PEGASO

Università Telematica

Prodotto scalare e ortogonalità in $\mathbb{R}^n$

Corso di Geometria

Laurea in Ingegneria Civile

Nel vasto ambito dell'algebra lineare e della geometria euclidea, il concetto di prodotto scalare rappresenta un punto di partenza fondamentale per comprendere il legame tra struttura algebrica e intuizione geometrica. Questo semplice operatore bilineare consente di misurare l'angolo tra due vettori, stabilire relazioni di ortogonalità, definire la lunghezza (o norma) di un vettore, e costruire strumenti essenziali come la proiezione ortogonale.

La norma di un vettore, infatti, è direttamente derivata dal prodotto scalare: essa può essere interpretata come la "lunghezza" del vettore, intesa nel senso più geometrico del termine. In uno spazio vettoriale euclideo, la norma fornisce una nozione di distanza dall'origine e permette di quantificare con precisione l'intensità o la grandezza di un vettore. La possibilità di definire la distanza tra vettori e, più in generale, una metrica sullo spazio, apre la strada allo studio di nozioni come continuità, convergenza e ortogonalità.

L'ortogonalità fra due vettori, cioè il fatto che essi siano perpendicolari tra loro, è definita in termini di prodotto scalare: due vettori sono ortogonali se e solo se il loro prodotto scalare è nullo. Questa proprietà si rivela estremamente potente non solo dal punto di vista geometrico, ma anche in applicazioni concrete come la decomposizione di segnali, la riduzione ortogonale di matrici e lo studio delle basi ortonormali.

Una delle applicazioni più significative del concetto di ortogonalità è la proiezione ortogonale di un vettore su un sottospazio. Tale proiezione consente di scomporre un vettore in due componenti: una appartenente al sottospazio dato, e l'altra ortogonale ad esso. Questa operazione ha un'enorme rilevanza sia teorica che pratica: compare, ad esempio, nella minimizzazione degli errori quadratici in regressione lineare, nella costruzione di basi ortogonali tramite il metodo di Gram-Schmidt e nella risoluzione di problemi di ottimizzazione vincolata.

In questo capitolo, esploreremo in dettaglio questi concetti, partendo dal prodotto scalare per costruire un linguaggio e un'intuizione comune che ci permetta di comprendere la norma, definire con precisione l'ortogonalità, e analizzare il meccanismo della proiezione ortogonale.

1 Prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$

Definizione 1.1. Dati due vettori $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$, con

$$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n), \quad \boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n),$$

il *prodotto scalare* è definito come:

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i.$$

Per completezza, riportiamo anche altre notazioni (che non verranno utilizzate in questo corso) utilizzate per denotare il prodotto scalare tra due vettori $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$: $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$, $|\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle$.

Remark 1.2. Spesso il prodotto scalare tra due vettori viene indicato in modo diverso (ma assolutamente equivalente), utilizzando la notazione propria del prodotto matriciale, e vedendo i vettori come se fossero delle matrici $n \times 1$. In questo contesto, un vettore $\boldsymbol{u}$ verrebbe visto come un *vettore colonna*:

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^T$$

(dove con ^{T} indichiamo l'operazione di trasposizione) e quindi il prodotto scalare tra due vettori $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ viene definito come

$$\boldsymbol{u}^T \cdot \boldsymbol{v} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i.$$

Si vede quindi che le due definizioni sono assolutamente equivalenti; da un lato, quest'ultima definizione risulta più rigorosa, e ci porta a vedere i vettori come se fossero matrici, ed il prodotto scalare come ad un prodotto tra due matrici. Dall'altro, la notazione può risultare più pesante e difficile da seguire.

Esempio 1.3. Per $\boldsymbol{u} = (1, 2, 3),\ \boldsymbol{v} = (-1, 0, 4)$,

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = (1)(-1) + (2)(0) + (3)(4) = -1 + 0 + 12 = 11.$$

Il prodotto scalare tra due vettori gode di diverse proprietà che lo rendono uno strumento essenziale per lo studio degli spazi vettoriali e dei suoi elementi. In particolare per ogni $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$, e $\lambda \in \mathbb{R}$, valgono:

- $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}$ (simmetria)
- $\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w}$ (distributività)
- $(\lambda \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v} = \lambda(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})$ (compatibilità con gli scalari)
- $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} \geq 0$, e $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = 0 \iff \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ (positività)

Esempio 1.4. Per i vettori $\boldsymbol{u} = (1, 2, 3),\ \boldsymbol{v} = (-1, 0, 4),\ \boldsymbol{w} = (3, 1, -2)$ ed il numero reale $\lambda = -2$, possiamo vedere che:

- $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = (1)(-1) + (2)(0) + (3)(4) = 11$, e $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u} = (-1)(1) + (0)(2) + (4)(3) = 11$. (simmetria)
- $\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (1, 2, 3) \cdot ((-1, 0, 4) + (3, 1, -2)) = (1, 2, 3) \cdot (2, 1, 2) = (1)(2) + (2)(1) + (3)(2) = 10$, e $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} = 11 + (1)(3) + (2)(1) + (3)(-2) = 10$ (distributività)
- $(\lambda \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v} = \lambda(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})$ (compatibilità con gli scalari)
- $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} \geq 0$, e $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = 0 \iff \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ (positività)

2 Norma e distanza

La norma di un vettore è una misura della sua lunghezza o "grandezza". È un concetto fondamentale in algebra lineare, che permette di quantificare quanto un vettore sia "lontano dall'origine" nello spazio. In uno spazio euclideo, la norma più comune è la norma euclidea, che corrisponde alla radice quadrata della somma dei quadrati delle componenti del vettore, secondo la formula riportata nella definizione sotto. Tuttavia, esistono anche altre norme (come la norma L^1 o la norma infinito) che misurano la lunghezza in modi diversi, a seconda del contesto applicativo. Le norme sono essenziali per confrontare vettori, definire distanze, stabilire convergenza e continuità, e analizzare proprietà geometriche e analitiche degli spazi vettoriali.

Definizione 2.1. La **norma** (o modulo) di un vettore $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ è definita da:

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}.$$

Dato che il concetto di norma discende dal concetto di prodotto scalare, non è difficile verificare che valgono le seguenti proprietà:

- $\|\boldsymbol{v}\| \geq 0$, e $\|\boldsymbol{v} = 0\| \Leftrightarrow \boldsymbol{v} = 0$ (positività)
- $\|\alpha \boldsymbol{v}\| = |\alpha| \|\boldsymbol{v}\|$ (prodotto per uno scalare)
- $\|\boldsymbol{u} \pm \boldsymbol{v}\|^2 = \|u\|^2 \pm 2\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} + \|\boldsymbol{v}\|^2$ (norma della somma di due vettori)
- $\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\| \leq \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|$ (disuguaglianza di Minkowski)
- $|\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}| \leq \|\boldsymbol{u}\| \cdot \|\boldsymbol{v}\|$ (disuguaglianza di Schwarz)

In molte applicazioni, si rimarca che può essere più comodo fare riferimento alla norma al quadrato di un vettore, dato che spesso può interessare la somma dei quadrati delle componenti di un vettore.

Il concetto di norma, come detto prima, risulta estremamente utile anche per determinare la distanza tra due vettori di $\mathbb{R}^n$. Riprendendo quanto fatto nel caso $n = 2$, si è visto che la distanza tra due punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2) nel piano cartesiano è data dalla seguente formula (fondamentalmente, un'applicazione del Teorema di Pitagora):

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2}$$

Questa nozione può essere quindi generalizzata nel caso n-dimensionale, ottenendo che la distanza tra due vettori $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ è data dalla seguente formula:

$$d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \|u - v\|.$$

Esempio 2.2. Siano ancora $\boldsymbol{u} = (1, 2, 3)$, $\boldsymbol{v} = (-1, 0, 4)$, e calcoliamo:

- $\|\boldsymbol{u}\|$ e $\|\boldsymbol{v}\|$. Abbiamo che:

$$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$$

  Mentre:

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{1 + 0 + 16} = \sqrt{17}$$

- $\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|$ e $\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|$. Abbiamo:

$$\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\| = \|(1 - 1, 2 + 0, 4 + 3)\| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 7^2} = \sqrt{0 + 4 + 49} = \sqrt{53}$$

  Mentre

$$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\| = \|(1 + 1, 2 - 0, 3 - 4)\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 4 + 1} = \sqrt{9} = 3$$

3 Angolo tra due vettori

Un altro modo interessante per visionare mentalmente il prodotto scalare consiste nel vederlo come una misura di quanto due vettori "siano diretti nella stessa direzione". Ad esempio, possiamo prendere come casi estremi il prodotto scalare tra due vettori $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$, dove in particolare abbiamo che

- se $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$, allora i due vettori sono diretti "nella stessa direzione", ed il prodotto scalare $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ altri non è che $\|\boldsymbol{u}\|^2$, ovvero la norma al quadrato del vettore $\boldsymbol{u}$.

- se $\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{u}$, ovvero se $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ allora $\boldsymbol{v} = (-u_1, \ldots, -u_n)$, non è difficile vedere che

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} &= (u_1)(-u_1) + (u_2)(-u_2) + \ldots + (u_n)(-u_n) = \\ &= -u_1^2 - u_2^2 - \ldots - u_n^2 = -\|u\|^2 \end{aligned}$$

Quindi ci si può chiedere cosa succede per "situazioni intermedie", in cui i due vettori sono in posizioni reciproche diverse. In particolare, si può formalizzare questo concetto prendendo in considerazione l'angolo formato dai due vettori: nei due casi esaminati precedentemente, si potrebbe dire che l'angolo compreso tra i due vettori sia l'angolo nullo $\theta = 0°$, mentre nel secondo caso l'angolo compreso tra i due vettori é l'angolo piatto $\theta = 180°$ (in radianti, rispettivamente $\theta = 0\ rad$ e $\theta = \pi\ rad$). Più in generale, abbiamo che

Definizione 3.1. Il prodotto scalare può anche essere scritto in forma trigonometrica:

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{u}\| \cdot \|\boldsymbol{v}\| \cdot \cos\theta,$$

dove θ è l'angolo compreso tra $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$. Da cui segue:

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\| \cdot \|\boldsymbol{v}\|}.$$

Remark 3.2. Dato che si parla di angolo **compreso** tra i due vettori $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$, si sottointenderà sempre che l'angolo θ è un angolo compreso tra $0°$ e $180°$, ovvero tra $0\ rad$ e $\pi\ rad$

Esempio 3.3. Siano ancora $\boldsymbol{u} = (1, 2, 3)$, $\boldsymbol{v} = (-1, 0, 4)$. Calcoliamo il coseno dell'angolo compreso tra essi.

Abbiamo visto negli esercizi precedenti che $\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{14}$ e che $\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{17}$, mentre $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 11$. Quindi, dalla formula precedente possiamo vedere che

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\| \cdot \|\boldsymbol{v}\|} = \frac{11}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{17}} \approx 0,713$$

Da cui l'angolo compreso $\theta \approx \arccos(0,713) = 0,777\ rad$, o circa $44°$.

4 Ortogonalità

Nella sezione precedente abbiamo portato alla luce il collegamento tra il prodotto scalare tra due vettori, e l'angolo tra essi compreso. Un caso particolare che è naturale studiare è quello in cui l'angolo compreso è un angolo retto, ovvero $\theta = 90° = \frac{\pi}{2}\ rad$. Per questo angolo, infatti, si verifica che il coseno si annulla, $\cos\theta = 0$. In questo caso, i due vettori sono quindi **perpendicolari**, o **ortogonali**, tra di loro.

Riscrivendo la formula che lega il prodotto scalare tra due vettori $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ e l'angolo θ tra essi compreso abbiamo che

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|\cdot\|\boldsymbol{v}\|}$$

Se i due vettori sono perpendicolari tra loro abbiamo quindi che

$$0 = \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|\cdot\|\boldsymbol{v}\|}$$

E quindi, affinchè questa frazione si annulli abbiamo necessariamente che il numeratore deve annullarsi, ovvero $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = 0$. Questo ragionamento giustifica quindi la seguente caratterizzazione dell'ortogonalità tra due vettori

Definizione 4.1. Due vettori $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ si dicono **ortogonali** se:

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = 0.$$

Dal punto di vista della notazione, denoteremo con $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$ due vettori ortogonali tra di loro.

Esempio 4.2. Verifichiamo che i due vettori $\boldsymbol{u} = (1,2)$ e $\boldsymbol{v} = (2,-1)$ siano ortogonali:

$$\boldsymbol{u} = (1,2),\ \boldsymbol{v} = (2,-1) \Rightarrow \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = 1\cdot 2 + 2\cdot(-1) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$$

.

Esempio 4.3. Trovare il parametro $k \in \mathbb{R}$ tale che i seguenti vettori siano ortogonali:

$$\boldsymbol{u} = (1,-2+k,3) \qquad \boldsymbol{v} = (3,1,-1)$$

Iniziamo calcolando il prodotto scalare $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$ (che naturalmente dipenderà dal parametro k):

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} &= (1,-2+k,3)\cdot(3,1,-1) = \\ &= (1)(3) + (-2+k)(1) + (3)(-1) = 3 - 2 + k - 3 = \\ &= -2 + k\end{aligned}$$

Dato che vogliamo trovare il parametro k affinché i due vettori siano ortogonali, dobbiamo imporre che il prodotto scalare $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ sia uguale a 0. Quindi

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0 = -2 + k$$

Otteniamo quindi l'equazione $0 = -2 + k$, da cui $k = 2$.

Possiamo verificare il risultato, sostituendo il valore di $k = 2$ nel vettore $\boldsymbol{u}$ iniziale:

$$\boldsymbol{u} = (1, 2 - 2, 3) = (1, 0, 3) \qquad \boldsymbol{v} = (3, 1, -1)$$

Da cui $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0$.

Test di autovalutazione

Si risponda alle seguenti domande sulla presente lezione. Ogni domanda ammette esattamente una risposta corretta.

1. Il prodotto scalare tra due vettori $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$

   (A) è sempre positivo.

   (B) è simmetrico $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}$.

   (C) ci restituisce uno scalare che indica la distanza tra $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$.

   (D) è uguale a 0 se e solo se uno dei due vettori è $\mathbf{0}$.

2. La norma del vettore $(2, -1, 4, -2)$ è pari a

   (A) 5.

   (B) $\sqrt{13}$.

   (C) 1.

   (D) $\sqrt{15}$.

3. Se $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ sono vettori ortogonali tra loro, allora

   (A) La loro somma vettoriale è il vettore nullo.

   (B) L'angolo compreso tra i due vettori è l'angolo piatto.

   (C) I due vettori sono linearmente indipendenti.

   (D) $\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}$ è ortogonale a $\boldsymbol{v}$ per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

4. Quale delle seguenti coppie di vettori di $\mathbb{R}^3$ è ortogonale rispetto al prodotto scalare standard?

   (A) $(1, 1, 1)$ e $(-1, 1, -1)$.

   (B) $(1, 2, 1)$ e $(-1, 1, -1)$.

   (C) $(1, 0, 1)$ e $(-1, 1, -1)$.

   (D) Nessuna delle altre risposte.

5. Dati i vettori $(k, 1, -1)$ e $(k, -1, -2)$, per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ i due vettori sono ortogonali?

   (A) $k = 1$.

   (B) $k = 3$.

   (C) $k = \pm 1$.

   (D) Nessun valore di k.

6. Calcolare l'angolo θ compreso tra i vettori $(5, 4)$ e $(1, 9)$.

   (A) $\theta \approx 35°$.

   (B) $\theta = 45°$.

   (C) $\theta = 90°$.

   (D) $\theta \approx 125°$.

7. Quali sono i valori di $k \in \mathbb{R}$ tali che il vettore $(k - 2, 3)$ abbia norma pari a 5?

   (A) $k = 0$ e $k = 2$.

   (B) $k = \pm 4$.

   (C) $k = -2$ e $k = 6$.

   (D) $k = 6$ e $k = -5$.

8. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

   (A) Il prodotto scalare di due vettori linearmente dipendenti è nullo.

   (B) Se due vettori hanno somma pari a $\mathbf{0}$, allora il loro prodotto scalare è negativo.

   (C) Il prodotto scalare tra elementi di una base di uno spazio vettoriale è 0.

   (D) $\|u + v\| \geq \|u\| + \|v\|$.

9. Il prodotto scalare tra due vettori

   (A) è pari a zero se e solo se i vettori sono linearmente indipendenti.

   (B) è pari a zero se consideriamo i vettori $(1, -1, 1, -1, \dots, 1, -1)$ e $(1, 1, 1, 1, \dots, 1, 1)$.

   (C) ci dice se l'insieme formato due vettori possa essere completato ad una base.

(D) è compatibile rispetto alla somma per uno scalare: $(\alpha + \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$.

10. Siano $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ due vettori aventi la stessa norma. Allora

    (A) $\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|$ è massima se i due vettori sono ortogonali.

    (B) $\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\| = 0$ per ogni scelta di $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{u}$.

    (C) $\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|$ è massima se $\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{v}$.

    (D) Non si può dire per quali scelte di $\boldsymbol{v}$ il valore $\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|$ sia massimo.