Probabilità condizionata e indipendenza

Paolo Sciattella

I postulati

I postulati

Come abbiamo visto nella precedente lezione, a una generica prova è associato uno spazio campionario Ω e a esso una collezione di eventi ε=[$E_1, E_2, \dots, E_p$] la cui struttura matematica è quella di un'algebra Booleana.

La **probabilità** è una funzione di insieme che associa a ogni evento $E_i \subseteq \varepsilon$ un numero reale. La probabilità sarà indicata con

$$P(E_i)$$

I postulati

Le proprietà assiomatiche delle probabilità

Dati due eventi A e B appartenenti a ε valgono le proprietà:

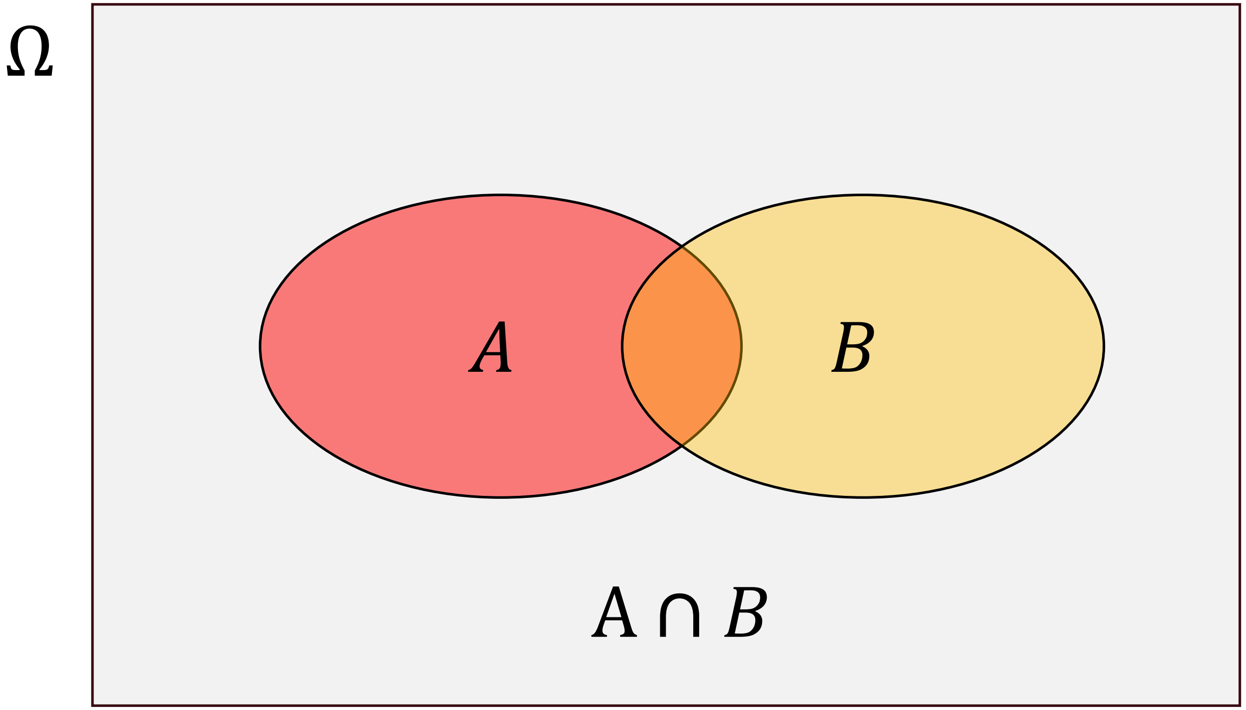
- $P(A) \geq 0$
- $P(\Omega) = 1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Se $A \cap B = \emptyset$ **(eventi incompatibili)** allora $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

I postulati

Le proprietà assiomatiche delle probabilità

Analizziamo graficamente la relazione

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

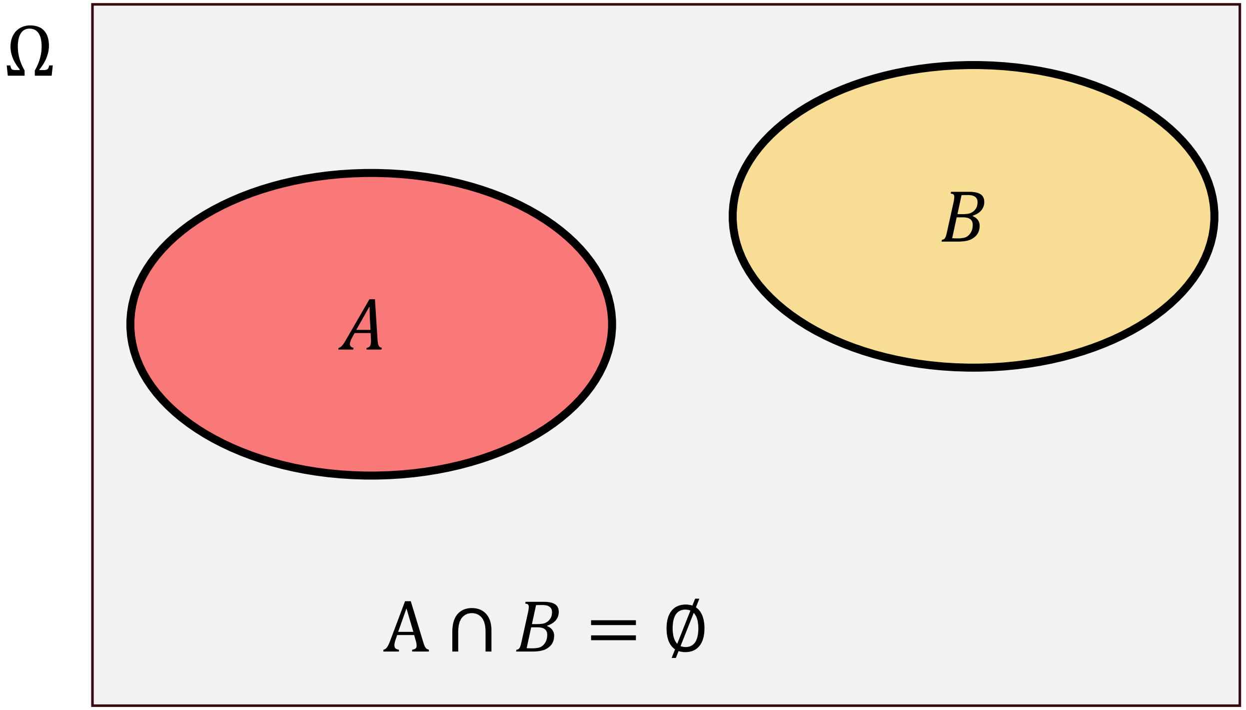


I postulati

Le proprietà assiomatiche delle probabilità

Analizziamo graficamente il postulato

- Se $A \cap B = \emptyset$ allora $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$



I postulati

2

Dal sistema di postulati in questione sono inoltre deducibili varie proprietà, tra le quali segnaliamo le seguenti:

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\emptyset)=0$
- Se $A \subset B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$
- $P(\bar{A})=1-P(A)$
- Se $P(A)=1 \Longrightarrow P(A \cap B)=P(B)$
- Se $P(A)=0 \Longrightarrow P(A \cup B)=P(B)$

I postulati

Descriviamo con un esempio la relazione

$$\text{Se } A \subset B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$$

prova: lancio di un dado

Evento A: $esce\ il\ numero\ 2\ o\ il\ numero\ 4$
$A = \{2, 4\}$

Evento B: $esce\ un\ numero\ pari$
$B = \{2, 4, 6\}$

$$P(A) = \frac{2}{6} = 0{,}33 \qquad P(B) = \frac{3}{6} = 0{,}5$$

I postulati

2

Descriviamo con un esempio la relazione

$$\text{Se } P(A) = 1 \implies P(A \cap B) = P(B)$$

prova: lancio di un dado

Evento A: $esce\ un\ numero\ \leq 6$

$A = \{1,2,3,4,5,6\} \implies P(A) = 1$

Evento B: $esce\ un\ numero\ pari$

$B = \{2,4,6\} \implies P(B) = 0,5$

$A \cap B = \{2,4,6\} \implies P(A \cap B) = P(B) = 0.5$

I postulati

Descriviamo con un esempio la relazione

$$\text{Se } P(A) = 0 \implies P(A \cup B) = P(B)$$

prova: lancio di un dado

Evento A: $esce\ un\ numero > 6$

$A = \{\emptyset\} \Longrightarrow P(A) = 0$

Evento B: $esce\ un\ numero\ pari$
$B = \{2, 4, 6\} \Longrightarrow P(B) = 0{,}5$

$A \cup B = \{2, 4, 6\} \Longrightarrow P(A \cup B) = P(B) = 0.5$

Probabilità condizionata

Probabilità condizionata

2

In alcune situazioni si vuole valutare la probabilità di un evento sapendo che si è già verificato un altro evento a esso collegato.

Ad esempio, dati due eventi A e B, tra loro collegati, si suppone di sapere che l'evento B si sia già verificato.

La domanda che ci si pone è:

«qual è la probabilità di A, dato che si è verificato B?»

si vuole conoscere, quindi, la probabilità di A condizionatamente al verificarsi di B, in simboli:

$$P(A|B)$$

che si legge "probabilità condizionata di A dato B".

Probabilità condizionata

ESEMPIO: Nel caso del lancio di un dado, consideriamo gli eventi:

$A: esce\ il\ numero\ 2$ $\qquad$ $B: esce\ un\ numero\ pari$

$P(A) = 1/6$ $\qquad$ $P(B) = 3/6$

qual è la probabilità del numero 2 (evento A) se siamo certi che sia uscito un numero pari (evento B)?

In questo caso lo spazio campionario $\Omega \equiv \{1,2,3,4,5,6\}$ si riduce a $\Omega^* \equiv \{2,4,6\}$, si avrà quindi che:

$$P(A|B)=1/3$$

Probabilità condizionata

2

Nell'esempio precedente possiamo osservare che $P(A|B)$ fa sì che B venga considerato un evento certo, per cui $\Omega = B$ e quindi **i casi possibili** diventano **tutti e solo** i **casi favorevoli a** $\boldsymbol{B}$.

Viceversa, **i casi favorevoli ad** $\boldsymbol{A}$ diventano **solo quelli inclusi in** $\boldsymbol{B}$, ossia $\boldsymbol{A \cap B}$.

Applicando la definizione classica di probabilità si ha quindi che:

$$P(A|B) = \frac{numero\ di\ casi\ favorevoli\ a\ A \cap B}{numero\ di\ casi\ favorevoli\ a\ B}$$

Probabilità condizionata

Sulla base di quanto visto, quindi, si definisce **probabilità condizionata** di A dato B il rapporto tra la probabilità dell'evento $(A \cap B)$ e la probabilità dell'evento B:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad con\ P(B) > 0$$

Con la stessa logica si ottiene:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad con\ P(A) > 0$$

Probabilità condizionata

2

Moltiplicando entrambi i membri per $P(B)$ si ottiene:

$$P(A|B) \cdot P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \cdot P(B)$$

Ossia:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

Dalla definizione di probabilità condizionata deriva la proprietà chiamata **principio delle probabilità composte:**

Dati 2 eventi A e B, tali per cui $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$ si ha:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$$

Eventi indipendenti

Eventi indipendenti

2

In base al principio delle probabilità composte, possiamo introdurre il concetto di **indipendenza tra eventi**.

Due eventi A e B si dicono **indipendenti** se il verificarsi di B non influenza la probabilità di A e il verificarsi di A non influenza la probabilità di B, ossia se

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{e} \quad P(B|A) = P(B)$$

Eventi indipendenti

Riprendendo il principio delle probabilità composte, abbiamo che:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$$

Se gli eventi A e B sono indipendenti, valgono le seguenti relazioni:

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{e} \quad P(B|A) = P(B)$$

Sostituendo, si ottiene:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = P(B) \cdot P(A)$$

Eventi indipendenti

Ne consegue che:

Due eventi A e B si dicono **indipendenti** se e solo se:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Nota: La definizione di indipendenza, a differenza del principio delle probabilità composte, vale anche quando $P(A) = 0$ *o* $P(B) = 0$

Eventi indipendenti

Riprendendo l'esempio precedente:

$A: esce\ il\ numero\ 2$ $\quad$ $B: esce\ un\ numero\ pari$

$P(A) = 1/6$ $\quad$ $P(B) = 3/6$

Abbiamo visto, ragionando su $\Omega^* \equiv \{2,4,6\}$, che $P(A|B)$=1/3

La formula alla base era

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3} \neq P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

A e B NON sono indipendenti

Eventi indipendenti

Consideriamo ora gli eventi:

A: *esce il numero 2 o 3* *e* B: *esce un numero pari*

In questo caso si ha:

$$P(A) = 2/6 \quad \text{e} \quad P(B) = 3/6 \quad \text{e} \quad P(A \cap B) = 1/6$$

da cui deriva:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/6}{2/6} = \frac{1}{2}$$

e quindi:

$$P(A|B) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{6} = P(B|A) \cdot P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

A e B SONO indipendenti!!!