PEGASO
Università Telematica

Distribuzione Normale

Paolo Sciattella

Caratteristiche

Caratteristiche

La variabile casuale Normale (spesso chiamata v. c. Gaussiana) è certamente la variabile casuale più importante nella statistica per le sue innumerevoli applicazioni e le rilevanti proprietà di cui gode.

Definizione: La v. c. Normale X, indicata con $X \sim N(\mu; \sigma^2)$, è una v. c. continua che può assumere valori su tutto l'asse reale, con funzione di densità:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

con i parametri $-\infty < \mu < +\infty$ e $\sigma^2 \geq 0$

PEGASO
Università Telematica

Caratteristiche

La media e la varianza della v. c. Normale sono date da:

$$E(X) = \mu \text{ e } \mathrm{V}(X) = \sigma^2$$

La funzione di densità Normale ha una forma campanulare, **unimodale** e **simmetrica** rispetto al valore $x = \mu$, in corrispondenza del quale la funzione raggiunge il suo massimo valore.

PEGASO
Università Telematica

Caratteristiche

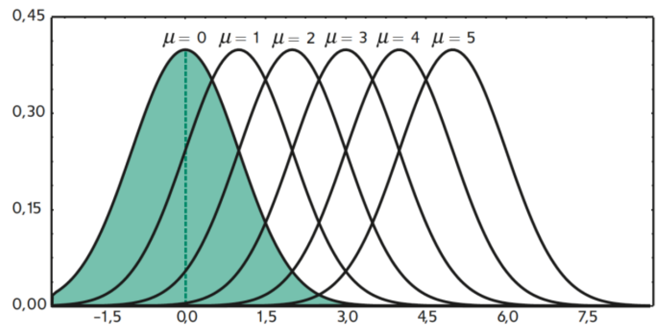
Da tali osservazioni discende che:

- $\boldsymbol{\mu}$ **corrisponde** contemporaneamente al **valore atteso**, alla **mediana** e alla **moda** della v. c. Normale X
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

PEGASO
Università Telematica

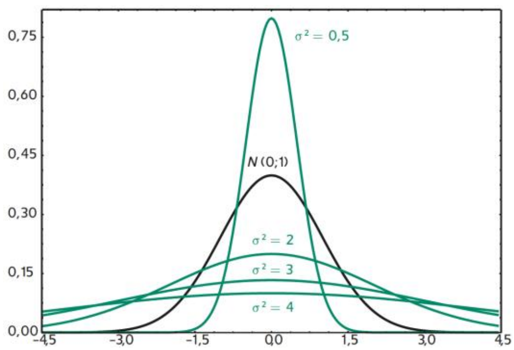
Caratteristiche

La media μ determina la **posizione** della curva sull'asse delle ascisse



Caratteristiche

La deviazione standard σ determina la **dispersione** della curva



Normale standardizzata

Normale standardizzata

Tra tutte le v. c. Normali, ha particolare importanza la v. c. **Normale standardizzata** $Z \sim N(0; 1)$, ossia una v. c. normale di **media 0** e **varianza 1**.

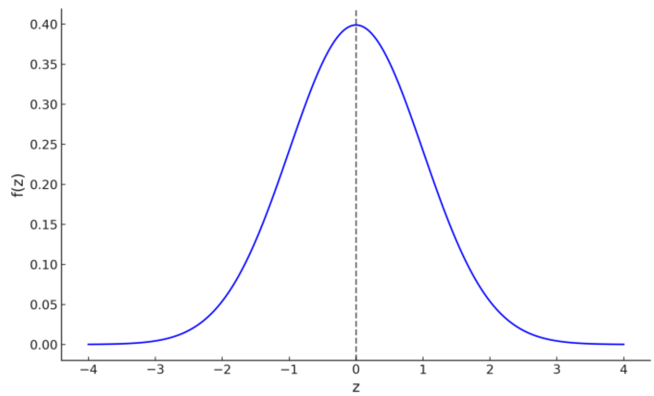
Definizione: Se la v. c. X ha una distribuzione Normale con parametri μ e σ^2, allora $Z = (X - \mu)/\sigma$ è ancora una v. c. Normale con media nulla e varianza unitaria. Tale v. c. è nota con il nome di v. c. **Normale standardizzata** e ha la seguente funzione di densità:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

PEGASO
Università Telematica

Caratteristiche

Funzione di densità della v. c. **Normale standardizzata** $Z \sim N(0; 1)$: per la proprietà di simmetria di Z rispetto all'asse $z = 0$, si ha $f(z) = f(-z)$



PEGASO
Università Telematica

Normale standardizzata

La funzione di ripartizione della Normale standardizzata, indicata con il simbolo $\Phi(z)$ è data da:

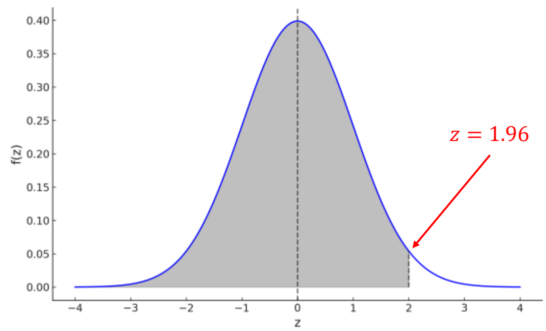
$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} f(z)dz =$$

$$\int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

PEGASO
Università Telematica

Normale standardizzata

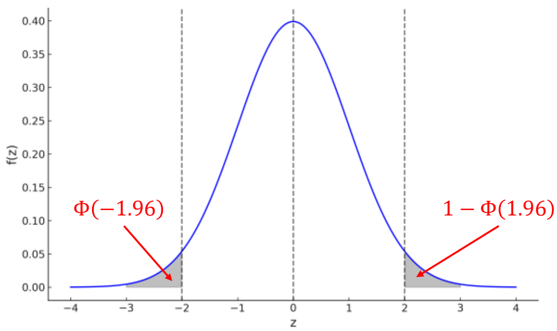
La funzione di ripartizione $\Phi(z)$ indica la probabilità di osservare un valore della v. c. $Z \leq z$



Normale standardizzata

La funzione di ripartizione $\Phi(z)$, gode della seguente proprietà:

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$$



Normale standardizzata

La proprietà $\Phi(-z) = 1 - \Phi(-z)$ permette di semplificare i calcoli delle aree sottese dalla funzione di densità e di calcolare la probabilità che la v. c. Z assuma valori inferiori ad un certo valore z, oppure che assuma valori compresi tra a e b.

Infatti si ha che:

$$P(a \leq Z \leq b) = \int_a^b f(z)dz = \Phi(b) - \Phi(a)$$

PEGASO
Università Telematica

Normale standardizzata

Quindi è sufficiente conoscere i valori di $\Phi(z)$ per $z > 0$ per ricavare la probabilità associata a qualsiasi intervallo di Z.

Poiché il calcolo è comunque laborioso, generalmente si utilizzano le **tavole statistiche** della Normale standardizzata.

PEGASO
Università Telematica

Le tavole statistiche

Le tavole statistiche

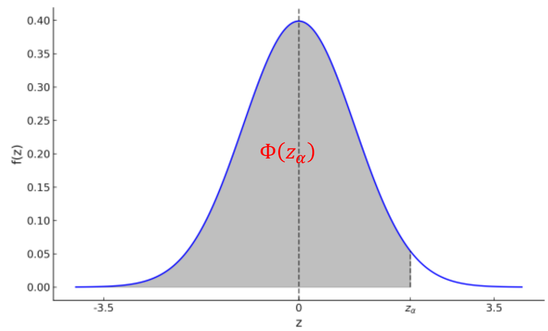
Le tavole statistiche sono uno strumento utilizzato per calcolare i valori critici corrispondenti alle variabili casuali continue. Nel caso della Normale standardizzata, la tavola statistica riporta il valore della funzione di ripartizione

$$\Phi(z_\alpha) = P(Z \leq z_\alpha) = 1 - \alpha$$

con $z_\alpha > 0$

Le tavole statistiche

In altre parole, la tavola fornisce l'area sottesa alla funzione di densità della Normale standardizzata tra $-\infty$ e z_α



Le tavole statistiche

Di seguito un estratto della funzione di ripartizione $\Phi(Z)$

Z	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441

Le tavole statistiche

Ad esempio il valore $\Phi(1{,}55) = \mathrm{P}(Z \leq 1{,}55)$ è pari a 0,9394

Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441

Le tavole statistiche

Le tavole della Normale standardizzata permettono di valutare le probabilità $P(X \leq x)$ di qualsiasi v. c. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.
Infatti, come visto in precedenza (slide 9) si ha che:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Quindi

$$P(X \leq x) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

PEGASO
Università Telematica

Le tavole statistiche

Ne consegue che, data una qualsiasi v. c. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, per calcolare la probabilità $P(X \leq x)$ è necessario innanzitutto calcolare:

$$\frac{x - \mu}{\sigma}$$

e successivamente individuare la probabilità:

$$P\left(Z \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

PEGASO
Università Telematica

Le tavole statistiche

In base a quanto discusso, possiamo sintetizzare le seguenti relazioni per il calcolo delle probabilità per una v. c. $Z \sim N(0,1)$ mediante le tavole statistiche (con $z_\alpha > 0$ e $z_\beta > 0$):

- $P(Z \leq z_\alpha) = \Phi(z_\alpha)$
- $P(Z > z_\alpha) = 1 - \Phi(z_\alpha)$
- $P(Z \leq -z_\alpha) = 1 - \Phi(z_\alpha)$
- $P(Z > -z_\alpha) = 1 - \Phi(-z_\alpha) = 1 - [1 - \Phi(z_\alpha)] = \Phi(z_\alpha)$
- $P(z_\alpha \leq Z \leq z_\beta) = \Phi(z_\beta) - \Phi(z_\alpha)$

Le tavole statistiche

Le stesse relazioni valgono per una v. c. $X \sim N(\mu, \sigma)$, se si applica la trasformazione: $\frac{x-\mu}{\sigma}$

- $P(X \leq x) = P\left(Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(Z\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$
- $P(X > x) = P\left(Z > \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(Z\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$
- $P(X \leq -x) = P\left(Z \leq \frac{-x-\mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(Z\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$
- $P(X > -x) = P\left(Z > \frac{-x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(Z\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$
- $P(x_a \leq Z \leq x_b) = P\left(\frac{x_a-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{x_b-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(Z\frac{x_b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(Z\frac{x_a-\mu}{\sigma}\right)$