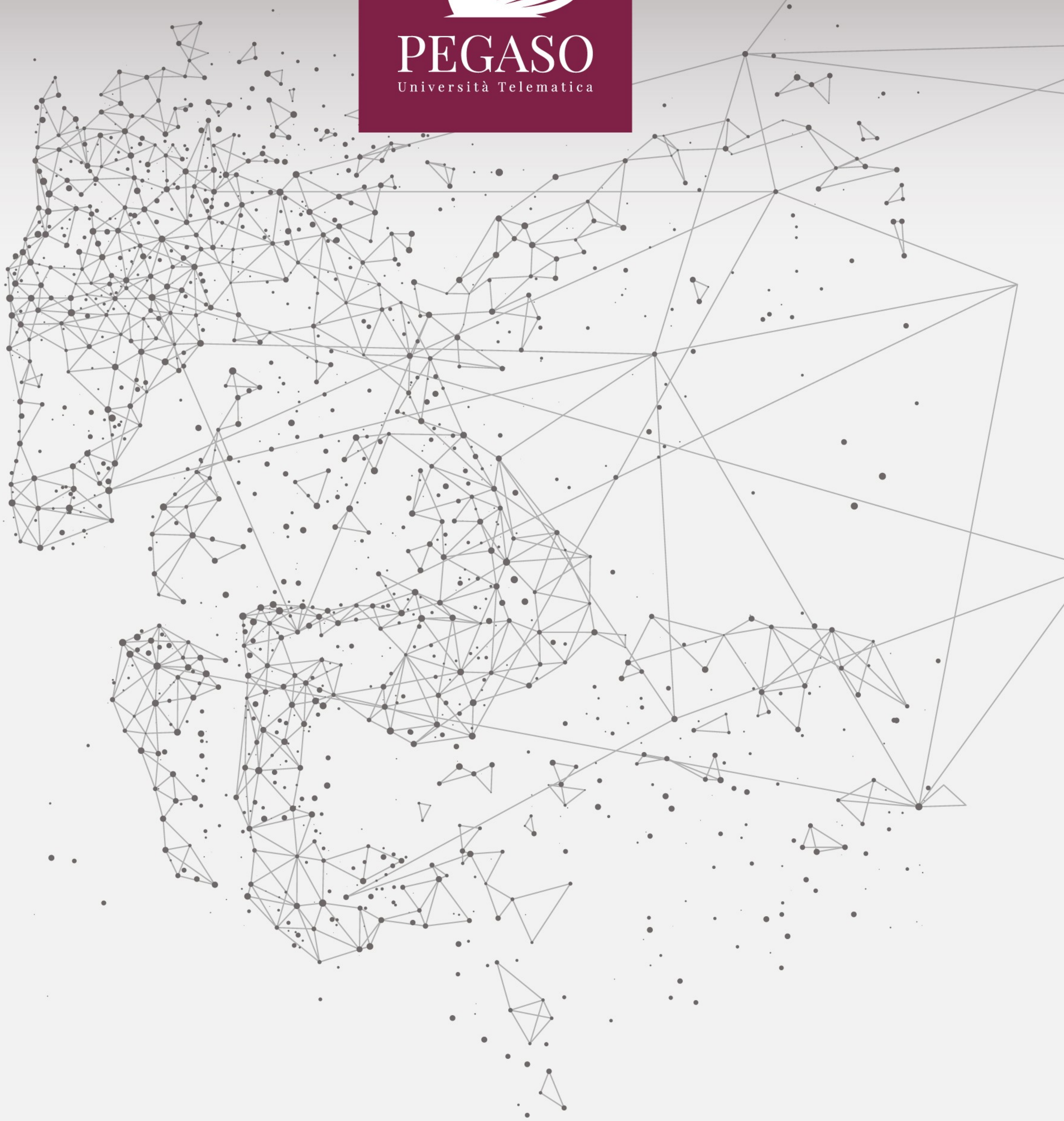
PEGASO
Università Telematica



Esercizi sulle matrici ed operazioni di base

In questa dispensa vedremo alcuni semplici applicazioni delle defiizioni di uguaglianza fra matrici ed alcuni esempi relativi alle matrici simmetriche ed antisimmetriche. Tipicamente, le matrici che considereremo dipendono da alcuni parametri (o variabili reali). Un esercizio tipico consiste nel determinare i valori dei parametri che garantiscono che due assegnate matrici siano uguali, oppure nel determinare i valori dei parametri che assicurano che una assegnata matrice sia simmetrica od antisimmetrica. Nella parte finale della dispensa introduciamo l'importante nozione di funzione a valori matriciali. Accenneremo quindi all'estensione naturale in ambito matriciale che si può fare della teoria delle funzioni reali a valori scalari, con riferimento, in particolare, alle definizioni di continuità, di derivata e di integrale.

1 Uguaglianza fra matrici

Esercizio 1

Determinare tutti e i soli $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (se esistono) tali che le seguenti due matrici quadrate di ordine 2

$$A = \begin{bmatrix} \sin(\beta t) & e^{\alpha(t-1)} \\ 1 & \log((\alpha+\beta)t) \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \sin(\alpha t) & e^{\beta t - \alpha} \\ 1 & \log|t| \end{bmatrix}$$

risultino uguali *per ogni* $t < 0$.

Applicando la definizione, $A = B$ se e solo se (osserviamo che $(A)_{21}(t) = (B)_{21}(t)$, per ogni $t < 0$)

$$\begin{cases} \sin(\beta t) = \sin(\alpha t) \\ e^{\alpha(t-1)} = e^{\beta t - \alpha} \\ \log\left((\alpha+\beta)t\right) = \log|t| \end{cases} \qquad \text{per ogni } t < 0\,.$$

Conviene considerare la seconda condizione.

Abbiamo che

$$e^{\alpha(t-1)} = e^{\beta t - \alpha}\,, \qquad \text{per ogni } t < 0$$

se e solo se

$$\alpha(t-1) = \beta t - \alpha\,, \qquad \text{per ogni } t < 0\,.$$

Infatti, la funzione $x \mapsto e^x$ è iniettiva.

L'ultima condizione è verificata se e solo se

$$(\alpha - \beta)t = 0 \qquad \text{per ogni } t < 0$$

e questa ultima vale se e solo se

$$\alpha = \beta\,.$$

Infatti, abbiamo $t \neq 0$!

Poi, la prima condizione è automaticamente soddisfatta, mentre la terza, ovvero

$$\log\left((\alpha+\beta)t\right) = \log|t| \qquad \text{per ogni } t < 0$$

è verificata se e solo se

$$\alpha + \beta < 0\,,$$

e

$$(\alpha+\beta)t = |t| = -t \qquad \text{per ogni } t < 0$$

(ricordando che $x \mapsto \log x$ è iniettiva).
Si ottiene

$$\alpha + \beta = -1$$

che, unitamente alla condizione trovata prima, ovvero $\alpha = \beta$, conduce al sistema algebrico

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ \alpha + \beta = -1\,. \end{cases}$$

Questo sistema ha come unica soluzione

$$\alpha = -1/2 \qquad \beta = -1/2\,.$$

Concludiamo allora che $A(t) = B(t)$ per ogni $t < 0$ se e solo se $\alpha = -1/2$ e $\beta = -1/2$.

Esercizio 2

Determinare tutti e i soli valori di $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ (se esistono) tali che le seguenti due matrici quadrate di ordine 2

$$A = \begin{bmatrix} \gamma t^2 + \delta - 1 & 1 \\ \arctan\left(\frac{1+t^2}{\delta}\right) & e^{\gamma-1} + \gamma^3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} t^2 - 1 + \frac{8}{\pi} & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

risultino uguali *per qualche* $t \in \mathbb{R}$ (da calcolarsi).

Imponendo che $(A)_{22} = (B)_{22}$ otteniamo

$$e^{\gamma-1} + \gamma^3 = 2\,. \tag{1.1}$$

Per risolvere questa equazione (non algebrica) osserviamo che la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$f(\gamma) = e^{\gamma-1} + \gamma^3\,, \qquad \forall \gamma \in \mathbb{R}$$

è monotona *strettamente* crescente. Infatti, abbiamo

$$f'(\gamma) = e^{\gamma-1} + 3\gamma^2 > 0\,, \qquad \forall \gamma \in \mathbb{R}\,.$$

In alternativa, si può osservare che f è la somma di una funzione strettamente crescente ($\mathbb{R} \ni \gamma \mapsto e^{\gamma-1}$) con un'altra (strettamente) crescente ($\mathbb{R} \ni \gamma \mapsto \gamma^3$), e quindi la f è ancora strettamente crescente.

Possiamo quindi dedurre che la $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è iniettiva.

Poi abbiamo

$$\lim_{\gamma \to -\infty} f(\gamma) = -\infty\,, \qquad \lim_{\gamma \to +\infty} f(\gamma) = +\infty\,,$$

e inoltre osserviamo che f è continua su tutto $\mathbb{R}$. Quindi, applicando il teorema dei valori intermedi per le funzioni continue (in un qualsiasi intervallo del tipo $[-a, a] \subset \mathbb{R}$, con $a > 0$), possiamo dedurre che $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è anche suriettiva.

Essendo la $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ biiettiva, concludiamo che l'equazione $f(\gamma) = \Lambda$, ovvero

$$e^{\gamma-1} + \gamma^3 = \Lambda\,,$$

ammette, per ogni $\Lambda \in \mathbb{R}$, una soluzione *unica* in γ.

Nel nostro caso abbiamo $\Lambda = 2$, e vediamo subito che

$$\gamma = 1$$

è soluzione dell'equazione (1.1). Per quanto appena visto sopra, questa è anche *l'unica* soluzione della (1.1).

Poi, dall'uguaglianza $(A)_{11} = (B)_{11}$, tenendo conto che $\gamma = 1$, ricaviamo

$$\delta = \frac{8}{\pi}\,.$$

Infine, dall'uguaglianza $(A)_{21} = (B)_{21}$ (l'uguaglianza $(A)_{12} = (B)_{12}$ è già verificata), otteniamo, tenendo conto del fatto che $\delta = \frac{8}{\pi}$

$$\arctan\left(\frac{(1+t^2)\pi}{8}\right) = 1\,,$$

e questa è vera se e solo se

$$\frac{(1+t^2)\pi}{8} = \frac{\pi}{4}\,,$$

ovvero, se e solo se

$$t = \pm 1\,.$$

In conclusione, le matrici A e B sono uguali, per qualche valore di $t \in \mathbb{R}$, se e solo se $\gamma = 1$ e $\delta = \frac{8}{\pi}$. I valori di t per i quali l'uguaglianza $A = B$ è verificata sono inoltre $t = \pm 1$.

2 Matrici notevoli

Esercizio 1

Sia A la matrice quadrata di ordine 3 seguente

$$A = \begin{bmatrix} \gamma & x-2y & z+2x \\ y+z & \beta & 0 \\ 1 & z & \alpha \end{bmatrix},$$

dove $\alpha, \beta, \gamma, x, y, z$ sono numeri reali da determinarsi.

Determinare tutti i valori di $\alpha, \beta, \gamma, x, y, z$ (se esistono) per i quali A risulti *simmetrica*, e per i quali A risulti *antisimmetrica*.

La matrice trasposta di A è data da

$$A^t = \begin{bmatrix} \gamma & y+z & 1 \\ x-2y & \beta & z \\ z+2x & 0 & \alpha \end{bmatrix}.$$

Distinguiamo il caso di A simmatrica e di A antisimmetrica.

- A è **simmetrica**, ovvero $A = A^t$, se e solo se

$$\begin{bmatrix} \gamma & x-2y & z+2x \\ y+z & \beta & 0 \\ 1 & z & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & y+z & 1 \\ x-2y & \beta & z \\ z+2x & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

  Questa uguaglianza matriciale è verificata se e solo se α, β, γ sono numeri reali qualsiasi, ed x, y, z soddisfano il seguente sistema di equazioni lineari di tre equazioni nelle tre incognite x, y, z

$$\begin{cases} x - 2y = y + z \\ z + 2x = 1 \\ 0 = z \end{cases}$$

Ora, abbiamo

$$\begin{cases} x - 2y = y + z \\ z + 2x = 1 \\ 0 = z \end{cases} \iff \begin{cases} x - 3y = 0 \\ 2x = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{6} \\ z = 0 \end{cases}$$

Quindi, la matrice A è simmetrica se e solo se $(x, y, z) = (1/2, 1/6, 0)$ ed $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ qualsiasi.

- A è **antisimmetrica**, ovvero $A = -A^t$, se e solo se

$$\begin{bmatrix} \gamma & x-2y & z+2x \\ y+z & \beta & 0 \\ 1 & z & \alpha \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \gamma & y+z & 1 \\ x-2y & \beta & z \\ z+2x & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

Questo si verifica se e solo se α, β, γ ed x, y, z soddisfano il seguente sistema lineare algebrico di sei equazioni nelle sei incognite $\alpha, \beta, \gamma, x, y, z$

$$\begin{cases} \alpha = -\alpha \\ \beta = -\beta \\ \gamma = -\gamma \\ x-2y = -(y+z) \\ z+2x = -1 \\ 0 = z \end{cases}$$

Questo sistema è equivalente a

$$\begin{cases} \alpha = -\alpha \\ \beta = -\beta \\ \gamma = -\gamma \\ x-2y = -(y+z) \\ z+2x = -1 \\ 0 = z \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ x-y = 0 \\ 2x = -1 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha = \beta = \gamma = 0 \\ x = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = 0 \end{cases}$$

Quindi, la matrice A è antisimmetrica se e solo se $(x, y, z) = (-1/2, -1/2, 0)$ ed $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Esercizio 2

Sia B la matrice quadrata di ordine 3 seguente

$$B = \begin{bmatrix} \alpha & \log(1+2t) & \arctan x + x^3 \\ 2\log t & 1-\gamma & \cos y \\ 3^{3/2} + \frac{\pi}{3} & \sin y & \beta + 2 \end{bmatrix},$$

dove $\alpha, \beta, \gamma, x, y, t$ sono numeri reali da determinarsi.

Determinare tutti i valori di $\alpha, \beta, \gamma, x, y, z$ (se esistono) per i quali B risulti *simmetrica*, e per i quali B risulti *antisimmetrica*.

La matrice trasposta di B è data da

$$B^t = \begin{bmatrix} \alpha & 2\log t & 3^{3/2} + \frac{\pi}{3} \\ \log(1+2t) & 1-\gamma & \sin y \\ \arctan x + x^3 & \cos y & \beta + 2 \end{bmatrix}.$$

Distinguiamo il caso di B simmetrica e di B antisimmetrica.

- B è **simmetrica**, ovvero $B = B^t$, se e solo se

$$\begin{bmatrix} \alpha & \log(1+2t) & \arctan x + x^3 \\ 2\log t & 1-\gamma & \cos y \\ 3^{3/2} + \frac{\pi}{3} & \sin y & \beta + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 2\log t & 3^{3/2} + \frac{\pi}{3} \\ \log(1+2t) & 1-\gamma & \sin y \\ \arctan x + x^3 & \cos y & \beta + 2 \end{bmatrix}.$$

  Questa uguaglianza matriciale è verificata se e solo se α, β, γ sono numeri reali qualsiasi, ed x, y, t soddisfano il seguente sistema di tre equazioni non algebriche nelle tre incognite x, y, t

$$\begin{cases} \log(1+2t) = 2\log t \\ \arctan x + x^3 = 3^{3/2} + \frac{\pi}{3} \\ \sin y = \cos y \end{cases} \tag{2.2}$$

Consideriamo la prima equazione del sistema (2.2). Di questa equazione cerchiamo *solo* le soluzioni con $t > 0$ (che implica che anche $1+2t > 0$). Ora, se $t > 0$ è soluzione della prima delle (2.2), allora $t > 0$ è soluzione anche della

$$\log(1+2t) = \log t^2 \,. \tag{2.3}$$

Sottolineiamo che la prima delle (2.2) e la (2.3) *non sono equivalenti*. Infatti la prima delle (2.2) implica la (2.3), ovvero ogni soluzione della prima delle (2.2) (che deve soddisfare necessariamente la condizione $t > 0$) è anche soluzione della (2.3), *ma non viceversa*.

Ora, la (2.3) è soddisfatta se e solo se (e qui si ha l'equivalenza, poichè la funzione log è iniettiva nel suo insieme di definizione) si verifica che

$$1 + 2t = t^2 \iff t^2 - 2t - 1 = 0 \,.$$

Questa ultima equazione algebrica di secondo grado ammette le soluzioni t_1 e t_2 date da

$$t_1 = 1 + \sqrt{2}\,, \qquad t_2 = 1 - \sqrt{2}\,.$$

Di queste due soluzioni la $t_2 < 0$ è da scartarsi, poichè non soddisfa la condizione $t > 0$. In altri termini, t_2 è soluzione della (2.3), ma *non è soluzione della prima delle* (2.2). Quindi la prima delle (2.2) *ammette come sola soluzione* $t = t_1 = 1 + \sqrt{2}$.

Per quanto riguarda la seconda equazione del sistema (2.2), ragionando come nell'Esercizio 2 del Paragrafo 1 vediamo che essa ammette come unica soluzione $x = \sqrt{3}$

Infine, l'ultima equazione del sistema (2.2) ammette le soluzioni seguenti

$$y_k = \frac{\pi}{4} + k\pi\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,. \tag{2.4}$$

Concludiamo quindi che la matrice B è simmetrica se e solo se α, β, γ sono reali qualsiasi e x, y, t sono dati da $x = \sqrt{3}$, $y = y_k = \frac{\pi}{4} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, e $t = 1 + \sqrt{2}$.

- B è **antisimmetrica**, ovvero $B = -B^t$, se e solo se

$$\begin{bmatrix} \alpha & \log(1+2t) & \arctan x + x^3 \\ 2\log t & 1-\gamma & \cos y \\ 3^{3/2} + \frac{\pi}{3} & \sin y & \beta + 2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \alpha & 2\log t & 3^{3/2} + \frac{\pi}{3} \\ \log(1+2t) & 1-\gamma & \sin y \\ \arctan x + x^3 & \cos y & \beta + 2 \end{bmatrix}.$$

Questa uguaglianza matriciale è verificata se e solo se α, β, γ ed x, y, t soddisfano il seguente sistema di sei equazioni non algebriche nelle sei incognite $\alpha, \beta, \gamma, x, y, t$

$$\begin{cases} \alpha = -\alpha \\ 1-\gamma = \gamma - 1 \\ \beta + 2 = -\beta - 2 \\ \log(1+2t) = -2\log t \\ \arctan x + x^3 = -3^{3/2} - \frac{\pi}{3} \\ \sin y = -\cos y \end{cases} \tag{2.5}$$

Le prime tre danno immediatamente

$$\alpha = 0 \qquad \beta = -2 \qquad \gamma = 1\,. \tag{2.6}$$

La quarta è verificata dalle soluzioni $t > 0$ di

$$1 + 2t = \frac{1}{t^2} \iff t^2(2t + 1) = 1\,. \tag{2.7}$$

Con un metodo grafico, ovvero disegnando il grafico della retta $y = 1 + 2t$ e della curva $y = \frac{1}{t^2}$ è immediato vedere che le due curve hanno un solo punto di intersezione con $t > 0$, e questo implica che l'equazione cubica (2.7) ammette una sola soluzione positiva data da un certo $t_* > 0$.

Per quanto riguarda la quinta equazione, osservando che la funzione $\mathbb{R} \ni x \mapsto \arctan x + x^3$ è dispari, la sua soluzione unica sarà data da $x = -\sqrt{3}$.

Infine, la sesta equazione del sistema (2.5) ammette le soluzioni

$$y_k = \frac{3}{4}\pi + k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}\,. \tag{2.8}$$

Concludiamo quindi che la matrice B è antisimmetrica se e solo se $\alpha = 0$, $\beta = -2$, $\gamma = 1$ e x, y, t sono dati da $x = -\sqrt{3}$, $y = y_k = \frac{3}{4}\pi + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, e $t = t_* > 0$.

3 Funzioni a valori matriciali

Sia $I \subset \mathbb{R}$ un insieme qualsiasi (ad es., un intervallo). Si consideri una funzione

$$F : I \to \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$$

che associa, ad ogni $t \in I$ una *matrice* $F(t) \in \mathbb{M}_{m,n}$.

Assegnare la funzione F equivale ad assegnare $m \times n$ funzioni $f_{ik} : I \to \mathbb{R}$, con $i = 1, \ldots, m$ e $k = 1, \ldots, n$, *scalari* definite su un **comune** insieme di definizione I

$$F(t) = \begin{bmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & \cdots & f_{1n}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) & \cdots & f_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m1}(t) & f_{m2}(t) & \cdots & f_{mn}(t) \end{bmatrix}.$$

Definizione 3.1 (Continuità). *Sia $t_0 \in I$. Diremo che $F : I \to \mathbb{M}_{m,n}$ è continua in t_0 se*

$$\lim_{t \to t_0} F(t) = F(t_0)$$

e questo, per definizione, se

$$\lim_{t \to t_0} f_{ik}(t) = f_{ik}(t_0)\,, \qquad \forall i = 1, \ldots, m \quad \forall k = 1, \ldots, n$$

Osservazione Si denota con

$$C\,(I; \mathbb{M}_{m,n}) := \{F : I \to \mathbb{M}_{m,n} \;\; \textit{con } F \text{ continua in } t_0\,,\ \forall t_0 \in I\,\}$$

la classe delle funzioni $F : I \to \mathbb{M}_{m,n}$ definite in tutto l'insieme I e continue in ogni punto di I.

Definizione 3.2 (Derivata). *Sia I un intervallo (aperto) e sia $t_0 \in I$. Diremo che $F : I \to \mathbb{M}_{m,n}$ è derivabile in t_0 se, per ogni $i = 1, \ldots, m$ e per ogni $k = 1, \ldots, n$, risulta che f_{ik} è derivabile in t_0. In questo caso si pone*

$$F'(t_0) = \frac{dF}{dt}(t_0) = \begin{bmatrix} f'_{11}(t_0) & f'_{12}(t_0) & \cdots & f'_{1n}(t_0) \\ f'_{21}(t_0) & f'_{22}(t_0) & \cdots & f'_{2n}(t_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f'_{m1}(t_0) & f'_{m2}(t_0) & \cdots & f'_{mn}(t_0) \end{bmatrix}$$

Osservazione Si denota con

$$C^1(I;\mathbb{M}_{m,n}) := \{F : I \to \mathbb{M}_{m,n} \ \ con\ F' \text{ continua in } t_0\,,\ \forall t_0 \in I\,\}$$

la classe delle funzioni $F : I \to \mathbb{M}_{m,n}$ derivabili, con funzione derivata $F' : I \to \mathbb{M}_{m,n}$ continua in tutti i punti di I.

È immediato vedere che vale, per le funzioni a valori matriciali, un teorema analogo relativo alla derivazione del prodotto che vale per le funzioni scalari (nel caso delle matrici è ovviamente essenziale specificare e rispettare sempre l'ordine con il quale i prodotti sono eseguiti). Precisamente, abbiamo

Teorema 3.1. *Siano $F = F(t)$ e $G = G(t)$ due funzioni a valori matriciali compatibili per il prodotto FG e definite in un intervallo $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$. Supponiamo che sia F che G siano derivabili in $t_0 \in I$. Allora, anche la funzione a valori matriciali FG è derivabile in t_0 e risulta*

$$\frac{d(FG)}{dt}(t_0) = \frac{dF}{dt}(t_0)\,G(t_0) + F(t_0)\,\frac{dG}{dt}(t_0)\,. \tag{3.9}$$

Proof. Indicando con f_{ik} e con g_{ik} gli elementi delle matrici F e G, rispettivamente, allora i prodotti $f_{ij}g_{jk}$ sono tutti derivabili in t_0, ed abbiamo

$$\begin{aligned}
\frac{d(FG)_{ik}}{dt}(t_0) &= \frac{d}{dt}\sum_j f_{ij}(t)g_{jk}(t)\Big|_{t=t_0} = \sum_j\left(\frac{df_{ij}}{dt}(t_0)g_{jk}(t_0) + f_{ij}(t_0)\frac{dg_{jk}}{dt}(t_0)\right) \\
&= \sum_j \frac{df_{ij}}{dt}(t_0)g_{jk}(t_0) + \sum_j f_{ij}(t_0)\frac{dg_{jk}}{dt}(t_0) \\
&= \left(\frac{dF}{dt}\,G\right)_{ik}(t_0) + \left(F\,\frac{dG}{dt}\right)_{ik}(t_0) \\
&= \left(\frac{dF}{dt}(t_0)\,G(t_0) + F(t_0)\,\frac{dG}{dt}(t_0)\right)_{ik},
\end{aligned}$$

da cui segue la (3.9). □

Definizione 3.3 (Integrale). *Sia $I = [a,b]$ un intervallo chiuso limitato e sia $F : I \to \mathbb{M}_{m,n}$ continua in $[a,b]$. Definiamo come integrale definito della $F : I \to \mathbb{M}_{m,n}$ sull'intervallo $[a,b]$ la matrice di tipo (m,n) seguente*

$$\int_a^b F(t)dt = \begin{bmatrix} \int_a^b f_{11}(t)dt & \int_a^b f_{12}(t)dt & \cdots & \int_a^b f_{1n}(t)dt \\ \int_a^b f_{21}(t)dt & \int_a^b f_{22}(t)dt & \cdots & \int_a^b f_{2n}(t)dt \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_a^b f_{m1}(t)dt & \int_a^b f_{m2}(t)dt & \cdots & \int_a^b f_{mn}(t)dt \end{bmatrix}$$

4 Funzioni a valori matriciali: esempi

4.1 Determinazione del dominio

Determinare l'insieme di definizione D della funzione F a valori in $\mathbb{M}_3$ seguente

$$F(t) := \begin{bmatrix} \frac{t^2-1}{t^3+1} & \sin\left(\frac{1}{t}\right) & e^{t^2-2} \\ \frac{1}{\log(t^2-5)} & -3t^4+2t+1 & 0 \\ \sqrt{\arctan\frac{1}{e^{t-2}-1}} & \sqrt{\frac{t^2+1}{t^3-1}} & \frac{1}{t^4+8} \end{bmatrix}$$

Abbiamo che

- $f_{11}(t) = \frac{t^2-1}{t^3+1}$ definita per ogni $t \neq -1$

  ($t = -1$ discontinuità eliminabile)

- $f_{12}(t) = \sin\left(\frac{1}{t}\right)$ definita per ogni $t \neq 0$

  ($t = 0$ discontinuità di seconda specie)

- $f_{21}(t) = \frac{1}{\log(t^2-5)}$ definita per $t^2 - 5 > 0$ e $t^2 - 5 \neq 1$,

  quindi per

$$t < -\sqrt{5} \quad t \neq -\sqrt{6} \qquad \text{oppure} \qquad t > \sqrt{5} \quad t \neq \sqrt{6}$$

- $f_{31}(t) = \sqrt{\arctan \frac{1}{e^{t-2}-1}}$ definita per $e^{t-2} - 1 > 0$, quindi per $t > 2$

- $f_{32}(t) = \sqrt{\frac{t^2+1}{t^3-1}}$ definita per $t^3 - 1 > 0$, ovvero per $t > 1$

- $f_{13}(t), f_{22}(t), f_{23}(t), f_{33}(t)$ definite per ogni $t \in \mathbb{R}$

Intersecando tutte le condizioni sopra, vediamo che l'insieme di definizione della F, ovvero l'insieme comune di definizione delle f_{ik} è dato da

$$D = (\sqrt{5}, \sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}, \infty)$$

4.2 Continuità e derivata di una funzione a valori matriciali

Assegnata la

$$F(t) = \begin{bmatrix} \sin^3 t & e^{-|t-1|} \\ \log^2(4-t^2) & t^4 + |t|^3 \end{bmatrix}$$

Deteminare l'insieme di definizione $D \subset \mathbb{R}$ di F, il sottoinsieme $D_c \subset D$ dove la F è continua, e il sottoinsieme $D_d \subset D_c$ dove la F è derivabile. Infine, in tutti i punti $t \in D_d$ calcolare la matrice derivata $F'(t)$.

Insieme di definizione D

Abbiamo che

- $f_{11}(t)$, $f_{12}(t)$, $f_{22}(t)$ sono definite per ogni $t \in \mathbb{R}$

- $f_{21}(t) = \log^2(4-t^2)$ è definita per $4-t^2>0$, ovvero per ogni t tale che $-2<t<2$.

Deduciamo quindi che l'iniseme comune di definizione delle $f_{ik}(t)$, per $i,k=1,2$, ovvero l'insieme D di definizione della funzione a valori matriciali F è dato dall'intervallo aperto

$$D = (-2,2)\,.$$

Insieme di continuità D_c

Abbiamo che le f_{ik} sono funzioni composte di funzioni elementari (e della funzione continua $t \mapsto |t|$) e quindi le f_{ik} sono continue in tutti i punti del loro insieme di definizione. L'insieme di continuità D_c della funzione a valori matriciali $F : D \to \mathbb{M}_2$ è pertanto dato dall'insieme comune di continuità delle f_{ik} e quindi coincide con

$$D_c = D = (-2,2)\,.$$

Insieme di derivabilità D_d e derivata

Le funzioni $f_{11}(t) = \sin^3 t$ e $f_{21}(t) = \log^2(4-t^2)$ sono derivabili (infinite volte) in tutti i punti del loro insieme di definizione poichè sono composte di funzioni elementari (trigonometriche, logaritmiche e potenze con esponenti interi positivi). Per quanto riguarda la funzione $f_{22}(t) = t^4 + |t|^3$, questa funzione è derivabile sia nell'intervallo aperto illimitato $(0,\infty)$, poichè ivi vale $f_{22}(t) = t^4+t^3$, sia in $(-\infty,0)$, dove vale $f_{22}(t) = t^4 - t^3$. Vediamo inoltre che f_{22} è derivabile anche in $t=0$. Infatti, ponendo $g(t) = |t|^3$, abbiamo

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(0+h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2|h|}{h} = \lim_{h\to 0} h|h| = 0\,. \qquad (4.10)$$

Infine, la funzione $f_{12}(t) = e^{-|t-1|}$ è derivabile in $(1, \infty)$, poichè ivi vale $f_{12}(t) = e^{-(t-1)}$, ed anche in $(-\infty, 1)$, dove vale $f_{12}(t) = e^{t-1}$. Tuttavia, vediamo che f_{12} non è derivabile in $t = 1$. Infatti, abbiamo

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f_{12}(1+h) - f_{12}(1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{e^{-h} - 1}{h} \lim_{h \to 0^+} \frac{-h}{h} = -1 \,,$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f_{12}(1+h) - f_{12}(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{e^{h} - 1}{h} \lim_{h \to 0^-} \frac{h}{h} = +1 \,.$$

In conclusione

$$\nexists \lim_{h \to 0} \frac{f_{12}(1+h) - f_{12}(1)}{h} \Longrightarrow \nexists f'_{12}(1) \,,$$

mentre abbiamo

$$f'_{12}(t) = \frac{d}{dt} e^{-(t-1)} = -e^{-(t-1)} = -e^{-|t-1|} \,, \qquad \forall t > 1 \,,$$

$$f'_{12}(t) = \frac{d}{dt} e^{t-1} = e^{t-1} = e^{-|t-1|} \,, \qquad \forall t < 1 \,.$$

Introducendo la funzione sgn definita da

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1 \,, & \text{se} \quad x \geqslant 0 \\ -1 \,, & \text{se} \quad x < 0 \,, \end{cases}$$

allora possiamo scrivere

$$f'_{12}(t) = -e^{-|t-1|} \operatorname{sgn}(t-1) \,, \qquad \forall t \in (-\infty, 1) \cup (1, \infty) \,.$$

Osserviamo inoltre che

$$\frac{d}{dt}|t| = \operatorname{sgn}(t) \,, \qquad \forall t \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \,.$$

Quindi

$$\frac{d}{dt}|t|^3 = 3|t|^2 \operatorname{sgn}(t) = 3t^2 \operatorname{sgn}(t) \,, \qquad \forall t \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \,,$$

e inoltre, per la (4.10), abbiamo

$$\frac{d}{dt}|t|^3\bigg|_{t=0} = 0\,.$$

Possiamo quindi scrivere

$$\frac{d}{dt}|t|^3 = 3t^2\,\mathrm{sgn}(t)\,, \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,.$$

Riassumendo lo studio sulla derivabilità fatto finora, l'insieme $D_d \subset D_c$ di derivabilità della funzione a valori matriciali F, ovvero l'insieme di tutti i punti t nei quali le componenti f_{ik} sono tutte derivabili in t, per ogni $i, k = 1, 2$, è dato dall'insieme sconnesso costituito dall'unione di due intervalli aperti disgiunti, e precisamente da

$$D_d = (-2, 1) \cup (1, 2)\,.$$

Inoltre, applicando le note regole di derivazione, abbiamo che, per ogni $t \in D_d$, la derivata in t della funzione a valori matriciali F, ovvero la funzione a valori matriciali derivata F' è data da

$$F'(t) = \begin{bmatrix} 3\sin^2 t\,\cos t & -e^{-|t-1|}\,\mathrm{sgn}(t-1) \\ -4t\,\frac{\log(4-t^2)}{4-t^2} & 4t^3 + 3t^2\,\mathrm{sgn}(t) \end{bmatrix}, \qquad \forall t \in (-2, 1) \cup (1, 2)\,.$$

4.3 Integrale di una funzione a valori matriciali

Sia $F \in C^0\left([0, \infty); \mathbb{M}_2\right)$ la funzione a valori matriciali data da

$$F(t) = \begin{bmatrix} \sqrt[4]{t} & t^3 - 1 \\ \arctan(t) & \log(2+t) \end{bmatrix}.$$

Calcoliamo la matrice

$$\int_0^1 F(t)\,dt\,.$$

Applicando la definizione, abbiamo

$$\int_0^1 F(t)\,dt = \begin{bmatrix} \int_0^1 \sqrt[4]{t}\,dt & \int_0^1 (t^3-1)\,dt \\ \int_0^1 \arctan(t)\,dt & \int_0^1 \log(2+t)\,dt \end{bmatrix}.$$

Ora, abbiamo

- $\int_0^1 \sqrt[4]{t}\,dt = \left[\frac{4}{5}\,t^{5/4}\right]_0^1 = \frac{4}{5}\,,$
- $\int_0^1 (t^3-1)\,dt = \left[\frac{t^4}{4} - t\right]_0^1 = -\frac{3}{4}\,,$
- $\int_0^1 \arctan(t)\,dt = \left[t\ \arctan t - \frac{1}{2}\log(1+t^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2\,,$
- e infine

$$\begin{aligned}\int_0^1 \log(2+t)\,dt &= [(2+t)\log(2+t) - t]_0^1 = 3\log 3 - 1 - 2\log 2 \\ &= \log\frac{27}{4} - 1\,.\end{aligned}$$

Quindi

$$\int_0^1 F(t)\,dt = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{4} \\ \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2 & \log\frac{27}{4} - 1 \end{bmatrix}.$$

Riferimenti

1) E. Dedò, A. Varisco, Algebra lineare, elementi ed esercizi, CLUP, 1988, Capitolo 3

2) U. Gasapina, Algebra delle matrici, Masson, 1988.

TEST di AUTOVALUTAZIONE

1. Determinare tutti i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che risulti $A = B^t$, dove le matrici A e B sono date da

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha^2 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

   a) $\alpha = \pm 1$

   b) Nessun valore di $\alpha \in \mathbb{R}$

   c) $\alpha = 1$

   d) Tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$

2. Determinare tutti i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che risulti $A^t = B$, dove le matrici A e B sono date da

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha^2 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \alpha \end{bmatrix}$$

   a) $\alpha = \pm 1$

   b) Nessun valore di $\alpha \in \mathbb{R}$

   c) $\alpha = 1$

   d) Tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$

3. Determinare tutti i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che risulti $A^t = B$, dove le matrici A e B sono date da

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha^4 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{\alpha^8 + 2\alpha^4 + 1} - 1 & \alpha \end{bmatrix}$$

a) $\alpha = \pm 1$

b) Nessun valore di $\alpha \in \mathbb{R}$

c) $\alpha = 1$

d) Tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$

4. Determinare tutti i valori di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ per i quali la matrice $A_{\alpha,\beta}$ risulti simmetrica, dove

$$A_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} 2 & \alpha+\beta & \alpha \\ 1 & 0 & \beta \\ \beta & \beta & -1 \end{bmatrix}$$

a) $\alpha = \pm 1$, $\beta = 0$

b) Nessun valore di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

c) $\alpha = 1/2$, $\beta = 1/2$

d) $\alpha = -1/2$, $\beta = -1/2$

5. Determinare tutti i valori di $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ per i quali la matrice $A_{\alpha,\beta,\gamma}$ risulti antisimmetrica, dove

$$A_{\alpha,\beta,\gamma} = \begin{bmatrix} 0 & e^{\gamma} & \alpha^3 - 2 \\ -1-\gamma & \alpha^7 & \cos\beta \\ 2 & -1 & \gamma \end{bmatrix}$$

a) $\alpha = 4^{1/3}$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$

b) $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$

c) $\alpha = 0$, $\beta = \pi$, $\gamma = 0$

d) $\alpha = 0$, $\beta = 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, $\gamma = 0$

6. Determinare il dominio di definizione D della seguente funzione a valori matriciali

$$F(t) = \begin{bmatrix} \sqrt[3]{\frac{1}{t^2-1}} & \arctan(t^4-1) \\ \sqrt{\log(t^4-3)} & -1 \end{bmatrix}$$

a) $D = \{t \in \mathbb{R} \ : \ |t| \geqslant \sqrt{2}\}$

b) $D = \{t \in \mathbb{R} \ : \ |t| > 1\}$

c) $D = \{t \in \mathbb{R} \ : \ t \neq \pm 1\}$

d) $D = \mathbb{R}$

7. Determinare tutti i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ in corrispondenza dei quali la funzione a valori matriciali F_α data da

$$F_\alpha(t) = \begin{bmatrix} (\alpha - 2)\sqrt[3]{t-1} & \log^4(\alpha^2 t^4 + 6) \\ \sin(\alpha\pi)\,\mathrm{sgn}(t+1) & 8 \end{bmatrix}$$

è continua su tutto $\mathbb{R}$

a) Nessun $\alpha \in \mathbb{R}$

b) Tutti $\alpha \in \mathbb{R}$

c) $\alpha = 2$

d) $\alpha = k,\ k \in \mathbb{Z}$

8. Sia F_β la funzione a valori matriciali dipendente dal parametro $\beta \in \mathbb{R}$ data da

$$F_\beta(t) = \begin{bmatrix} t^3 & e^{4\beta t} \\ e^{\frac{t}{\beta}} & t^4 + 2t \end{bmatrix}.$$

Determinare tutti i valori di $\beta \in \mathbb{R}$ in corrispondenza dei quali la matrice $\frac{dF_\beta}{dt}(0)$ risulti simmetrica.

a) $\beta = \pm\frac{1}{2}$

b) Tutti $\beta \in \mathbb{R}$

c) $\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

d) $\beta = \pm 2$

9. Determinare l'insieme di derivabilità D_d della seguente funzione a valori matriciali

$$F(t) = \begin{bmatrix} \sin^3 t + \sqrt[5]{t} & |t-1| \\ (1+t)\log(t+1) & \sqrt{t^4+2} \end{bmatrix}.$$

a) $D_d = (-1,1) \cup (1,\infty)$

b) $D_d = (-1,0) \cup (0,1) \cup (1,\infty)$

c) $D_d = (-1,\infty)$

d) $D_d = (-1,0) \cup (0,\infty)$

10. Sia F la funzione a valori matriciali data da

$$F(t) = \begin{bmatrix} t^2+t & \sqrt{t} \\ e^t & \log(1+t) \end{bmatrix}.$$

Allora la matrice $\int_0^1 F(t)\,dt$ è

a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{3}{2} \\ e-1 & \log 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} \frac{6}{5} & \frac{2}{3} \\ e & 2\log 2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{2}{3} \\ e-1 & 2\log 2 - 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{2} \\ e & 2\log 2 - 1 \end{bmatrix}$