PEGASO
Università Telematica

Somma e combinazione lineare di matrici

In questa dispensa introduciamo le prime due operazioni fondamentali sulle matrici. Esse consentono di produrre una nuova matrice a partire da due matrici, nel caso della prima operazione, oppure da una matrice e da un numero, nel caso della seconda. In particolare, le operazioni che andiamo a definire sono la somma di matrici, e il prodotto di una matrice per un numero reale. Come vedremo, tali operazioni sono definite in modo tale che le note proprietà che valgono per le analoghe operazioni sui numeri reali (ad es., la proprietà commutativa e la proprietà associativa) sono conservate.
Le due operazioni introdotte verranno infine generalizzate al caso di un numero qualsiasi (finito) di matrici e numeri reali, mediante la definizione di combinazione lineare di matrici.

1 Somma di matrici

Definizione 1.1. *Siano $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ due matrici dello stesso tipo (m, n). Si chiama matrice somma di A e B, e si denota con $A + B$, la matrice dello stesso tipo di A e B, data da*

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}] .$$

Quindi, ogni elemento di riga $i-$esima e di colonna $j-$esima della matrice somma si ottiene sommando gli elementi corrispondenti alla stessa riga $i-$esima, ed alla stessa colonna $j-$esima delle matrici A e B (elementi dello stesso "posto", o elementi omologhi).

Esempi.

1. Somma di vettori. Come primo esempio consideriamo la somma di due vettori (riga o colonna). Essendo un vettore un caso particolare di matrice (con una sola riga, o una sola colonna), la richiesta della Definizione 1 che le matrici che vogliamo sommare siano dello stesso tipo è ovviamente equivalente alla richiesta che i due vettori addendi abbiano lo stesso numero di componenti.

Consideriamo, ad esempio, i due seguenti vettori riga V_1 e V_2 a 3 componenti (matrici di tipo $(1,3)$)

$$V_1 = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 7 \end{bmatrix}, \qquad V_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Applicando la Definizione 1, abbiamo

$$V_1+V_2 = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 7 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+(-1) & 5+2 & 7+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 7 & 10 \end{bmatrix}.$$

Quindi, il vettore (riga) somma $V_1 + V_2$ ha lo stesso numero di componenti dei due vettori V_1, V_2, e tali componenti sono date dalla somma delle componenti omologhe di V_1 e V_2.

In generale, considerando due vettori riga generici X e Y ad n componenti, dove n è un intero fissato qualsiasi $\geqslant 1$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}, \qquad Y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix},$$

il vettore somma $X + Y$ è ancora un vettore riga ad n componenti, ed è dato da

$$X + Y = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 & x_2 + y_2 & \cdots & x_n + y_n \end{bmatrix}.$$

Le componenti del vettore somma sono date dalla somma delle componenti omologhe (nel senso che la $i-$esima componente di $X+Y$ coincide con la somma della $i-$esima componente di X con la $i-$esima componente di Y, per ogni fissato $i = 1, .., n$).

In modo analogo possiamo eseguire la somma di due vettori colonna. Ad esempio, se U_1 e U_2 sono i vettori colonna a 2 componenti seguenti

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix}, \qquad U_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix},$$

il vettore somma $U_1 + U_2$ è il vettore colonna a due componenti dato da

$$U_1 + U_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3 \\ 8+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

In generale, per due vettori colonna generici ad m componenti

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}, \qquad Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix},$$

il vettore somma $U+Z$ è ancora un vettore colonna ad m componenti, ed è dato da

$$U+Z=\begin{bmatrix} u_1+z_1 \\ u_2+z_2 \\ \vdots \\ u_m+z_m \end{bmatrix}.$$

2. Assegnate le seguenti matrici A e B di tipo $(2,3)$

$$A=\begin{bmatrix} x & y & z \\ a & b & c \end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix} u & v & w \\ d & e & f \end{bmatrix},$$

dove $x, y, z, ..., d, e, f$ sono numeri reali qualasiasi, la matrice somma $A+B$ è data da

$$A+B=\begin{bmatrix} x & y & z \\ a & b & c \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} u & v & w \\ d & e & f \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x+u & y+v & z+w \\ a+d & b+e & c+f \end{bmatrix}.$$

3. Considerata la matrice A quadrata del terzo ordine seguente

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

calcolare la matrice B data da

$$B=A+A^t\,.$$

Prima di tutto, abbiamo

$$A^t=\begin{bmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix},$$

e quindi

$$B=A+A^t=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1+1 & 0+7 & 0+1 \\ 7+0 & 5+5 & 3+0 \\ 1+0 & 0+3 & 2+2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 7 & 10 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Osserviamo che, a differenza della matrice A, la matrice B è simmetrica.

Osservazione 1.1. Nella definizione di somma di due matrici A e B, sottolineiamo la richiesta che A e B siano dello stesso tipo. Quindi, se, ad esempio, A e B sono date da

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 0 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ovvero $B = O_2$, allora la somma $A + B$ non è definita, e quindi non ha senso (anche se, come è il caso nostro, B è una matrice nulla!) Infatti A è di tipo $(3, 2)$, mentre B è la matrice quadrata nulla di ordine 2, ovvero B è di tipo $(2, 2)$, che è diverso dal tipo di A. La scrittura $A + O_2 = A$ è quindi, in questo caso, errata (poichè priva di significato).

Osserviamo in generale che, se A è una qualsiasi matrice di tipo (m, n), per la validità della semplicissima uguaglianza

$$A + O = A\,,$$

si sottintende in realtà che la matrice nulla O sia dello stesso tipo (m, n) della matrice A.

Combinando le operazioni di somma con la definizione di matrice opposta, possiamo deinire anche l'operazione di differenza fra matrici.

Definizione 1.2. *Siano A e B due matrici dello stesso tipo (m, n). Si chiama matrice differenza di A e B, e si denota con $A - B$, la matrice, dello stesso tipo di A e B, data da*

$$A - B = A + (-B)\,.$$

L'operazione di somma di matrici gode di alcune semplici proprietà, le quali sono una immediata conseguenza delle analoghe proprietà valide per i numeri reali.

Teorema 1.1 (Proprietà della somma di matrici)**.** *Siano A, B e C tre matrici dello stesso tipo (m, n). Allora valgono le seguenti proprietà*

i) $A + B = B + A$ *(proprietà commutativa);*

ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$ *(proprietà associativa);*

iii) $A + O_{m,n} = A\,;$

iv) $A + (-A) = O_{m,n}\,;$

v) $(A + B)^t = A^t + B^t\,.$

In particolare la validità della proprietà associativa consente di scrivere la somma di tre o più matrici dello stesso tipo senza l'uso di parentesi. Quindi, in virtù della ii), la scrittura $A+B+C$ è priva di ambiguità, ovvero è da intendersi come sostitutiva di qualsiasi dei due membri nella ii).

Come *conseguenze* delle proprietà sopra, si ottengono le seguenti semplici proposizioni.

Proposizione 1.1 (Proprietà di semplificazione)**.** *Siano A, B e C tre matrici dello stesso tipo (m,n), tali che $A+C=B+C$. Allora, risulta*

$$A = B\,.$$

Proof. Dalla uguaglianza assunta segue che

$$(A+C)+(-C) = (B+C)+(-C)\,,$$

e, applicando la proprietà associativa (vedi la ii) nel Teorema 1.1), otteniamo

$$A+\big(C+(-C)\big) = B+\big(C+(-C)\big)\,.$$

Ma $C+(-C) = O_{m,n}$, e quindi, dalla proprietà iii) del Teorema 1.1, otteniamo $A=B$. $\square$

Proposizione 1.2. *Siano $A, B \in \mathbb{M}_{m,n}$ due matrici assegnate. Allora, l'equazione matriciale*

$$A+X = B\,, \tag{1.1}$$

nell'incognita $X \in \mathbb{M}_{m,n}$, ammette la soluzione unica data dalla matrice

$$X = B-A\,.$$

Proof. Se esiste una matrice $X \in \mathbb{M}_{m,n}$ che sia soluzione dell'equazione (1.1), allora tale matrice deve anche soddisfare la seguente identità matriciale (ottenuta dalla (1.1) sommando membro a membro la matrice $-A$)

$$-A+(A+X) = -A+B\,.$$

Da questa segue, applicando le proprietà del Teorema 1.1 (quali?), che $(-A+A)+X = B-A$, ovvero che $X=B-A$. Quindi, *se esiste* una matrice X che soddisfi la (1.1), tale matrice deve necessariamente esser data da $X=B-A$. D'altra parte, si verifica immediatamente che $X=B-A$ soddisfa effettivamente la (1.1), mediante sostituzione esplicita, essendo $A+(B-A) = A-A+B = B$. Quindi, abbiamo provato, a questo punto, che la soluzione di (1.1) esiste ed è data da $X=B-A$. È evidente infine che tale soluzione è unica, poichè ogni soluzione della (1.1) ha la forma $X=B-A$. $\square$

Esempio

Tornando all'Esempio 3) sopra, usando le proprietà appena viste, si può facilmente mostrare che la matrice B è simmetrica, indipendentemete dal valore degli elementi della matrice quadrata A di partenza. Infatti, se A è una generica matrice qudarata di ordine n, posto $B = A + A^t$, abbiamo

$$B^t = (A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A = A + A^t = B\,,$$

dove abbiamo usato la proprietà dell'operazione di trasposizione rispetto alla somma, e la proprietà commutativa (vedi, rispettivamente, la v) e la i) del Teorema 1.1), oltre al fatto che $(A^t)^t = A$. Otteniamo quindi che $B^t = B$, ovvero che B è simmetrica.
Osserviamo infine che la condizione che la matrice di partenza A sia quadrata è essenziale per poter definire $B = A + A^t$. Infatti, se A è quadrata di ordine n, anche A^t è quadrata di ordine n, e quindi la somma $A + A^t$ è eseguibile. Se invece fossimo partiti da una matrice rettangolare A, di tipo (m, n) con $m \neq n$, allora A^t sarebbe stata rettangolare di tipo (n, m) (e quindi di tipo diverso dal tipo di A), e in questo caso la somma di $A + A^t$ non avrebbe avuto senso.

2 Prodotto di un numero per una matrice

Definizione 2.1. *Dati un numero reale α e una matrice $A = [a_{ij}] \in \mathbb{M}_{m,n}$, la matrice prodotto di α per A, denotata con αA, è la matrice dello stesso tipo di A, e data da*

$$\alpha A = [\alpha a_{ij}]\,.$$

In particolare, segue immediatamente che $(-1)A = -A$, dove $-A$ è la matrice opposta di A. Inoltre, come è immediato verificare, si ha anche $(-\alpha)A = -(\alpha A) = \alpha(-A)$, per una qualsiasi matrice A di tipo (m, n) e per un qualsiasi $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esempi.

1) Se A è la matrice seguente

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

ed $\alpha = 3$, allora

$$\alpha A = 3 \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot 4 & 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 0 & 3 \cdot 1 & 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot (-2) & 3 \cdot 0 & 3 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12 & -3 \\ 0 & 3 & 15 \\ -6 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

2) Calcolare la matrice

$$C = 2A^t - \frac{1}{2}B\,,$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Calcoliamo prima la matrici trasposta A^t di A. Essa è data da

$$A^t = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Quindi, abbiamo

$$C = 2 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \left(-\frac{1}{2}\right) \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Anche l'operazione di prodotto di una matrice per un numero gode di alcune semplici proprietà, che seguono immediatamente dalle analoghe proprietà valide per i numeri reali.

Teorema 2.1 (Proprietà del prodotto di un numero per una matrice)**.** *Siano A, B due matrici di tipo (m, n) ed $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Allora valgono le seguenti proprietà*

i) $0A = O_{m,n} \qquad \alpha O_{m,n} = O_{m,n}$

ii) $1A = A \qquad \alpha I_n = diag(\alpha, \alpha, \ldots, \alpha)$

iii) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A) = \beta(\alpha A)$

iv) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A \qquad \alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

In virtù della iii), le tre matrici fra loro uguali $(\alpha\beta)A, \alpha(\beta A), \beta(\alpha A)$ possono esser denotate senza ambiguità con $\alpha\beta A$.

Osserviamo inoltre la seguente utilissima circostanza, ovvero il fatto che proprietà i) può esser invertita. Più precisamente, se $\alpha \in \mathbb{R}$ ed $A \in \mathbb{M}_{m,n}$ sono tali che risulti

$$\alpha A = O_{m,n} \,,$$

allora abbiamo che

$$\alpha = 0 \,, \qquad \text{oppure} \qquad A = O_{m,n} \,.$$

Questo si vede immediatamente applicando la Definizione 2.1. Infatti, se a_{ij}, con $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$, sono gli elementi di A, dalla uguaglianza matriciale $\alpha A = O_{m,n}$ e dalla Definizione 2.1 (che applicata dà $\alpha A = [\alpha a_{ij}]$) otteniamo

$$\alpha a_{ij} = 0 \,, \qquad \text{per tutti gli indici } i, j \text{ con } i = 1, \ldots, m \,, \quad j = 1, \ldots, n \,. \tag{2.2}$$

Le $m \cdot n$ relazioni (2.2) sono chiaramente soddisfatte se $\alpha = 0$ (indipendentemente dai valori degli elementi a_{ij} della matrice A). Se invece $\alpha \neq 0$, allora, per soddisfare la (2.2), deve risultare $a_{ij} = 0$, *per ogni* $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$. Questo implica (dalla definizione di matrice nulla) che $A = O_{m,n}$.

3 Combinazione lineare di matrici

Generalizzando e combinando le due operazioni appena viste, possiamo introdurre anche la seguente

Definizione 3.1. *Siano $A_1, A_2, \ldots, A_N$ N matrici, tutte dello stesso tipo (m, n), ed $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ N numeri reali, con $N \geqslant 1$. La matrice*

$$A = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_1 + \cdots + \alpha_N A_N = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k A_k$$

è detta ***combinazione lineare*** *delle matrici $A_1, A_2, \ldots, A_N$ con coefficienti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$. Le matrici $A_1, A_2, \ldots, A_N$ si dicono* ***linearmente indipendenti*** *se e solo se*

$$\sum_{k=1}^{N} \alpha_k A_k = O_{m,n} \Longrightarrow \alpha_k = 0 \quad k = 1, .., N\,. \tag{3.3}$$

In altri termini, N matrici $A_1, A_2, \ldots, A_N$ sono linearmente indipendenti se e solo se *l'unica* loro combinazione lineare che coincida con la matrice nulla (dello stesso tipo delle matrici $A_1, A_2, \ldots, A_N$) è la combinazione lineare a coefficienti tutti nulli (osserviamo che l'implicazione opposta nella (3.3) è banale, in quanto vera sempre).
Dalla definizione segue immediatamete che, se $A_1, A_2, \ldots, A_N$ (di tipo (m, n)) sono linearmente indipendenti, allora $A_i \neq O_{m,n}$, per ogni $i = 1, \ldots, N$, ovvero nessuna delle matrici $A_1, A_2, \ldots, A_N$ può coincidere con la matrice nulla. Infatti, se fosse, ad es., $A_1 = O_{m,n}$, allora basterebbe prendere come coefficiente α_1 un qualsiasi numero reale $\neq 0$, e prendere poi $\alpha_i = 0$, per $i = 2, \ldots, N$, per avere

$$\sum_{k=1}^{N} \alpha_k A_k = \alpha_1\, A_1 + \sum_{k=2}^{N} \alpha_k A_k = O_{m,n}$$

con coeffiienti non tutti nulli (stiamo applicando la proprietà i) nel Teorema 2.1), e quindi la (3.3) non sarebbe vera.

N matrici $A_1, A_2, \ldots, A_N \in \mathbb{M}_{m,n}$ che non sono linearmente indipendenti sono dette *linearmente dipendenti*. In questo caso esiste una combinazione lineare di $A_1, A_2, \ldots, A_N$ a coefficienti *non tutti nulli* che coincide con la matrice nulla $O_{m,n}$. Quindi, se fra N matrici ne esiste almeno una coincidente con la matrice nulla, tali matrici sono sempre linearmente dipendenti.

Come immediata conseguenza della definizione di indipendenza lineare, abbiamo il seguente

Teorema 3.1. *Siano $A_1, A_2, \dots, A_N$ N matrici dello stesso tipo (m, n).*
Allora, $A_1, A_2, \dots, A_N$ sono linearmente dipendenti se e solo se almeno una di esse è combinazione lineare delle rimanenti.

Esempio notevole. Consideriamo gli N vettori riga *ad N componenti* dati da

$$V_1 = [1\ 0\ \cdots\ 0]\,, \qquad V_2 = [0\ 1\ \cdots\ 0]\,, .. \qquad V_N = [0\ 0\ \cdots\ 1]\,.$$

In altri termini, per ogni indice i fissato da 1 ad N, in vettore riga V_i ha componenti tutte nulle, ad eccezione della $i-$esima componente che vale 1.
Proviamo che $V_1, \dots, V_N$ sono linearmente indipendenti. Infatti, si vede immediatamnte che la loro combinazione lineare a coefficienti $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ è data da

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} \alpha_k V_k &= \alpha_1[1\ 0\ \cdots\ 0] + \alpha_2[0\ 1\ \cdots\ 0] + \cdots \alpha_N[0\ 0\ \cdots\ 1] \\ &= [\alpha_1\ 0\ \cdots\ 0] + [0\ \alpha_2\ \cdots\ 0] + \cdots + [0\ 0\ \cdots\ \alpha_N] \\ &= [\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_N]\,.\end{aligned}$$

Quindi abbiamo che

$$\sum_{k=1}^{N} \alpha_k V_k = O_{1,N} \iff [\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_N] = O_{1,N} \iff \alpha_i = 0 \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, N\,.$$

Concludiamo allora che l'unica loro combinazione lineare che coincida con il vettore riga nullo (ad N componenti) $O_{1,N}$ è la combinazione linare a coefficienti α_i tutti nulli.

È inoltre immediato verificare che ogni vettore riga ad N componenti $V = [a_1\ a_2\ \cdots\ a_N]$ si può sempre scrivere come combinazione lineare dei vettori riga $V_1, \dots, V_N$. Infatti, abbiamo

$$V = [a_1\ a_2\ \cdots\ a_N] = a_1[1\ 0\ \cdots\ 0] + a_2[0\ 1\ \cdots\ 0] + \cdots a_N[0\ 0\ \cdots\ 1] = \sum_{k=1}^{N} a_k\, V_k\,.$$

Ovviamente, questo esempio può esser replicato in modo perfettamente analogo partendo (invece che dagli N vettori riga $V_1, \dots, V_N$) da N analoghi vettori colonna ad N componenti $U_1, U_2, \dots U_N$, che possiamo anche indicare, usando l'operazione di trasposizione, come $U_1 = [1\ 0\ \cdots\ 0]^t$, $U_2 = [0\ 1\ \cdots\ 0]^t$,..., $U_N = [0\ 0\ \cdots\ 1]^t$.

Altri esempi.

1) Mostrare che le matrici A_1, A_2, A_3, A_4 date da

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sono linearmente indipendenti.

Dobbiamo provare che, se α_i, $i = 1, .., 4$, sono quattro numeri reali tali che

$$\sum_{i=1}^{4} \alpha_i A_i = O_2 \,,$$

allora risulta $\alpha_i = 0$, per ogni $i = 1, .., 4$.
Ora, si ha

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{4} \alpha_i A_i &= \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \alpha_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha_4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Quindi

$$\sum_{i=1}^{4} \alpha_i A_i = O_2 \quad \iff \quad \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{bmatrix} = O_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e l'ultima uguaglianza matriciale è vera se e solo se

$$\alpha_i = 0 \,, \quad \text{per ogni } \; i = 1, .., 4 \,.$$

Questo prova che A_1, A_2, A_3, A_4 sono linearmente indipendenti.

2) Stabilire se le matrici seguenti

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$$

sono linearmente indipendenti, o linearmente dipendenti.

Per stabilire quanto richiesto, siano α, β due numeri reali tali che risulti $\alpha A + \beta B = O_2$.

Dobbiamo vedere se questa uguaglianza matriciale sussiste nel solo caso in cui $\alpha = \beta = 0$ (e in questo caso A e B sono linearmente indipendenti), oppure se si verifica anche per coppie di valori di α e β non entrambi nulli (e in questo caso avremmo provato che A e B sono linearmente dipendenti).

Ora, abbiamo

$$\begin{aligned}\alpha A + \beta B = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \alpha & 2\alpha \\ 4\alpha & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3\beta \\ 7\beta & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha & 2\alpha + 3\beta \\ 4\alpha + 7\beta & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Quindi, risulta che $\alpha A + \beta B = O_2$ se e solo se le seguenti equazioni sono soddisfatte contemporaneamente

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ 2\alpha + 3\beta = 0 \\ 4\alpha + 7\beta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ 3\beta = 0 \\ 7\beta = 0 \end{cases} \iff \alpha = \beta = 0$$

Concludiamo quindi che le matrici A e B sono linearmente indipendenti.

3) Considerati i seguenti vettori colonna a due componenti

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad U_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad U_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix},$$

stabilire se U_1, U_2, U_3 sono linearmente indipendenti o linearmente dipendenti.

Applicando la Definizione 3.1, siano $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tre numeri reali tali che

$$\alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \alpha_3 U_3 = O_{2,1}\,.$$

Allora, deve essere

$$\begin{aligned}\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3\alpha_2 \\ 3\alpha_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4\alpha_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha_1 + 3\alpha_2 + 0 \\ 0 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

e l'ultima eguaglianza è vera se e solo se le seguenti due equazioni nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sono contemporaneamente soddisfatte

$$\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0\,. \end{cases} \tag{3.5}$$

Tali due equazioni da soddisfare contemporaneamente si dice che costituiscono un *sistema* di due equazioni lineari nelle 3 incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Una terna ordinata $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, tale che i valori di $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ soddisfino contemporaneamente le due equazioni del sistema, si dice una *soluzione del sistema* stesso.

Ora, è evidente che questo sistema di equazioni è sempre soddisfatto dalla terna ordinata $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 0)$. Il punto ora è stabilire se questa è *l'unica* soluzione del sistema (3.5), oppure se esistono soluzioni $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ diverse dalla terna $(0, 0, 0)$. In altri termini, si tratta di stabilire se le due equazioni del sistema (3.5) possono esser soddisfatte contemporaneamente anche da valori di $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ che non risultino tutti e tre nulli.

Anche senza far uso della teoria generale dei sistemi algebrici di equazioni lineari, è immediato vedere, per il caso del sistema (3.5) in studio, che esistono soluzioni $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ diverse dalla terna $(0, 0, 0)$. Infatti, potremmo, ad esempio, porre $\alpha_1 = 1$ e risolvere la prima equazione nella incognita α_2, ottenendo $\alpha_2 = -1/3$. Sostituendo il valore $\alpha_2 = -1/3$ nella seconda equazione e risolvendola nell'incognita α_3, otteniamo poi $\alpha_3 = 1/4$. Quindi, la terna $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1, -1/3, 1/4)$ è *una* soluzione del sistema (3.5) ed è diversa dalla terna $(0, 0, 0)$.

Questo ci permette già di concludere che i vettori U_1, U_2, U_3 sono linearmente dipendenti. Inoltre, sostituendo i valori di $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1/3$ ed $\alpha_3 = 1/4$ nella (3.4), otteniamo anche che

$$U_1 - \frac{1}{3}\,U_2 + \frac{1}{4}\,U_3 = O_{2,1}\,, \tag{3.6}$$

da cui segue che

$$U_1 = \frac{1}{3}\,U_2 - \frac{1}{4}\,U_3\,, \tag{3.7}$$

ovvero otteniamo che U_1 può esser espresso come combinazione lineare di U_2 e U_3. Abbiamo quindi ottenuto che (almeno) uno dei 3 vettori può esser espresso come combinazione lineare degli altri due e questo poteva esser dedotto anche dal Teorema 3.1, avendo già stabilito che U_1, U_2, U_3 sono linearmente dipendenti. Osserviamo tuttavia che l'applicazione del Teorema 3.1 non permette di stabilire *quale* dei 3 vettori è combinazione lineare degli altri due. Il Teorema 3.1 ci dice solo che ne esiste *almeno uno* che è combinazione lineare degli altri (non ci dice quale!). Anche se in questo specifico esempio, come si può dedurre immediatamente dalla (3.6), in realtà ognuno dei vettori U_1, U_2, U_3 è combinazione lineare degli altri due, tuttavia questa non è una circostanza che si verifica in generale (vedi

Osservazione 3.1 sotto).
Tornando al sistema (3.5), osserviamo che si può procedere anche in altri modi per ottenere soluzioni costituite da terne $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ diverse dalla terna $(0, 0, 0)$. Ad esempio, invece di fissare un valore di α_1 diverso da zero, si può fissare un valore non nullo di α_2, ad esempio $\alpha_2 = 1$. Risolvendo allora la prima delle (3.5) nell'incognita α_1, otteniamo $\alpha_1 = -3$. Risolvendo poi la seconda questa volta nell'incognita α_3, otteniamo $\alpha_3 = -3/4$. Quindi, la terna $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (-3, 1, -3/4)$ è *un'altra* soluzione del sistema (3.5) diversa dalla soluzione nulla $(0, 0, 0)$. Procedendo così, dalla (3.4) otteniamo

$$-3\,U_1 + U_2 - \frac{3}{4}\,U_3 = O_{2,1}\,, \tag{3.8}$$

che può esser scritta anche come

$$U_2 = 3\,U_1 + \frac{3}{4}\,U_3\,, \tag{3.9}$$

che mostra che anche U_2 può esser espresso come combinazione lineare degli altri due vettori. Notiamo che la (3.8) e la (3.6) non sono indipendenti, ovvero che una può esser ottenuta dall'altra (e viceversa). Infatti, se moltiplichiamo membro a membro la (3.8) per il fattore $-1/3$, otteniamo proprio la (3.6) (ovviamente, usando le proprietà dell'operazione di prodotto di una matrice per un numero reale; in particolare, con riferimento al Teorema 2.1, stiamo usando la seconda della iv), e la iii), nel membro di sinistra, e la seconda della i), nel membro di destra). Viceversa, la (3.8) può esser ottenuta dalla (3.6) moltiplicando quest'ultima membro a membro per il fattore -3.
Infine, come terza alternativa per ottenere soluzioni $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ del sistema (3.5) diverse dalla terna $(0, 0, 0)$, possiamo anche partire fissando un valore non nullo di α_3. Fissiamo sempre, per semplicità, il valore 1 anche per α_3. Risolvendo la seconda delle (3.5), dove poniamo $\alpha_3 = 1$, nell'incognita α_2, otteniamo $\alpha_2 = -4/3$. Sostituendo questo valore di α_2 nella prima e risolvendo questa nell'incognita α_1 otteniamo $\alpha_1 = 4$. Quindi, la terna $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (4, -4/3, 1)$ è *un'altra* soluzione del sistema (3.5) diversa dalla soluzione nulla $(0, 0, 0)$. Procedendo così, dalla (3.4) otteniamo

$$4\,U_1 - \frac{4}{3}\,U_2 + U_3 = O_{2,1}\,, \tag{3.10}$$

che può esser scritta anche come

$$U_3 = -4\,U_1 + \frac{4}{3}\,U_2\,, \tag{3.11}$$

la quale mostra che anche U_3 può esser espresso come combinazione lineare degli altri due vettori. Anche la (3.10) non è indipendente dalle (3.8) e (3.6). Infatti, moltiplicando per

i fattori $1/4$ e $-3/4$ la (3.10) otteniamo, rispettivamente, la (3.6) e la (3.8).
Facciamo ancora un'osservazione sulla risoluzione del sistema (3.5). Se, al posto del valore 1, avessimo fissato sopra un generico valore *non nullo* (diciamo un $\alpha \neq 0$), di volta in volta per α_1, oppure per α_2, oppure per α_3, avremmo ottenuto ancora le (3.6), (3.8), (3.10), dove i coeffcienti dei vettori nei membri di sinistra sono moltiplicati per lo stesso $\alpha \neq 0$ (tale fattore α si può semplificare, ovvero porre $= 1$; lasciamo l'elementare verifica al lettore). Si verifica poi che ognuno dei vettori viene espresso *in un unico modo* come combinazione lineare degli altri, ovvero i coefficienti nei membri a destra delle (3.7), (3.9), e (3.11) sono unici (a differenza dei coefficienti nei membri di sinistra delle (3.6), (3.8), (3.10), che invece possono esser ridefiniti moltiplicandoli tutti e tre per uno stesso fattore $\neq 0$) .

Un altro modo (ancora più semplice) per stabilire che i tre vettori U_1, U_2, U_3 sono linearmente dipendenti è di applcare direttamente il Teorema 3.1. Infatti, data la forma particolare dei tre vettori, osservando in particolare che

$$\frac{1}{4}\,U_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

e ricordando l'esempio notevole sopra, è immediato vedere che U_2 può esser espresso come combinazione lineare di U_1 e di U_3. Infatti, abbiamo

$$U_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 3\,U_1 + 3\cdot\frac{1}{4}\,U_3 = 3\,U_1 + \frac{3}{4}U_3\,, \tag{3.12}$$

che coincide con la (3.9) ottenuta sopra cercando delle soluzioni del sistema (3.5) diverse dalla soluzione nulla $(0,0,0)$. Avendo provato che *almeno uno* dei tre vettori U_1, U_2, U_3 è combinazione lineare dei rimanenti, applcando il Teorema 3.1 concludiamo subito che U_1, U_2, U_3 sono linearmente dipendenti.
Naturalmente, al posto della (3.12) avremmo potuto scrivere subito le altre combinazioni lineari che sussitono per U_1 ed U_3 in termini dei rimanenti vettori, ovvero le (3.7), (3.11), e poi ancora applicare il Teorema 3.1 per concludere allo stesso modo (tuttavia, la (3.12) è un pò più sempice da "vedere subito ad occhio", delle (3.7), (3.11)).

Osservazione 3.1. Sottolineiamo il fatto che l'enunciato del Teorema 3.1 non sarebbe corretto se la locuzione "almeno una di esse" venisse sostituita da "ognuna di esse". Come controesempio, consideriamo i 3 vettori colonna seguenti

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad Y_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad Y_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Questi 3 vettori sono linearmente dipendenti, poichè esistono 3 numeri $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ non tutti nulli, tali che $\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 + \alpha_3 Y_3 = O_{2,1}$. Infatti, basta prendere $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 1$ e tener conto che abbiamo

$$0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tuttavia, *solo* Y_3 può esser espresso come combinazione lineare dei rimanenti Y_1, Y_2 (con coefficienti, in particolare, uguali a zero), ovvero

$$Y_3 = 0 \cdot Y_1 + 0 \cdot Y_2 .$$

Invece, *nessuno* dei due vettori Y_1, Y_2 può esser espresso come combinazione lineare dei rimanenti. Infatti, considerando, ad es., Y_1 (si ragiona in modo identico poi anche per Y_2), se esistessero $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che

$$Y_1 = \alpha\, Y_2 + \beta\, Y_3 ,$$

avremmo

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix},$$

e dedurremmo così un'uguaglianza assurda, essendo $1 \neq 0$.

Riferimenti

1) E. Dedò, A. Varisco, Algebra lineare, elementi ed esercizi, CLUP, 1988, Capitolo 3

2) U. Gasapina, Algebra delle matrici, Masson, 1988.

TEST di AUTOVALUTAZIONE

1. Siano A, B e C tre matrici di tipo (m, n), (p, q) ed (r, s), rispettivamente. Quale delle seguenti condizioni devono soddisfare gli interi m, n, p, q, r, s, affinchè la matrice data da
$$A + B^t - C$$
sia definita?

   a) $m = p = r$ ed $n = q = s$

   b) $m = q = r$ ed $n = p = s$

   c) $m = q = s$ ed $n = p = r$

   d) $m = p = s$ ed $n = q = r$

2. Per quali numeri reali α la seguente uguaglianza matriciale è vera?
$$\begin{bmatrix} \alpha & \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & \alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   a) Per $\alpha = 0$

   b) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

   c) Per nessun α

   d) Se e solo se $\alpha = 1$

3. Siano A e B le due matrici date da
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & 1 \end{bmatrix}.$$
Qual è la matrice X soluzione dell'equazione matriciale seguente?
$$A + X^t = B$$

   a) $X = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 5 \\ -3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

b) $X = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -5 \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

c) $X = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

d) $X = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & -5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

4. Quale delle seguenti somme matriciali è corretta?

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}^t + \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^t + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$

5. Determinare tutti i valori dei numeri reali α, β e γ, tali che, introdotte le due matrici seguenti E ed F

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2\alpha \\ \alpha & 3 & 1 \\ 0 & 5\alpha & \beta \end{bmatrix}, \qquad F = \begin{bmatrix} 8 & \beta & -2 \\ \gamma & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix},$$

la matrice $E - F$ risulti diagonale.

a) $\alpha = 1,\ \beta = 2,\ \gamma = 1$

b) $\alpha = 1,\ \beta = 4,\ \gamma = 1$

c) $\alpha = 2,\ \beta = 2,\ \gamma = 2$

d) $\alpha = 2,\ \beta = 4,\ \gamma = 2$

6. Siano A e B le matrici quadrate del secondo ordine date da

$$A = \begin{bmatrix} 2 & x \\ y^3 - 1 & 3x^2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & y - x \\ 5(y^2 - x^4) & 1 \end{bmatrix},$$

dove $x, y \in \mathbb{R}$. Quali sono tutti i valori di x ed y per i quali la seguente matrice

$$2A^t - xB + 2A - xB^t$$

risulti simmetrica?

a) $x = 0$ e $y = 1$

b) $x = 1$ e $y = 0$

c) nessun valore di x e y

d) ogni valore di x ed y

7. Sia A una generica matrice quadrata di ordine n ed x, y due numeri reali. Introdotta la matrice B così definita

$$B = xA - yA^t\,,$$

quale delle seguenti affermazioni è corretta?

a) B è antisimmetrica se e solo se $x = y$ (comunque sia assegnata $A \in \mathbb{M}_n$)

b) B è antisimmetrica se e solo se A è antisimmetrica (comunque siano assegnati x, y)

c) B è antisimmetrica se e solo se $A = O_n$ (comunque siano assegnati x, y)

d) B è antisimmetrica se e solo se ($x = y$, oppure A è antisimmetrica)

8. Siano $A, B \in \mathbb{M}_n$ due matrici simmetriche ed α, β due numeri reali. Sia poi C la matrice data da

$$C = \alpha A + \beta B\,.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) C è simmetrica se e solo se $\alpha = \beta = 1$

b) C è simmetrica se e solo se ($\alpha = 0$, oppure $\beta = 0$)

c) C è simmetrica per ogni valore di α e di β

d) C è simmetrica se e solo se $A = B$

9. Considerati i seguenti due vettori colonna U_1 ed U_2

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad U_2 = \begin{bmatrix} t \\ t-1 \end{bmatrix},$$

quali sono tutti i valori di $t \in \mathbb{R}$ tali che U_1 ed U_2 risultino linearmente indipendenti?

a) $t = 0$ oppure $t = 1$

b) tutti i valori $t \neq 1$

c) nessun valore di t

d) qualsiasi valore di t

10. Considerati i seguenti tre vettori riga a due componenti V_1, V_2 e V_3

$$V_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad V_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad V_3 = \begin{bmatrix} 0 & y \end{bmatrix},$$

dove y è un numero reale, quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) V_1, V_2, V_3 sono linearmente indipendenti per ogni $y \in \mathbb{R}$

b) Almeno uno dei 3 vettori V_1, V_2, V_3 può esser espresso come combinazione lineare degli altri due se e solo se $y = 0$

c) V_1, V_2, V_3 sono linearmente indipendenti se e solo se $y \neq 0$

d) V_1, V_2, V_3 sono linearmente dipendenti per ogni $y \in \mathbb{R}$