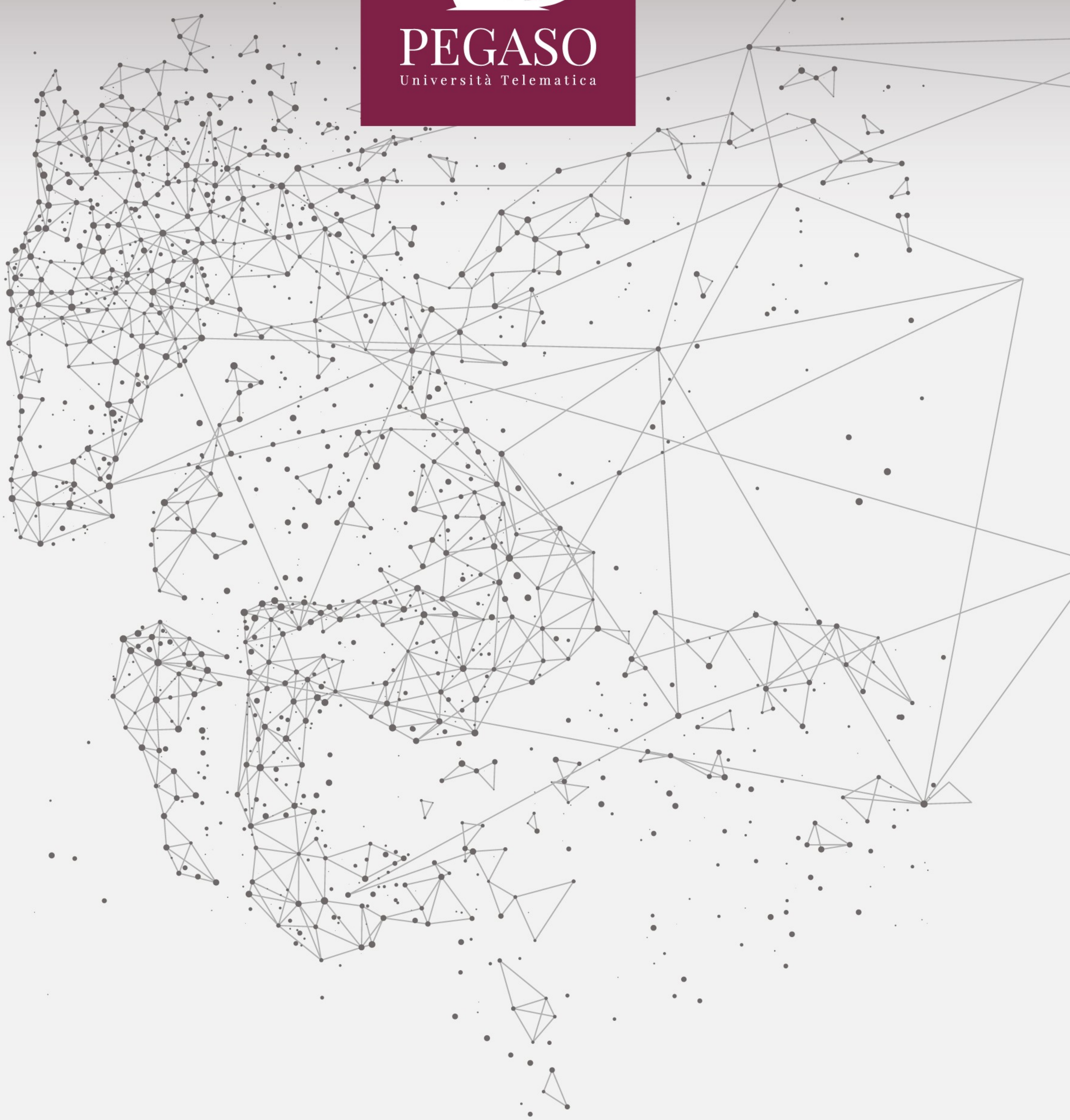
PEGASO

Università Telematica



Esercizi di algebra matriciale

In questa dispensa svolgeremo alcuni esercizi di carattere sostanzialmente riepilogativo sulle matrici e sulle operazioni di somma, di prodotto di matrici per un numero, e di prodotto matriciale. La dispensa è divisa, per convenienza, in tre sezioni, con esercizi progressivamente di difficoltà (più o meno) crescente.

1 Parte I

1) Studiare, al variare di $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, le eventuali proprietà di simmetria ed antisimmetria delle seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ 1 & 0 & \beta \\ 4 & -4 & 3 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3\alpha \\ 0 & \gamma & 1 \\ 4 & -4\beta & 0 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \end{bmatrix}$$

- $A \in \mathbb{M}_n$ è simmetrica, ovvero $A = A^t$, se e solo se $\alpha = 4$ e $\beta = -4$. Essendo $(A)_{33} = 3 \neq 0$, allora A non è antisimmetrica per nessun α e nessun β.
- $B \in \mathbb{M}_n$ è simmetrica, se e solo se $3\alpha = 4$ e $-4\beta = 1$, quindi se e solo se $\alpha = 4/3$ e $\beta = -1/4$ (e γ qualsiasi).

  B è antisimmetrica se e solo se $\gamma = 0$, $3\alpha = -4$ e $-4\beta = -1$, ovvero, se e solo se $\alpha = -4/3$, $\beta = 1/4$ e $\gamma = 0$.
- C è rettangolare di tipo $(2, 3)$. Quindi C non gode di nessuna proprietà di simmetria.

2) Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix},$$

calcolare la matrici B e C date da

$$B = A + A^t, \qquad C = A - A^t.$$

Abbiamo

$$A^t = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Quindi

$$B = A + A^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$C = A - A^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 3 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Notiamo che B è *simmetrica* e C è *antisimmetrica*. In effetti, ancora prima di calcolare B e C, si può osservare che

$B^t = (A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A = A + A^t = B$

$C^t = (A - A^t)^t = A^t - (A^t)^t = A^t - A = -(A - A^t) = -C,$

dove abbiam usato il fatto che, per una qualsiasi matrice quadrata A, risulta

$$(A^t)^t = A$$

Quindi

$B = B^t \quad \Rightarrow \quad B$ è simmetrica

$C = -C^t \quad \Rightarrow \quad C$ è antisimmetrica

Verifichiamo che sussiste la seguente identità

$$B + C = 2A\,,$$

come deve essere, poichè abbiamo

$B + C = (A + A^t) + (A - A^t) = (A + A) + (A^t - A^t) = 2A + O = 2A\,.$

Infatti, si ha

$$B + C = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 3 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 6 & -4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 & 2 \cdot 1 & 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot (-1) & 2 \cdot 0 & 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot (-2) & 2 \cdot 4 \end{bmatrix}$$

$$= 2 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} = 2A$$

3) Provare le seguenti affermazioni

a) Sia $A \in \mathbb{M}_n$ una matrice quadrata di ordine n. Se A è contemporaneamente simmetrica ed antisimmetrica, allora $A = O_n$.

b) Siano $S_1, S_2 \in \mathbb{M}_n$ due matrici simmetriche ed $E_1, E_2 \in \mathbb{M}_n$ due matrici antisimmetriche. Siano poi $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ numeri reali qualsiasi. Allora, le matrici

$$S = \alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2\,, \qquad E = \beta_1 E_1 + \beta_2 E_2$$

sono, rispettivamente, simmetrica ed antisimmetrica.

Per provare la **a)**, notiamo prima di tutto che deve essere contemporaneamente $A = A^t$ e $A = -A^t$. Quindi $A = -A$, ovvero $A + A = A + (-A)$, da cui $2A = O_n$, ovvero $A = O_n$.

Per provare la **b)**, osservando che, per $A \in \mathbb{M}_n$, ed $\alpha \in \mathbb{R}$ qualsiasi, abbiamo $(\alpha A)^t = \alpha A^t$, allora

$$S^t = (\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2)^t = \alpha_1 S_1^t + \alpha_2 S_2^t = \alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 = S\,,$$

$$E^t = (\beta_1 E_1 + \beta_2 E_2)^t = \beta_1 E_1^t + \beta_2 E_2^t = -\beta_1 E_1 - \beta_2 E_2 = -(\beta_1 E_1 + \beta_2 E_2) = -E\,.$$

Quindi $S = S^t$, ovvero S è simmetrica, ed $E = -E^t$, ovvero E è antisimmetrica.

4) Siano $D_1, D_2 \in \mathbb{M}_n$ due matrici diagonali qualsiasi, che indichiamo con

$$D_1 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}, \qquad D_2 = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_n \end{bmatrix},$$

o anche con

$$D_1 = \operatorname{diag}[a_1, a_2, \ldots, a_n], \qquad D_2 = \operatorname{diag}[b_1, b_2, \ldots, b_n],$$

dove a_i, b_j, per $i, j = 1, \ldots, n$, sono gli elementi sulla diagonale principale (denotati, per semplicità, con un solo indice). Vogliamo calcolare la matrice prodotto D

$$D = D_1\, D_2\,.$$

Per questo scopo, possiamo prima di tutto osservare che gli elementi delle due matrici D_1, D_2 possono esser scritti in modo conveniente usando il simbolo di Kronocker, ovvero

$$(D_1)_{ij} = a_i\, \delta_{ij}\,, \qquad (D_2)_{ij} = b_i\, \delta_{ij}\,,$$

dove ricordiamo che δ_{ij} è definito da

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = j\,, \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j\,. \end{cases}$$

Dalla definizione di matrice prodotto, abbiamo allora che

$$(D)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (D_1)_{ik}\, (D_2)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_i\, \delta_{ik}\, b_k\, \delta_{kj} = a_i\, b_i\, \delta_{ij}\,.$$

Quindi, otteniamo

$$D = \operatorname{diag}[a_1, a_2, \ldots, a_n]\operatorname{diag}[b_1, b_2, \ldots, b_n] = \operatorname{diag}[a_1\, b_1, a_2\, b_2, \ldots, a_n\, b_n]\,.$$

5) Siano $A, B \in \mathbb{M}_n$ due matrici quadrate di ordine n, ed α, β, γ tre numeri reali $\neq 0$, tali che

$$\alpha A + \beta B = \gamma I_2\,. \tag{1.1}$$

Provare che A e B sono permutabili.

Infatti, moltiplicando prima a sinistra e poi a destra per A la (1.1), otteniamo le due seguenti identità

$$\alpha A^2 + \beta AB = \gamma\, A\,, \qquad \alpha A^2 + \beta BA = \gamma\, A\,.$$

Sottraendo membro a membro queste ultime una dall'altra, e sempre usando le opportune proprietà dell'operazione di somma matriciale (quali?), otteniamo immediatamente

$$\beta(AB - BA) = \beta\,[A, B] = O_2\,.$$

Poichè, per ipotesi, $\beta \neq 0$, concludiamo così che $[A, B] = O_2$, ovvero che le matrici A e B sono permutabili.

2 Parte II

1). Sia $A \in \mathbb{M}_n$ una matrice quadrata di ordine n. Provare che esistono, e che sono uniche, due matrici $S \in \mathbb{M}_n$ ed $E \in \mathbb{M}_n$, rispettivamente simmetrica ed antisimmetrica, tali che

$$A = S + E\,.$$

In altri termini, vogliamo provare che una qualsiasi matrice quadrata si può sempre scomporre in modo unico nella somma di una matrice simmetrica e di una antisimmetrica.

Cominciamo a provare l'esistenza delle due matrici S, E, ovvero nell'esistenza della suddetta decomposizione. A tale scopo, osserviamo che possiamo scrivere

$$A = \frac{1}{2}(A + A) = \frac{1}{2}(A + A^t + A - A^t) = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t)\,.$$

Quindi, ponendo

$$S = \frac{1}{2}(A + A^t)\,, \qquad E = \frac{1}{2}(A - A^t)\,,$$

verifichiamo subito che S è simmetrica, che E è antisimmetrica, e che $A = S + E$.

Per provare che S ed E sono uniche, ovvero che la decomposizione di A in S simmetrica ed E antisimmetrica è unica, supponiamo, per assurdo, che S_1, E_1 ed S_2, E_2 siano due coppie di matrici in $\mathbb{M}_n$ con S_1, S_2 simmetriche ed E_1, E_2 antisimmetriche, tali che

$$A = S_1 + E_1\,, \qquad A = S_2 + E_2\,.$$

Allora, avremmo che $S_1 + E_1 = S_2 + E_2$, da cui seguirebbe che

$$S_2 - S_1 = E_1 - E_2\,.$$

Ma $S_2 - S_1$ è simmetrica, ed $E_1 - E_2$ è antisimmetrica (vedi Es. 3), punto (b), Parte I). L'uguaglianza sopra implica allora che (vedi Es. 3), punto (a), Parte I)

$$S_2 - S_1 = E_1 - E_2 = O_n ,$$

ovvero che $S_1 = S_2$, ed $E_1 = E_2$, e questo prova l'unicità della decomposizione.

2) Siano k_1, k_2, k_3, k_4 quattro numeri reali *tutti* $\neq 0$. Mostrare che le matrici A_1, A_2, A_3, A_4 date da

$$A_1 = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & k_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_3 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_4 \end{bmatrix}$$

sono linearmente indipendenti.

Dobbiamo provare che, se α_i, $i = 1, .., 4$, sono quattro numeri reali tali che

$$\sum_{i=1}^{4} \alpha_i A_i = O_2 ,$$

allora risulta $\alpha_i = 0$, per ogni $i = 1, .., 4$. Ora, si ha

$$\sum_{i=1}^{4} \alpha_i A_i = \alpha_1 \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 & k_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_3 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_4 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \alpha_1 k_1 & \alpha_2 k_2 \\ \alpha_3 k_3 & \alpha_4 k_4 \end{bmatrix} .$$

Quindi

$$\sum_{i=1}^{4} \alpha_i A_i = O_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} \alpha_1 k_1 & \alpha_2 k_2 \\ \alpha_3 k_3 & \alpha_4 k_4 \end{bmatrix} = O_2 ,$$

e l'ultima uguaglianza matriciale è vera se e solo se

$$\alpha_i k_i = 0 , \quad \text{per ogni } \; i = 1, .., 4 .$$

Essendo $k_1, ..k_4$ tutti $\neq 0$, questo implica che $\alpha_i = 0$, per ogni $i = 1, .., 4$.

3) Siano h_1, h_2, h_3, h_4 quattro numeri reali *tutti* $\neq 0$. Mostrare che le matrici B_1, B_2, B_3, B_4 date da

$$B_1 = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \\ h_3 & h_4 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \\ h_3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_4 = \begin{bmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sono linearmente indipendenti.

Infatti, prima di tutto abbiamo

$$\sum_{i=1}^{4} \alpha_i B_i = \alpha_1 \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \\ h_3 & h_4 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \\ h_3 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$+ \alpha_4 \begin{bmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4) & h_2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) \\ h_3(\alpha_1+\alpha_2) & h_4\alpha_1 \end{bmatrix}.$$

Quindi, $\sum_{i=1}^{4} \alpha_i B_i = O_2$ se e solo se

$$\begin{cases} h_1(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4) = 0 \\ h_2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) = 0 \\ h_3(\alpha_1+\alpha_2) = 0 \\ h_4\alpha_1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 = 0 \\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1+\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = 0\,, \end{cases}$$

dove abbiam tenuto conto del fatto che $h_i \neq 0$, per ogni $i = 1, .., 4$. Concludiamo quindi che $\alpha_i = 0$, per ogni $i = 1, .., 4$, e questo prova che le matrici B_1, B_2, B_3, B_4 sono linearmente indipendenti.

4) Una matrice quadrata A di ordine n si dice *idempotente* se soddisfa

$$A^2 = A\,.$$

Provare che

(a) se A è idempotente, allora anche $I_n - A$ è idempotente;

(b) se A è idempotente, allora anche A^t è idempotente;

(c) se A è idempotente ed antisimmetrica, allora $A = O$;

(d) se A, B sono idempotenti e tali che $[A, B] = O$, allora anche AB e BA sono idempotenti.

Proviamo le singole affermazioni di seguito.

(a) Abbiamo che, usando il fatto che la matrice unità I commuta con qualsiasi matrice A, e il fatto che A è idempotente

$$(I - A)^2 = I + A^2 - 2A = I - A\,.$$

(b) Abbiamo

$$(A^t)^2 = A^t A^t = (A^2)^t = A^t\,.$$

(c) Abbiamo che $A = -A^t$. Dal punto (b) segue allora

$$(-A)^2 = (A^t)^2 = A^t = -A\,.$$

Quindi

$$A = A^2 = (-A)^2 = -A\,,$$

ovvero $A = -A$, che implica che $A = O$.

(d) Abbiamo, usando il fatto che A e B commutano, che

$$(AB)^2 = ABAB = AABB = A^2B^2 = AB\,.$$

3 Parte III

1) Siano $A, B \in \mathbb{M}_n$ due matrici simmetriche. Provare che

$$AB \text{ simmetrica} \Longleftrightarrow [A, B] = O\,.$$

Infatti

$$AB \text{ simmetrica} \Longleftrightarrow (AB)^t = AB \Longleftrightarrow B^t A^t = AB\,.$$

Poichè A, B sono simmetriche e quindi $A^t = A, B^t = B$, allora l'ultima uguaglianza è vera sse $BA = AB$, ovvero, sse $[A, B] = O$.

2) Sia $A \in \mathbb{M}_{m,n}$ qualsiasi. Provare che le matrici AA^t e A^tA sono simmetriche.

Occorre procedere secondo i seguenti due punti

(i) $A \in \mathbb{M}_{m,n}, A^t \in \mathbb{M}_{n,m} \Longrightarrow AA^t \in \mathbb{M}_m, A^tA \in \mathbb{M}_n$ sono ben definite.

(ii) $(AA^t)^t = (A^t)^tA^t = AA^t \Longrightarrow A$ simmetrica.

(analogamente per A^tA).

3) Stabilire per quali valori di $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ le due matrici seguenti

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & a \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} x & 0 \\ y & y \end{bmatrix}$$

sono permutabili

Abbiamo

$$AB = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 0 \\ y & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax & 0 \\ bx + ay & ay \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} x & 0 \\ y & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax & 0 \\ ay + by & ay \end{bmatrix}$$

Quindi $[A, B] = O$ se e solo se

$bx + ay = ay + by \Leftrightarrow b(x - y) = 0$

$\Leftrightarrow b = 0$ $(x, y$ qualsiasi$)$, oppure $x = y$ $(b$ qualsiasi$)$.

4) Determinare tutte le soluzioni (se esistono) $X, Y \in \mathbb{M}_n$ del sistema matriciale seguente

$$\begin{cases} X^2 = O \\ Y^2 = O \\ X - Y = 2I. \end{cases}$$

Moltiplicando, prima a sinistra e poi a destra, per X la terza, otteniamo

$$X^2 - XY = 2X\,, \qquad X^2 - YX = 2X\,.$$

Quindi, $XY = YX$, da cui segue che $X^2 - Y^2 = (X - Y)(X + Y)$.

Usando le 3 equazioni del sistema otteniamo allora

$$O = (X - Y)(X + Y) = 2I(X + Y) = 2(X + Y)\,.$$

Quindi $X = -Y$, e dalla terza segue che

$$X + X = 2X = 2I\,.$$

Deduciamo che $X = I$, e questo implica che

$$X^2 = X = I\,,$$

assurdo. In conclusione, il sistema matriciale non ammette nessuna soluzione.

5) Introdotto il seguente insieme di matrici

$$\mathcal{E} = \{A \in \mathbb{M}_n \,:\, A\,, A^t \;\text{ linearmente dipendenti}\,\}$$

provare che risulta

$$\mathcal{E} = \{A \in \mathbb{M}_n \,:\, A \;\text{ simmetrica oppure antisimmetrica}\,\}\,.$$

Infatti, se $A \in \mathcal{E}$, allora, essendo A, A^t lin. dip., esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che

$$A = \alpha A^t \tag{3.2}$$

Prendendo la trasposta di questa, otteniamo

$$A^t = \alpha A \tag{3.3}$$

Combinando (3.2), (3.3), si ha $A = \alpha^2 A$. Quindi $A = 0$, oppure $\alpha^2 = 1$, ovvero $\alpha = \pm 1$. Dalla (3.2), otteniamo così

$$\mathcal{E} = \{A \in \mathbb{M}_n \; : \; A = A^t \; \text{ oppure } \; A = -A^t\}\,.$$

6) Caratterizzare la totalità delle matrici A quadrate di ordine 2 idempotenti, ovvero stabilire quali condizioni (necessarie e sufficienti) devono soddisfare $x, y, z, w \in \mathbb{R}$, affinchè la matrice

$$A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

soddisfi $A^2 = A$. Ora, abbiamo, come si verifica facilmente

$$A^2 = \begin{bmatrix} x^2 + yz & xy + yw \\ xz + wz & yz + w^2 \end{bmatrix}.$$

Quindi $A^2 = A$ se e solo se il seguente sistema è soddisfatto

$$\begin{cases} x^2 + yz = x \\ (x + w)y = y \\ (x + w)z = z \\ yz + w^2 = w \end{cases}$$

Osservando la seconda e terza equazione, possiamo distinguere a questo punto, due casi

(i) $y \neq 0$, *oppure* $z \neq 0$. In questo caso, dalla seconda o dalla terza equazione deduciamo che deve essere $x + w = 1$. Usando allora la prima, otteniamo poi

$$x^2 + yz = x(1 - w) + yz = x\,,$$

e quindi

$$xw - yz = 0\,.$$

Possiamo poi verificare che l'ultima è automaticamente soddisfatta. Infatti, essendo $yz = xw$, ed anche $x + w = 1$, abbiamo

$$yz + w^2 = xw + w^2 = w(x + w) = w\,.$$

(ii) $y = z = 0$. In questo caso, la seconda e la terza sono già soddisfatte, mentre la prima e la quarta diventano, rispettivamente, $x^2 = x$, e $w^2 = w$. Quindi, otteniamo, come soluzioni, $x = 0, 1$, e $w = 0, 1$. Le matrici corrispondenti, che si ottengono in questo caso, saranno quindi le seguenti

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mettendo insieme i due casi (i), (ii), e introducendo, ad es., per semplicità, l'insieme $\mathcal{I}_2$ delle matrici quadrate di ordine 2 idempotenti, ovvero

$$\mathcal{I}_2 = \{ A \in \mathbb{M}_2 \, : \, A^2 = A \} ,$$

concludiamo che $\mathcal{I}_2$ è dato da

$$\mathcal{I}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \, : \, xw - yz = 0 \, , \ \ x + w = 1 \right\} \cup \{ O_2 \, , \ I_2 \} .$$

Riferimenti

1) E. Dedò, A. Varisco, Algebra lineare, elementi ed esercizi, CLUP, 1988, Capitolo 3

2) U. Gasapina, Algebra delle matrici, Masson, 1988.

TEST di AUTOVALUTAZIONE

1. Siano P, Q due matrici quadrate tali che
$$-Q - 6P = 2I\,. \tag{3.4}$$
Come conseguenza di tale identità abbiamo allora che

   a) $P = -Q$, qualunque sia la scelta delle matrici P e Q tali da soddisfare la (3.4)

   b) $[P, Q] = I$

   c) $P = 2Q$, qualunque sia la scelta delle matrici P e Q tali da soddisfare la (3.4)

   d) $[P, Q] = O$

2. Determinare $x \in \mathbb{R}$ nella matrice $A \in \mathbb{M}_2$ data da
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix},$$
in modo tale che sia soddisfatta la seguente equazione matriciale
$$A^2 - A = B\,,$$
dove $B \in \mathbb{M}_2$ è data da
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

   a) $x = 3$

   b) Per nessun x l'equazione matriciale è soddisfatta

   c) $x = 2$

   d) Per ogni x l'equazione matriciale è soddisfatta

3. Siano A e B due matrici qualsiasi di tipo, rispettivamente, (m, n), ed (n, m). Se risulta $AB = \alpha I$, e $BA = \alpha I$, dove α è un numero reale fissato, allora è vero che $AB = BA$?

   a) sì, qualunque siano i tipi di A e B

   b) sì, qualunque siano i tipi di A e B, a condizione che $\alpha = 0$

   c) è vero se e solo se $m = n$, qualunque sia α

   d) è vero se e solo se contemporaneamente abbiamo $m = n$, ed $\alpha = 0$

4. Siano $A \in \mathbb{M}_n$ una matrice antisimmetrica e $B \in \mathbb{M}_n$ la matrice definita da $B = A^2$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

   a) B è simmetrica

   b) B è antisimmetrica

   c) B non è, in generale, nè simmetrica, nè antisimmetrica

   d) A e B non sono permutabili

5. Siano $A, B \in \mathbb{M}_n$ due matrici permutabili. Quale delle seguenti affermazioni è vera, comunque siano scelte A e B?

   a) A e B^t, oppure A^t e B sono permutabili

   b) A^t e B^t sono permutabili

   c) A^t e B^t sono permutabili se e solo se ($A = O$, oppure $B = O$)

   d) A^t e B^t sono permutabili se e solo se ($A = I$, oppure $B = I$)

6. Siano A ed X i seguenti vettori riga e colonna, rispettivamente

$$A = \begin{bmatrix} \log(1+\alpha) & e^{\beta-1} - 1 & \gamma - 2 \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^t .$$

   Allora, si verifica che

$$AX = 0\,, \qquad \text{per ogni vettore } X$$

   a) per ogni scelta di $\alpha > -1$, $\beta \in \mathbb{R}$, e $\gamma \in \mathbb{R}$

   b) se e solo se $\alpha = e - 1$, $\beta = 1 + \log 2$, e $\gamma = 3$

   c) per nessuna scelta di $\alpha > -1$, $\beta \in \mathbb{R}$, e $\gamma \in \mathbb{R}$

   d) se e solo se $\alpha = 0$, $\beta = 1$, e $\gamma = 2$

7. Sia $A \in \mathbb{M}_n$ una matrice idempotente. Quale delle seuenti affermazioni è vera?

   a) A^t è idempotente se e solo se ($A = O$, oppure $A = I_n$)

   b) $(A^t)^t$ non è, in generale, idempotente

   c) A^t è idempotente

   d) A^t è idempotente se e solo se A è simmetrica

8. Sia N un intero positivo fissato, e si consideri il seguente sistema matriciale nelle incognite $X, Y \in \mathbb{M}_n$

$$\begin{cases} X^N = O \\ XY = I_n \,. \end{cases}$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) il sistema ammette soluzioni se e solo se $N \geqslant 2$

b) il sistema ammette soluzioni se e solo se N è pari

c) il sistema ammette soluzioni se e solo se N è dispari

d) il sistema non ammette soluzioni per nessun N intero positivo

9. Sia $A \in \mathbb{M}_n$ la matrice data da

$$A = \begin{bmatrix} k & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},$$

e sia $\mathcal{K}$ l'insieme di tutti i valori $k \in \mathbb{R}$ soluzioni della seguente equazione matriciale

$$A^2 - kA = 2I_2 \,.$$

Quale delle seguenti conclusioni è corretta?

a) $\mathcal{K} = \mathbb{R}$

b) $\mathcal{K} = \varnothing$

c) $\mathcal{K} = \{0\}$

d) $\mathcal{K} = \{2\}$

10. si consideri il seguente sistema matriciale nelle incognite $X, Y \in \mathbb{M}_n$

$$\begin{cases} XY = O \\ YX = \alpha I_n \,, \end{cases}$$

dove α è un numero reale fissato. Quale delle seguenti è vera?

a) il sistema ammette soluzioni per ogni α reale fissato

b) il sistema non ammette soluzioni comunque si fissi α

c) il sistema ammette soluzioni se e solo se $\alpha = 0$

d) il sistema ammette soluzioni se e solo se $\alpha = 1$