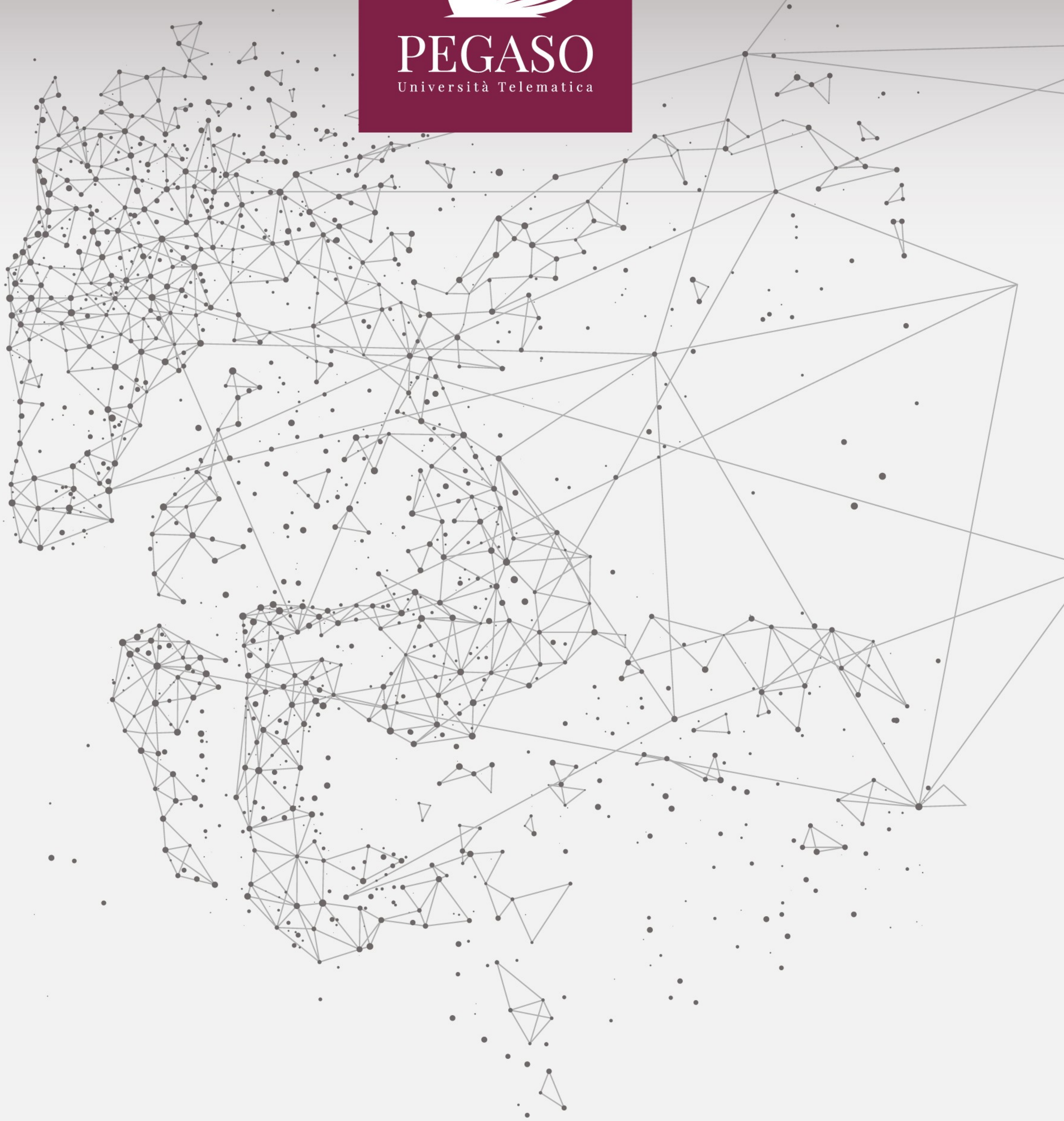
PEGASO
Università Telematica



Distribuzione Normale - Esercitazione

Paolo Sciattella

PEGASO
Università Telematica

Esercizio 1

Esercizio 1

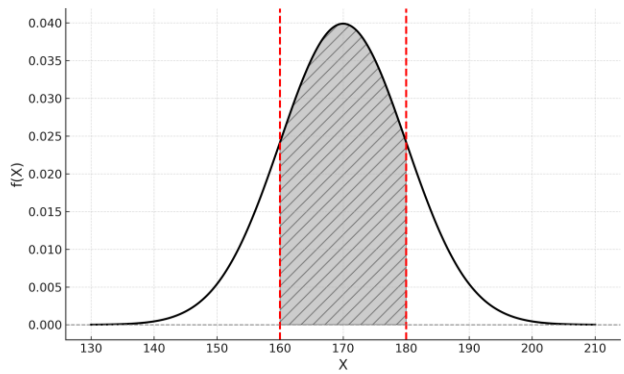
L'altezza di un campione di 10.000 persone si distribuisce come una Normale con media $\mu = 170cm$ e deviazione standard $\sigma = 10cm$ $X \sim N(170{,}10)$:

1) **Qual è la probabilità che l'altezza sia compresa tra 160 e 180 cm**
2) Qual è la probabilità che l'altezza sia inferiore a 165 cm?
3) Quante persone sono più alte di 185 cm?

Esercizio 1

Svolgimento

Calcolare la probabilità che la variabile casuale $X \sim N(170,10)$ assuma un valore compreso tra 160 e 180 cm, corrisponde a calcolare l'area seguente:



Esercizio 1

2

Svolgimento

Per procedere con il calcolo dobbiamo passare dalla v. c. $X \sim N(170,10)$ alla v. c. $Z \sim N(0,1)$ mediante la trasformazione:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

e successivamente individuare la probabilità:

$$P\left(\frac{160 - \mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{180 - \mu}{\sigma}\right)$$

PEGASO
Università Telematica

Esercizio 1

Svolgimento

Procediamo con la trasformazione per $X = 160$:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{160 - 170}{10} = \frac{-10}{10} = -1$$

e per $X = 180$:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{180 - 170}{10} = \frac{10}{10} = 1$$

PEGASO
Università Telematica

Esercizio 1

Svolgimento

A questo punto possiamo esprimere la probabilità che la v. c. $X \sim N(170,10)$ assuma valori tra 160 e 180 cm, utilizzando la normale standardizzata $Z \sim N(0,1)$:

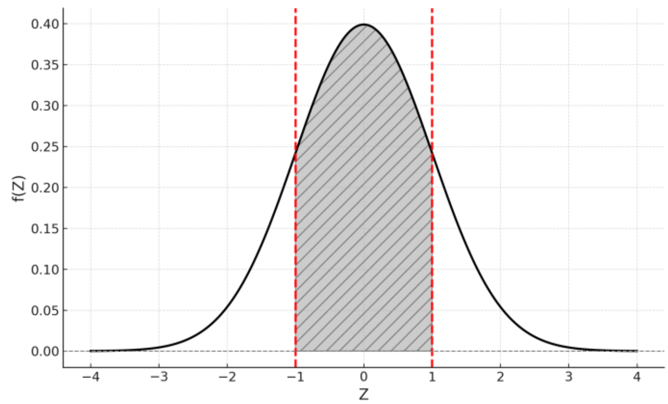
$$P(160 \leq X \leq 180) = P(-1 \leq Z \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-1)$$

PEGASO
Università Telematica

Esercizio 1

Svolgimento

Dobbiamo quindi calcolare l'area seguente:



Esercizio 1

Utilizziamo le tavole statistiche e otteniamo $\Phi(1) = 0{,}8413$

Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441

PEGASO
Università Telematica

Esercizio 1

Svolgimento

Passiamo ora a calcolare $\Phi(-1)$

Poiché le tavole statistiche contengono solo valori di $z > 0$, per calcolare $\Phi(-1)$ dobbiamo ricordare la proprietà della simmetria della v. c. Normale standardizzata, ossia la relazione:

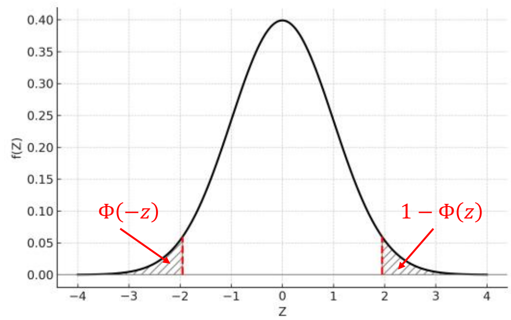
$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$$

PEGASO
Università Telematica

Esercizio 1

Svolgimento

Graficamente, la relazione $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ corrisponde a:



Esercizio 1

Svolgimento

Abbiamo quindi che

$$P(Z \leq -1) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - \Phi(1)$$

Da quanto visto precedente, sappiamo che $\Phi(1\ ) = 0{,}8413$
Possiamo quindi calcolare:

$$\Phi(-1) = P(Z \leq -1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$$

PEGASO
Università Telematica

Esercizio 1

2

Svolgimento

Mettendo insieme i valori calcolati mediante le tavole statistiche otteniamo:

$$P(160 \leq X \leq 180) = P(-1 \leq Z \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 0{,}8413 - 0{,}1587 = 0{,}6826$$

Concludiamo che:

La probabilità di estrarre da una v. c. $X \sim N(170, 10)$ un'unità statistica di altezza compresa tra 160 e 180 cm è pari a 0,6826 (68,26%).

Esercizio 1

Nota: avremmo potuto calcolare la stessa probabilità calcolando esclusivamente il valore $\Phi(1)$ e risolvendo la relazione:

$$P(160 \leq X \leq 180) = P(-1 \leq Z \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-1)$$

Infatti, sapendo che:

$$\Phi(-1) = P(Z \leq -1) = 1 - \Phi(1)$$

Sostituendo avremmo ottenuto:

$$P(160 \leq X \leq 180) = P(-1 \leq Z \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) \\ = \Phi(1) - \big(1 - \Phi(1)\big) = 2 \cdot \Phi(1) - 1 = 2 \cdot 0{,}8413 - 1 \\ = 1{,}6826 - 1 = 0{,}6826$$

Esercizio 2

PEGASO
Università Telematica

Esercizio 2

L'altezza di un campione di 10.000 persone si distribuisce come una Normale con media $\mu = 170cm$ e deviazione standard $\sigma = 10cm$ $X \sim N(170{,}10)$:

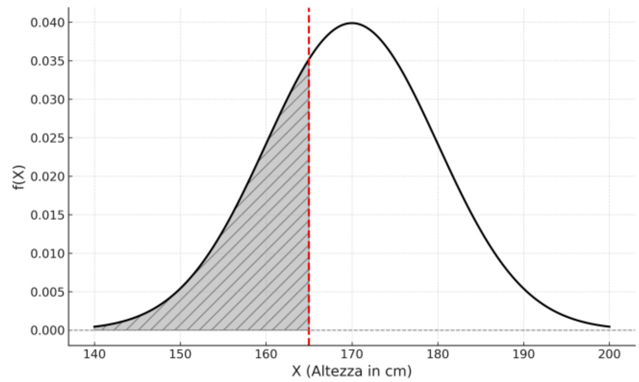
1) Qual è la probabilità che l'altezza sia compresa tra 160 e 180 cm
2) **Qual è la probabilità che l'altezza sia inferiore a 165 cm?**
3) Quante persone sono più alte di 185 cm?

PEGASO
Università Telematica

Esercizio 2

Svolgimento

Calcolare la probabilità che la variabile casuale $X \sim N(170,10)$ assuma un valore inferiore a 165 cm, corrisponde a calcolare l'area seguente:



Esercizio 2

Svolgimento

Per procedere con il calcolo dobbiamo passare dalla v. c. $X \sim N(170{,}10)$ alla v. c. $Z \sim N(0{,}1)$ mediante la trasformazione:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

e successivamente individuare la probabilità:

$$P\left(Z \leq \frac{165 - \mu}{\sigma}\right)$$

PEGASO
Università Telematica

Esercizio 2

Svolgimento

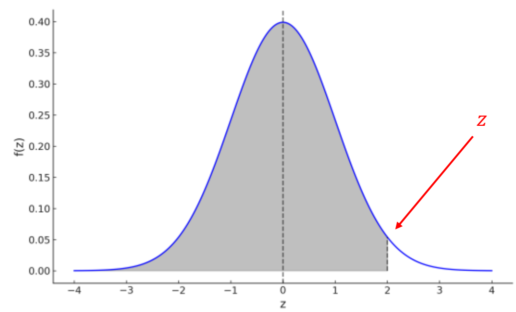
Per calcolare la probabilità che la variabile casuale Normale assuma un valore inferiore ad un determinato valore, dobbiamo ricordare la definizione di funzione di ripartizione di $Z \sim N(0,1)$:

$$\Phi(z) = P(Z \leq z)$$

Esercizio 2

Svolgimento

La funzione di ripartizione $\Phi(z)$, infatti, indica la probabilità di osservare un valore della v. c. $Z \leq z$



PEGASO
Università Telematica

Esercizio 2

Svolgimento

Procediamo con la trasformazione per $X = 165$:

$$Z = \frac{X\ -\ \mu}{\sigma} = \frac{165\ -170}{10} = \frac{-5}{10} = -0{,}5$$

Poiché le tavole statistiche contengono solo valori di $z > 0$, per calcolare $\Phi(-0{,}5)$ dobbiamo ricordare la proprietà della simmetria della v. c. Normale standardizzata, ossia la relazione:

$$\Phi(-0{,}5) = 1 - \Phi(0{,}5)$$

Esercizio 2

Utilizziamo le tavole statistiche e otteniamo $\Phi(0{,}5)=0{,}6915$

Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

PEGASO
Università Telematica

Esercizio 2

2

Svolgimento

Mettendo insieme i valori calcolati mediante le tavole statistiche otteniamo:

$$P(X \leq 165) = P(Z \leq -0{,}5) = 1 - \Phi(0{,}5) = 1 - 0{,}6915 = 0{,}3085$$

Concludiamo che:

La probabilità di estrarre da una v. c. $X \sim N(170, 10)$ un'unità statistica di altezza minore di 165 cm è pari a 0,3085 (30,85%).

PEGASO
Università Telematica

Esercizio 3

PEGASO
Università Telematica

Esercizio 3

L'altezza di un campione di 10.000 persone si distribuisce come una Normale con media $\mu = 170cm$ e deviazione standard $\sigma = 10cm$ $X \sim N(170{,}10)$:

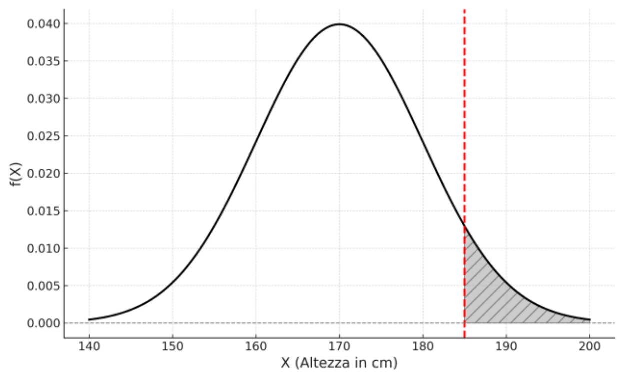
1) Qual è la probabilità che l'altezza sia compresa tra 160 e 180 cm
2) Qual è la probabilità che l'altezza sia inferiore a 165 cm?
3) **Quante persone sono più alte di 185 cm?**

PEGASO
Università Telematica

Esercizio 3

Svolgimento

Calcolare la probabilità che la variabile casuale $X \sim N(170{,}10)$ assuma un valore superiore a 185 cm, corrisponde a calcolare l'area seguente:



Esercizio 3

Svolgimento

Anche in questo caso, per procedere con il calcolo dobbiamo passare dalla v. c. $X \sim N(170,10)$ alla v. c. $Z \sim N(0,1)$ mediante la trasformazione:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

e successivamente individuare la probabilità:

$$P\left(Z \geq \frac{185 - \mu}{\sigma}\right)$$

PEGASO
Università Telematica

Esercizio 3

2

Svolgimento

Procediamo con la trasformazione per $X = 185$:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{185 - 170}{10} = \frac{15}{10} = 1{,}5$$

Quindi otteniamo che:

$$P(X > 185) = P(Z > 1{,}5) = 1 - \Phi(1{,}5)$$

Esercizio 3

Utilizziamo le tavole statistiche e otteniamo Φ(1,5)=0,9332

Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

PEGASO
Università Telematica

Esercizio 3

Svolgimento

Mettendo insieme i valori calcolati mediante le tavole statistiche otteniamo:

$$P(X > 185) = P(Z > 1{,}5) = 1 - \Phi(1{,}5) = 1 - 0{,}9332 = 0{,}0668$$

Per sapere quante persone, sulle 10.000 della popolazione saranno più alte di 185 cm, dobbiamo moltiplicare il numero di persone per la probabilità appena ottenuta, ossia:

$$n_{altezza>185} = n \cdot P(Z > 1{,}5) = 10.000 \cdot 0{,}0668 = 668$$

PEGASO
Università Telematica

Esercizio 3

Concludiamo che:

Dato un campione di 10.000 persone, distribuito come una Normale con media $\mu = 170cm$ e deviazione standard $\sigma = 10cm$ $X \sim N(170,10)$, le persone più alte di 185 cm saranno 668.

PEGASO
Università Telematica