mathcal{B}$ l'insieme delle matrici quadrate del secondo ordine così definito

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ -\alpha & 1 \end{bmatrix} \ : \ \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

   Se B è un fissato elemento generico di $\mathcal{B}$, quale delle seguenti è vera?

   a) $-B \in \mathcal{B}$

   b) $-B^t \in \mathcal{B}$

   c) $B^t \in \mathcal{B}$

   d) $B^t \in \mathcal{B}$ se e solo se $B = I_2$

9. Sia A la matrice quadrata del terzo ordine data da

$$A = \begin{bmatrix} y & 0 & z+x \\ 0 & (x-1)^2 & y \\ 0 & -y & 2 \end{bmatrix}.$$

   Quale delle seguenti affermazioni è vera?

   a) A è una matrice diagonale se e solo se $(x,y,z) = (2,0,-2)$

   b) A è una matrice unità se e solo se $(x,y,z) = (2,0,-2)$

c) A è una matrice nulla se e solo se $(x, y, z) = (2, 0, -2)$

d) Nessuna delle precedenti è vera

10. Siano α, β due numeri reali, ed A, B le matrici quadrate del secondo ordine seguenti

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \beta \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se E è l'insieme di tutte le coppie ordinate (α, β) per le quali risulti $-A = B^t$, cioè

$$E = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \,:\, -A = B^t\},$$

allora, quale delle seguenti è vera

a) $E = \{(-1, 0)\}$

b) $E = \{(0, -1)\}$

c) $E = \varnothing$

d) $E = \mathbb{R}^2$