Probabilità: concetti di base

Paolo Sciattella

Concetti primitivi di probabilità

Concetti primitivi di probabilità

La prova → La prova è un esperimento che ha due o più possibili risultati.

L’evento → L’evento è uno dei possibili risultati della prova.

La probabilità → La probabilità è un numero compreso tra 0 ed 1 che misura il grado di incertezza sul verificarsi di un evento.

Concetti primitivi di probabilità

Prova

La **prova** (*o esperimento aleatorio*) è un esperimento che ha due o più possibili risultati e in cui c'è un certo grado di incertezza su quale di questi risultati si presenterà.

La prova può essere suddivisa in diverse fasi che si definiscono **sottoprove**.

Esempi di prove sono:

1. il lancio di un dado;
2. un esame universitario fissato a una certa data;
3. la sperimentazione di un certo farmaco su una cavia;
4. la quotazione di un titolo finanziario in un certo giorno;
5. il lancio di due dadi (*esempio di suddivisione in due sottoprove*).

Concetti primitivi di probabilità

Evento

Si possono distinguere due tipi di eventi.

Per evento **elementare** si intende uno ed uno solo dei possibili risultati della prova.

Per evento **non-elementare** si intende un evento che può essere a sua volta scomposto in più eventi elementari.

Ad esempio nella prova «lancio di un dado»

I possibili eventi elementari sono {1;2;3;4;5;6}.

Un esempio di evento non-elementare è “*esce un numero dispari*”, che si verifica ogni volta che esce uno qualsiasi degli eventi elementari {1;3;5}.

Concetti primitivi di probabilità

Probabilità

Data una prova, la probabilità indica il grado di incertezza connesso al verificarsi di un evento

Definizione classica di probabilità

Rapporto tra il numero dei casi favorevoli all'evento e il numero dei casi possibili purché essi siano tutti ugualmente possibili.

$$P(E) = \frac{n.\ di\ casi\ favorevoli}{n.\ di\ casi\ possibili}$$

ESEMPIO

Lancio un dado regolare e osservo il numero 5

$$P(E = 5) = 1/6$$

Concetti primitivi di probabilità

Definizione frequentista di probabilità

Si basa sull'osservazione ripetuta di un fenomeno e definisce la probabilità come il limite della frequenza relativa di un evento quando il numero di prove tende all'infinito.

$$P(E) = \lim_{n \to \infty} \frac{numero\ di\ volte\ in\ cui\ si\ verifica\ l'evento\ E}{numero\ di\ prove\ (n)}$$

ESEMPIO

Pearson (1857-1936) ha tirato per 24.000 volte una moneta ottenendo 12.012 volte Testa:

$$P(L = Testa) = \frac{12.012}{24.000} = 0{,}5005$$

Concetti primitivi di probabilità

Definizione soggettivista di probabilità

La probabilità P(E) di un evento è la misura del grado di fiducia che un individuo attribuisce, in base alle sue informazioni e alle sue opinioni, al verificarsi dell'evento E.

Bruno de Finetti usa il **paradigma della scommessa** per dare una formulazione operativa della probabilità soggettiva:

La probabilità di un evento E, P(E), secondo l'opinione di un individuo coerente, è il prezzo p che egli stima equo attribuire a un importo unitario (per esempio, 1 euro) esigibile solo al verificarsi di E

$$P(E) = \frac{prezzo\ pagato\ (P)}{somma\ incassata\ in\ caso\ si\ verifichi\ E\ (S)}$$

Concetti primitivi di probabilità

ESEMPIO

Attribuire la probabilità 0,7 la verificarsi di un certo evento E, significa essere disposti a pagare 7 € per ricevere 10 € solo nel caso in cui l'evento E si verifichi.

*

Algebra di Eventi

Algebra di Eventi

Con riferimento a una prova si possono considerare tutti gli eventi elementari ω_i (i diversi possibili esiti della prova), ma è opportuno introdurre anche un altro insieme di eventi, definiti a partire da quelli elementari; l'insieme di tutti questi eventi, indicato con $\varepsilon = [E_1, E_2, \dots, E_p]$, viene definito **collezione di eventi**

L'insieme di tutti i possibili eventi elementari ω_i viene chiamato **spazio campionario** e viene indicato con il simbolo Ω.

Algebra di Eventi

Postulato 1

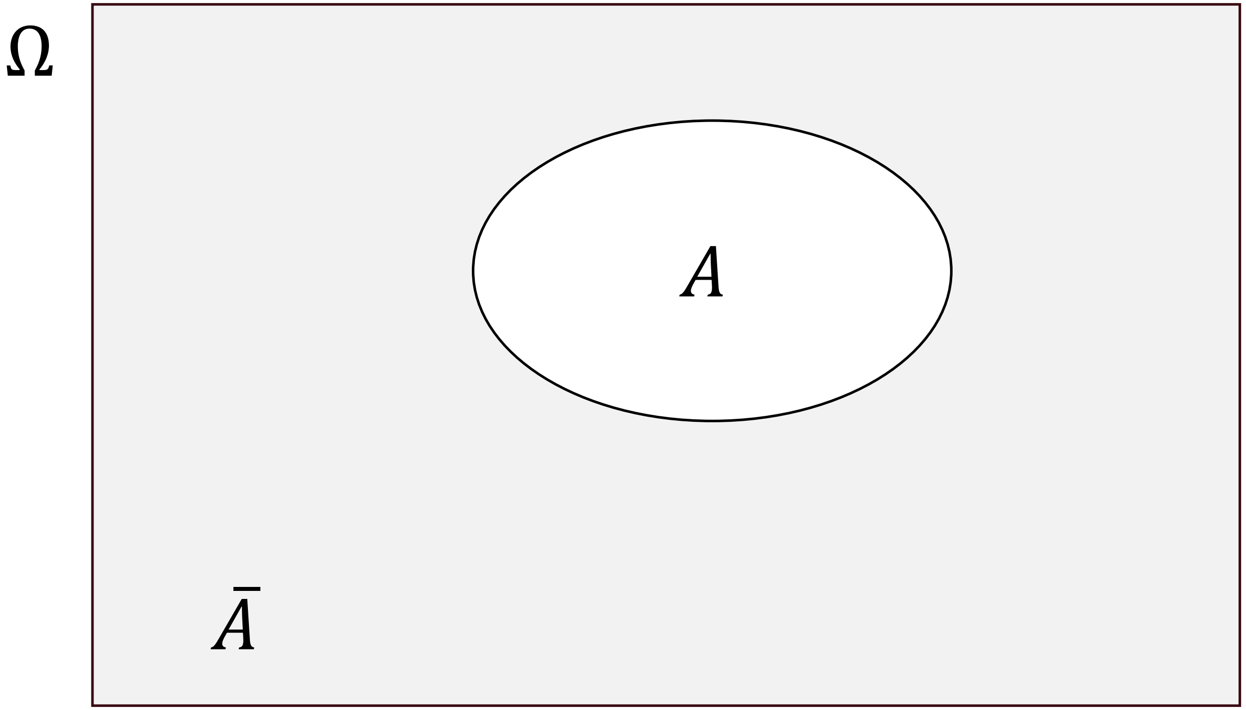
Gli eventi formano un'**algebra di Boole**, ossia una struttura matematica in cui sono definite, tra le altre, le seguenti operazioni fondamentali:

1. La negazione di un evento A, indicata con $\bar{A}$
2. L'intersezione tra due eventi A e B, indicata con $A \cap B$
3. L'unione tra due eventi A e B, indicata con $A \cup B$

Algebra di Eventi

Negazione

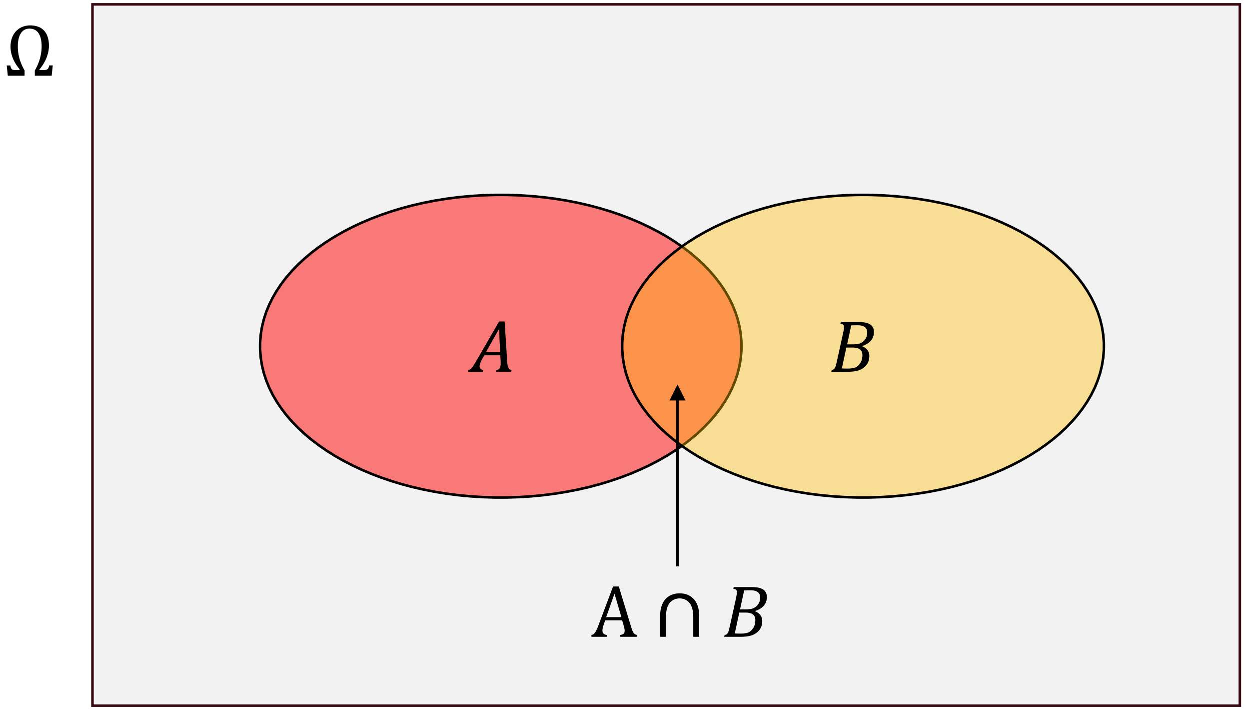
Dato un evento A, la sua negazione $\bar{A}$ (denominata anche complemento di A), è data dall'evento "A non si verifica".



Algebra di Eventi

Intersezione

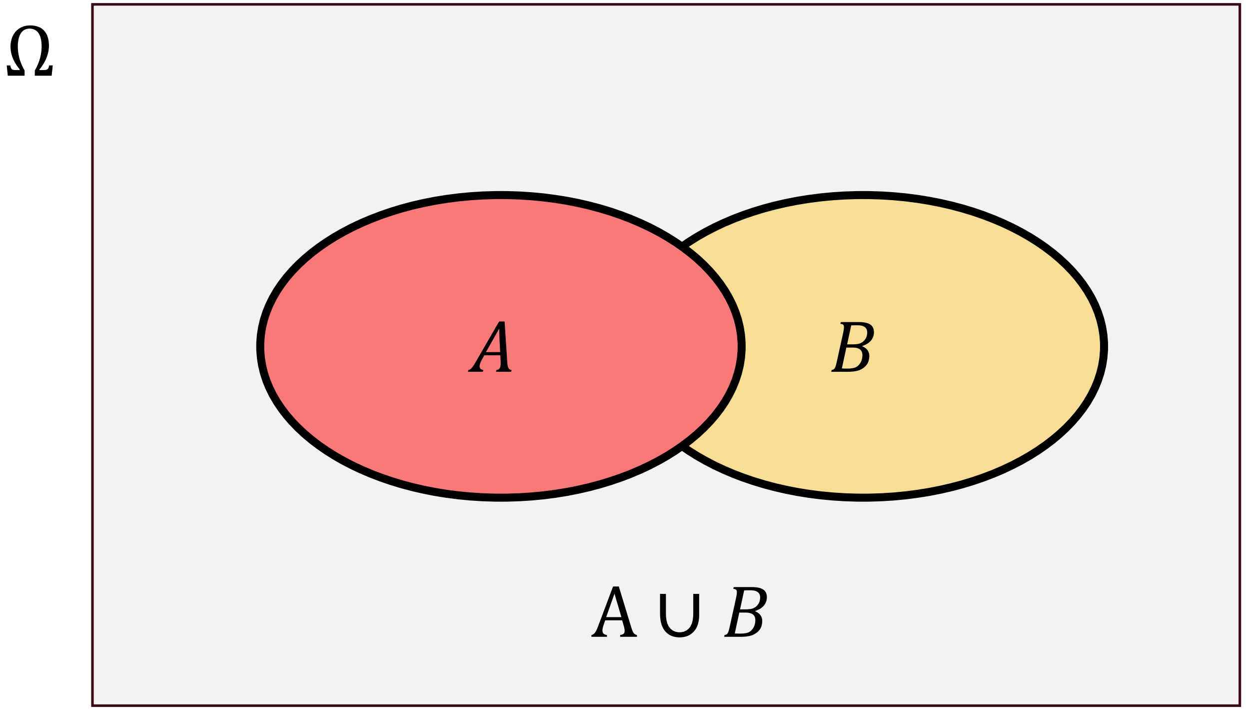
Dati 2 eventi, A e B, la loro intersezione $A \cap B$ è data dall'evento "gli eventi A e B si verificano contemporaneamente".



Algebra di Eventi

Unione

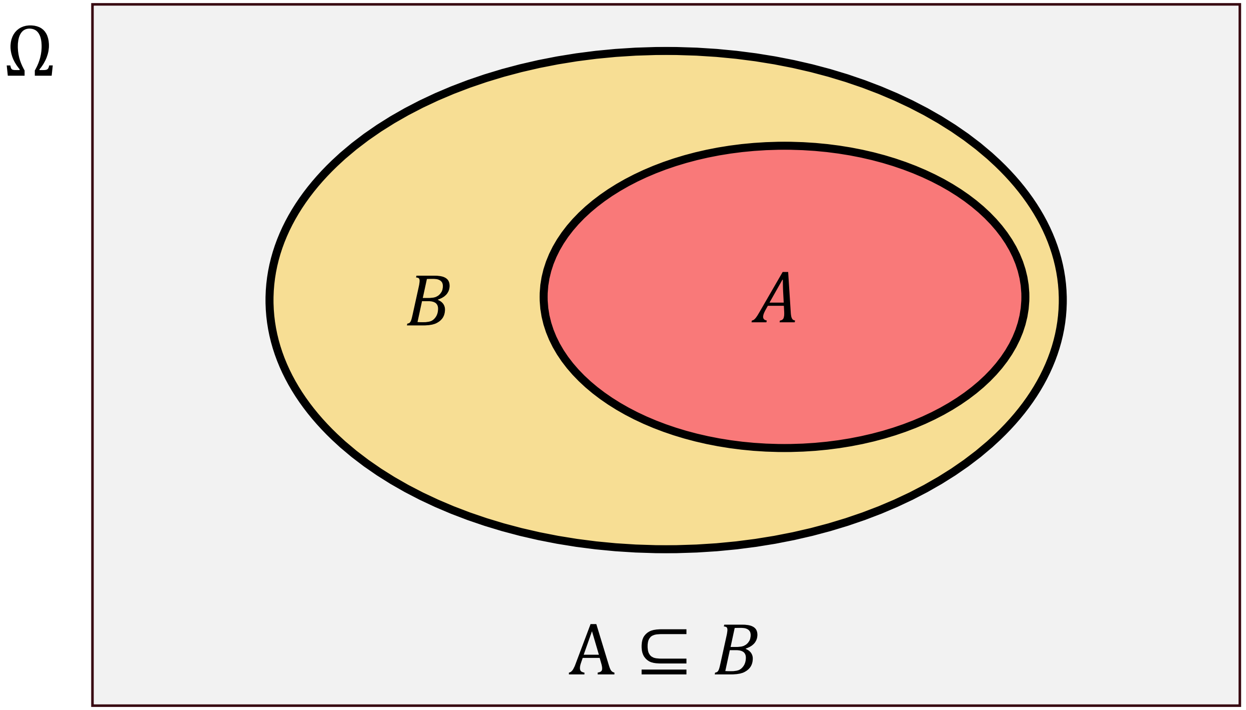
Dati 2 eventi, A e B, la loro unione $A \cup B$ è data dall'evento "almeno uno degli eventi A e B si verifica".



Algebra di Eventi

A implica B

Dati 2 eventi, A e B, l'evento A implica B, indicato con $A \subseteq B$, se ogni volta che si verifica A, si verifica anche B (A è contenuto in B).



Algebra di Eventi

È opportuno definire due eventi particolarmente rilevanti:

Evento Impossibile

L'evento impossibile, indicato con $\emptyset$ è l'evento che non può mai verificarsi e può essere definito come l'intersezione fra un qualsiasi evento e la sua negazione:

$$A \cap \bar{A} = B \cap \bar{B} = \cdots = \emptyset$$

Evento Certo

L'evento certo, è l'evento che si verifica sempre in quanto comprende tutti i possibili risultati dell'esperimento. Può essere definito come la negazione dell'evento impossibile:

$$\bar{\emptyset} \equiv \Omega$$

Algebra di Eventi

Da quanto introdotto, derivano i seguenti enunciati:

- La negazione di un evento certo E è un evento impossibile (e viceversa)

$$\bar{E} \equiv \emptyset \quad \text{e} \quad \bar{\emptyset} \equiv E$$

- L'unione e l'intersezione di un evento A con se stesso è lo stesso evento

$$A \cup A = A \cap A = A$$

- L'unione di un evento A con la sua negazione è un evento certo E

$$A \cup \bar{A} = E$$

- L'intersezione di un evento A con la sua negazione è un evento impossibile

$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$

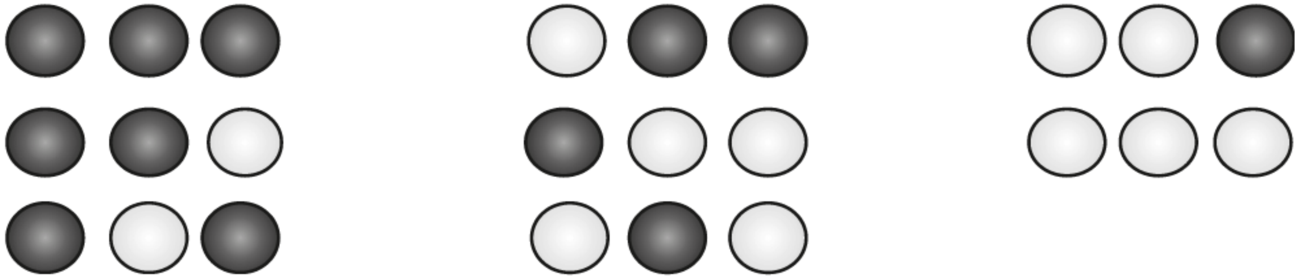
*

Algebra di Eventi: esempi

Algebra di Eventi: esempi

Esempio di eventi elementari e spazio campionario

Poniamo in un’urna 100 palline di uguali dimensioni, delle quali 30 sono nere e 70 bianche. Estraiamo 3 palline in sequenza, reimmettendo nell’urna ogni pallina dopo la sua estrazione. I possibili eventi elementari, tenendo conto dell’ordine di estrazione, sono:



Lo spazio campionario $\boldsymbol{\Omega}$ è composto, quindi, da **8 eventi elementari**
$\boldsymbol{\Omega} = \{\boldsymbol{NNN}, \boldsymbol{BNN}, \boldsymbol{BBN}, \boldsymbol{NNB}, \boldsymbol{NBB}, \boldsymbol{BBB}, \boldsymbol{NBN}, \boldsymbol{BNB}\}$

Algebra di Eventi: esempi

Negazione

Dato un evento A, la sua negazione $\bar{A}$ (denominata anche complemento di A), è data dall'evento "A non si verifica".

Esempio

Ritorniamo all'urna con 100 palline, delle quali 30 nere e 70 bianche. Estraiamo 3 palline in sequenza con reimmissione.

Dato l'evento $\boldsymbol{A}$ **"non si estrae alcuna pallina nera"**, la negazione di A, sarà data dall'evento $\bar{\boldsymbol{A}}$ **"si estrae almeno una pallina nera".**

Algebra di Eventi: esempi

Intersezione

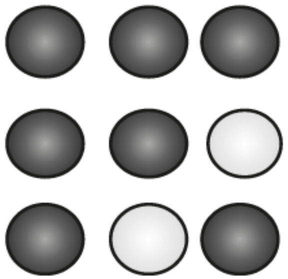
Dati 2 eventi, A e B, la loro intersezione $A \cap B$ è data dall’evento “gli eventi A e B si verificano contemporaneamente”.

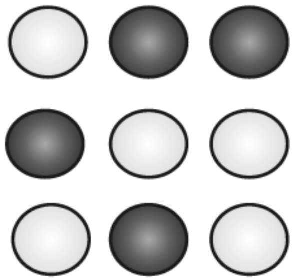
Esempio

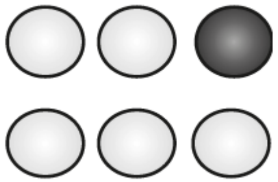
$\boldsymbol{A}$ “non si estrae alcuna pallina nera”

$\boldsymbol{B}$ “si estraggono almeno due palline bianche”

$\boldsymbol{A \cap B}$ “non si estrae alcuna pallina nera e almeno due palline bianche”







Algebra di Eventi: esempi

Intersezione

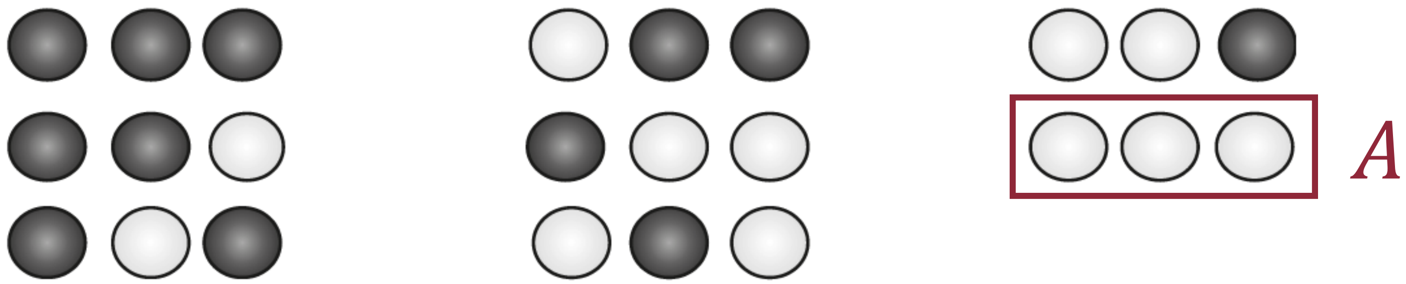
Dati 2 eventi, A e B, la loro intersezione $A \cap B$ è data dall'evento "gli eventi A e B si verificano contemporaneamente".

Esempio

$\boldsymbol{A}$ "non si estrae alcuna pallina nera"

$\boldsymbol{B}$ "si estraggono almeno due palline bianche"

$\boldsymbol{A \cap B}$ "non si estrae alcuna pallina nera e almeno due palline bianche"



Algebra di Eventi: esempi

Intersezione

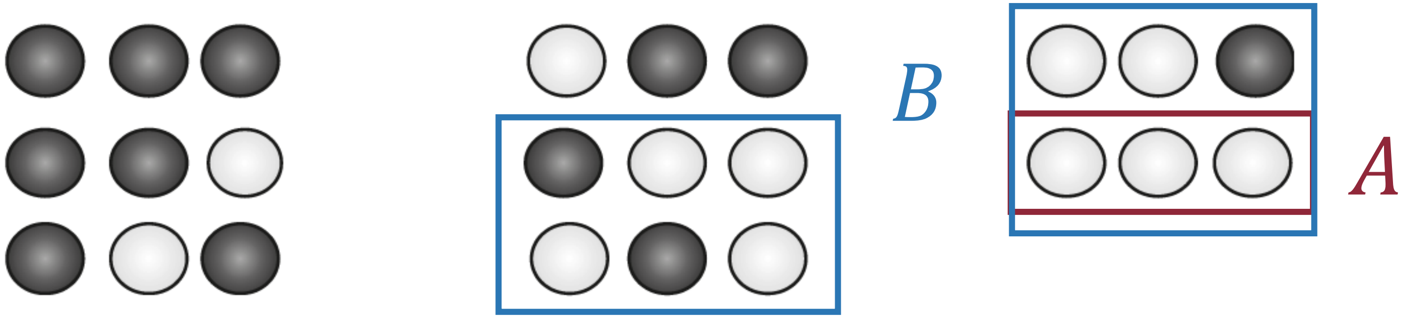
Dati 2 eventi, A e B, la loro intersezione $A \cap B$ è data dall'evento "gli eventi A e B si verificano contemporaneamente".

Esempio

$\boldsymbol{A}$ "non si estrae alcuna pallina nera"

$\boldsymbol{B}$ "si estraggono almeno due palline bianche"

$\boldsymbol{A \cap B}$ "non si estrae alcuna pallina nera e almeno due palline bianche"



Algebra di Eventi: esempi

Intersezione

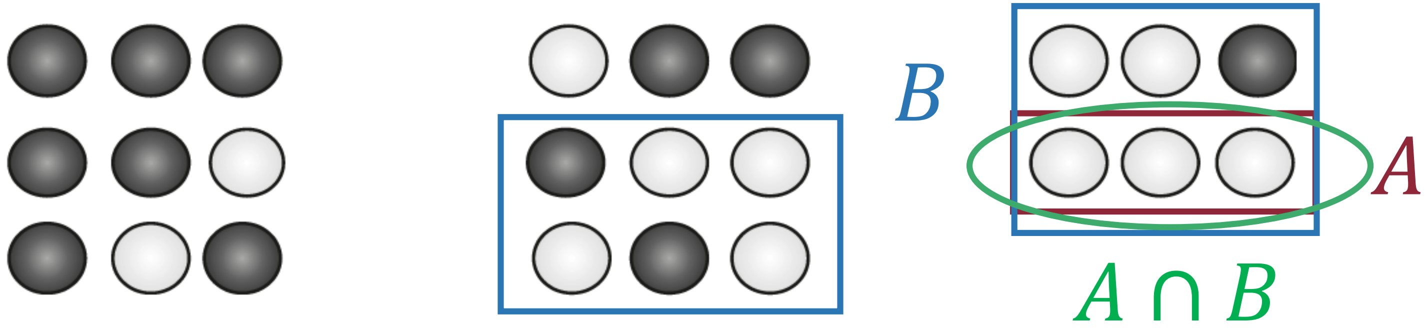
Dati 2 eventi, A e B, la loro intersezione $A \cap B$ è data dall'evento "gli eventi A e B si verificano contemporaneamente".

Esempio

$\boldsymbol{A}$ "non si estrae alcuna pallina nera"

$\boldsymbol{B}$ "si estraggono almeno due palline bianche"

$\boldsymbol{A \cap B}$ "non si estrae alcuna pallina nera e almeno due palline bianche"



Algebra di Eventi: esempi

Unione

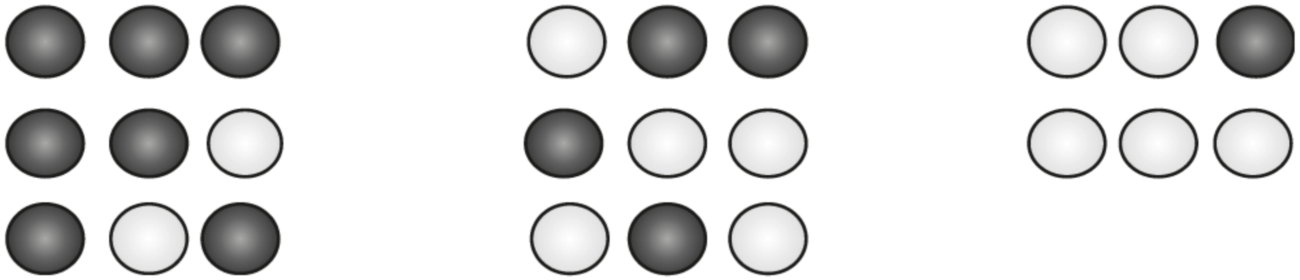
Dati 2 eventi, A e B, la loro unione $A \cup B$ è data dall'evento "almeno uno degli eventi A e B si verifica".

Esempio

$\boldsymbol{A}$ "si estraggono al massimo due palline nere"

$\boldsymbol{B}$ "si estraggono almeno due palline bianche"

$\boldsymbol{A \cup B}$ "si estraggono al massimo due palline nere o almeno due palline bianche"



Algebra di Eventi: esempi

Unione

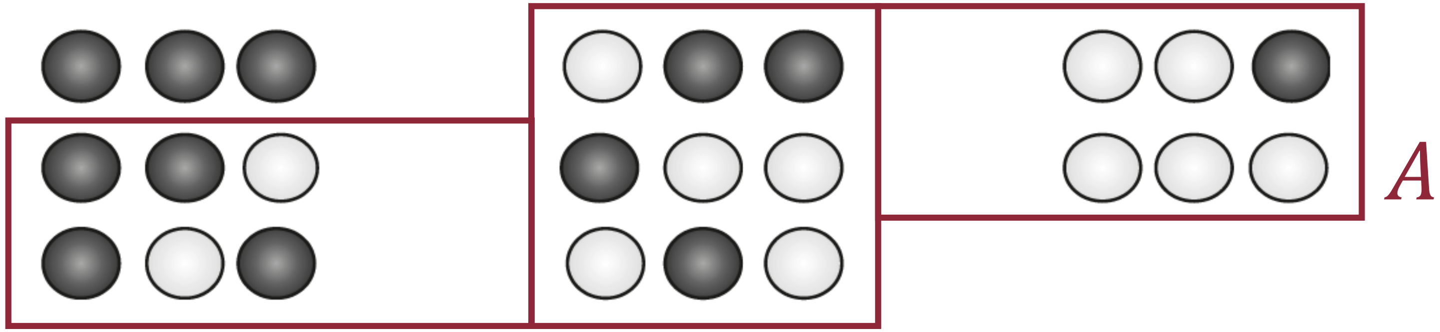
Dati 2 eventi, A e B, la loro unione $A \cup B$ è data dall'evento "almeno uno degli eventi A e B si verifica".

Esempio

$\boldsymbol{A}$ "si estraggono al massimo due palline nere"

$\boldsymbol{B}$ "si estraggono almeno due palline bianche"

$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$ "si estraggono al massimo due palline nere o almeno due palline bianche"



Algebra di Eventi: esempi

Unione

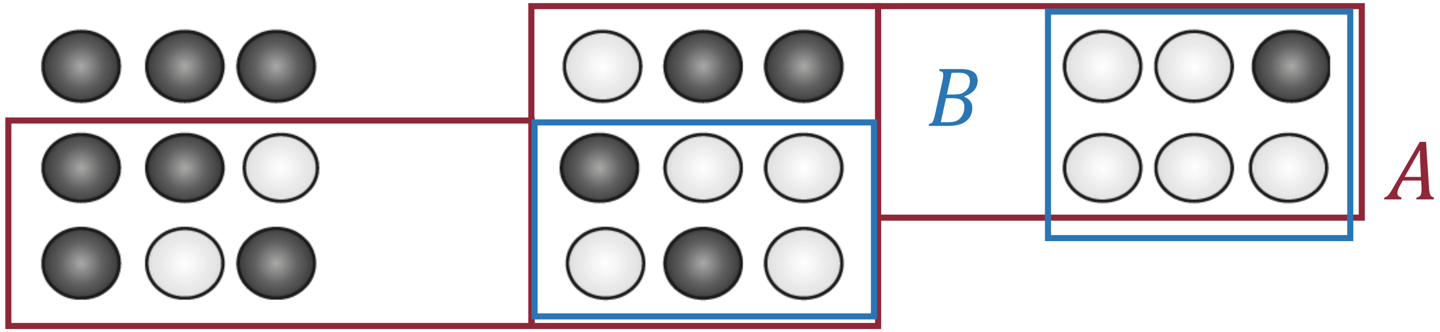
Dati 2 eventi, A e B, la loro unione $A \cup B$ è data dall'evento "almeno uno degli eventi A e B si verifica".

Esempio

$\boldsymbol{A}$ "si estraggono al massimo due palline nere"

$\boldsymbol{B}$ "si estraggono almeno due palline bianche"

$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$ "si estraggono al massimo due palline nere o almeno due palline bianche"



Algebra di Eventi: esempi

Unione

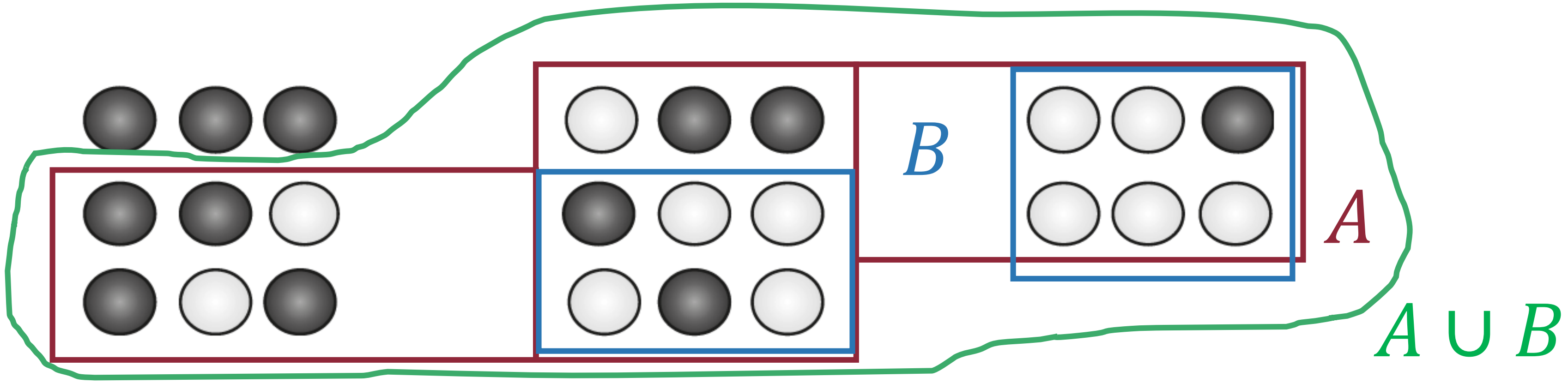
Dati 2 eventi, A e B, la loro unione $A \cup B$ è data dall'evento "almeno uno degli eventi A e B si verifica".

Esempio

$\boldsymbol{A}$ "si estraggono al massimo due palline nere"

$\boldsymbol{B}$ "si estraggono almeno due palline bianche"

$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$ "si estraggono al massimo due palline nere o almeno due palline bianche"



*