PEGASO
Università Telematica

Proiezioni ortogonali e prodotto vettoriale

Corso di Geometria

Laurea in Ingegneria Civile

In questa lezione introdurremo i concetti di *proiezione ortogonale di un vettore*, l'*algoritmo di Gram-Schmidt*, il *complemento ortogonale* e il *prodotto vettoriale nello spazio tridimensionale.*

Cominciamo dalla **proiezione ortogonale**, un'operazione fondamentale che consente di determinare la componente di un vettore lungo una direzione data. In termini geometrici, si tratta di trovare il vettore che giace lungo una certa direzione e che rappresenta l'ombra "più breve" che un vettore getta su un sottospazio, come una retta o un piano, quando viene "illuminato" da una luce ortogonale. Matematicamente, la proiezione ortogonale di un vettore $\mathbf{v}$ su un sottospazio W permette di decomporre $\mathbf{v}$ in due componenti: una appartenente a W e una ad esso ortogonale, che rappresenta appunto la distanza di $\mathbf{v}$ dal sottospazio.

Proprio da questa idea si sviluppa l'**algoritmo di Gram-Schmidt**, uno strumento essenziale per costruire basi ortogonali (o anche ortonormali) a partire da un insieme di vettori linearmente indipendenti. Questo algoritmo permette di trasformare una base arbitraria di uno spazio vettoriale in una base i cui vettori siano ortogonali tra loro. In generale, avere basi ortogonali o ortonormali semplifica notevolmente calcoli come proiezioni, cambi di base, e diagonalizzazione di operatori.

Il concetto di **complemento ortogonale** si inserisce naturalmente in questo contesto. Dato un sottospazio W di uno $\mathbb{R}^n$, il suo complemento ortogonale $W^\perp$ è l'insieme di tutti i vettori che sono ortogonali a ogni vettore di W. Questo concetto, oltre a fornire una chiave per comprendere la struttura interna dello spazio, ha un significato concreto: per esempio può rappresentare la direzione lungo la quale una forza non ha effetto, oppure la direzione di massima reazione rispetto a vincoli ortogonali a una superficie o a un elemento strutturale.

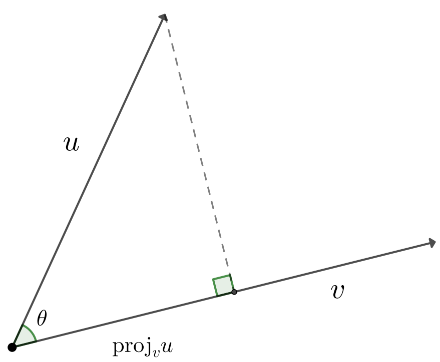
Infine, in $\mathbb{R}^3$, il **prodotto vettoriale** costituisce un'operazione cruciale per determinare una direzione ortogonale a due vettori dati. Questo strumento geometrico produce un nuovo vettore, il cui modulo è proporzionale all'area del parallelogramma generato dai due vettori iniziali, e la cui direzione è perpendicolare al piano da essi individuato, secondo la regola della mano destra. Il prodotto vettoriale è essenziale in applicazioni come il calcolo di momenti torcenti, la determinazione della normale a una superficie, o l'analisi delle forze in un sistema tridimensionale.

1 Proiezione ortogonale di un vettore

Abbiamo visto nella scorsa lezione il concetto di prodotto scalare tra due vettori. Questo importante operazione, oltre ad essere alla base del concetto di ortogonalità e a permettere le nozioni di norma e distanza, fornisce in un certo modo una misura per dire quanto due vettori "siano diretti nella stessa direzione". Abbiamo visto quindi che questa nozione è collegata anche alla posizione reciproca dei due vettori, ed in particolare il prodotto scalare è legato quantitativamente all'angolo compreso tra i due vettori.

Rappresentanto nella figura sottostante due vettori generici, possiamo vedere che, tracciando la proiezione del vettore $\boldsymbol{u}$ sul vettore $\boldsymbol{v}$, questa è legata al valore dell'angolo compreso tra $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$, e quindi al prodotto scalare tra i due vettori. Infatti, si verifica immediatamente che

$$\mathrm{proj}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u} = u\cos\theta$$



PEGASO
Università Telematica

Moltiplicando e dividendo il membro a destra per il $v \cdot v$ otteniamo

$$\mathrm{proj}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u} = u\cos\theta\frac{v \cdot v}{v \cdot v}$$

Ora, utilizzando le proprietà del prodotto scalare possiamo vedere che $u\cos\theta v \cdot v = (u \cdot v)v$, quidi verificando che

Definizione 1.1. La **proiezione ortogonale** di $\boldsymbol{u}$ su $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ è:

$$\mathrm{proj}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|^2}\boldsymbol{v}.$$

Il coefficiente $\frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|^2}$ si dice *coefficiente di Fourier* di $\boldsymbol{u}$ rispetto a $\boldsymbol{v}$.

Esempio 1.2. Sia $\boldsymbol{u} = (2, 3),\ \boldsymbol{v} = (1, 0)$, allora:

$$\mathrm{proj}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u} = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 0}{1^2 + 0^2}(1, 0) = 2 \cdot (1, 0) = (2, 0).$$

Possiamo anche vedere chiaramente che nel caso in cui i due vettori siano ortogonali, la proiezione di uno sull'altro è nulla.

Osservazione 1.3. Il coefficiente di Fourier di $\boldsymbol{u}$ rispetto a $\boldsymbol{v}$ è caratterizzato dal fatto di essere l'unico numero reale α tale che $\boldsymbol{u} = \alpha\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$, con $\boldsymbol{w}$ ortogonale a $\boldsymbol{v}$. Infatti

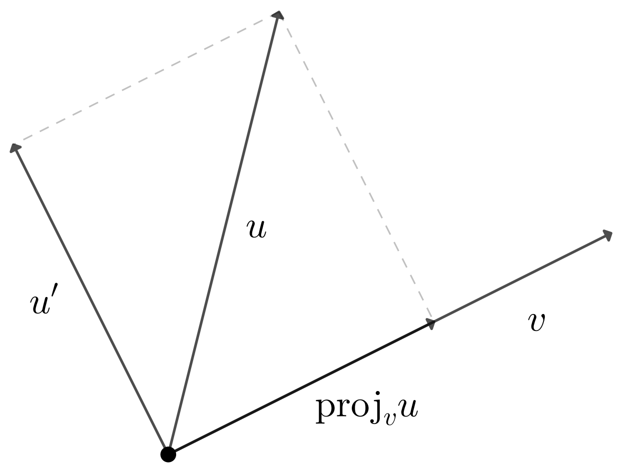
$$\alpha = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}} \quad \Rightarrow \quad \alpha(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \quad \Rightarrow$$
$$\underbrace{(\alpha\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u})}_{\boldsymbol{w}} \cdot \boldsymbol{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

Il concetto di proiezione ortogonale ci permette inoltre di costruire, a partire da una base di uno spazio vettoriale, quelle che vengono chiamate basi ortogonali e basi ortonormali di vettori:

Definizione 1.4. Una base B di V si dice *ortogonale* se, per ogni coppia di vettori distinti $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in B$ si ha $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0$.

Una base ortogonale si dice *ortonormale* se per ogni $\boldsymbol{u}$ si ha $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = 1$.

In altre parole, in una base generale di uno spazio vettoriale V si potrebbe avere della "rinondanza" nei suoi elementi: pur essendo vettori linearmente indipendenti tra loro, alcuni potrebbero essere diretti in direzioni simili. Il restringerci ad una base ortogonale permette di isolare le singole componenti che costituiscono una base di uno spazio vettoriale. Facendo riferimento al disegno sottostante, possiamo ad esempio vedere che i due vettori $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ costituiscono una base di uno spazio vettoriale 2-dimensionale (quindi di un piano). I due vettori, tuttavia, non sono ortogonali tra loro: infatti, riportando $\text{proj}_v u$, possiamo vedere che è un vettore non nullo.



Per costruire ora una base che sia ortogonale possiamo osservare la figura e ricordare l'osservazione fatta precedentemente. Notiamo che il vettore $\boldsymbol{u}'$ è ortogonale al vettore $\boldsymbol{v}$, e inoltre $\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{u} - \text{proj}_v u$. Quindi, un metodo per ottenere una base ortogonale consiste nel rimuovere le proiezioni degli vari vettori inseriti nella base. Questo metodo, detto *algoritmo di Gram-Schmidt*, è così formalizzato:

- Sia $B = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ una qualunque base di uno spazio vettoriale V.

- Costruiamo la base $B' = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ nel seguente modo induttivo:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_1 &= \boldsymbol{v}_1 \\
\boldsymbol{e}_2 &= \boldsymbol{v}_2 - \frac{\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2}{\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1}\, \boldsymbol{e}_1 \\
\boldsymbol{e}_3 &= \boldsymbol{v}_3 - \frac{\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{v}_3}{\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1}\, \boldsymbol{e}_1 - \frac{\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{v}_3}{\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2}\, \boldsymbol{e}_2 \\
&\vdots \\
\boldsymbol{e}_n &= \boldsymbol{v}_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{v}_i}{\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_i}\, \boldsymbol{e}_i
\end{aligned}$$

  si può verificare quindi che per ogni $i \neq j$ vale $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = 0$.

- Se si vuole costruire una base ortonormale (quindi ogni vettore ha lunghezza 1) a partire da B' basta dividere ogni vettore per la sua norma, ovvero costruiamo $B'' = \{\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n\}$, dove

$$\boldsymbol{f}_i = \frac{\boldsymbol{e}_i}{\|\boldsymbol{e}_i\|}$$

Esempio 1.5. Sia $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ la base dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, dove $\boldsymbol{v}_1 = (2,0,0)^T$, $\boldsymbol{v}_2 = (1,1,1)^T$ e $\boldsymbol{v}_3 = (3,0,2)^T$. Applichiamo l'algoritmo di Gram-Schmidt per costruire una base ortogonale a partire da $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$, che poi trasformeremo in una base ortonormale. Abbiamo che $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ sarà una base ortogonale, dove:

$$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \frac{\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2}{\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1}\, \boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{(1,1,1)\cdot(2,0,0)}{(2,0,0)\cdot(2,0,0)} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{4} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{v}_3 - \frac{\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{v}_3}{\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1}\, \boldsymbol{e}_1 - \frac{\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{v}_3}{\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2}\, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{(3,0,2)\cdot(2,0,0)}{(2,0,0)\cdot(2,0,0)} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{(3,0,2)\cdot(0,1,1)}{(0,1,1)\cdot(0,1,1)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{6}{4} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quindi abbiamo $B' = \{(2,0,0)^T, (0,1,1)^T, (0,-1,1)^T\}$. Possiamo verificare che questi vettori sono ortogonali:

$$(2,0,0)\cdot(0,1,1) = (2)(0) + (0)(1) + (0)(1) = 0$$

$$(2,0,0)\cdot(0,-1,1) = (2)(0) + (0)(-1) + (0)(1) = 0$$

$$(0,1,1)\cdot(0,-1,1) = (0)(0) + (1)(-1) + (1)(1) = 0$$

Possiamo quindi trasformare B' in una base ortonormale, basta calcolare le norme dei vari vettori che lo costituiscono:

$$\|(2,0,0)\| = \sqrt{2^2 + 0^2 + 0^2} = 2$$

$$\|(0,1,1)\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\|(0,-1,1)\| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Quindi, $B'' = \{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$, dove

$$\boldsymbol{f}_1 = \frac{\boldsymbol{e}_1}{\|\boldsymbol{e}_1\|} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{f}_2 = \frac{\boldsymbol{e}_2}{\|\boldsymbol{e}_2\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{f}_3 = \frac{\boldsymbol{e}_3}{\|\boldsymbol{e}_3\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Osservazione 1.6. La base canonica (standard) di $\mathbb{R}^n$ è una base ortonormale.

2 Complemento ortogonale

Abbiamo visto nelle lezioni precedenti il concetto di sottospazio di uno spazio vettoriale dato, e di come combinare più sottospazi vettoriali in modo da ottenere sottospazi vettoriali più grandi tramite l'operazione di somma:

$$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$$

In questa sezione vedremo come a partire da un sottoinsieme di uno spazio vettoriale possiamo considerare un sottospazio molto particolare, detto complemento ortogonale, la cui nozione è evidentemente collegata al concetto di ortogonalità tra vettori:

Definizione 2.1. Se X è un sottoinsieme (non vuoto) di V, si dice *complemento ortogonale* di X in V il sottoinsieme

$$X^{\perp} = \{\boldsymbol{v} \in V \mid \text{ per ogni } \boldsymbol{x} \in X,\ \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{x} = 0\}$$

Si può vedere facilmente che $X^{\perp}$ sia uno spazio vettoriale, e che $L(X) \cap X^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$; pertanto, possiamo applicare la formula di Grassmann:

$$\begin{aligned}
\dim(L(X)) + \dim(X^{\perp}) &= \dim(L(X) + X^{\perp}) + \dim(L(X) \cap X^{\perp}) \\
\dim(L(X)) + \dim(X^{\perp}) &= \dim(L(X) + X^{\perp}) + 0
\end{aligned}$$

Si può dimostrare quindi che $L(X) + X^{\perp} = V$, quindi che V è somma diretta di $L(X)$ e $X^{\perp}$:

$$V = L(X) \oplus X^{\perp}$$

Pertanto, questo suggerisce un modo per costruire la base di uno spazio vettoriale, partendo da un insieme di vettori linearmente indipendenti X:

- Cercare un vettore $\boldsymbol{v}$ che sia ortogonale ad ogni vettore di X.
- Ripetere il passaggio precedente con $X \cup \{\boldsymbol{v}\}$.

Ad un certo punto saremo costretti ad interrompere l'algoritmo, in particolare quando avremmo ottenuto una base di V.

3 Prodotto vettoriale

Abbiamo visto che il prodotto scalare tra due vettori prende in input due vettori di uno spazio vettoriale V e ci restituisce un numero reale $\mathbb{R}$. In questa sezione, studieremo il concetto di prodotto vettoriale, che invece dati due vettori in input ci restituisce un altro vettore. Per semplicità, lo studio di questa operazione riguarderà solo vettori in $\mathbb{R}^3$, ma può essere studiata anche più in generale su altri spazi vettoriali.

Definizione 3.1. Siano $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$, con

$$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3), \qquad \boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3).$$

Il **prodotto vettoriale** (o vettore prodotto esterno) è definito come:

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}.$$

Dal punto di vista della notazione, riportiamo che spesso il prodotto vettoriale è anche denotato con il simbolo $\wedge$ (wedge).

Il vettore risultante ha le seguenti proprietà:

- $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ è ortogonale sia a $\boldsymbol{u}$ che a $\boldsymbol{v}$ (questo lo rende anche un vettore interessante per la costruzione di basi di $\mathbb{R}^3$);
- la direzione segue la regola della mano destra;
- il modulo è dato da:

  $$\|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{u}\| \, \|\boldsymbol{v}\| \sin\theta,$$

  dove θ è l'angolo (convesso) compreso tra $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$.

Esempio 3.2. Siano $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3) = (0, 1, 1)$ e $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3) = (1, 3, 0)$, calcoliamo $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1)(0) - (1)(3) \\ (1)(1) - (0)(0) \\ (0)(3) - (1)(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Viene quindi da sé che il prodotto vettoriale abbia delle differenze sostanziali rispetto al prodotto scalare:

- come già detto, restituisce un vettore anzichè uno scalare;
- se due vettori sono linearmente dipendenti, allora l'angolo tra i due vettori θ è l'angolo nullo, per cui $\sin\theta = 0$ e $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = 0$;
- mentre il prodotto scalare è commutativo $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}$, il prodotto vettoriale è **anticommutativo**, ovvero $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}$.

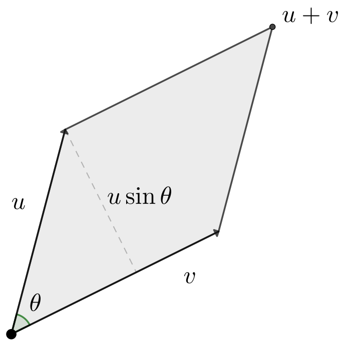
Tuttavia, come il prodotto scalare, il prodotto vettoriale condivide un'interessante interpretazione geometrica.

Definizione 3.3. Dati due vettori $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$, il *parallelogramma generato* da $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ è il parallelogramma avente come vertici $\mathbf{0}$, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$.

Infatti, la norma del prodotto vettoriale tra due vettori $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ rappresenta l'**area del parallelogramma** generato da $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$:

$$A = \|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{u}\| \, \|\boldsymbol{v}\| \, \sin\theta.$$

Questo tutto sommato non dovrebbe risultare una sorpresa nel momento in cui si rappresenta la situazione (anche se il disegno è 2-dimensionale, mentre il prodotto vettoriale vale tra vettori in $\mathbb{R}^3$, il concetto rimane valido):



Infatti, l'area del parallelogramma generato da $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ è data dal prodotto della base del parallelogramma per la sua altezza. Si vede facilmente che si può prendere come base uno dei due vettori (in questo caso, $\boldsymbol{v}$), mentre l'altezza è data dalla lungezza dell'altro vettore ($\boldsymbol{u}$), per il seno dell'angolo compreso tra i due vettori. Ritroviamo quindi la nozione della norma del prodotto vettoriale tra i due vettori.

Quindi:

- nel caso in cui sia noto l'angolo compreso tra i due vettori, per trovare l'area del parallelogramma generato possiamo direttamente scriverla come $\|\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{v}\|\,\sin\theta$;
- se invece i vettori $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ ci vengono dati direttamente con le coordinate, e non conosciamo quindi l'angolo θ, calcoliamo $\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|$.

Esempio 3.4. Siano ancora $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3) = (0, 1, 1)$ e $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3) = (1, 3, 0)$, calcoliamo l'area del parallelogramma generato da $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$. Dato che non ci viene fornito l'angolo tra essi compreso, utilizziamo il prodotto vettoriale $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$. Abbiamo visto nell'esempio precedente che:

$$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Per trovare l'area del parallelogramma calcoliamo quindi la norma di questo vettore:

$$\|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\| = \left\| \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-3)^2 + (1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9+1+1} = \sqrt{11}.$$

Test di autovalutazione

Si risponda alle seguenti domande sulla presente lezione. Ogni domanda ammette esattamente una risposta corretta.

1. La proiezione ortogonale di un vettore

   (A) è uno scalare positivo.

   (B) non dipende dall'angolo compreso tra i due vettori.

   (C) è tale che $\text{proj}_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}) = \text{proj}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u} + \text{proj}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{w}$.

   (D) non è mai il vettore nullo.

2. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

   (A) Applicare l'algoritmo di Gram-Schmidt permette di trasformare una base nella base canonica.

   (B) Per trasformare una base in una base ortonormale basta dividere ogni vettore per la propria norma.

   (C) L'algoritmo di Gram-Schmidt si può applicare a qualunque base, anche ortonormale.

   (D) Vettori tra loro ortogonali formano necessariamente una base per lo spazio vettoriale.

3. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

   (A) Un insieme di generatori ortonormali è necessariamente una base di uno spazio vettoriale.

   (B) $\text{proj}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{u}$ per ogni $\boldsymbol{u}$.

   (C) La proiezione ortogonale $\text{proj}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ è ortogonale al vettore $\boldsymbol{u}$.

   (D) $\boldsymbol{u} - \text{proj}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$.

4. Quale delle seguenti è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ rispetto al prodotto scalare euclideo?

   (A) $\{(1,-2,0),(2,1,0),(0,0,1)\}$

   (B) $\{(1,-2,1),(1,-1,1),(0,0,1)\}$

(C) $\{(-1,0,0),(0,1,0),(0,0,-1)\}$

(D) Nessuna delle altre risposte

5. Nello spazio $\mathbb{R}^3$ si consideri il sottospazio $W = L(\{(1,1,0),(0,1,1)\})$. Allora

(A) Il complemento ortogonale è $W^\perp = L(5,-5,5)$.

(B) W ha come complemento ortogonale solo il vettore nullo.

(C) Il complemento ortogonale è $W^\perp = L(0,1,0)$.

(D) W non ammette complemento ortogonale.

6. Siano $\boldsymbol{v} = (2,-1,0)$ e $\boldsymbol{u} = (1,0,3)$. Qual è il vettore $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}$?

(A) 4

(B) $(-3,6,1)$

(C) $(1,3,-6)$

(D) $(-3,-6,1)$

7. Dati due vettori di norma $\|\boldsymbol{u}\| = 1$ e $\|\boldsymbol{v}\| = 2$, quanto può valere al massimo $\|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\|$?

(A) 2, quando i vettori sono perpendicolari.

(B) 4, quando i vettori sono perpendicolari.

(C) 2, quando i vettori sono paralleli.

(D) 4, quando i vettori sono paralleli.

8. Dati due vettori $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{u}$ in $\mathbb{R}^3$, allora

(A) $\{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}\}$ è una base per $\mathbb{R}^3$.

(B) $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$.

(C) Se $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}$ sono linearmente indipendenti, allora $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}$ è linearmente indipendente da $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{u}$.

(D) $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}$ appartiene alla chiusura lineare di $\{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\}$.

9. Dato uno spazio vettoriale V di dimensione 5 e preso un suo sottospazio W di dimensione 3

   (A) $\dim(W) + \dim(W^\perp) < 5$.

   (B) $W^\perp = \{\boldsymbol{v} \in V \mid \boldsymbol{x} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}\}$.

   (C) $W \cup W^\perp = V$.

   (D) Data una base B di W ed una base $B^\perp$ di $W^\perp$, $B \cup B^\perp$ è una base di V.

10. Se due vettori $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{u}$ sono ortogonali tra loro

    (A) ogni vettore $\boldsymbol{w}$ ortogonale a $\boldsymbol{v}$ è ortogonale anche a $\boldsymbol{u}$.

    (B) $\boldsymbol{u}$ appartiene al complemento ortogonale di $\boldsymbol{v}$.

    (C) $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ sono linearmente dipendenti.

    (D) la proiezione ortogonale di $\boldsymbol{u}$ su $\boldsymbol{v}$ non è ortogonale a $\boldsymbol{u}$.