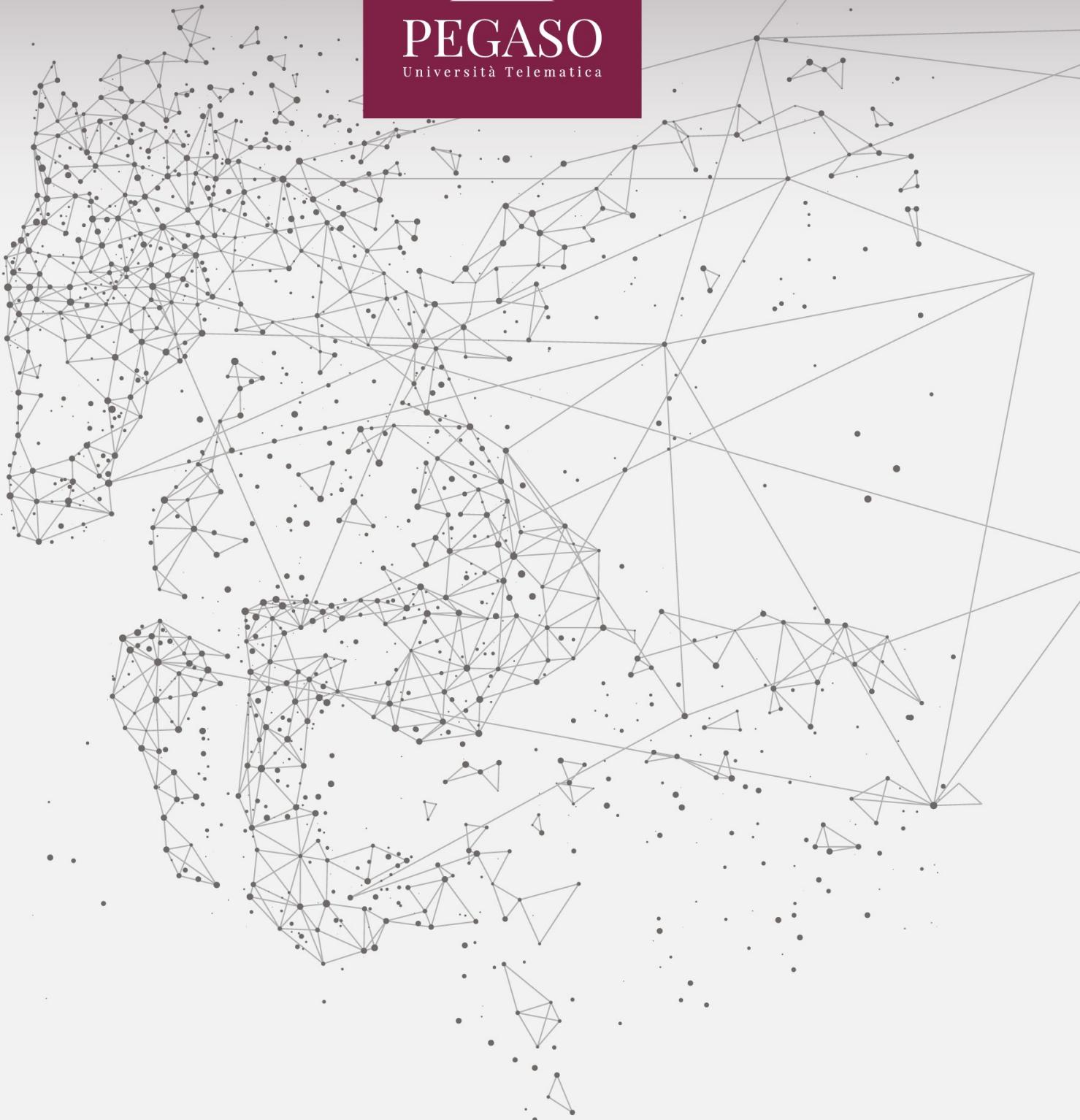




PEGASO

Università Telematica



Elementi di teoria degli insiemi

1 INSIEMI ED ELEMENTI

Introduciamo il concetto di insieme in modo intuitivo, ovvero come una collezione di oggetti ben definita. Generalmente, un insieme è una collezione di oggetti dotati di una **proprietà** in comune. Gli oggetti sono detti **elementi** dell'insieme. Gli insiemi sono generalmente indicati con lettere maiuscole: $A, B, C..$. Gli elementi di un insieme sono indicati con lettere minuscole: $a, b, c..$. Indicheremo che un elemento a appartiene all'insieme A con la notazione

$$a \in A.$$

La sua negazione è indicata con $a \notin A$. Un insieme può esser specificato in due modi

1. Elencando i suoi elementi in modo esplicito. Ad esempio

$$A = \{x, y, p, q\}$$

definisce l'insieme A che ha come elementi le lettere x, y, p, q . La notazione universalmente usata per indicare gli insiemi consiste nell'uso di parentesi graffe $\{\dots\}$, all'interno delle quali gli elementi sono elencati separati da virgole.

2. Indicando la proprietà comune dei suoi elementi. In generale, se P indica una data proprietà, allora, questa notazione corrisponde a introdurre un insieme X nel seguente modo

$$X = \{x : x \text{ soddisfa la proprietà } P\}. \quad (1.1)$$

Ad esempio, se x è un numero intero positivo e definiamo la proprietà P come “essere un numero primo”, allora potremmo definire un insieme X come

$$X = \{x \text{ intero positivo} : x \text{ è un numero primo}\}.$$

Osserviamo che la notazione “ $:$ ” viene usata come sostitutiva di “tale/i che”. Quindi, diremo che “ X è l'insieme di tutti gli interi positivi x tali che x è primo ”.

Anche se non sono stati definiti qui in modo rigoroso, in diversi contesti capiterà di fare uso degli insiemi \mathbb{N} (dei numeri interi maggiori o uguali a zero), \mathbb{R} (dei numeri reali), \mathbb{Z} (dei numeri interi relativi), e \mathbb{Q} (dei numeri razionali).

Altri esempi

1. Esempi notevoli di insiemi sono gli intervalli sulla retta reale. Se $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$,

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ intervallo aperto di estremi a e b
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ intervallo chiuso di estremi a e b
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ intervallo aperto a destra di estremi a e b
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ intervallo aperto a sinistra di estremi a e b

2. Definendo l'insieme E nel seguente modo

$$E = \{x \in \mathbb{R} : (x - 2)(x + 4) = 0\},$$

Abbiamo che $2 \in E$, $-4 \in E$, poichè $x = 2$ e $x = -4$ sono soluzioni dell'equazione di secondo grado $(x - 2)(x + 4) = 0$ (in questo caso, la proprietà P coincide con “l'essere soluzione di $(x - 2)(x + 4) = 0$ ”). Inoltre, abbiamo che $1 \notin E$, $6 \notin E$.

Osserviamo che, quando si definisce un insieme X attraverso una proprietà P , occorre specificare anche l'insieme, che potremmo denotare con U e che viene anche detto **insieme universo**, degli elementi che vengono considerati definendo A . In altri termini, la (1.1) è da scriversi in modo più preciso come

$$X = \{x \in U : x \text{ soddisfa la proprietà } P\}$$

A seconda della scelta di U , infatti, la definizione dell'insieme X può condurre ad insiemi diversi.

Esempio

Siano A e B i seguenti insiemi così definiti

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 2\}, \quad B = \{x \in \mathbb{N} : x^2 = 2\}.$$

In questi due esempi, la proprietà P è la stessa (cioè P consiste “nell'essere soluzione dell'equazione $x^2 = 2$ ”), mentre l'insieme universo cambia. Come conseguenza di ciò si ha

$$A = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\} \quad \text{mentre} \quad B = \emptyset,$$

dove \emptyset denota l'**insieme vuoto**, ovvero l'insieme che non contiene nessun elemento.

2 SOTTOINSIEMI E SOPRAINSIEMI

Definizione 2.1. Un insieme A è un **sottoinsieme** di un insieme B , e scriviamo

$$A \subset B,$$

sse¹ ogni elemento di A è anche elemento di B , cioè sse

$$a \in A \implies a \in B$$

Equivalentemente B è un **soprainsieme** di A e scriveremo

$$B \supset A$$

Diremo anche che A è contenuto in B , o che B contiene A . Le negazioni di $A \subset B$, ovvero di $B \supset A$, sono rispettivamente indicate da

$$A \not\subset B, \quad B \not\supset A.$$

Ovviamente, affermare che $A \not\subset B$ vuole equivalentemente dire che esiste (almeno) un elemento $a \in A$, tale che $a \notin B$.

Esempi

1. Sia $A = \{1, 2, 3\}$. Allora $1 \in A$, che implica che

$$\{1\} \subset A.$$

Osserviamo che non bisogna confondere l'elemento 1, con l'insieme che ha per elemento il solo numero 1, indicato appunto con $\{1\}$. Quindi, le scritture $1 \subset A$ e $\{1\} \in A$ sono errate!

2. Sia $B = \{1, \{2, 3\}\}$. Quindi, B è un insieme costituito da due elementi, ovvero dal primo elemento costituito dal numero 1, e dal secondo elemento costituito dall'insieme $\{2, 3\}$. Potremo quindi scrivere

$$1 \in B, \quad \{2, 3\} \in B, \quad \{1\} \subset B, \quad \{\{2, 3\}\} \subset B.$$

Invece, le scritture $2 \in B$, $\{2\} \subset B$, $\{2, 3\} \subset B$ sono errate.

3. Abbiamo: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

¹“Sse” si legge “se e solo se”

Attenzione! Questo materiale didattico è per uso personale dello studente ed coperto da copyright. Ne è severamente vietata la riproduzione o il riutilizzo anche parziale, ai sensi e per gli effetti della legge sul diritto d'autore (L. 22.04.1941/n. 633).

Definizione 2.2. *Dati due insiemi A e B , diremo che $A = B$ sse risulta contemporaneamente*

$$A \subset B, \quad B \subset A.$$

La corrispondente negazione è indicata con $A \neq B$. Quindi, se si verifica che $A \neq B$, allora *almeno una* delle due inclusioni $A \subset B$ o $B \subset A$ non è vera (oppure entrambe), e questo equivale a dire che $A \not\subset B$, oppure $B \not\subset A$ (oppure entrambe).

Se *solo una* delle inclusioni $A \subset B$ e $B \subset A$ è vera, allora parleremo di **sottoinsieme proprio**. Ad esempio, se $A \subset B$, ma $B \not\subset A$ (e quindi $A \neq B$), allora A è un sottoinsieme proprio di B .

Esempio Considerati gli insiemi $A = \{1, 3, 8\}$, $B = \{3, 8, 1\}$ e $C = \{3, 1, 8\}$, allora risulta

$$A = B = C.$$

Da questo semplicissimo esempio segue una osservazione di carattere generale. Più precisamente, quando si definisce un insieme in uno dei due modi sopra visti, ovvero attraverso l'elenco dei suoi elementi, l'ordine con il quale tali elementi sono elencati non ha influenza sulla definizione stessa (cioè, cambiando tale ordine l'insieme non cambia).

Dalle definizioni sopra date è poi immediato dimostrare il seguente

Teorema 2.1. *Siano A, B, C insiemi qualsiasi. Allora: 1) $A \subset A$; 2) se $A \subset B$ e $B \subset C$, allora $A \subset C$.*

3 FAMIGLIE o CLASSI

Gli elementi di un insieme posso esser a loro volta degli insiemi. Un insieme di insiemi viene detto **famiglia** o **classe**. In modo analogo a quanto fatto per i sottoinsiemi, possiamo definire le sottofamiglie o sottoclassi.

Esempi

1. La famiglia $\mathcal{F} = \{\{-1\}, \{1, 0\}, \{3, 5, 2\}\}$ ha, come elementi, gli insiemi

$$A = \{-1\}, \quad B = \{1, 0\}, \quad C = \{3, 5, 2\}.$$

Quindi $\mathcal{F} = \{A, B, C\}$.

Attenzione! Questo materiale didattico è per uso personale dello studente ed coperto da copyright. Ne è severamente vietata la riproduzione o il riutilizzo anche parziale, ai sensi e per gli effetti della legge sul diritto d'autore (L. 22.04.1941/n. 633).

2. Per ogni $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ sia J_n l'intervallo chiuso in \mathbb{R} dato da

$$J_n = [2n + 1, 2n + 2].$$

Allora,

$$\mathcal{G} = \{J_n : n \in \mathbb{N}\}$$

indica la famiglia \mathcal{G} costituita da tutti gli intervalli chiusi in \mathbb{R} contenuti in $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, aventi lunghezza unitaria, e i cui estremi a sinistra sono numeri dispari.

Definizione 3.1. Se X è un insieme qualsiasi, indichiamo con $\mathcal{P}(X)$ l'**insieme potenza** di X , detto anche **insieme delle parti** di X , costituito dalla classe di tutti i sottoinsiemi di X . Cioè

$$A \in \mathcal{P}(X) \iff A \subset X$$

Esempi

1. Se $X = \{x, y, z\}$ è l'insieme costituito dalle tre lettere x, y, z , allora

$$\mathcal{P}(X) = \{\{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, X, \emptyset\}.$$

In generale, se X è finito, ovvero è costituito da n elementi (dove n è un numero intero positivo), allora anche $\mathcal{P}(X)$ è finito e si può mostrare che $\mathcal{P}(X)$ contiene 2^n elementi.

Notiamo inoltre che possiamo scrivere

$$\{y\} \in \mathcal{P}(X), \quad \{y, z\} \in \mathcal{P}(X), \quad \{\{x\}, \{y, z\}\} \subset \mathcal{P}(X),$$

e quindi che $\{\{x\}, \{y, z\}\}$ è una sottofamiglia di $\mathcal{P}(X)$. Le scritture $\{y\} \subset \mathcal{P}(X)$ e $\{\{x\}, \{y, z\}\} \in \mathcal{P}(X)$ sono esempi di scritture errate.

2. Se $I = (a, b)$ è un fissato intervallo aperto in \mathbb{R} di estremi a, b (con $a < b$), allora, l'insieme delle parti di I sarà

$$\mathcal{P}(I) = \{E \text{ insieme di numeri reali eventualmente vuoto} : E \subset I\}$$

Nella definizione appena data è già incluso il fatto che $\emptyset \in \mathcal{P}(I)$, e che anche $I \in \mathcal{P}(I)$ (essendo $I \subset I$).

Attenzione! Questo materiale didattico è per uso personale dello studente ed coperto da copyright. Ne è severamente vietata la riproduzione o il riutilizzo anche parziale, ai sensi e per gli effetti della legge sul diritto d'autore (L. 22.04.1941/n. 633).

4 OPERAZIONI INSIEMISTICHE

Introduciamo ora una serie di operazioni tramite le quali, partendo da due insiemi (o anche da un solo), viene generato un altro insieme. Tali operazioni vengono introdotte dalle definizioni che seguono, nelle quali A e B sono insiemi qualsiasi, contenuti in un insieme universo X fissato.

Definizione 4.1. *L'unione* di A e B , denotata $A \cup B$, è l'insieme di tutti e soli gli elementi che appartengono ad A , oppure a B , ovvero

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ oppure } x \in B\}.$$

L'intersezione di A e B , denotata $A \cap B$, è l'insieme di tutti e soli gli elementi che appartengono contemporaneamente ad A ed a B , ovvero

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

La **differenza** di A e B , denotata $A - B$, è l'insieme di tutti e soli gli elementi che appartengono ad A , ma non a B , ovvero

$$A - B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

Il **complementare** di A (rispetto ad un fissato insieme universo X), denotato A^c , è l'insieme di tutti e soli gli elementi (dell'insieme universo X) che non appartengono ad A , ovvero

$$A^c = \{x \in X : x \notin A\}.$$

L'insieme complementare di A si può quindi esprimere anche come differenza fra l'insieme universo X ed A , ovvero $A^c = X - A$.

La **differenza simmetrica** di A e B , denotata con $A \Delta B$ è l'insieme di tutti e soli gli elementi che appartengono ad un insieme, ma non all'altro, ovvero

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A).$$

Dati due insiemi A e B , se si verifica che $A \cap B = \emptyset$, ovvero che non esiste nessun elemento di A che è anche elemento di B (e questo ovviamente implica anche che non esiste nessun elemento di B che è elemento di A), allora diremo che A e B sono insiemi **disgiunti**.

Attenzione! Questo materiale didattico è per uso personale dello studente ed coperto da copyright. Ne è severamente vietata la riproduzione o il riutilizzo anche parziale, ai sensi e per gli effetti della legge sul diritto d'autore (L. 22.04.1941/n. 633).

Definizione 4.2. Sia \mathcal{F} una qualsiasi famiglia di insiemi (di qualsiasi natura). Diremo che \mathcal{F} è una **famiglia di insiemi disgiunti** se risulta

$$A, B \in \mathcal{F}, \quad A \neq B \implies A \cap B = \emptyset,$$

ovvero sse, comunque si prenda una coppia di insiemi diversi dalla classe \mathcal{F} , tale coppia è costituita da insiemi disgiunti

Esempi

1. La famiglia $\mathcal{F} = \{A, B, C\}$, dove (vedi esempio sopra)

$$A = \{-1\}, \quad B = \{1, 0\}, \quad C = \{3, 5, 2\}$$

è una famiglia disgiunta.

2. La famiglia $\mathcal{F} = \{D, E, F\}$, dove

$$D = \{3, 7\}, \quad E = \{1, 0\}, \quad F = \{3, 4, 2\}$$

non è una famiglia disgiunta, poichè esiste una coppia di insiemi, ovvero gli insiemi D ed F , che non sono disgiunti, risultando

$$D \cap F = \{3\} \neq \emptyset.$$

3. Sia, per ogni $n \in \mathbb{N}$, I_n l'intervallo chiuso in \mathbb{R} dato da

$$I_n = \left[n, n + \frac{1}{2} \right].$$

Introdotta poi la famiglia \mathcal{F} data da

$$\mathcal{F} = \{I_n : n \in \mathbb{N}\},$$

ovvero

$$\mathcal{F} = \{[0, 1/2], [1, 3/2], [2, 5/2], \dots\},$$

è evidente che \mathcal{F} è una famiglia di insiemi (intervalli chiusi) disgiunti, ovvero che, presi due qualsiasi intervalli diversi I_n e I_m della famiglia (e poichè I_n e I_m sono diversi, deve necessariamente essere $n \neq m$), allora risulta $I_n \cap I_m = \emptyset$.

Attenzione! Questo materiale didattico è per uso personale dello studente ed coperto da copyright. Ne è severamente vietata la riproduzione o il riutilizzo anche parziale, ai sensi e per gli effetti della legge sul diritto d'autore (L. 22.04.1941/n. 633).

4. Sia, per ogni $n \in \mathbb{N}$, J_n l'intervallo aperto in \mathbb{R} dato da $J_n = (n, n + 1)$, e sia \mathcal{G} la famiglia data da

$$\mathcal{G} = \{J_n : n \in \mathbb{N}\},$$

ovvero $\mathcal{G} = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), \dots\}$. Allora, anche \mathcal{G} è una famiglia di insiemi (intervalli aperti) disgiunti. Ricordiamo infatti che gli estremi di un intervallo aperto in \mathbb{R} non appartengono all'intervallo. Presa quindi una qualsiasi coppia di intervalli contigui, ad es. $(0, 1)$ e $(1, 2)$, allora tali intervalli avranno sempre intersezione vuota: $(0, 1) \cap (1, 2) = \emptyset$.

Una volta definite le operazioni basilari fra gli insiemi, possiamo formulare il seguente teorema che esprime le leggi soddisfatte dall'algebra degli insiemi

Teorema 4.1. *Siano A, B, C insiemi qualsiasi, sottoinsiemi di un fissato insieme universo X . Allora, le operazioni fra gli insiemi sopra definite soddisfano*

1. $A \cup A = A, \quad A \cap A = A$ (leggi di idempotenza)
2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (leggi di associatività)
3. $A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$ (leggi di commutatività)
4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (leggi di distributività)
5. $A \cup \emptyset = A, \quad A \cup X = X, \quad A \cap X = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset$ (leggi di identità)
6. $A \cup A^c = X, \quad (A^c)^c = A, \quad A \cap A^c = \emptyset, \quad X^c = \emptyset, \quad \emptyset^c = X$ (leggi di complementazione)
7. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ (leggi di De Morgan)

Proof. La dimostrazione delle leggi da 1) a 6) è immediata. Ci limitiamo a provare solo la legge di De Morgan. Cominciamo a provare, ad es., la seconda nella 7). Abbiamo

$$\begin{aligned} (A \cap B)^c &= \{x \in X : x \notin A \cap B\} = \{x \in X : x \notin A, \text{ oppure } x \notin B\} \\ &= \{x \in X : x \in A^c, \text{ oppure } x \in B^c\} = A^c \cup B^c. \end{aligned}$$

La prima nella 7) segue poi dalla seconda e dalla legge di complementazione 6). Infatti, prendendo i complementari degli insiemi a destra e sinistra nella legge appena dimostrata,

e scritta per A^c e per B^c (invece che per A e B), ovvero nella $(A^c \cap B^c)^c = (A^c)^c \cup (B^c)^c$, otteniamo

$$((A^c \cap B^c)^c)^c = ((A^c)^c \cup (B^c)^c)^c.$$

Applicando la seconda legge di complementazione 6), da questa otteniamo

$$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c,$$

che coincide con la prima delle 8). □

5 INSIEMI PRODOTTO

Siano A e B due insiemi qualsiasi. L'**insieme prodotto** di A e B è costituito da tutte le **coppie ordinate** (a, b) , con $a \in A$ e $b \in B$, ovvero

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

In generale, se A_1, A_2, \dots, A_N sono N insiemi qualsiasi, dove N è un intero positivo fissato, l'insieme prodotto $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_N$, indicato con la notazione

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_N = \prod_{i=1}^N A_i,$$

è costituito da tutte le N -uple ordinate (a_1, a_2, \dots, a_N) , dove $a_i \in A_i$, per $i = 1, \dots, N$.

Osservazione 5.1. *Il concetto di coppia ordinata può esser definito in modo rigoroso attraverso sempre la teoria degli insiemi. Infatti, la coppia ordinata (a, b) può esser definita come famiglia dei due insiemi seguenti*

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

In questo modo, usando la definizione di uguaglianza insiemistica, è immediato vedere che

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \quad e \quad b = d$$

Infatti, se deve essere che $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$, allora questo si verifica sse

$$\{a\} = \{c\} \quad e \quad \{a, b\} = \{c, d\},$$

e questo è vero sse

$$a = c \quad e \quad b = d.$$

Attenzione! Questo materiale didattico è per uso personale dello studente ed coperto da copyright. Ne è severamente vietata la riproduzione o il riutilizzo anche parziale, ai sensi e per gli effetti della legge sul diritto d'autore (L. 22.04.1941/n. 633).

Esempi

1. Sia $A = \{u, v\}$, $B = \{1, 2\}$ e $C = \{8, -1\}$. Si determini $A \times (B \cup C)$ e $(A \times B) \cup (A \times C)$. Abbiamo prima

$$B \cup C = \{1, 2, 8, -1\},$$

e allora

$$A \times (B \cup C) = \{(u, 1), (u, 2), (u, 8), (u, -1), (v, 1), (v, 2), (v, 8), (v, -1)\}.$$

Determiniamo poi $A \times B$ e $A \times C$. Abbiamo

$$A \times B = \{(u, 1), (u, 2), (v, 1), (v, 2)\}, \quad A \times C = \{(u, 8), (u, -1), (v, 8), (v, -1)\}.$$

L'unione di questi due insiemi allora sarà

$$(A \times B) \cup (A \times C) = \{(u, 1), (u, 2), (v, 1), (v, 2), (u, 8), (u, -1), (v, 8), (v, -1)\}.$$

Si osservi che risulta

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C).$$

È facile provare che questa uguaglianza insiemistica è valida per qualsiasi terna di insiemi generici A, B, C .

2. Osserviamo che, per due insiemi generici A e B , i due insiemi prodotto $A \times B$ e $B \times A$ (in generale) non coincidono! In altri termini, l'operazione insiemistica prodotto che, a partire da due insiemi dati A e B , genera l'insieme $A \times B$, non soddisfa la proprietà commutativa.

Ad esempio, se $A = \{1, 3\}$ e $B = \{2\}$, allora

$$A \times B = \{(1, 2), (3, 2)\},$$

mentre

$$B \times A = \{(2, 1), (2, 3)\}.$$

Quindi, abbiamo

$$A \times B \neq B \times A.$$

In questo caso particolare i due insiemi prodotto sono anche disgiunti, ovvero risulta $(A \times B) \cap (B \times A) = \emptyset$. Ricordiamo infatti che, se $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq b$, e indicando con (\cdot, \cdot) una coppia ordinata, allora $(a, b) \neq (b, a)$, ovvero l'ordine con cui compaiono gli elementi in una coppia ordinata è essenziale. Quindi $(1, 2) \neq (2, 1)$ e $(3, 2) \neq (2, 3)$.

Riferimenti

S. Lipschutz, Topologia, collana SCHAUM teoria e problemi, Etas Libri S.p.A., 1979 (Capitolo I).

TEST di AUTOVALUTAZIONE

1. Dati gli insiemi $A = \{4, 1, 7\}$, $B = \{1, 7, -3\}$, quali delle seguenti affermazioni è vera?
 - a) $A \subset B$
 - b) $B \subset A$
 - c) $A - B = \{4\}$
 - d) $A - B = 4$
2. Introdotto l'insieme $Z = \{0, \{1\}, \{1, 2\}\}$, quali delle seguenti affermazioni è falsa?
 - a) $\{1\} \in Z$
 - b) $\{1\} \subset Z$
 - c) $\{0, \{1\}\} \subset Z$
 - d) $\{0, \{1, 2\}\} \subset Z$
3. Sia E l'insieme numerico sull'asse reale \mathbb{R} dato da

$$E = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 2 = 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} : x^3 - 8 = 0\}.$$

Quali delle seguenti uguaglianze è corretta?

- a) $E = \{1, 2\}$
 - b) $E = \{2\}$
 - c) $E = \emptyset$
 - d) $E = 2$
4. Quali sono tutti e soli i valori di $x \in \mathbb{R}$ per i quali è vera la seguente uguaglianza insiemistica?

$$\{x, x - 1\} = \{0, 1\}$$

- a) $x = 0$
 - b) Nessun $x \in \mathbb{R}$
 - c) $x = -1$
 - d) $x = 1$

Attenzione! Questo materiale didattico è per uso personale dello studente ed coperto da copyright. Ne è severamente vietata la riproduzione o il riutilizzo anche parziale, ai sensi e per gli effetti della legge sul diritto d'autore (L. 22.04.1941/n. 633).

5. Quali sono tutti e soli i valori di $x \in \mathbb{R}$ per i quali è vera la seguente uguaglianza fra coppie ordinate?

$$(x - 2, x + 1) = (2x, 1)$$

- a)** nessun x
- b)** $x = -2$
- c)** $x = 0$
- d)** $x = 1$

6. Dato l'insieme $E = \{0, 1, -1\}$ quale, fra i seguenti, è l'insieme $\mathcal{P}(E)$ delle parti di E ?

- a)** $\mathcal{P}(E) = \{\{0\}, \{-1\}, \{1\}\}$
- b)** $\mathcal{P}(E) = \{0, 1, -1, \{0, -1\}, \{-1, 1\}, \{0, 1\}\}$
- c)** $\mathcal{P}(E) = \{0, 1, -1, \{0, -1\}, \{-1, 1\}, \{0, 1\}, \emptyset, E\}$
- d)** $\mathcal{P}(E) = \{\{0\}, \{1\}, \{-1\}, \{0, -1\}, \{-1, 1\}, \{0, 1\}, \emptyset, E\}$

7. Siano A e B due insiemi generici contenuti in un insieme universo X (con A, B, X non vuoti). Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- a)** $(A \cup B) \cap \emptyset = X$
- b)** $A^c \cap A = A$
- c)** $B \cap B^c = \emptyset$
- d)** $A - B = \emptyset$ sse $A = B$

8. Considerato, per ogni $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, l'intervallo aperto a sinistra dato da $I_n = \left(-\frac{1}{n}, 1\right]$, quali delle seguenti è vera?

- a)** $\bigcap_{n \in \mathbb{N} - \{0\}} I_n = \emptyset$
- b)** $\bigcap_{n \in \mathbb{N} - \{0\}} I_n = [0, 1]$
- c)** $\bigcap_{n \in \mathbb{N} - \{0\}} I_n = \{1\}$
- d)** $\bigcup_{n \in \mathbb{N} - \{0\}} I_n = (0, 1)$

9. Se A, B, C, D sono quattro insiemi assegnati, quale fra le seguenti uguaglianze insiemistiche è vera?
- a) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times D)$
 - b) $(A \cup B) \times (C \cup D) = ((A \cap C) \times (B \cap C)) \cup ((A \cap D) \times (B \cap D))$
 - c) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D)$
 - d) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$
10. Se A, B, C sono tre insiemi assegnati (non vuoti), quale fra le seguenti uguaglianze insiemistiche è vera?
- a) $(A \cup A^c)^c \cap B = A$
 - b) $(A \cap A^c)^c \cup B^c = B$
 - c) $(A \cup A^c)^c \cap B = \emptyset$
 - d) $(C \cap C^c)^c \cup C^c = C$