Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
MA2601, 2023-1. Secciones coordinadas

Guía 3

Sistemas de Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

P1. Determine la solución de los siguientes sistemas

a) $\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}'$

b) $\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}'$

c) $\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}'$

d) $\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}' + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_1 - x_3 \\ x_2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

P2. Sea el sistema $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, donde

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Considere variables auxiliares $(z_1, z_2, z_3) = (x_1 - x_3, x_2, x_1 + x_3)$ y encontrar las soluciones del sistema para las nuevas variables (z_1, z_2, z_3).

b) Calcule $\exp(t\boldsymbol{A})$ y resuelva el sistema con la condición inicial $\boldsymbol{x}(0) = (1, -1, 1)^T$.

P3. Considere el sistema $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, donde $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 4 & \beta \end{bmatrix}$.

a) Calcule la solución general cuando $\beta = 4\alpha$.

b) Encuentre todos los valores de α y β para los cuales se tiene que todas las soluciones del sistema son actoadas en el dominio $(0, +\infty)$.

c) Para $\alpha = -1$. encuentre todos los valores de β tales que cualquier solución $\boldsymbol{x}(t)$ posea infinitos puntos donde se anule.

d) En el caso $\alpha = -1$, encuentre todos los valores de β para los cuales cualquier solución $\boldsymbol{x}(t)$ verifique la condición de la parte c) y $\lim_{t \to +\infty} |\boldsymbol{x}(t)| = 0$.

Matriz Exponencial

P1. Para a, b, c constantes reales (no todos nulos), considere la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix}$$

a) Verifique que $p_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = -\lambda^3 - (a^2+b^2+c^2)\lambda$, es el polinomio característico de $\boldsymbol{A}$.
A partir de ello, se puede probar aplicando el Teorema de Cayley-Hamilton que se tiene la igualdad $\boldsymbol{A}^3 + (a^2+b^2+c^2)\boldsymbol{A} = \mathbf{0}$, no lo demuestre.

b) Denotando $\mu = a^2+b^2+c^2$, usando la definición de $\exp(t\boldsymbol{A})$ demuestre que

$$\exp(t\boldsymbol{A}) = I_3 + \frac{\sin(t\mu)}{\mu}A + \frac{1-\cos(t\mu)}{\mu^2}A^2$$

Indicación. Use la parte anterior para demostrar que $(\forall k \in \mathbb{N}) \quad \boldsymbol{A}^{2k} = (-1)^{k+1}\mu^{2k-2}\boldsymbol{A}^2$.
Recuerde también las series de potencia de las funciones $\sin(\cdot)$ y $\cos(\cdot)$.

P2. Considere el sistema homogéneo $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, donde $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ es una matriz cuyos coeficientes satisfacen la siguiente relación

$$(a-d)^2 + 4cb = 0$$

a) Demuestre que $\boldsymbol{A}$ posee un único valor propio y calcúlelo.

b) Corrobore el **Teorema de Cayley Hamilton**, es decir, si $p(\lambda)$ es el polinomio característico de la matriz $\boldsymbol{A}$, entonces se tiene que $p(\boldsymbol{A}) = \mathbf{0}$.

c) Aplique las partes anteriores para calcular $\exp(t\boldsymbol{A})$.

Teoría de Sistemas Lineales

P1. Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Considere el sistema $t\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)$, definido para $t > 0$.

a) Se define $t^{\boldsymbol{A}} = \exp(\ln(t)\boldsymbol{A})$. Demuestre que $t^{\boldsymbol{A}}$ es una matriz fundamental del sistema, o sea,

- $t\dfrac{d}{dt}(t^{\boldsymbol{A}}) = \boldsymbol{A}t^{\boldsymbol{A}}$ para $t > 0$.
- $t^{\boldsymbol{A}}$ es invertible para todo $t > 0$.

b) Considere ahora el sistema $t\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}(t)$, donde $\boldsymbol{b}(t) = (1,2)^T$ y $\boldsymbol{x}(1) = (1,0)^T$.

1) Verifique que $\boldsymbol{x}_p(t) = t^{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{u}(t)$ es una solución particular, donde

$$\boldsymbol{u}(t) = \int_1^t (s^A)^{-1} \begin{bmatrix} 1/s \\ 2/s \end{bmatrix} ds$$

2) Usar las partes anteriores, para encontrar la solución general de la ecuación.

P2. Considere el sistema $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)$, donde $\boldsymbol{A} \in \mathcal{C}(I)^{n\times n}$ es una función matricial continua e I es un intervalo real no trivial.

a) Sea $\boldsymbol{G}(t)$ una **primitiva** de $A(t)$, es decir $\boldsymbol{G}'(t) = \boldsymbol{A}(t)$. Si $\boldsymbol{G}(t)$ y $A(t)$ conmutan, pruebe que $\boldsymbol{\Phi}(t) = \exp(\boldsymbol{G}(t))$ es una matriz fundamental del sistema.
Indicación: Pruebe que, si $\boldsymbol{M}(t)$ es una función matricial derivable en I y $\boldsymbol{M}$ conmuta con $\boldsymbol{M}'$, entonces $\dfrac{d}{dt}[\boldsymbol{M}(t)]^k = k[\boldsymbol{M}(t)]^{k-1}\boldsymbol{M}'(t)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

b) Usar la parte anterior para encontrar la solución general de los sistemas

- $\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} e^t & e^t \\ 0 & 3e^t \end{bmatrix}\boldsymbol{x}$

- $\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & \cos(t) \end{bmatrix} \boldsymbol{x}.$

P3. Considere el sistema $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)$, donde $\boldsymbol{A} \in \mathcal{C}(I)^{n\times n}$ es tal que $\boldsymbol{A}(t+\pi) = \boldsymbol{A}(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Sea $\boldsymbol{\Phi}(t)$ la matriz fundamental canónica asociada al sistema (o sea, $\boldsymbol{\Phi}(0)$ es igual a la identidad.

a) Pruebe que $\boldsymbol{\Phi}(t+\pi) = \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}(\pi)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Indicación. $\boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t+\pi) - \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}(\pi)$. Determine una ecuación diferencial para $\boldsymbol{\varphi}$ y aplique el el Teorema de Existencia y Unicidad adecuadamente.

b) Suponga que la matriz $\boldsymbol{\Phi}(\pi)$ tiene un valor propio $\lambda = 1$. Muestre que, en tal caso, el sistema posee una solución no trivial $\boldsymbol{x}(t)$, tal que $\boldsymbol{x}(t+\pi) = \boldsymbol{x}(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

P4. En una población de N individuos, existen dos variantes de un gen específico, B y b, presentes en proporciones constantes $p > 0$ y $q > 0$, respectivamente, con $p + q = 1$. A medida que evoluciona y se mezcla la poblaci6n, la población no varía en número y puede dividirse en todo instante de la forma $x(t)+y(t)+z(t) = N$ donde x, y y z representan el número de individuos de las combinaciones BB, Bb y bb, respectivamente. La evolución de las poblaciones en cuestión es modelado por las ecuaciones de Hardy-Weinberg dadas por

$$
\begin{aligned}
x' &= -qx + \frac{p}{2}y \\
y' &= qx - \frac{1}{2}y + pz \\
z' &= \frac{q}{2}y - pz
\end{aligned}
$$

a) Escriba las ecuaciones de Hardy-Weinberg como un sistema homogéneo con matriz constante $\boldsymbol{A}$ e incógnita $\boldsymbol{x}(t)$. Pruebe que $\boldsymbol{A}$ posee tres valores propios distintos, siendo uno de ellos nulo y los otros dos negativos, distintos e independientes de p y q.

Indicación. Use convenientemente la hipótesis dada por $p + q = 1$ para simplifcar el polinomio característico.

b) Determine los vectores propios de cada valor propio de $\boldsymbol{A}$ y escriba la solución general de la ecuación. Verifique que $x(t) + y(t) + z(t)$ es constante.

Indicación. En lo posible, evite el uso de fracciones para los coeficientes de los vectores propios.

c) Demuestre que $\lim\limits_{t\to+\infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{v}_0$, donde $\boldsymbol{v}_0$ es un vector propio de $\boldsymbol{A}$.

Transformada de Laplace

P1. La función gamma, denotada por $\Gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se define como

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt$$

para los $z \in \mathbb{R}$ donde dicha integral sea convergente.

a) Pruebe que $\Gamma(z)$ está bien definida para $z > 0$.

b) Demuestre que $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ para $z > 0$. Concluya que $\Gamma(n) = (n-1)!$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

c) Concluya que $\mathcal{L}[t^q] = \dfrac{\Gamma(q+1)}{s^{q+1}}$ para todo $q > 0$ y deduzca que $\mathcal{L}[t^n] = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

P2. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales.

a) $y'' + 4y = 4t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 5$.

b) $y'' + 2ty' - 4y = 1$, $y(0) = y'(0) = 0$.

P3. Para $a \in \mathbb{R}$, determine la solución de la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} y'' + aty' - 2ay = 1 \quad \text{para } t > 0 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{aligned}$$

P4. Definimos la transformada lineal del tipo **Mellin** para funciones continuas en $[0, 1]$ dada por $\mathbf{M} : \mathcal{C}([0, 1]) \to (0, +\infty)$

$$\mathbf{M}[y(t)](s) = \int_0^1 t^{s-1} y(t) dt$$

para $s > 0$ donde esté bien definida.

a) Demuestre que $\mathbf{M}[1](s) = \dfrac{1}{s}$ y que $\mathbf{M}[t^a y(t)](s) = \mathbf{M}[y(t)](t + a)$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

b) Si $y \in \mathcal{C}([0, 1])$ satisface que $\lim\limits_{t \to 0^+} t^s y(t) = 0$ para todo $s > 0$, demuestre que $\mathbf{M}[ty'(t)](s) = -s\mathbf{M}[y(t)](s) + y(1)$.

c) Demuestre que $\mathbf{M}\left[\displaystyle\int_t^1 \frac{y(u)}{u} du\right](s) = \dfrac{1}{s}\mathbf{M}[y(t)](s)$.

d) Resuelva la siguiente ecuación diferencial usando la transformada de Mellin y la propiedades demostradas en las partes anteriores

$$\begin{aligned} x(xy')' + 2xy' = 1 \\ y(1) = y'(1) = 0 \end{aligned}$$

Indicación. Asuma que, si $f, g \in \mathcal{C}([0, 1])$ y $\mathbf{M}[f](s) = \mathbf{M}[g](s)$, entonces $f \equiv g$.

P5. Evalúe la transformada inversa de Laplace para las siguientes expresiones

a) $F(s) = \dfrac{se^{-2s}}{s^2 + 4s + 13}$.

b) $F(s) = \dfrac{s - 7}{s^2 - 14s + 73}$.

c) $F(s) = \dfrac{3s - 2}{s^2 + 4s + 20}$.

P6. Para $a > 0$, se define la función $G_a : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$(\forall t > 0) \quad G_a(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 \le t < a \\ 0 & t \ge a \end{cases}$$

a) Muestre que $G_a(t) = H_0(t) - H_a(t)$.

b) Verifique que $\mathcal{L}[G_a(t)](s) = \dfrac{1}{s}(1 - e^{-as})$.

c) Demuestre que $\mathcal{L}\left[G_a(t-b)\right](s) = \frac{1}{s}(e^{-bs} - e^{-(a+b)s})$ para $b > 0$.

d) Aplique lo anterior para resolver la ecuación

$$\begin{aligned} y'' - y &= G_3(t-1) \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 2 \end{aligned}$$

P7. Haciendo uso del Teorema de convolución, calcule $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right](t)$ para $a \neq 0$.

P8. Resolver las siguientes ecuaciones integro-diferenciales definidas para $t > 0$.

a) $y'(t) - t = \int_0^t \cos(t-u)y(u)du$, $y(0) = 1$.

b) $y'(t) - \int_0^t y(u)du = e^{-t}\cos(3t)$, $y(0) = 0$.

P9. Determine una función $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ continua y de orden exponencial tal que

a) $\mathcal{L}\left[f\right](s) = \ln\left(\frac{s^2-1}{s^2+1}\right)$ para $s > 1$.

b) $\mathcal{L}\left[f\right](s) = \ln\left(1 + \frac{1}{s^2}\right)$.

P10. Usando la transformada de Laplace, resolver el siguiente problema con valores iniciales, y luego bosqueje el gráfico de la solución encontrada

$$\begin{aligned} 4y'' + 4y' + 5y &= g(t) \\ y(0) = y'(0) &= 0 \end{aligned}$$

donde

$$g(t) = \begin{cases} 4 & 0 \leq t < \pi \\ 0 & t \geq \pi \end{cases}$$

P11. Repita lo anterior para la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} y'' - 3y' + 2y &= f(t) \\ y(0) = y'(0) &= 0 \end{aligned}$$

donde

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & 1 \leq t < 2 \\ 1 & 2 \leq t < 3 \\ 0 & 3 \leq t < 4 \\ 1 & t \geq 4 \end{cases}$$