PEGASO

Università Telematica

Spazi vettoriali in $\mathbb{R}^n$

Corso di Geometria

Laurea in Ingegneria Civile

Per poter descrivere in modo efficace molte delle strutture e dei fenomeni che emergono nell'ingegneria e nelle scienze applicate, è fondamentale disporre di un linguaggio matematico capace di rappresentare oggetti come forze, spostamenti, grandezze fisiche direzionate o soluzioni di sistemi.

I vettori vengono studiati in modo più generale all'interno di strutture chiamate **spazi vettoriali**. Uno spazio vettoriale è, in sostanza, un insieme in cui si possono sommare vettori e moltiplicarli per numeri reali, seguendo regole ben precise (gli assiomi dello spazio vettoriale).

In questa sezione inizieremo a esplorare:

- che cosa intendiamo per spazio vettoriale;
- che cos'è una **combinazione lineare** di vettori, cioè come si possono costruire nuovi vettori a partire da un insieme dato;
- e infine il concetto di **dipendenza lineare**, che ci permette di capire se un insieme di vettori contiene "informazioni ridondanti" oppure se ogni vettore apporta un contributo essenziale.

Questi concetti sono il punto di partenza per affrontare temi più avanzati, come la dimensione di uno spazio, le basi, le trasformazioni lineari e, più avanti, la diagonalizzazione di matrici e lo studio delle soluzioni di sistemi lineari.

1 Spazi vettoriali

Lo spazio vettoriale rappresenta una delle prime astrazioni che vengono introdotte nel contesto dell'algebra lineare e della geometria.

Come primo passo di questa astrazione, uno spazio vettoriale può essere visto come una generalizzazione del concetto di piano cartesiano: infatti, il piano cartesiano può essere visto come il prodotto cartesiano tra due rette reali $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, che spesso viene denotato come $\mathbb{R}^2$ (vedremo che questo ^{2} ha un ruolo importante nel determinare un parametro fondamentale di uno spazio vettoriale); in altre parole, i punti del piano cartesiano vengono visti come una coppia di coordinate (x, y), dove sia x che y sono dei numeri reali a piacere. Nulla ci vieta, tuttavia, di chiederci cosa possa succedere se dovessimo immaginare punti aventi tre o più coordinate, ad esempio (x, y, z) o (x, y, z, t), o $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Questo ci porta ad immaginare oggetti che non sono necessariamente 2-dimensionali, ma che possono essere 3, 4, ... n-**dimensionali**.

Un secondo livello di astrazione ci porta invece a chiederci se sia veramente necessario "legarci" alla visualizzazione geometrica: sebbene sia comodo avere un'immagine in mente quando si visualizzano alcuni oggetti, spesso questa può portarci a non vedere altri oggetti sotto lo stesso punto di vista. Vedremo meglio cosa si intende negli esempi successivi.

Definizione 1.1. Diremo *spazio vettoriale* su $\mathbb{R}$ una struttura algebrica $(\mathbb{R}, V, \boxplus, \boxdot)$ costituita da:

- l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$, i cui elementi sono detti *scalari*;
- un insieme V, i cui elementi sono detti *vettori*;
- un'operazione $\boxplus$ detta *somma di vettori*;
- una funzione $\boxdot$ detta *prodotto di uno scalare per un vettore*.

Per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e per ogni $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ devono essere inoltre soddisfatte le seguenti proprietà:

- commutatività di $\boxplus$: $\boldsymbol{u} \boxplus \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \boxplus \boldsymbol{u}$;
- elemento neutro di $\boxplus$: esiste un vettore $\mathbf{0}_V$ tale che $\boldsymbol{u} \boxplus \mathbf{0}_V = \mathbf{0}_V \boxplus \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$;
- inverso di $\boxplus$: esiste un vettore $-\boldsymbol{u}$ tale che $\boldsymbol{u} \boxplus (-\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}_V$;

- distributività tra $\boxplus$ e $\boxdot$:
$$(\alpha+\beta)\boldsymbol{u} = (\alpha \boxdot \boldsymbol{u}) \boxplus (\beta \boxdot \boldsymbol{u})$$
$$\alpha(\boldsymbol{u} \boxplus \boldsymbol{v}) = (\alpha \boxdot \boldsymbol{u}) \boxplus (\alpha \boxdot \boldsymbol{v})$$
$$\alpha \boxdot (\beta \boxdot \boldsymbol{u}) = (\alpha\beta) \boxdot \boldsymbol{u}$$

- elemento neutro di $\boxdot$: $1 \boxdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$

Il seguente esempio, oltre ad essere un modo per dare una visualizzazione concreta della definizione, riporta anche lo spazio vettoriale più importante dell'intero corso.

Esempio 1.2. Prendiamo $\mathbb{R}^n$, con n un qualunque numero naturale strettamente positivo. I suoi elementi sono definiti come $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, dove ogni *coordinata* x_i è un numero reale. Definiamo le seguenti operazioni:

$$\text{somma tra due vettori } +: \quad \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ \vdots \\ u_n+v_n \end{pmatrix}$$

$$\text{prodotto per uno scalare } \boxdot: \quad \alpha \boxdot \boldsymbol{u} = \alpha \boxdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha u_1 \\ \alpha u_2 \\ \vdots \\ \alpha u_n \end{pmatrix}$$

Nota: per semplicità, da ora in avanti si ometterà il simbolo $\boxdot$ per indicare il prodotto per uno scalare. Non lo sostituitermo con il simbolo $\cdot$, dato che questo indicherà un'altra operazione (il prodotto scalare). Quindi, scriveremo $\alpha\boldsymbol{u}$ anzichè $\alpha \boxdot \boldsymbol{u}$.

Verifichiamo ora che le proprietà di spazio vettoriale siano soddisfatte:

- commutatività di $+$:

$$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ \vdots \\ u_n+v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1+u_1 \\ v_2+u_2 \\ \vdots \\ v_n+u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$$

elemento neutro di $+$: verifichiamo che il vettore $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)^T$ soddisfi le condizioni:

$$\boldsymbol{u} + \mathbf{0} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + 0 \\ u_2 + 0 \\ \vdots \\ u_n + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{u}$$

L'uguaglianza $\mathbf{0} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$ segue per commutatività.

inverso in $+$: dato il vettore $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_n)^T$, scriviamo $-\boldsymbol{u} = (-u_1, \ldots, -u_n)^T$. Infatti:

$$\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -u_1 \\ -u_2 \\ \vdots \\ -u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 - u_1 \\ u_2 - u_2 \\ \vdots \\ u_n - u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

distributività tra $+$ e la moltiplicazione per uno scalare: per brevità, verifichiamo solo le prime due identià:

$$(\alpha + \beta)\boldsymbol{u} = (\alpha + \beta) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha + \beta)u_1 \\ (\alpha + \beta)u_2 \\ \vdots \\ (\alpha + \beta)u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha u_1 + \beta u_1 \\ \alpha u_2 + \beta u_2 \\ \vdots \\ \alpha u_n + \beta u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha u_1 \\ \alpha u_2 \\ \vdots \\ \alpha u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta u_1 \\ \beta u_2 \\ \vdots \\ \beta u_n \end{pmatrix} = \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{u}$$

E infine

$$\alpha(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \alpha \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha u_1 + \alpha v_1 \\ \alpha u_2 + \alpha v_2 \\ \vdots \\ \alpha u_n + \alpha v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha u_1 \\ \alpha u_2 \\ \vdots \\ \alpha u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha v_1 \\ \alpha v_2 \\ \vdots \\ \alpha v_n \end{pmatrix} = \alpha\boldsymbol{u} + \alpha\boldsymbol{v}$$

elemento neutro rispetto alla moltiplicazione per uno scalare: chiaramente abbiamo che

$$1\boldsymbol{u} = 1\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1u_1 \\ 1u_2 \\ \vdots \\ 1u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{u}$$

Osservazione 1.3.

- La definizione di spazio vettoriale fornita in questo corso riguarda spazi vettoriali *reali*, ovvero in cui utilizziamo $\mathbb{R}$; in altri contesti potrebbe essere utile considerare spazi *complessi*, ovvero in cui $\mathbb{R}$ viene sostituito dall'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$. La definizione più generale necessita del concetto di *campo*, la cui introduzione tuttavia oltrepassa gli interessi di questo corso.
- Se le varie operazioni sono ovvie, scriveremo direttamente V per denotare uno spazio vettoriale, anzichè $(\mathbb{R}, V, +, \cdot)$.

Proposition 1.4. *Per ogni $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ valgono le seguenti proprietà su uno spazio vettoriale V:*

- $\alpha\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ *se e solo se* $\alpha = 0$ *oppure* $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$*;*
- $(-\alpha)\boldsymbol{u} = \alpha(-\boldsymbol{u}) = -(\alpha\boldsymbol{u})$*;*
- *se* $\alpha\boldsymbol{u} = \beta\boldsymbol{u}$ *e* $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$*, allora* $\alpha = \beta$*;*
- *se* $\alpha\boldsymbol{u} = \alpha\boldsymbol{v}$ *e* $\alpha \neq 0$*, allora* $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$*.*

2 Sottospazi

Abbiamo visto nella sezione precedente la nozione di spazio vettoriale. Inoltre, abbiamo visto come concettualmente uno spazio può essere immaginato come un oggetto n-dimensionale, per un qualche numero naturale n strettamente positivo (vedremo il concetto di dimensione in un secondo momento). Ad esempio, il piano cartesiano può essere visto come $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^2$, mentre lo spazio cartesiano come $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^3$. Tuttavia, possiamo bene immaginare che lo spazio cartesiano in un certo senso "contenga" anche il piano cartesiano: in fondo, se un punto generico dello **spazio** ha tre coordinate (x, y, z), se guardiamo i punti con $z = 0$ otteniamo i punti

$(x, y, 0)$, che possiamo immaginare come i punti di un piano cartesiano. Possiamo formalizzare questa nozione di "spazio contenuto in un altro spazio" in questo modo:

Definizione 2.1. Sia $(\mathbb{R}, V, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale, e sia W un sottoinsieme non vuoto di V. Diremo che W è un *sottospazio vettoriale* di V se per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ e per ogni $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ valgono:

- $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in W$;
- $\alpha \boldsymbol{u} \in W$.

Si dice anche che W è *linearmente chiuso* se valgono le proprietà precedenti.

Osservazione 2.2. Se prendiamo in particolare $\alpha = 0$ otteniamo che $0\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ deve appartenere al sottospazio W, qualunque sia il sottospazio di riferimento.

Esempio 2.3. Prendiamo la retta $y = x$ all'interno del piano cartesiano. Abbiamo naturalmente che il piano cartesiano, che chiamiamo V, è uno spazio vettoriale, in particolare possiamo identificarlo come $V \cong \mathbb{R}^2$. Verifichiamo che la retta $y = x$ è un sottospazio di V.

Innanzitutto, un punto (x, y) appartiene alla retta se e solo se le due coordinate soddisfano l'equazione $y = x$, ovvero sono uguali. Prendiamo quindi due punti qualunque $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$ che appartengono alla retta, e un numero qualunque $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Verifichiamo che $P + Q$ appartiene ancora alla retta $y = x$:

  $$P + Q = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

  Per controllare che il punto $P + Q$ appartenga alla retta $y = x$, dobbiamo vedere se le coordinate sono uguali tra di loro. Abbiamo che:

  $$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 = y_1 + y_2$$

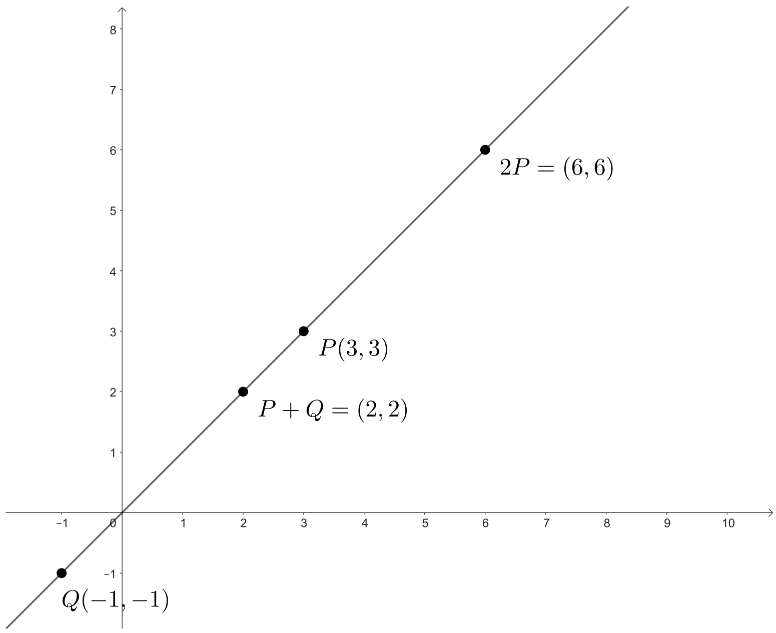
  Quindi, il punto $P + Q$ appartiene ancora alla retta.

- Verifichiamo che αP appartenga ancora alla retta:

  $$\alpha P = \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \end{pmatrix}$$

Quindi, il punto αP ha coordinate αx_1 e αy_1, dobbiamo vedere se appartiene alla retta $y = x$. Ma dato che P appartiene alla retta, abbiamo $x_1 = y_1$, e quindi $\alpha x_1 = \alpha x_2$.

Si faccia riferimento anche al disegno sottostante, in cui si prendono due punti particolari P e Q, ed un coefficiente $\alpha = 2$:



Quindi, abbiamo verificato che la retta $y = x$ costituisce un sottospazio del piano cartesiano.

In maniera analoga, possiamo verificare che le rette **passanti per l'origine** sono sottospazi del piano cartesiano, dello spazio cartesiano, ecc.., e che i piani passanti per l'origine sono a loro volta sottospazi dello spazio cartesiano, ecc...

Tecnicamente, **uno spazio vettoriale è sottospazio di sé stesso**, mentre $\{\mathbf{0}\}$ è sempre un sottospazio vettoriale. Vengono detti **sottospazi propri** i sottospazi vettoriali di V che non siano V e $\{\mathbf{0}\}$ (questi ultimi spesso vengono chiamati sottospazi triviali o banali).

3 Dipendenza lineare

Abbiamo visto che la nozione di sottospazio è legata al concetto di essere linearmente chiuso, ovvero chiuso algebricamente rispetto alla somma tra vettori e alla moltiplicazione per uno scalare. Il passo successivo volto a generalizzare questa nozione riguarda il considerare il concetto di combinazione lineare, e quindi di lineare dipendenza e indipendenza tra vettori. Questa nozione ci permetterà di dare una definizione più formale del concetto di dimensione di uno spazio vettoriale.

Definizione 3.1. Siano $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^n$. Una **combinazione lineare** di questi vettori è un vettore $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ della forma:

$$\boldsymbol{w} = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{v}_k,$$

dove $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ sono degli scalari.

Esempio 3.2. Siano $\boldsymbol{v}_1 = (1, 0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0, 1)$, e siano $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -1$. Allora si dice che il vettore

$$2\boldsymbol{v}_1 + (-1)\boldsymbol{v}_2 = 2(1, 0) + (-1)(0, 1) = (2, -1)$$

è una combinazione lineare di $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$.

Definizione 3.3. Dato un sottoinsieme $X \subset V$, $X \neq \emptyset$, diremo *chiusura lineare* di X il sottoinsieme $L(X)$ di V, costituito da tutti e soli i vettori che sono combinazioni lineari di vettori di X.

Si può vedere facilmente che $L(X)$ è il più piccolo sottospazio vettoriale di V contenente X. Ci si può chiedere cosa succede nel caso particolare in cui $L(X)$ sia **tutto** lo spazio vettoriale V. Questo implica che ogni elemento dello spazio vettoriale può essere scritto come una combinazione lineare degli elementi di X. Ovvero, possiamo vedere V come se fosse *costruito* dagli elementi di X.

Definizione 3.4. Sia $X \subset V$. Se $L(X) = V$, diremo che X è un *sistema di generatori* (o insieme di generatori) per V, o che V è *generato* da X.

Esempio 3.5. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, verifichiamo che $L(\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}) = \mathbb{R}^3$, ovvero che $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ è un sistema di generatori per $\mathbb{R}^3$, dove

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo verificare che ogni elemento in $\mathbb{R}^3$, diciamo $(x, y, z)^T$, può essere scritto come una combinazione lineare di $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$. Si vede facilmente che:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3$$

Per arbitrarietà di x, y e z otteniamo che $L(\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}) = \mathbb{R}^3$.

Definizione 3.6. I vettori $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^n$ si dicono *linearmente dipendenti* se esistono scalari $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, non tutti nulli, tali che:

$$\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}.$$

Se questa relazione è soddisfatta solo dalla scelta $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$, i vettori sono *linearmente indipendenti.*

Esempio 3.7. Siano $\boldsymbol{v}_1 = (1, 2),\ \boldsymbol{v}_2 = (3, 6)$. Allora $\boldsymbol{v}_2 = 3\boldsymbol{v}_1 \Rightarrow \boldsymbol{v}_2 - 3\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{0} \Rightarrow$ i vettori sono linearmente dipendenti.

Prendendo invece $\boldsymbol{w}_1 = (0, 1)$ e $\boldsymbol{w}_2 = (1, 0)$, si vede che l'unico modo per ottenere il vettore nullo $\boldsymbol{0} = (0, 0)$ come combinazione lineare di $\boldsymbol{w}_1$ e $\boldsymbol{w}_2$ è $0\boldsymbol{w}_1 + 0\boldsymbol{w}_2$, quindi sono linearmente indipendenti.

In breve, si può immaginare che un insieme di vettori linearmente **dipendenti** X sia un insieme di vettori "rindondante" ai fini della valutazione della sua chiusura lineare, nel senso in cui esiste almeno un vettore $x \in X$ che può essere rimosso da X, senza ridurre la "grandezza" della sua chiusura lineare:

Osservazione 3.8. Sia $X = \{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k\}$ un insieme di vettori linearmente dipendenti. Allora, esiste un vettore $\boldsymbol{x}_i \in X$ tale che $L(X) = L(X - \{\boldsymbol{x}_i\})$.

Esempio 3.9. Abbiamo visto nell'esempio precedente che i vettori $\boldsymbol{v}_1 = (1, 2),\ \boldsymbol{v}_2 = (3, 6)$ sono linearmente dipendenti. Ne segue quindi che se consideriamo

$$L(\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}) = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2, \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Abbiamo che questo coincide con $L(\{\boldsymbol{v}_1\})$.

In effetti, dato che $\boldsymbol{v}_2 = 3\boldsymbol{v}_1$, abbiamo che un vettore in $L(\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\})$ può essere scritto come:

$$\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 (3\boldsymbol{v}_1) = (\lambda_1 + 3\lambda_2)\boldsymbol{v}_1$$

quindi è un vettore contenuto anche in $L(\boldsymbol{v}_1)$.

Al contrario, vedremo nella prossima lezione come invece un insieme di vettori linearmente indipendenti sia un insieme non rinondante da questo punto di vista.

Test di autovalutazione

Si risponda alle seguenti domande sulla presente lezione. Ogni domanda ammette esattamente una risposta corretta.

1. Dato uno spazio vettoriale V ed un vettore $\boldsymbol{v} \in V$ ed un insieme di vettori linearmente indipendenti $W = \{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_h\}$, quale tra queste affermazioni è necessariamente vera?

   (A) $L(\boldsymbol{v}) = V$.

   (B) $\boldsymbol{v}$ è combinazione lineare di elementi di W.

   (C) $L(W \cup \{\boldsymbol{v}\})$ è un sottospazio di V.

   (D) $\boldsymbol{v}$ non appartiene a W.

2. Quale tra le seguenti affermazioni è corretta?

   (A) La combinazione lineare di due vettori $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ appartiene al sottospazio $L(\boldsymbol{v})$.

   (B) Le rette sono spazi vettoriali.

   (C) Due vettori sono sempre linearmente indipendenti.

   (D) Se un vettore $\boldsymbol{v}$ appartiene ad un sottospazio vettoriale, allora anche $-\boldsymbol{v}$ appartiene al sottospazio.

3. Indicare quale tra questi insiemi di vettori è un insieme di vettori linearmente indipendenti

   (A) $\{(1, 2), (4, -1), (5, 1)\}$

   (B) $\{(1, 0, 1), (8, 2, 1)\}$

   (C) $\{(0, 1, 1), (0, 2, 2)\}$

   (D) Nessuno dei precedenti

4. Due vettori si dicono linearmente dipendenti se

   (A) Sono l'uno il multiplo dell'altro.

   (B) Esiste una combinazione lineare che fornisce il vettore nullo.

   (C) La loro differenza appartiene ad un sottospazio.

(D) La loro somma è il vettore nullo.

5. In uno spazio vettoriale V vale

   (A) $\boldsymbol{v} \in V$ è un sottospazio vettoriale.

   (B) $\mathbf{0}$ è un sottospazio vettoriale.

   (C) La combinazione lineare tra due vettori è uno spazio vettoriale.

   (D) Dati due vettori, esiste un solo sottospazio che li contenga.

6. Sia dato $X = L((1,-1),(-3,3))$ in $\mathbb{R}^2$. Allora

   (A) $X = L((1,-1))$.

   (B) $\mathbf{0}$ non appartiene a X.

   (C) $X = \mathbb{R}^2$.

   (D) $(-1,-1)$ appartiene a $L(X)$.

7. Quale tra queste affermazione è corretta?

   (A) I piani dello spazio cartesiano sono spazi vettoriali.

   (B) La differenza tra due vettori di un sottospazio vettoriale è nel sottospazio vettoriale.

   (C) Non ci possono essere più di tre vettori linearmente indipendenti.

   (D) $L(\boldsymbol{v}) \neq L(\boldsymbol{w})$ per ogni scelta di $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$.

8. Sia G un insieme di generatori per uno spazio vettoriale V. Allora

   (A) G é un insieme di vettori linearmente indipendenti.

   (B) Se $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in G$, allora $\lambda_1 \boldsymbol{v} + \lambda_2 \boldsymbol{w} \in G$ per ogni $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

   (C) $\mathbf{0}$ non appartiene a G.

   (D) $L(G) = L(G \cup \boldsymbol{v})$ per ogni $\boldsymbol{v} \in V$.

9. Quale tra questi non è uno (sotto) spazio vettoriale?

   (A) $L(\mathbf{0})$.

   (B) $\{(x+1, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

(C) $\{\alpha(3,1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

(D) $\mathbb{R}^2$.

10. Un insieme di vettori X si dice linearmente dipendente se

    (A) esistono due vettori contenuti nella loro chiusura lineare.

    (B) $\mathbf{0}$ è combinazione lineare dei vettori in X.

    (C) un vettore $\boldsymbol{v} \in X$ é combinazione lineare dei vettori di X.

    (D) $L(X) = L(X \setminus \{\boldsymbol{v}\})$ per un qualche vettore $v \in X$.