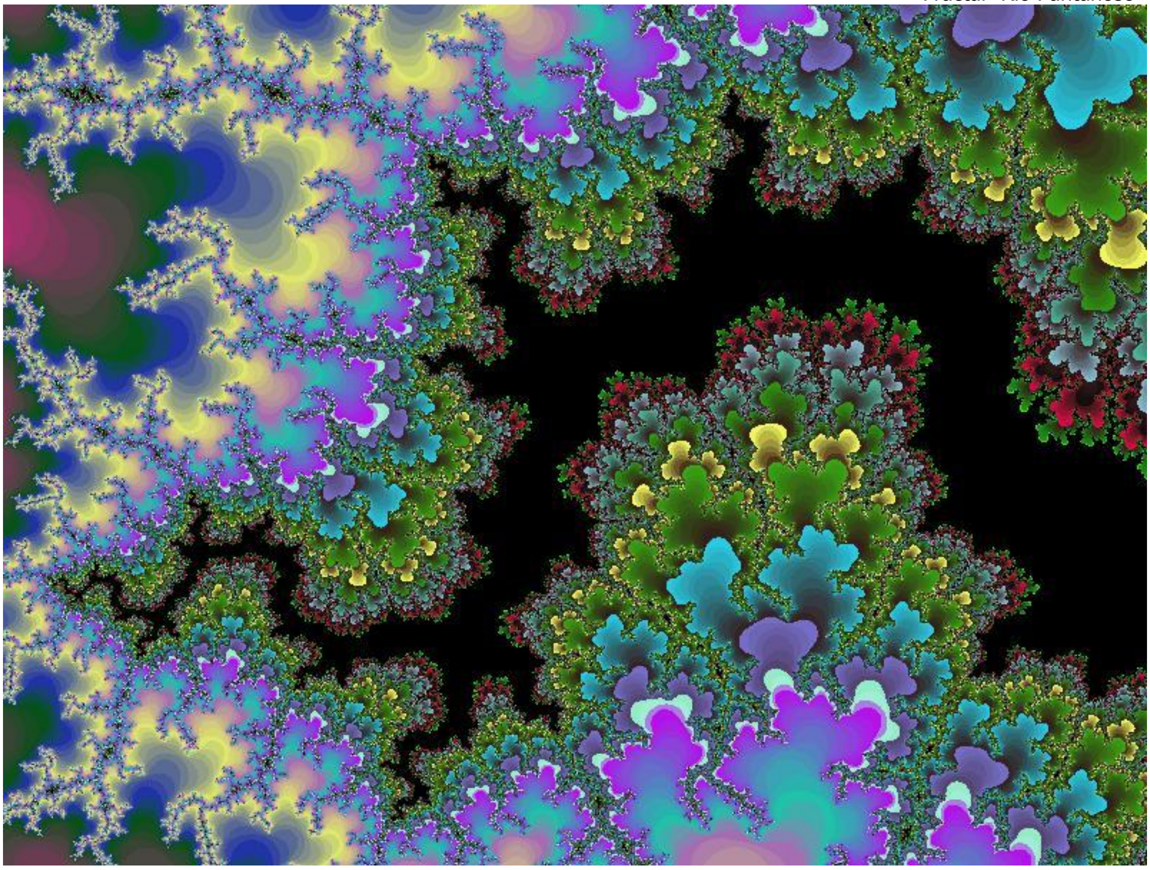
Material Básico de Estudo

Matrizes e Determinantes

Fractal "Rio Pantanoso"



"Eu nunca ensino aos meus alunos, apenas tento dar condições nas quais eles possam aprender".
(Albert Einstein)

Estudante: ____

Turma: ______________________________ Semestre: __________

Material elaborado pelo Prof. Júlio César Tomio*

***** Professor do Instituto Federal de Santa Catarina [IFSC] – Campus Joinville.

MENSAGEM PARA O ESTUDANTE!

Com satisfação, apresento este material que tem como finalidade dar suporte à Unidade Curricular de Matemática III que se estende durante o 3º Módulo do seu Curso Técnico Integrado ao Ensino Médio, e, consequentemente, auxiliar em futuras aplicações nas disciplinas subsequentes que necessitarão dos conhecimentos e conceitos aqui trabalhados e desenvolvidos. A concepção deste, baseada na experiência de alguns anos de docência, também objetiva otimizar o processo de estudo, principalmente no ambiente de sala de aula.

Esta obra almeja mediar com excelência o processo de ensino-aprendizagem das Matrizes e Determinantes. Para tanto, contribuições em forma de crítica, sugestões ou correções serão calorosamente recebidas. Ficarei imensamente agradecido caso você queira fazer parte do processo de aprimoramento deste material.

A realização de um Curso Técnico é um fato que pode fazer muita diferença na sua vida pessoal e profissional. Dedique-se! Faça tudo da melhor maneira que puder, pois desta forma você estará justificando um dos maiores (e também um dos melhores) investimentos que você já fez em você mesmo.

Desejo que a sua vivência no ambiente escolar seja a melhor possível e que a passagem por mais esta etapa de sua vida contribua para o seu engrandecimento pessoal e futuramente profissional. Acredito que isso possibilitará uma melhora significativa na sua qualidade de vida e também na daqueles que convivem próximos de você.

Muita garra, e sucesso!

Professor Júlio César Tomio.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Este material foi produzido utilizando como base, parte da bibliografia indicada abaixo e também através de contribuições minhas e de alguns colegas professores, com os quais tive o prazer de trabalhar.

Normalmente, as Referências Bibliográficas aparecem nas últimas páginas de um livro. Apresento estas referências aqui, objetivando sempre lembrá-lo que a busca por outras fontes de informação é um fator de grande importância em qualquer estudo que se queira realizar. Experimente! Vá até a biblioteca e faça uma consulta.

- ANTON, Howard; RORRES, Chris. **Álgebra Linear com aplicações**. 8 ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.
- BOLDRINI, José Luiz, et al. **Álgebra Linear**. 3. ed. São Paulo, Harbra, 1986.
- GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto. **Matemática: uma nova abordagem**. v.2. São Paulo: FTD, 2000.
- KOLMAN, Bernard; HILL, David R. **Introdução à Álgebra Linear: com aplicações**. 8 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.
- LEON, S. J. **Álgebra Linear com aplicações**. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1999.
- MACHADO, Antônio dos Santos. **Sistemas Lineares e Combinatória**. São Paulo: Atual, 1986.
- PAIVA, Manoel Rodrigues. **Matemática**. v.2. São Paulo: Moderna, 1995.
- POOLE, David. **Álgebra Linear**. São Paulo: Thomson, 2004.
- STEINBRUCH, A.; WINTERLE, Paulo. **Álgebra Linear**. 2. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.
- STEINBRUCH, A.; WINTERLE, Paulo. **Introdução à álgebra linear**. São Paulo: McGraw-Hill, 1990.

Não tenha medo de crescer lentamente. Apenas tenha medo de ficar parado. (Provérbio chinês)

ÍNDICE

• Estudo das Matrizes e Determinantes

Cabe aqui o meu voto de louvor ao professor (e amigo) **Marcos A. Rebello**, que contribuiu com a produção deste material.

ESTUDO DAS MATRIZES E DETERMINANTES

Nós [Halmos e Kaplansky] compartilhamos uma filosofia sobre álgebra linear: pensamos em base-livre, escrevemos em base-livre, mas, quando as dificuldades surgem, fechamos a porta de nossos escritórios e calculamos com matrizes ferozmente.

Irving Kaplansky
em *Paul Halmos: Celebrating 50 years of mathematics.*
J.H. Ewing e F. W. Gehring, Eds. Springer-Verlag, 1991, p.88

MATRIZES

De maneira simples podemos dizer que matrizes são tabelas retangulares de valores, organizadas em linhas e colunas. Estes valores podem representar quantidades específicas, variáveis, equações e até dados nominais. A magnitude de aplicações do conceito e operações de matrizes em diversas áreas do conhecimento (principalmente tecnológico) faz com que o seu estudo seja imprescindível.

Noção

A tabela abaixo mostra o número de usuários (funcionários) conectados a uma rede (intranet) de várias empresas de um mesmo grupo multinacional, que possuem senha de acesso a um programa do sistema.

	Sistema Manufatura	**Sistema de Rec. Humanos**	**Sistema de Logística**
Unidade 1	1	8	7
Unidade 2	4	0	10
Unidade 3	7	12	16
Unidade Sede	15	39	21

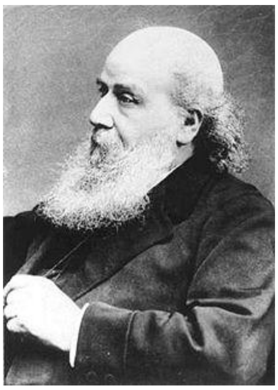
A representação destes dados numéricos (e outros associados a estes) pode ser feita através de matrizes. Veja abaixo:

Matriz representante do "número de usuários por sistema": $\begin{bmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 4 & 0 & 10 \\ 7 & 12 & 16 \\ 15 & 39 & 21 \end{bmatrix}$

Matriz representante do "número total de usuários por sistema": $\begin{bmatrix} 27 & 59 & 54 \end{bmatrix}$

Matriz representante do "número de usuários do sistema de manufatura": $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ 15 \end{bmatrix}$

Histórico - O pai do nome matriz



Foi só há pouco mais de 150 anos que as matrizes tiveram sua importância detectada e saíram da sombra dos determinantes. O primeiro a lhes dar um nome parece ter sido Augustin-Louis **Cauchy**, 1826: tableau (= tabela). O nome matriz só veio com James Joseph **Sylvester**, 1850 (figura ao lado). Seu amigo Arthur **Cayley**, com sua famosa *Memoir on the Theory of Matrices*, 1858, divulgou esse nome e iniciou a demonstrar sua utilidade.

Por que Sylvester deu o nome matriz às matrizes?

Usou o significado coloquial da palavra matriz, qual seja: *local onde algo se gera ou cria*. Com efeito, via-as como *"... um bloco retangular de termos... o que não representa um determinante, mas é como se fosse uma MATRIZ a partir da qual podemos formar vários sistemas de determinantes, ao fixar um número p e escolher à vontade p linhas e p colunas..."* (artigo publicado na Philosophical Magazine de 1850, p.363-370).

Observe que Sylvester ainda via as matrizes como mero ingrediente dos determinantes (que veremos adiante). É só com Cayley que elas passam a ter vida própria e gradativamente começam a suplantar os determinantes em importância.

Histórico retirado de http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/passa3b.html em 24/07/2008

Definição

Matrizes são tabelas retangulares (com linhas e colunas) utilizadas para organizar dados numéricos. Veja abaixo a representação genérica de uma matriz:

$$\begin{array}{r} 1^a\ linha \rightarrow \\ 2^a\ linha \rightarrow \\ 3^a\ linha \rightarrow \\ \vdots \\ m^a\ linha \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\qquad}_{1^a\ coluna} \quad \underbrace{\qquad}_{2^a\ coluna} \qquad\qquad \underbrace{\qquad}_{n^a\ coluna}$$

Cada elemento "a" da matriz é indicado por dois índices:

$$a_{ij} \text{ sendo que } \begin{cases} i \rightarrow \text{indica linha} \\ j \rightarrow \text{indica coluna} \end{cases}$$

Podemos escrever a matriz "A" de forma abreviada:

$$\mathbf{A = (a_{ij})_{mxn}}$$

Sendo A, uma matriz de "m" linhas com "n" colunas.

Representação

Podemos escrever uma matriz utilizando as seguintes representações:

$$M = \begin{pmatrix} 18 & 0 & -5 \\ 3/2 & \sqrt{7} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad M = \begin{bmatrix} 18 & 0 & -5 \\ 3/2 & \sqrt{7} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad M = \begin{Vmatrix} 18 & 0 & -5 \\ 3/2 & \sqrt{7} & 1 \end{Vmatrix} \rightarrow \text{ em desuso.}$$

Ordem

A ordem de uma matriz indica o seu "formato" ou "tamanho", através do número de linhas e colunas. Veja os exemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & \sqrt[3]{8} & 0 \\ -1 & 6/5 & 29 \end{pmatrix}$$ A é uma matriz 2 x 3

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4/17 & -12 \end{pmatrix}$$ B é uma matriz 1 x 4 (Matriz Linha)

$$C = \begin{bmatrix} 10 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}$$ C é uma matriz 3 x 1 (Matriz Coluna)

Matriz Nula (ou Matriz Zero)

Uma matriz é dita "nula", quando todos os seus elementos são nulos (zero). Simbolicamente: $\mathbf{0 = (a_{ij})_{mxn}}$ tal que $a_{ij} = 0$.
Exemplo:

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2x4}$$

Matriz Quadrada

Uma matriz é dita quadrada, quando o número de linhas (m) é igual ao número de colunas (n), ou seja, m = n.
Exemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_{2x2}$$ A é uma matriz 2x2, ou seja, é uma matriz quadrada de ordem 2.

$$B = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 51 \\ 20{,}1 & 4 & -2^{13} \\ 11/2 & \ln 8 & \sqrt{2} \end{bmatrix}_{3x3}$$ B é uma matriz quadrada de ordem 3.

Para refletir: É costume de um tolo, quando erra, queixar-se dos outros. [Sócrates]

Nas matrizes quadradas, os elementos a_{ij} para os quais **i = j**, formam a diagonal principal. Também temos, nas matrizes quadradas, a diagonal secundária, que é determinada quando **i + j = n + 1** sendo "n" a ordem da matriz. Veja os exemplos abaixo.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & .. & .. \\ .. & a_{22} & .. \\ .. & .. & a_{33} \end{bmatrix}$$

Diagonal principal = { a_{11} , a_{22} , a_{33} }

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 4 & 7 & 10 \\ 5 & 8 & 11 \end{bmatrix}$$

Diagonal secundária = { 5 , 7 , 9 }

Matriz Diagonal

Uma matriz é dita diagonal, quando só existem elementos significativos na **diagonal principal**. Formalmente, dizemos que toda matriz quadrada de ordem "n", na qual $a_{ij} = 0$ quando $i \neq j$, é denominada matriz diagonal.
Exemplos:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad K = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 3{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 67 \end{pmatrix}$$

Matriz Identidade (ou Unidade)

É uma matriz diagonal onde todos os elementos pertencentes a diagonal **principal** são iguais a 1. Formalmente, dizemos que toda matriz quadrada de ordem "n", na qual $\mathbf{a_{ij} = 0}$ quando $\mathbf{i \neq j}$ e $\mathbf{a_{ij} = 1}$ para **i = j**, é denominada matriz identidade.
Exemplos:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}$$

Para facilitar a identificação de uma matriz identidade (principalmente em algumas de suas aplicações), indicaremos por I_n a matriz identidade de ordem "n". Desta forma:

$I_1 \rightarrow$ Matriz identidade de ordem 1.

$I_2 \rightarrow$ Matriz identidade de ordem 2.

$I_3 \rightarrow$ Matriz identidade de ordem 3; e assim sucessivamente.

Matriz Transposta

Dada uma matriz A do tipo **m x n**, denominamos a transposta de A [e indicaremos por $\mathbf{A^t}$], a matriz do tipo **n x m** obtida trocando-se ordenadamente as linhas pelas colunas de A.
Exemplo:

$$\text{Se} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 19 \\ \sqrt{6} & -8 \end{pmatrix}_{3x2} \quad \Rightarrow \quad A^t = \begin{pmatrix} a & 0 & \sqrt{6} \\ b & 19 & -8 \end{pmatrix}_{2x3}$$

Matriz Oposta

Seja uma matriz A qualquer. Definimos como matriz oposta de A, a matriz **– A**, cujos elementos são opostos aos elementos correspondentes de A.
Exemplo:

A matriz oposta de $A = \begin{bmatrix} -3 & 14 \\ 7 & -6 \end{bmatrix}$ é a matriz: $-A = \begin{bmatrix} 3 & -14 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}$.

• Note que podemos dizer também que a matriz oposta de – A é a matriz A.

Matriz Simétrica

Uma matriz quadrada A, de ordem "n" denomina-se simétrica quando **A = A^t**.
Exemplo:

A matriz $A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 33 \\ 0 & -\pi & 1 \\ 33 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ é SIMÉTRICA, pois $A^t = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 33 \\ 0 & -\pi & 1 \\ 33 & 1 & 5 \end{bmatrix}$.

• Observe a posição de simetria dos elementos em relação à diagonal principal.

Matriz Antissimétrica

Uma matriz quadrada A = [a_{ij}] denomina-se antissimétrica quando **$A^t = -A$**.
Exemplo:

A matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 7 \\ -3 & 0 & -\pi \\ -7 & \pi & 0 \end{bmatrix}$ é ANTISSIMÉTRICA, pois $A^t = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -7 \\ 3 & 0 & \pi \\ 7 & -\pi & 0 \end{bmatrix}$.

• Observe a posição de "antissimetria" dos elementos em relação à diagonal principal.

Matriz Triangular Superior e Inferior

Uma matriz quadrada A = [a_{ij}] em que os elementos $a_{ij} = 0$ para **i > j** denomina-se **matriz triangular superior**.
Exemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 14 \end{bmatrix} \qquad I_{14}$$

Uma matriz quadrada A = [a_{ij}] em que os elementos $a_{ij} = 0$ para **i < j** denomina-se **matriz triangular inferior**.
Exemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 8 & 0 \\ 5 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -7 & 12 \end{bmatrix} \qquad I_{14}$$

Igualdade de Matrizes

Duas matrizes são iguais quando forem de mesma ordem e seus elementos correspondentes (mesmo índice) forem iguais.
Formalmente, se temos duas matrizes A = $(a_{ij})_{mxn}$ e B = $(b_{ij})_{mxn}$, A = B $\Leftrightarrow$ $a_{ij} = b_{ij}$ com $1 \le i \le m$ e $1 \le j \le n$.
Exemplo:

$$\begin{pmatrix} x+3 & \pi & -z/4 \\ e & -37 & \sqrt{8} \\ \sqrt{9} & x+y & 2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & \pi & 3 \\ e & -37 & 2\sqrt{2} \\ 3 & 4/5 & 1 \end{pmatrix}$$

As duas matrizes serão iguais quando:

$$x+3 = 10 \quad \therefore \quad x = 7$$

$$-\frac{z}{4} = 3 \quad \therefore \quad z = -12$$

$$x+y = \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad 7+y = \frac{4}{5} \quad \therefore \quad y = -\frac{31}{5}$$

Adição e Subtração de Matrizes

Para adicionarmos (ou subtrairmos) duas matrizes A e B, de mesma ordem, basta adicionar (ou subtrair) os elementos correspondentes, ou seja, de mesmo índice.
Exemplos:

Adição: $$\begin{pmatrix} -1 & 8 & 0 \\ 4 & \sqrt{3} & 14/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 10 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 14 & \sqrt{3}+1 & 20/3 \end{pmatrix}$$

Subtração: $$\begin{bmatrix} 10 & 13 \\ 5\sqrt{7} & p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 310 & -7 \\ 2\sqrt{7} & q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -300 & 20 \\ 3\sqrt{7} & p-q \end{bmatrix}$$

• Observe que, se uma matriz C é resultante da subtração de duas matrizes A e B, podemos escrevê-la também como uma adição de matrizes. Veja:

$$C = A - B \quad \Rightarrow \quad C = A + \underbrace{(-B)}_{\text{Matriz Oposta de B}}$$

Multiplicação de um número real por uma Matriz

Para realizar tal operação, basta multiplicarmos o número real por todos os elementos da matriz em questão.
Exemplo:

Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 3\sqrt{5} & 17 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}$, determine a matriz **2A**. Então: $2A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 3\sqrt{5} & 17 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 6\sqrt{5} & 34 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Note que: $A + A = 2A$.

Observação: Se **A** é uma matriz e **n** é um escalar (número real), então a matriz **nA** é chamada "múltiplo escalar de A".

EXEMPLOS – Matrizes

1) [GIOVANNI] Obtenha a matriz $B = (b_{ij})_{3x3}$ sabendo que sua **lei de formação** é: $b_{ij} = 3i - j^2$.

Resolução:

Como a matriz B tem formato 3x3, genericamente, escrevemos:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

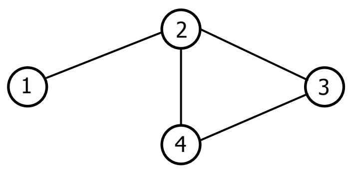
Calculando os elementos da matriz B, através da lei de formação $\mathbf{b_{ij} = 3i - j^2}$ dada, temos:

$b_{11} = 3(1) - (1)^2 = 2$ $\quad b_{12} = 3(1) - (2)^2 = -1$ $\quad b_{13} = 3(1) - (3)^2 = -6$
$b_{21} = 3(2) - (1)^2 = 5$ $\quad b_{22} = 3(2) - (2)^2 = 2$ $\quad b_{23} = 3(2) - (3)^2 = -3$
$b_{31} = 3(3) - (1)^2 = 8$ $\quad b_{32} = 3(3) - (2)^2 = 5$ $\quad b_{33} = 3(3) - (3)^2 = 0$

Substituindo os valores encontrados, a matriz em questão é: $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -6 \\ 5 & 2 & -3 \\ 8 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

2) [GIOVANNI] O diagrama abaixo, representa um esquema de um mapa rodoviário, mostrando as estradas que ligam as cidades 1, 2, 3 e 4. A matriz $A = [a_{ij}]_{4x4}$ associada a esse mapa é definida da seguinte forma:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i \text{ está ligado diretamente a } j \\ 0, & \text{se } i = j \text{ ou } i \text{ não tem ligação direta com } j \end{cases}$$



Sabendo que **i** e **j** se referem às cidades do mapa e variam portanto no conjunto {1, 2, 3, 4}; construa a matriz A.

Resolução:

Montando a matriz A, de ordem 4, temos: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$

Analisando a lei de formação juntamente com o mapa dado, concluímos que: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Observação: Quando uma matriz é formada somente por elementos iguais a **0** ou a **1**, ela é dita "Matriz Booleana", em homenagem a George Boole, um matemático inglês do século XIX.

3) [CPTO] Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} x+y & 3x-y \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$, calcule "K", sabendo que $A = B^t$, e que, $K = (x^2 - y^2)10^3$.

Resolução:

Para determinarmos o valor de "K" na expressão dada, devemos inicialmente encontrar os valores de "x" e "y".

Temos que $B^t = \begin{bmatrix} x+y & 5 \\ 3x-y & 1 \end{bmatrix}$ e como sabemos que $\mathbf{A = B^t}$, escrevemos: $\begin{bmatrix} \mathbf{2} & 5 \\ \mathbf{10} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x+y} & 5 \\ \mathbf{3x-y} & 1 \end{bmatrix}$

Analisando a igualdade das matrizes, tiramos que: $\mathbf{2 = x + y}$ e que: $\mathbf{10 = 3x - y}$.

Organizando as informações, podemos escrever o sistema: $\begin{cases} 3x - y = 10 \\ x + y = 2 \end{cases}$ que, resolvendo-o, encontramos $\mathbf{x = 3}$ e $\mathbf{y = -1}$.

Agora, substituindo os valores encontrados de "x" e "y" na expressão $K = (x^2 - y^2).10^3$ dada, temos:

$K = (x^2 - y^2).10^3 \quad \Rightarrow \quad K = ([3]^2 - [-1]^2).10^3 \quad \Rightarrow \quad K = ([9] - [1]).1000 \quad \Rightarrow \quad K = (8).1000 \quad \therefore \quad \mathbf{K = 8000}$

4) Considere as matrizes $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Determine a matriz **X** sabendo que: $3(X - M) = 2(B^t + 3X) - I_2$

Resolução:

Podemos isolar a matriz "X" na equação matricial dada, através de alguns procedimentos usuais utilizados na resolução de uma equação do 1º grau comum.
Assim:

$$3(X - M) = 2(B^t + 3X) - I_2$$

$$3X - 3M = 2B^t + 6X - I_2$$

$$3X - 6X = 2B^t + 3M - I_2$$

$$-3X = 2B^t + 3M - I_2$$

Agora, substituímos as matrizes: $-3X = 2.\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + 3.\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Multiplicamos os números pelas matrizes: $-3X = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 9 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Adicionamos duas das matrizes: $-3X = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 13 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Subtraímos as duas matrizes: $-3X = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 13 & -4 \end{bmatrix}$

Multiplicando a expressão por $(-1/3)$: $X = \begin{bmatrix} -3/3 & -5/3 \\ -13/3 & 4/3 \end{bmatrix}$

Logo, a matriz procurada é: $X = \begin{bmatrix} -1 & -5/3 \\ -13/3 & 4/3 \end{bmatrix}$

5) [CPTO] Quantas matrizes "X" existem, formadas por números naturais, tais que: $X + X^t = \begin{bmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$.

Resolução:

Neste caso, temos que considerar "genericamente" a matriz X, tal que: $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Assim, temos: $X + X^t = \begin{bmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2a & b+c \\ c+b & 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$$

Daí, temos que: 2a = 14 e 2d = 10

a = 7 **d = 5**

E também que: $\begin{cases} b+c=6 \\ c+b=6 \end{cases}$

Note que as duas equações [do sistema acima] são iguais e que para **números naturais** teremos apenas 7 possibilidades.

São elas:

0 + 6 = 6
1 + 5 = 6
2 + 4 = 6
3 + 3 = 6
4 + 2 = 6
5 + 1 = 6
6 + 0 = 6

Solução: Assim, existem 7 matrizes "X" que satisfazem a condição dada.

Observação: Apenas para efeito conclusivo, as 7 matrizes "X" são:

$X_1 = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$ $X_2 = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$ $X_3 = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ $X_4 = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ $X_5 = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ $X_6 = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ $X_7 = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

Para refletir: Existe um paralelismo fiel entre o progresso social e a atividade matemática; os países socialmente atrasados são aqueles em que a atividade matemática é nula ou quase nula. [Jacques Chapellon]

EXERCÍCIOS – Matrizes

1) Construa as matrizes, definidas a seguir:

a) $A = (a_{ij})_{1x3}$ tal que: $a_{ij} = 2i - j$

b) $B = (b_{ij})$ quadrada de ordem 2, tal que: $b_{ij} = 2i + 3j - 1$

c) $C = [c_{ij}]_{4x2}$ tal que: $c_{ij} = \begin{cases} i+j, \text{ se } i \le j \\ i-j, \text{ se } i > j \end{cases}$

d) $H = (h_{ij})_{3x3}$ tal que: $h_{ij} = \begin{cases} 2^{i+j}, \text{ se } i < j \\ i^2 - j + 1, \text{ se } i \ge j \end{cases}$

2) Forme a matriz $M = [m_{ij}]$ de ordem 3, de modo que $m_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ se } i = j \\ 2, \text{ se } i > j \\ -1, \text{ se } i < j \end{cases}$. A matriz M é uma matriz diagonal? Por quê?

3) Monte a matriz $\mathbf{V = (v_{ij})_{2x3}}$ tal que $\mathbf{v_{ij} = |\ i - j\ |}$, e diga se é possível determinar a soma dos elementos da diagonal secundária, justificando sua resposta.

4) Dadas as matrizes: $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 7 & -1 \\ -3 & 6 & 2 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ -8 & 5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, determine (se possível):

a) B + 2A

b) A – B

c) 2A + C

d) $D - 3C^{\mathbf{t}}$

e) $(A + B)^{\mathbf{t}}$

5) Sendo $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, calcule a matriz X de modo que 3(X – A) = 2(B + X) + 6C.

6) [GIOVANNI] Determine os valores de a, b, x e y de modo que: $\begin{pmatrix} x+y & 2a+b \\ 2x-y & a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$.

7) [GIOVANNI] A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ 2 & 1 & z \end{bmatrix}$ admite a transposta $A^t = \begin{bmatrix} 1 & x & 2 \\ x-2 & y & 1 \\ 3y & 6-y & z \end{bmatrix}$. Nestas condições, calcule x, y e z.

8) Determine os valores de a e b para que a matriz $M = \begin{bmatrix} 3 & 8 & x \\ a^3 & 1 & b^2 \\ x & 121 & 0 \end{bmatrix}$ seja simétrica.

9) Determine os valores de m, n, p e q, de modo que $\begin{bmatrix} m & 2m \\ p & p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n & -n \\ q & -3q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$.

10) [UFOP/MG] Observe a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & x & 4 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix}$. Chama-se **traço de uma matriz quadrada** a soma dos elementos da sua diagonal principal. Determine x e y na matriz acima de tal forma que seu traço valha 9 e x seja o triplo de y.

11) Seja $A = (a_{ij})_{2x2}$, tal que $a_{ij} = i + j$. Determine x, y, z e t para que se tenha $\begin{pmatrix} x+y & x+z \\ 3x-t & t+z \end{pmatrix} = A$.

12) [GIOVANNI] Sabendo que $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, obtenha as matrizes M e N, tais que $\begin{cases} 2M + N = A - B \\ M + 3N = 2A + B \end{cases}$.

13) Determine x, com $x \in \mathbb{R}$, de modo que a matriz $A = \begin{bmatrix} x^2 - 7x + 13 & 0 \\ x^2 - 3x - 4 & 1 \end{bmatrix}$ seja igual a matriz identidade de ordem 2.

14) [GIOVANNI] Determine o elemento da 3ª linha da matriz $C = \left(\frac{1}{4}B - \frac{1}{2}A\right)^t$, em que $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & -8 & 12 \end{bmatrix}$.

15) Determine a matriz X tal que: $2.\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & -1 \end{pmatrix} + X = 3.\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

16) Calcule os números a, b, x e y que tornam verdadeira a igualdade: $a.\begin{bmatrix} 1 & x \\ y & 0 \end{bmatrix} + b.\begin{bmatrix} -1 & y \\ -x & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

17) Calcule as matrizes X e Y que verificam o sistema $\begin{cases} X + Y = A + 3B \\ X - Y = 3A - 2B \end{cases}$, sendo $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $B^t = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

18) Determine os valores de **b**, **m** e **t**, para que A = B, sendo $A = \begin{pmatrix} 1/16 & \mathbf{b}^2 \\ -27 & \log_3 81 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2^{\mathbf{m}} & 9 \\ \mathbf{b}^3 & \mathbf{t} \end{bmatrix}$.

Para esquentar o processador!

19) [Vunesp/SP] Imagine os elementos $\mathbb{Z}_+$ formando a seguinte tabela: $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 & 9 & 12 & \ldots \\ 1 & 4 & 7 & 10 & 13 & \ldots \\ 2 & 5 & 8 & 11 & 14 & \ldots \end{bmatrix}$

a) Em que linha da tabela se encontra o número 319?
b) Em que coluna se encontra esse número?

20) Determine a matriz X tal que $X + 2X + 3X + 4X + \ldots + 100X = \begin{pmatrix} 5050 & 0 \\ 0 & 5050 \end{pmatrix}$.

Para refletir: Existem verdades que a gente só pode dizer depois de ter conquistado o direito de dizê-las. [Jean Cocteau]

RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS

1a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ **1b)** $\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$ **1c)** $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ **1d)** $\begin{bmatrix} 1 & 8 & 16 \\ 4 & 3 & 32 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}$ **2)** $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; Não! **3)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; Não!

4a) $\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 9 & -2 \end{bmatrix}$ **4b)** $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$ **4c)** Não é possível! **4d)** $\begin{bmatrix} 9 & 11 \\ -29 & -13 \\ 3 & -8 \end{bmatrix}$ **4e)** $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ **5)** $\begin{bmatrix} 28 & 1 \\ 23 & 3 \end{bmatrix}$

6) $x = 1, y = 2, a = 2, b = -5$ **7)** $x = 4, y = 1, z = 5$ **8)** $a = 2, b = \pm 11$ **9)** $m = 5, n = 2, p = 2, q = -1$

10) $x = 6, y = 2$ **11)** $x = 2, y = 0, z = 1, t = 3$ **12)** $M = \begin{pmatrix} 0 & 2/5 \\ 0 & -3/5 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 3 & 6/5 \\ 0 & 6/5 \end{pmatrix}$ **13)** $x = 4$ **14)** zero

15) $X = \begin{bmatrix} -5 & 4 & -9 \\ -12 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ **16)** $a = b = 2$, $x = 1/2$, $y = 0$ **17)** $X = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ e $Y = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}$

18) $b = -3$, $m = -4$, $t = 4$ **19a)** 2ª linha **19b)** 107ª coluna **20)** $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Multiplicação de Matrizes

Até o momento, estudamos três operações que envolvem matrizes. A adição, a subtração e a multiplicação de um número real por uma matriz. São operações que envolvem regras relativamente simples.

A multiplicação de matrizes requer uma atenção especial. Vamos introduzir esse conceito através de um exercício intuitivo.

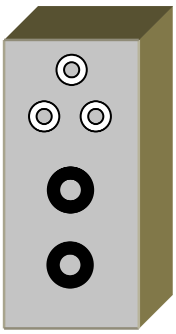
Veja o exemplo a seguir:

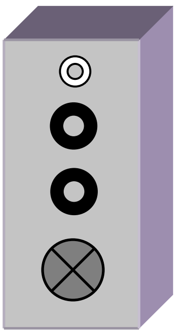
Vamos considerar que a pequena empresa MATRISOM fabrica caixas acústicas para grande ambientes, espaços públicos e shows. A mesma fabrica três modelos de caixas acústicas:

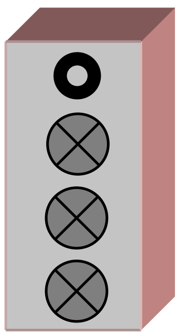
• **Modelo I:**
3 alto-falantes agudos
2 alto-falantes médios

• **Modelo II:**
1 alto-falante agudo
2 alto-falantes médios
1 alto-falante grave

• **Modelo III:**
1 alto-falante médio
3 alto-falantes graves







A tabela a seguir, que chamaremos de "**C/M**" [**C**aixa Acústica por **M**ês], apresenta os pedidos à empresa MATRISOM referentes aos meses de Julho e Agosto.

	Julho	**Agosto**
Caixa Acústica Modelo I	10	0
Caixa Acústica Modelo II	15	20
Caixa Acústica Modelo III	30	40

Assim, monte uma tabela que apresente a quantidade que deverá ser disponibilizada, de cada **alto-falante**, em cada um dos **meses** em questão, para suprir exatamente os pedidos feitos das caixas acústicas.

RESOLUÇÃO:

Inicialmente vamos montar a tabela que relaciona o número de alto-falantes em cada modelo de Caixa Acústica, ou seja, a tabela que chamaremos de "**A/C**" [**A**lto-falante por **C**aixa Acústica].
Veja:

	Caixa Modelo I	**Caixa Modelo II**	**Caixa Modelo III**
Alto-falante agudo	3	1	0
Alto-falante médio	2	2	1
Alto-falante grave	0	1	3

Agora, adaptando as duas tabelas acima para a forma de matrizes, temos:

Matriz da Tabela A/C: $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ Matriz da Tabela C/M: $\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 15 & 20 \\ 30 & 40 \end{bmatrix}$

A tabela solicitada poderá ser chamada de "**A/M**" [**A**lto-falante por **M**ês] e é obtida através da multiplicação apresentada abaixo. Veja com atenção:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}}_{3x3}^{A/C} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 15 & 20 \\ 30 & 40 \end{bmatrix}}_{3x2}^{C/M} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3.(10)+1.(15)+0.(30) & 3.(0)+1.(20)+0.(40) \\ 2.(10)+2.(15)+1.(30) & 2.(0)+2.(20)+1.(40) \\ 0.(10)+1.(15)+3.(30) & 0.(0)+1.(20)+3.(40) \end{bmatrix}}_{3x2}^{A/M} = \overbrace{\begin{bmatrix} 30+15+0 & 0+20+0 \\ 20+30+30 & 0+40+40 \\ 0+15+90 & 0+20+120 \end{bmatrix}}^{A/M} = \overbrace{\begin{bmatrix} 45 & 20 \\ 80 & 80 \\ 105 & 140 \end{bmatrix}}^{A/M}$$

É importante ressaltar que: a matriz A/C tem formato 3x3 e a matriz C/M tem formato 3x2 e a matriz produto, que resulta dessa multiplicação, tem formato 3x2 [As matrizes forma multiplicadas embora tenham formatos diferentes]. Note que, para que os resultados tenham sentido no problema dado, a multiplicação é feita através das **linhas da matriz A/C** com as **colunas da matriz C/M**.

Logo, a tabela [A/M] solicitada é:

	Julho	**Agosto**
Alto-falante agudo	45	20
Alto-falante médio	80	80
Alto-falante grave	105	140

Agora, vamos formalizar o conceito da MULTIPLICAÇÃO de matrizes:

• **O produto de uma matriz por outra NÃO é determinado por meio do produto dos seus respectivos elementos.**

O problema apresentado anteriormente é um exemplo de aplicação da multiplicação de matrizes, e nota-se que a multiplicação ocorreu através das **linhas** da 1ª matriz com as **colunas** da 2ª matriz.
A multiplicação de matrizes duas nem sempre será possível. Tal operação dependerá da igualdade do número de colunas da 1ª matriz e do número de linhas da 2ª matriz, na seqüência que serão multiplicadas.

Assim, o produto das matrizes $\mathbf{A = [a_{ij}]_{m \times p}}$ e $\mathbf{B = [b_{ij}]_{p \times n}}$ é a matriz $\mathbf{C = [c_{ij}]_{m \times n}}$ em que cada elemento $\mathbf{c_{ij}}$ é obtido por meio da soma dos produtos dos elementos correspondentes da i-ésima linha de **A** pelos elementos da j-ésima coluna **B**.

Formalmente, escrevemos:

Para $\mathbf{A = [a_{ij}]_{m \times p}}$ e $\mathbf{B = [b_{ij}]_{p \times n}}$ teremos **(A . B) = C**, onde $\mathbf{C = [c_{ij}]_{m \times n}}$ e $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}.b_{kj}$

Exemplo 1: Vamos multiplicar a matriz $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ por $B=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 4 & 2\end{bmatrix}$ para entender como se obtém cada elemento $\mathbf{c_{ij}}$.

1ª linha e 1ª coluna

$$A.B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 4 & 2\end{bmatrix}=\begin{array}{c}\begin{array}{cc} c_{11}\ \downarrow & \end{array}\\ \begin{bmatrix}1.(-1)+2.(4) & ....\\ .... & ....\end{bmatrix}\end{array}$$

1ª linha e 2ª coluna

$$A.B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 4 & 2\end{bmatrix}=\begin{array}{c}\begin{array}{cc} & c_{12}\ \downarrow \end{array}\\ \begin{bmatrix}1.(-1)+2.(4) & 1.(3)+2.(2)\\ .... & ....\end{bmatrix}\end{array}$$

2ª linha e 1ª coluna

$$A.B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 4 & 2\end{bmatrix}=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1.(-1)+2.(4) & 1.(3)+2.(2)\\ 3.(-1)+4.(4) & ....\end{bmatrix}\\ \begin{array}{cc} \uparrow\ c_{21} & \end{array}\end{array}$$

2ª linha e 2ª coluna

$$A.B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 4 & 2\end{bmatrix}=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1.(-1)+2.(4) & 1.(3)+2.(2)\\ 3.(-1)+4.(4) & 3.(3)+4.(2)\end{bmatrix}\\ \begin{array}{cc} & \uparrow\ c_{22} \end{array}\end{array}$$

Assim temos:

$$A.B=\begin{bmatrix}7 & 7\\ 13 & 17\end{bmatrix}$$

Fazendo também $B.A$, teremos:

$$B.A=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 4 & 2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-1).1+3.3 & (-1).2+3.4\\ 4.1+2.3 & 4.2+2.4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 10\\ 10 & 16\end{bmatrix}$$

Agora, observe as matrizes $A.B=\begin{bmatrix}7 & 7\\ 13 & 17\end{bmatrix}$ e $B.A=\begin{bmatrix}8 & 10\\ 10 & 16\end{bmatrix}$.

Portanto: $A.B\neq B.A$, ou seja, para a multiplicação de matrizes **NÃO** vale a **propriedade comutativa**.

Exemplo 2: Vejamos outro caso de multiplicação com as matrizes $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 0 & 1\\ -1 & 4\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & 0 & 4\end{bmatrix}$.

$$A.B=\begin{bmatrix}2 & 3\\0 & 1\\-1 & 4\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\-2 & 0 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.1+3(-2) & 2.2+3.0 & 2.3+3.4\\0.1+1(-2) & 0.2+1.0 & 0.3+1.4\\-1.1+4(-2) & -1.2+4.0 & -1.3+4.4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 4 & 18\\-2 & 0 & 4\\-9 & -2 & 13\end{bmatrix}$$

$$B.A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\-2 & 0 & 4\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}2 & 3\\0 & 1\\-1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.2+2.0+3(-1) & 1.3+2.1+3.4\\-2.2+0.0+4(-1) & -2.3+0.1+4.4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 17\\-8 & 10\end{bmatrix}$$

Formalmente, teremos:

Sejam as matrizes A = $[a_{ij}]_{m \times n}$ e B = $[b_{ij}]_{n \times p}$.

Então, a matriz C = A x B é dada por:

$$C_{m\times p}=A\times B=\begin{bmatrix}\sum_{j=1}^{n}a_{1j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{n}a_{1j}b_{j2} & \dots & \sum_{j=1}^{n}a_{1j}b_{jp}\\ \sum_{j=1}^{n}a_{2j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{n}a_{2j}b_{j2} & \dots & \sum_{j=1}^{n}a_{2j}b_{jp}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \sum_{j=1}^{n}a_{mj}b_{j1} & \sum_{j=1}^{n}a_{mj}b_{j2} & \dots & \sum_{j=1}^{n}a_{mj}b_{jp}\end{bmatrix}$$

Da definição, temos que a matriz produto (A . B) só existe se o número de colunas de **A** for igual ao número de linhas de **B**:

$$A_{m\,x\,p}\,.\,B_{p\,x\,n}\;=\;C_{m\,x\,n}$$

A matriz produto **C** terá o número de linhas de **A (m)** e o número de colunas de **B (n)**:

- Se $\mathbf{A}_{3\times 2}$ e $\mathbf{B}_{2\times 5}$, então $(\mathbf{A.B})_{3\times 5}$
- Se $\mathbf{A}_{4\times 1}$ e $\mathbf{B}_{2\times 3}$, então **NÃO** existe o produto!
- Se $\mathbf{A}_{4\times 2}$ e $\mathbf{B}_{2\times 1}$, então $(\mathbf{A.B})_{4\times 1}$

Exemplo 3: Dadas as matrizes $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\0 & -2 & 0\\1 & -1 & 2\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}2\\4\\13\end{bmatrix}$, determine a matriz X na equação $A.X=B$.

Resolução: Observe que, para que exista o produto em questão, a Matriz X, tem que ter a ordem **3 x 1**. Veja:

$$A\cdot X = B$$

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\0 & -2 & 0\\1 & -1 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\4\\13\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}a+3b+c\\-2b\\a-b+2c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\4\\13\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a+3b+c=2\\-2b=4\\a-b+2c=13\end{cases}\Rightarrow$$ Como $b=-2$, temos:

$$\begin{cases}a+3(-2)+c=2\\a-(-2)+2c=13\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+c=8\\a+2c=11\end{cases}\Rightarrow$$ Resolvendo, teremos: $a=5$ e $c=3$. **Solução:** $X=\begin{bmatrix}5\\-2\\3\end{bmatrix}$

Propriedades da Multiplicação de Matrizes:

Verificadas as condições de existência para a multiplicação de matrizes, valem as seguintes propriedades:

I) Associativa: (A.B).C = A.(B.C)

II) Distributiva em relação à adição: A.(B + C) = A.B + A.C ou (A + B).C = A.C + B.C

III) Elemento neutro: $A.I_n = I_m.A = A$, sendo $\mathbf{I_n}$ e $\mathbf{I_m}$ as matrizes identidade de ordem **n** e **m** respectivamente.

IV) uA . vB = (uv).(A.B) com $u \in \mathbb{R}$ e $v \in \mathbb{R}$

Para você estudante!

Faça um teste com a propriedade **III** da multiplicação de matrizes [acima], utilizando as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Observação:

- Vimos que a propriedade comutativa **geralmente não** vale para a multiplicação de matrizes.
- **Não** vale também o **anulamento do produto**, ou seja, sendo $O_{m \times n}$ uma matriz nula, se $A.B = O_{m \times n}$ não implica, **necessariamente**, que $A = O_{m \times n}$ ou $B = O_{m \times n}$.

Tópico Especial: Potências de uma Matriz

Quando A e B forem duas matrizes $n \times n$, o produto delas também será uma matriz $n \times n$. Um caso especial ocorre quando $A = B$. Faz sentido definir $A^2 = A.A$ e, em geral, definir A^k como:

$$A^k = \underbrace{A.A.\ldots.A}_{k\ fatores}$$ sendo k um **inteiro positivo**.

Assim, $A^1 = A$, e é conveniente definir $A^0 = I_n$ (pense a respeito!).

Antes de fazer outras suposições, precisamos nos perguntar com que extensão as potências de matrizes se comportam como as potências de números reais. As propriedades a seguir originam-se imediatamente das definições de acabamos de observar.

Se A é uma **matriz quadrada** e r e s são **inteiros não negativos**, então:

i) $A^r.A^s = A^{r+s}$ **ii)** $(A^r)^s = A^{r.s}$

Matriz Inversa

Conceito:

Dada uma matriz **A**, quadrada, de ordem **n**, se existir uma matriz **A'**, de mesma ordem, tal que $A.A' = A'.A = I_n$, então **A'** é matriz inversa de **A** . Representamos a matriz inversa de **A** por $\mathbf{A^{-1}}$.

Condição de existência da matriz inversa:

Nem toda matriz tem inversa. Para uma matriz A ser inversível (ou invertível) será necessário que seu determinante seja diferente de zero, ou seja, det(A) ≠ 0 [estudaremos "determinantes" logo a seguir].

Obtenção da matriz inversa:

Existem **alguns** métodos para a obtenção de uma matriz inversa, entretanto, neste momento, estudaremos apenas um deles. O método proposto neste momento consiste em **APLICAR A DEFINIÇÃO**.
Veja:

Dada uma matriz A, fazemos: $A.A^{-1} = I_n$ para encontrarmos então a matriz A^{-1}.

Exemplo 1: Determine a matriz A^{-1} sabendo que $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$.

Resolução:

Vamos aplicar o método sugerido...

Para fazermos $A.A^{-1} = I_n$ definiremos $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e a matriz identidade I_n é de ordem 2, ou seja, $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Então, temos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2a+c & 2b+d \\ 4a+3c & 4b+3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Comparando as matrizes, temos 2 sistemas de equações lineares:

$\begin{cases} 2a + c = 1 \\ 4a + 3c = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ Resolvendo temos: $a = \dfrac{3}{2}$ e $c = -2$

e

$\begin{cases} 2b + d = 0 \\ 4b + 3d = 1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ Resolvendo temos: $b = -\dfrac{1}{2}$ e $d = 1$

Como havíamos definido que $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, então agora temos a matriz inversa $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Exemplo 2: Considere as matrizes A, B e C inversíveis de ordem n. Se resolvermos a expressão $AX + B = C$ para encontrarmos a matriz X, o que obteremos?

Resolução:

$AX + B = C$

$AX = C - B$ $\rightarrow$ Passamos a matriz B para o outro membro da equação.

$A^{-1}AX = A^{-1}(C - B)$ $\rightarrow$ Multiplicamos ambos os membros da equação por A^{-1}.

$IX = A^{-1}(C - B)$ $\rightarrow$ Aplicamos a definição $A.A^{-1} = I$ no 1º membro.

$X = A^{-1}(C - B)$ $\rightarrow$ Aplicamos a definição $I.A = A$ no 1º membro.

Solução: A matriz X será encontrada através da expressão: $X = A^{-1}(C - B)$.

Propriedades que envolvem Matriz Inversa:

- A^{-1} é única.
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$
- $(I_n)^{-1} = I_n$
- $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$
- $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$
- $(k.A)^{-1} = \dfrac{1}{k} \cdot A^{-1}$ com $k \in R^*$
- $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$ [estudaremos determinantes (det) a seguir]

Quando uma matriz NÃO possui inversa, esta matriz é dita matriz SINGULAR.

Tópico Especial: Matriz Ortogonal

Uma matriz M, quadrada, cuja inversa coincide com sua transposta é denominada **matriz ortogonal**. Assim sendo, uma matriz M é ortogonal se: $M^{-1} = M^t$, ou seja, $M.M^t = M^t.M = I$.

Exemplo:

A matriz $M = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}$ é ortogonal. $\rightarrow$ Verifique!

Tópico Avançado: Pseudo-inversa de uma Matriz

Definição:

Se A é uma matriz com colunas linearmente independentes (veremos isso mais adiante), a **pseudo-inversa** de A é a matriz A^+, definida por: $A^+ = (A^t.A)^{-1}.A^t$

Note que, se A é $m \times n$, então A^+ é $n \times m$.

Observação: Existem situações específicas que se precisa encontrar a inversa de uma matriz, mas isso não é possível. Neste caso utilizamos a pseudo-inversa que seria uma "aproximação" da matriz inversa procurada.

Interessou? Pesquise e procure saber mais!

Para refletir: A vida é um eco. Se você não está gostando do que está recebendo, observe o que está emitindo. (Lair Ribeiro)

EXERCÍCIOS – Multiplicação de Matrizes e Matriz Inversa

1) [GIOVANNI] Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$, determine a matriz $A.B$

2) [GIOVANNI] Efetue a multiplicação das matrizes: $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

3) Calcule a matriz produto $A.B$ para cada caso a seguir:

a) $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

4) Dadas as matrizes $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcule $(M + A^t).(M^t - A)$.

5) Dada a matriz $T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, calcule T^2. [Lembre-se que em matrizes: $T^2 = T.T$]

6) Determine a matriz $B.S$, sabendo que $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ e $S = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$.

7) Dadas $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, calcule $A.B$ e $B.A$, e mostre que $A.B \neq B.A$.

8) Sendo $A = \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ determine a e b para que $A.B^t = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

9) Considere a matriz identidade de ordem 2, dada por $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e uma matriz quadrada A qualquer, de ordem 2. Qual é a matriz produto de $A.I_2$? E qual é a matriz produto de $I_2.A$?

10) Calcule os valores de a e b para que as matrizes $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ comutem na multiplicação.

11) [GIOVANNI] Sendo $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 24 \\ 6 \end{pmatrix}$, calcule a matriz X, tal que $A.X = B$.

12) Resolva a equação: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} . X = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}$.

13) [UFJF / MG] Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Determine a e b reais, tais que: $A^2 + 2A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

14) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & b \\ b & 1 \end{bmatrix}$, determine a e b, de modo que $A.B = I$, onde I é a matriz identidade.

15) Determine a matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

16) Sendo $M = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, determine M^{-1}.

17) Calcule B^{-1} sabendo que $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

18) Qual a inversa da matriz $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$?

Existem vários métodos para se encontrar uma matriz inversa, como, por exemplo, o método do escalonamento. **Pesquise!** Alguns métodos se adaptam melhor em situações específicas.

19) [GIOVANNI] Mostre que a matriz $B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ é a inversa de $A=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$.

20) Dadas as matrizes $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, determine a matriz $X=(A.B^{-1})^t$.

21) Dadas as matrizes $A=\begin{pmatrix}9 & 5\\ 7 & 4\end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix}4 & n\\ m & 9\end{pmatrix}$, calcular m e n para que B seja inversa de A.

22) [UDESC] Dadas $A=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}$, $P=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 5\end{bmatrix}$ e $B=\dfrac{1}{13}\begin{bmatrix}a & 10\\ 75 & b\end{bmatrix}$, determine os valores de a e b, tais que $B=P\cdot A\cdot P^{-1}$, onde P^{-1} é a matriz inversa de P.

23) Mostre que, se $A=\begin{bmatrix}x & y\\ z & t\end{bmatrix}$ e $\det A\neq 0$, então $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\cdot\begin{bmatrix}t & -y\\ -z & x\end{bmatrix}$.

RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS

1) $\begin{bmatrix}21\\ -11\end{bmatrix}$ **2)** $[17]$ **3a)** $\begin{pmatrix}0 & -9 & 6\\ 0 & -6 & 4\\ 0 & -3 & 2\end{pmatrix}$ **3b)** $\begin{pmatrix}10 & 1\\ -2 & 13\end{pmatrix}$ **3c)** $\nexists\ A.B$ **3d)** $\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 3\\ 3 & 3 & 4\end{pmatrix}$ **4)** $\begin{bmatrix}3 & -3 & 0\\ 3 & -3 & 8\\ 18 & -18 & 16\end{bmatrix}$

5) $\begin{bmatrix}3 & -2 & 0\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ **6)** $\nexists\ B.S$ **7)** $A.B=\begin{pmatrix}6 & 3\\ 3 & 5\end{pmatrix}$ e $B.A=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 9 & 6\end{pmatrix}$ $\therefore\ A.B\neq B.A$ **8)** a = 7, b = 4

9) $A.I_2=I_2.A=A$ **10)** a = 2, b = 0 **11)** $X=\begin{pmatrix}5\\ 4\end{pmatrix}$ **12)** $X=\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$ **13)** a = 1, b = –1 **14)** a = 1, b = 0

15) $A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1/4 & -3/4\end{pmatrix}$ **16)** $M^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & -4\end{pmatrix}$ **17)** $B^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1/2 & 0 & 1/2\\ 1/2 & 1 & -3/2\end{bmatrix}$ **18)** N **não** tem inversa, pois det(N) = 0

19) Basta mostrar que A.B = I_3 **20)** $X=\begin{pmatrix}1/3 & 2/3\\ 5/6 & 1/6\end{pmatrix}$ **21)** m = –7, n = –5 **22)** a = 24, b = –11

23) Este exercício apresenta uma fórmula muito útil para se calcular matrizes inversas de ordem 2. Para isso é necessário conhecer o conceito de determinante. O determinante, em palavras simples, é um número associado aos elementos de uma matriz quadrada.

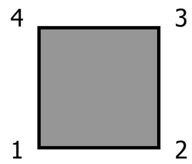
Veja abaixo, dois exemplos do cálculo do determinante de matrizes de ordem 2:

$$A=\begin{bmatrix}5 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad \det A=(5.2)-(3.1)=(10)-(3)\quad\therefore\quad \det A=7$$

$$B=\begin{bmatrix}5 & -2\\ 3 & -4\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad \det B=(5.-4)-(3.-2)=(-20)-(-6)\quad\therefore\quad \det B=-14$$

Agora, **experimente** calcular a inversa da matriz $A=\begin{bmatrix}5 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$, utilizando a relação apresentada no exercício [23] em questão!

EXERCÍCIOS – Aplicações de Matrizes



1) [Unimep/SP – Adapt.] É dado um quadrado medindo 1 m de lado, conforme figura ao lado. Determine a matriz A, de ordem 4, tal que a_{ij} é a distância entre os vértices de números i e j.

2) [UEL/PR – Adaptada] Durante a primeira fase da copa do mundo de futebol realizada na França em 1998, o grupo A era formado por 4 países, conforme a tabela 1 abaixo que também mostra os resultados obtidos de cada país ao final da primeira fase. A tabela 2, conforme o regulamento da copa, tem a pontuação para cada resultado.

Tabela 1

	Vitória	Empate	Derrota
Brasil	2	0	1
Escócia	0	1	2
Marrocos	1	1	1
Noruega	1	2	0

Tabela 2

	Pontuação
Vitória	3
Empate	1
Derrota	0

Determine a matriz $C = \begin{bmatrix} \text{pont. final Brasil} \\ \text{pont. final Escócia} \\ \text{pont. final Marrocos} \\ \text{pont. final Noruega} \end{bmatrix}$ que representa a pontuação final de cada país, ao término da primeira fase.

3) [UFRS/Adaptada] A matriz C fornece, em reais, o custo das porções de arroz, carne e salada usadas em um restaurante:

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \to \text{arroz} \\ \to \text{carne} \\ \to \text{salada} \end{array}$$

A matriz P fornece o número de porções de arroz, carne e salada usadas na composição dos pratos tipo P_1, P_2 e P_3 deste restaurante:

$$\begin{array}{ccc} \text{arroz} & \text{carne} & \text{salada} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$
$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \to \text{prato } P_1 \\ \to \text{prato } P_2 \\ \to \text{prato } P_3 \end{array}$$

Qual a matriz que fornece o custo de produção, em reais, dos pratos P_1, P_2 e P_3?

4) [Cesgranrio/RJ – Adapt.] Ana anotou suas médias bimestrais em várias disciplinas conforme a matriz ao lado. Sabe-se que as notas de todos os bimestres têm o mesmo peso, isto é, para calcular a média anual de um aluno em cada disciplina, basta fazer a média aritmética de suas médias bimestrais. Para gerar uma nova matriz cujos elementos representem as médias anuais de Ana, na mesma seqüência da matriz apresentada, bastará multiplicar esta matriz pela matriz M. Qual é a matriz M?

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 1^o\text{b} & 2^o\text{b} & 3^o\text{b} & 4^o\text{b} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Matemática} \\ \text{Português} \\ \text{Ciências} \\ \text{Estudos Sociais} \end{array} & \begin{bmatrix} 5{,}0 & 4{,}5 & 6{,}2 & 5{,}9 \\ 8{,}4 & 6{,}5 & 7{,}1 & 8{,}6 \\ 9{,}0 & 7{,}8 & 6{,}8 & 6{,}2 \\ 7{,}7 & 5{,}9 & 5{,}6 & 6{,}2 \end{bmatrix} \end{array}$$

5) Um técnico de basquetebol descreveu o desempenho dos titulares de sua equipe, em sete jogos, através da matriz:

$$\begin{bmatrix} 18 & 17 & 18 & 17 & 21 & 18 & 20 \\ 15 & 16 & 18 & 18 & 22 & 21 & 18 \\ 20 & 19 & 20 & 21 & 14 & 14 & 22 \\ 18 & 22 & 20 & 20 & 18 & 22 & 23 \\ 19 & 18 & 12 & 14 & 20 & 17 & 18 \end{bmatrix}$$

Cada elemento a_{ij} dessa matriz é o número de pontos marcados pelo jogador de número i no jogo j.

a) Quantos pontos o jogador de número 4 marcou em todos os jogos?

b) Em qual jogo o atleta número 5 marcou mais pontos?

c) No jogo 7 o técnico não dispunha de nenhum jogador reserva, assim os titulares participaram de todo o jogo, levando em conta que a equipe adversária marcou 99 pontos, qual o resultado final do jogo e essa equipe venceu ou perdeu?

6) [UFRJ] Antônio, Bernardo e Cláudio saíram para ir ao shopping no sábado e no domingo. Na praça de alimentação pararam para apreciar o movimento, e começaram a tomar latas de refrigerantes. As matrizes a seguir resumem quantos refrigerantes cada um consumiu e como a despesa foi dividida:

$S = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. A matriz S refere-se às despesas de sábado e D às de domingo.

Cada elemento a_{ij} nos dá o número de refrigerantes que i pagou para j, sendo Antônio o número 1, Bernardo o número 2 e Cláudio o número 3 (a_{ij} representa o elemento da linha i, coluna j de cada matriz). Assim no sábado Antônio pagou 4 refrigerantes que ele próprio bebeu, 1 refrigerante de Bernardo e 4 de Cláudio (primeira linha da matriz S). Responda:

a) Quem bebeu mais refrigerante no fim de semana?

b) Entre os três, quem ficou devendo mais refrigerantes? Quantos e para quem?

7) [UFRJ] Uma confecção vai fabricar 3 tipos de roupa utilizando materiais diferentes. Considere que a matriz A = (a_{ij}), em que a_{ij} representa quantas unidades do material "j" serão empregadas para fabricar uma roupa do tipo "i".

Considere que $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Pergunta-se:

a) Quantas unidades do material 3 serão empregadas na confecção de uma roupa do tipo 2?
b) Calcule o total de unidades do material 1 que será empregado para fabricar cinco roupas do tipo 1, quatro roupas do tipo 2 e duas roupas do tipo 3.

8) [CPTO] A inversa de uma matriz diagonal qualquer é dada pelo inverso dos elementos da diagonal principal. No caso de uma matriz de ordem 3, teríamos:

$$\textbf{Se} \quad D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \quad \textbf{então} \quad D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1/d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1/d_{33} \end{bmatrix}.$$

Verifique isso, calculando a **Inversa da Matriz A**, através da aplicação da definição $\mathbf{A.A^{-1}} = \mathbf{I_n}$, sendo que $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Para esquentar o processador!

9) Mostre que $\mathbf{I^2 = I}$ para qualquer matriz identidade I.

10) Mostre que $\mathbf{I^n = I}$ para qualquer matriz identidade I e para qualquer que seja o número inteiro positivo "n".

11) Sejam A e B matrizes quadradas (n x n).

a) mostre que se A tem 1 linha com todos os elementos iguais a zero, então (A.B) também tem.
b) mostre que se B tem 1 coluna com todos os elementos iguais a zero, então (A.B) também tem.

RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS

1) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **2)** $C = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ **3)** $\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}$ **4)** $M = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{bmatrix}$ **5a)** 143 pontos

5b) No 5º jogo **5c)** Venceu por 101 a 99 **6a)** Cláudio **6b)** Bernardo, ficou devendo 6 refrigerantes para Antônio

7a) Serão empregadas 3 unidades **7b)** O total será de 33 unidades.

DETERMINANTES

Conceito

De maneira simples, o determinante é um número real associado aos elementos de uma matriz quadrada.

Na verdade, essa "associação" do determinante com os elementos de uma matriz quadrada é feita através da permutação dos elementos da matriz juntamente com o conceito de "classe de uma permutação". (Pesquise!)

Representação

Dada uma matriz A = $[a_{ij}]$, o determinante desta matriz A será representado por **det A** ou **D_A** ou **| A |** ou ainda **det $[a_{ij}]$**.

Ordem

A ordem de um determinante é definida como sendo a ordem da matriz a qual este determinante está associado.
Exemplo:

Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 3\sqrt{5} & 7 \\ 4 & -12 \end{pmatrix}$, o "**det A**" tem ordem 2 ou podemos dizer também que é de 2ª ordem, pois $A = (a_{ij})_{2x2}$.

Cálculo do Determinante

Regras práticas para calcular determinantes de 1ª, 2ª e 3ª ordem:

• **1ª ordem:**

Sendo $A = [a_{11}] \Rightarrow \det A = a_{11}$

Exemplo: $A = [\ 7\ ] \Rightarrow \det A = 7$

• **2ª ordem:**

Sendo $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = a_{11} \,.\, a_{22} - a_{21} \,.\, a_{12}$

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = (-1).\,4 - [2\,.\,3] = -10$

• **3ª ordem (Regras de Sarrus):**

Sendo $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} - (a_{31}.a_{22}.a_{13} + a_{32}.a_{23}.a_{11} + a_{33}.a_{21}.a_{12})$

Visualmente, com a repetição das duas primeiras colunas, temos:

$$\begin{array}{ccc|cc} & & - & - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ & & + & + & + \end{array}$$

> **Atenção:**
> Observe, no exemplo 2 a seguir, a aplicação de uma das notações de Determinante!

Exemplo 1: Para a matriz $A = \begin{bmatrix} 7 & 8 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & -6 & 2 \end{bmatrix}$ temos que: det A = 56 + 40 + 0 – **(** – 12 – 210 + 0 **)** = 96 – **(**– 222**)** = 318

Exemplo 2: Simplifique a expressão $\dfrac{\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & -1 \\ x^2 & 5x \end{vmatrix}}$ para $x \neq 0$.

Resolução: Calculando o determinante do numerador e do denominador, temos:

$$\frac{x^2 + 0 + 1 - [0 + 0 + 1]}{5x^2 - [-x^2]} = \frac{x^2 + 1 - 1}{5x^2 + x^2} = \frac{x^2}{6x^2} = \frac{1}{6} \quad \rightarrow \text{ [que é a expressão dada, porém simplificada!]}$$

Agora, para apresentarmos o cálculo do determinante de uma matriz quadrada de ordem n, com n ≥ 4, vamos recorrer às definições de determinante.

Definição 1:
O determinante de uma matriz unitária $A = (a_{11})$ é igual ao seu próprio elemento a_{11}.

Definição 2:
O determinante de uma matriz quadrada de ordem n, com n ≥ 2, é a soma dos produtos dos elementos da primeira linha pelos respectivos **cofatores**.

Para isto então, precisaremos definir também cofator:

Cofator

Dada a matriz quadrada $A = (a_{ij})$ de ordem n, com n ≥ 2, chama-se cofator do elemento a_{ij} o número que indicaremos por C_{ij} [lê-se: "cofator do elemento a_{ij}"], definido por:

$$\mathbf{C_{ij} = (-1)^{i+j} \, . \, D_{ij}} \qquad \text{ou} \qquad \mathbf{C_{ij} = (-1)^{i+j} \, . \, MC_{ij}}$$

sendo que **D_{ij} [Menor Complementar do elemento a_{ij}]** será o determinante da matriz que se obtém quando se elimina da matriz A, a linha e a coluna que contêm o elemento a_{ij} associado.

Para **exemplificar**, utilizaremos uma matriz de ordem 3.
Veja:

Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ -1 & -2 & 0 \\ 6 & 7 & 1 \end{bmatrix}$, determine: **a)** D_{11} **b)** D_{32} **c)** C_{13} **d)** C_{32}

Resolução:

a) $D_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = (-2).(1) - (7).(0) = -2$

b) $D_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = (3).(0) - (-1).(4) = 4$

c) $C_{13} = (-1)^{1+3}. D_{13} = (-1)^4 . \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = (1) . (-7 + 12) = 5$

d) $C_{32} = (-1)^{3+2}. D_{32} = (-1)^5 . (4) = (-1) . (4) = -4$

Observação:

Veja a "definição 2" aplicada ao cálculo de um determinante de 2ª ordem:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \, . \, C_{11} + a_{12} \, . \, C_{12}$$

Como $\mathbf{C_{11}} = (-1)^{1+1}. D_{11} = (-1)^2. a_{22} = (1) . a_{22} = \mathbf{a_{22}}$ e $\mathbf{C_{12}} = (-1)^{1+2}. D_{12} = (-1)^3. a_{21} = (-1) . a_{21} = \mathbf{-a_{21}}$, temos:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \, . \, a_{22} + a_{12} \, . \, (-a_{21}) \qquad \therefore \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \, . \, a_{22} - a_{12} \, . \, a_{21}$$

resultado este que, obviamente, coincide com a regra prática vista anteriormente. É claro que, por um processo análogo, verificar-se-á também a regra de Sarrus vista anteriormente.

Teorema de Laplace

O matemático francês Laplace descobriu que o desenvolvimento do determinante de uma matriz por meio de cofatores pode ser feito com os elementos de qualquer linha ou qualquer coluna (dizemos então, qualquer "fila"), isto é, não é necessário que utilizemos a primeira linha da matriz, conforme a definição 2 vista anteriormente. Laplace provou que:

"O determinante de uma matriz quadrada de ordem n, com n ≥ 2, é igual a soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer pelos respectivos cofatores".

Observações:

• Este teorema permite o cálculo do determinante de uma matriz de qualquer ordem. Como já conhecemos regras práticas para o cálculo dos determinantes de ordem 2 e de ordem 3, só recorremos a este teorema para o cálculo de determinantes de ordem 4 ou maior. O uso desse teorema possibilita rebaixar a ordem do determinante. Assim, para o cálculo de um determinante de 4ª ordem, a sua aplicação resultará no cálculo de quatro determinantes de 3ª ordem, onde podemos aplicar a Regra de Sarrus. O cálculo de determinantes de 5ª ordem ou superior, pode ser muito facilitado fazendo uso de propriedades que veremos mais adiante ou até mesmo fazendo uso de planilhas eletrônicas, a exemplo do **Microsoft Excel**, entre outros softwares matemáticos como o **Maple**, **MatLab**, etc.

• Para agilizar o cálculo de um determinante pelo teorema de Laplace, escolhe-se a fila (linha ou coluna) que contenha mais zeros, pois isto facilita e reduz o número de cálculos necessários.

Veja o exemplo a seguir:

Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 5 \\ -2 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 0 & -5 & 8 \end{bmatrix}$, calcule o seu determinante.

Resolução:

Fazendo uma "boa" escolha, optaremos pela 2ª coluna, que já foi destacada na matriz dada. Então temos:

$\det A = a_{12} \,.\, C_{12} + a_{22} \,.\, C_{22} + a_{32} \,.\, C_{32} + a_{42} \,.\, C_{42}$

$\det A = (1) \,.\, C_{12} + \cancel{(0) \,.\, C_{22}} + (6) \,.\, C_{32} + \cancel{(0) \,.\, C_{42}}$

$\det A = (1) \,.\, C_{12} + (6) \,.\, C_{32}$ [∗]

Calculando os cofatores, temos:

$$\mathbf{C_{12}} = (-1)^{1+2} \,.\, D_{12} = (-1)^3 \,.\, \begin{vmatrix} 4 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & 0 \\ 7 & -5 & 8 \end{vmatrix} = (-1) \,.\, [96 + 0 + 50 - 105 - 0 - 16] = (-1) \,.\, [25] = -25$$

$$\mathbf{C_{32}} = (-1)^{3+2} \,.\, D_{32} = (-1)^5 \,.\, \begin{vmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 5 \\ 7 & -5 & 8 \end{vmatrix} = (-1) \,.\, [24 + 70 + 0 - 0 - 75 - 64] = (-1) \,.\, [-45] = 45$$

Agora, substituindo os cofatores calculados na expressão [∗], temos:

$\det A = (1) \,.\, C_{12} + (6) \,.\, C_{32}$

$\det A = (1).(-25) + (6).(45)$

$\det A = (-25) + (270)$

det A = 245 → que é o determinante que queríamos calcular!

> **Observação:**
> O leitor poderá verificar que a utilização de qualquer outra fila, no cálculo deste determinante, produzirá o mesmo resultado.

Propriedades dos Determinantes

P1) O determinante de uma matriz quadrada é igual a **zero**, se a matriz possui:
a) uma fila nula (todos os elementos iguais a zero)
b) duas filas paralelas iguais
c) duas filas paralelas proporcionais
d) uma fila gerada pela combinação linear de outras filas paralelas

P2) O determinante de uma matriz quadrada **não se altera** se:
a) somarmos a uma fila uma combinação linear de outras filas paralelas **[Teorema de Jacobi]**
b) trocarmos ordenadamente linhas por colunas **[det A = det A^t]**

P3) O determinante de uma matriz quadrada de ordem "n" **altera-se**:
a) trocando de sinal, quando duas filas paralelas trocam de lugar entre si
b) ficando multiplicado por "k" quando os elementos de uma fila são multiplicados por k.
c) ficando multiplicado por "k^n" quando a matriz é multiplicada por k. **[det (k.A) = k^n . det A]**

P4) Propriedades complementares:

a) Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem, então det (AB) = det A . det B **[Teorema de Binet]**

b) Seja uma matriz quadrada A de ordem n. Se a matriz A é **triangular** ($a_{ij} = 0$ se $i < j$ ou $a_{ij} = 0$ se $i > j$) então o determinante desta matriz é igual ao produto dos elementos da diagonal principal, ou seja, det A = $\prod_{i=1}^{n}[a_{ii}]$

Veja: $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ x & b & 0 & 0 \\ y & z & c & 0 \\ m & n & p & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & m & n & p \\ 0 & b & x & y \\ 0 & 0 & c & z \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = a \,.\, b \,.\, c \,.\, d$

c) **Determinante de Vandermonde:** cada coluna é uma progressão geométrica com o primeiro elemento igual a 1. Desta forma, o determinante da matriz de ordem n, com n ≥ 3, é igual ao produto das diferenças indicada na segunda linha:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b - a).(c - a).(c - b)$ A matriz de Vandermonde também é conhecida como **matriz das potências**.

d) O determinante de uma matriz quadrada A pode ser decomposto na soma dos determinantes de outras matrizes, sendo estas outras matrizes iguais à matriz A exceto numa coluna "j" e tal que a coluna "j" de A é igual à soma das colunas "j" das outras matrizes.

$$\begin{vmatrix} a & p+q & d \\ b & m+n & e \\ c & r+s & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & p & d \\ b & m & e \\ c & r & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & q & d \\ b & n & e \\ c & s & f \end{vmatrix}$$

e) Matrizes inversas têm determinantes inversos: $\boxed{\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}}$

Observações Finais:

- Convém mencionar que: det(A + B) ≠ det A + det B
- Uma matriz quadrada A é **inversível** se, e somente se, det A ≠ 0
- O determinante de uma matriz identidade (ou unidade) será sempre 1 (um). Simbolicamente, temos: $\det(I_n) = 1$.

Algumas Notas Históricas:

- Pierre Frederic **Sarrus** (1798 – 1861) foi professor na Universidade Francesa de Strasbourg. A regra de Sarrus provavelmente foi escrita no ano de 1833. O Prof. Sarrus (pronuncia-se Sarrí), foi premiado pela Academia Francesa de Ciências, pela autoria de um trabalho que versava sobre as integrais múltiplas, que normalmente é estudado na disciplina de Cálculo Avançado.

- Pierre Simon, o Marquês de **Laplace** (1749 – 1827), matemático francês que, dentre outros grandes feitos, demonstrou um dos mais importantes teoremas no estudo de determinantes.

- Karl Gustav Jacob **Jacobi** (1804 – 1851) matemático alemão que, além de várias contribuições na área científica, tinha uma reputação de ser excelente professor, atraindo muitos estudantes para suas aulas.

- Alexandre Théophile **Vandermonde** (1735 – 1796), nascido em Paris, teve como primeira paixão a música, voltando-se para a Matemática somente aos 35 anos de idade, contribuindo então para a teoria das equações e a teoria dos determinantes.

Simplificando o cálculo de um determinante aplicando os Teoremas de Jacobi e Laplace

Os procedimentos apresentados a seguir são especialmente úteis quando o determinante tem ordem maior ou igual a 4, entretanto podem ser aplicados em determinantes de qualquer ordem. Veja o **exemplo**:

Calcule o determinante da matriz A, sendo que:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 0 & 5 \\ -3 & 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolução: Vamos calcular o determinante da matriz em questão, por 2 métodos diferentes.

Método 1:

Inicialmente, aplicaremos o **Teorema de Jacobi**, para criar uma fila com o máximo de "zeros" possível. Escolhendo a primeira coluna temos:

1ª linha

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & 9 & -12 & -11 \\ 0 & -4 & 16 & 13 \end{vmatrix}$$

→ **Multiplicamos** a L1 por [–2] criando a linha auxiliar (–2 4 –6 –8) e a **adicionamos** (termo a termo) na L2.
→ **Multiplicamos** a L1 por [–4] criando a linha auxiliar (–4 8 –12 –16) e a **adicionamos** (termo a termo) na L3.
→ **Multiplicamos** a L1 por [3] criando a linha auxiliar (3 –6 9 12) e a **adicionamos** (termo a termo) na L4.

Agora, podemos aplicar o **Teorema de Laplace** mais facilmente, pois temos uma fila (1ª coluna) com muitos zeros, o que facilita tal procedimento. Então:

$\det(A) = a_{11} \,.\, C_{11} + a_{21} \,.\, C_{21} + a_{31} \,.\, C_{31} + a_{41} \,.\, C_{41}$

$\det(A) = (1).C_{11} + \cancel{(0).C_{21}} + \cancel{(0).C_{31}} + \cancel{(0).C_{41}}$

$\det(A) = (1).(193)$

det(A) = 193

$C_{11} = (-1)^{1+1} \,.\, D_{11}$

$$C_{11} = (-1)^2 \,.\, \begin{vmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 9 & -12 & -11 \\ -4 & 16 & 13 \end{vmatrix}$$

$C_{11} = (1).[-156 - 220 - 288 - (-96 - 176 - 585)]$
$C_{11} = (1).[193]$
$C_{11} = 193$

Método 2:

Por outro lado, caso seja conveniente, podemos **não** utilizar o Teorema de Laplace. Voltamos à situação anterior. Continuaremos aplicando o **Teorema de Jacobi** para transformar a matriz dada em uma matriz **triangular**.

2ª linha

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & 9 & -12 & -11 \\ 0 & -4 & 16 & 13 \end{vmatrix}$$

→ **Multiplicamos** a L2 por [–9] criando a linha auxiliar (0 –9 45 18) e a **adicionamos** (termo a termo) na L3.
→ **Multiplicamos** a L2 por [4] criando a linha auxiliar (0 4 –20 –8) e a **adicionamos** (termo a termo) na L4.

Assim temos:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 33 & 7 \\ 0 & 0 & -4 & 5 \end{vmatrix}$$

→ **Multiplicamos** a L3 por [4/33] criando a linha auxiliar (0 0 4 28/33) e a **adicionamos** (termo a termo) na L4.

> Este método também é conhecido como "Triangulação de uma Matriz".

Agora, chegamos a **matriz triangular** esperada:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 33 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 193/33 \end{vmatrix}$$

Então, neste caso, o determinante é a multiplicação dos termos da diagonal principal. Logo:

$\det(A) = (1).(1).(33).(193/33) \quad \therefore \quad$ **det(A) = 193**

A Regra de Chió – Um Método Prático de "Rebaixamento" de Matrizes

É um método muito útil para o cálculo de um determinante de ordem maior ou igual a quatro, embora possa ser utilizado para calcular determinantes de qualquer ordem.

Para aplicarmos o método de Chió é necessário que a matriz possua algum elemento $\mathbf{a_{ij} = 1}$. Caso não apresente o referido elemento, podemos "ajustar" a matriz para que fique adequada ao método. Este "ajuste" pode implicar numa alteração do valor do determinante (conforme as propriedades vistas anteriormente). Caso isto seja feito, é necessário fazer as devidas compensações no resultado final.

Para **exemplificar**, pegaremos a mesma matriz do exemplo anterior (veja página anterior). Calcularemos agora então, o seu determinante, através da Regra de Chió.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 0 & 5 \\ -3 & 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolução:

Inicialmente localizamos o elemento 1, que neste caso é $\mathbf{a_{11} = 1}$, e eliminamos a linha e a coluna nas quais ele se encontra.

Montamos então um novo determinante com os elementos que NÃO estão na linha e coluna eliminadas e de cada um deles, subtraímos o produto dos elementos correspondentes que estão na linha e coluna eliminadas.

$$\left|\begin{array}{c:ccc} 1 & -2 & 3 & 4 \\ \hdashline 2 & -3 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 0 & 5 \\ -3 & 2 & 7 & 1 \end{array}\right| = (-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} -3-(-4) & 1-(6) & 6-(8) \\ 1-(-8) & 0-(12) & 5-(16) \\ 2-(6) & 7-(-9) & 1-(-12) \end{vmatrix} = (-1)^2.\begin{vmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 9 & -12 & -11 \\ -4 & 16 & 13 \end{vmatrix}$$

Para que a regra funcione, é necessária a multiplicação no novo determinante pelo fator $\mathbf{(-1)^{i+j}}$ onde **i** e **j** representam, respectivamente, linha e coluna onde o número 1 (um) escolhido se encontrava.

Agora, temos que o determinante de ordem 4 é **equivalente** ao determinante de ordem 3. Então:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 0 & 5 \\ -3 & 2 & 7 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 9 & -12 & -11 \\ -4 & 16 & 13 \end{vmatrix} = -156-220-288-(-96-176-585) = -664+857 = 193$$

Desta forma: **det(A) = 193**.

Nota: Podemos "continuar" aplicando a Regra de Chió no determinante de ordem 3, e assim, rebaixando-o para um determinante de ordem 2. Veja como seria:

$$\left|\begin{array}{c:cc} 1 & -5 & -2 \\ \hdashline 9 & -12 & -11 \\ -4 & 16 & 13 \end{array}\right| = (-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} -12-(-45) & -11-(-18) \\ 16-(20) & 13-(8) \end{vmatrix} = (-1)^2\cdot\begin{vmatrix} 33 & 7 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = (1).\,[165-(-28)] = \mathbf{193}$$

Para descontrair...

EXERCÍCIOS – Determinantes

1) Considerando A = $[a_{ij}]$ uma matriz quadrada de 2ª ordem, tal que $\mathbf{a_{ij} = i^2 + i.j}$, calcule o valor de det(A).

2) Seja B = $(b_{ij})_{3x3}$ onde $b_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ se } i < j \\ i+j, \text{se } i = j \\ i-j, \text{se } i > j \end{cases}$, então o valor de det(B) é:

3) Dada a matriz A = $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, determine o valor de: **a)** det(A) **b)** det (A^2) **c)** det(A^{-1})

↳ Neste caso, utilize 2 processos diferentes!

4) Seja a matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$. Calcule o cofator dos elementos: a_{11}, a_{22}, a_{23} e a_{31}.

5) [UFPR] Dadas as matrizes A = $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, calcule o valor de M, sabendo que **M = 50 + det(AB)**.

6) Dadas as matrizes **M** = $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ e **N** = $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, calcule o determinante do produto de $\mathbf{M^t}$ por **N**.

7) Resolva as equações: **a)** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & x \\ 2 & x & -3 \end{vmatrix} = 2$ **b)** $\begin{vmatrix} x+1 & 3 & x \\ 3 & x & 1 \\ x & 2 & x-1 \end{vmatrix} = 0$

8) [FGV – Adaptada] Seja a equação $\det(A - x.I) = 0$ onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $x \in R$ e I a matriz identidade. Determine a soma das raízes desta equação.

9) [UFCE] Calcule o valor do determinante da matriz $\mathbf{P^2}$, sabendo que **P** = $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

10) [CPTO] Justifique, através de uma propriedade, o valor dos determinantes dados a seguir.

a) $\begin{vmatrix} 14 & 0 & -2 \\ 7 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 5 \\ -1 & 9 & -1 \\ 8 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0$

d) $\begin{vmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 6 & 9 & 3 \\ 8 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0$

e) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 9 & 3 \\ 7 & 10 & 4 \end{vmatrix} = 0$

f) $\begin{vmatrix} 1 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 14$

11) [CPTO] Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$. Sabendo que **det(A) = 10**, determine o valor dos determinantes indicados:

a) $\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} =$

d) $\begin{vmatrix} a & b & -c \\ d & e & -f \\ g & h & -i \end{vmatrix} =$

g) $\begin{vmatrix} b & a & -c \\ e & d & -f \\ h & g & -i \end{vmatrix} =$

b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} =$

e) $\begin{vmatrix} 2a & b & -3c \\ 2d & e & -3f \\ 2g & h & -3i \end{vmatrix} =$

h) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 3a+g & 3b+h & 3c+i \end{vmatrix} =$

c) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \end{vmatrix} =$

f) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix} =$

i) $\begin{vmatrix} -a & -b & -3c \\ d & e & 3f \\ 2g & 2h & 6i \end{vmatrix} =$

12) [CPTO] Considere a matriz $A=[a_{ij}]_{3x3}$ tal que $a_{ij} = \begin{cases} 1, & se\ i<j \\ i+j, & se\ i \geq j \end{cases}$. Assim sendo, calcule o valor de x sabendo que $\begin{bmatrix} \det A & \sqrt[3]{-8} \\ \pi & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2-2 & -2 \\ \pi & 14/2 \end{bmatrix}$.

13) [CPTO] Considere as matrizes retangulares $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Determine o valor de **k/3** para que a expressão $\begin{vmatrix} \det(AB) & -10 \\ k & 1 \end{vmatrix} = 2k+16$ seja verdadeira.

14) Encontre o conjunto-solução da equação: $\begin{vmatrix} 2x & 9 \\ 2 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3-x \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2+x \end{vmatrix}$.

15) Calcule: $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ -3 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

16) Qual o valor de D = $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$?

17) Experimente resolver o determinante da matriz A ao lado, com o auxílio do Microsoft Excel ou um similar:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 5 & 1 & 4 & 1 & 2 & 1 & 4 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -7 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & -9 \end{bmatrix}$$

18) Calcule o valor do determinante: $\det = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 9 & 1 & 1 & -4 & 3 \\ 5 & -1 & 4 & 3 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & -2 & 4 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 9 & -8 & 5 & -5 \\ 6 & 1 & 7 & 7 & 5 & 8 \end{vmatrix}$.

19) Calcule $\det(M)$ sabendo que $M = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 6 & 7 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

20) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 1-x^2 & -1 & x+1 \\ 1+x^2 & 2+x & 4 \end{bmatrix} - x.\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1-x \\ -x & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \end{bmatrix}$ com $x \in \Re$, calcule:

a) det(A)

b) os valores de "x" que anulam o determinante de A.

21) [ITA / SP] Quaisquer que sejam os números reais **a**, **b** e **c**, o determinante da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{bmatrix}$ é dado por:

a) ab + ac + bc **b)** abc **c)** zero **d)** abc + 1 **e)** 1

22) Com seis "zeros" e três "cincos", quantas matrizes quadradas de ordem três podemos formar com o determinante diferente de zero?

RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS

1) –2 **2)** 48 **3a)** 2 **3b)** 4 **3c)** 1/2 **4)** $C_{11} = 34$, $C_{22} = 6$, $C_{23} = 5$ e $C_{31} = -15$

5) M = 50 **6)** zero **7a)** S = {1 , 2} **7b)** S = {7/3} **8)** 5 **9)** 64

10a) C_2 é Nula **10b)** $C_1 = C_3$ **10c)** $L_3 = 3.L_1$ **10d)** $C_1 = 2.C_3$ **10e)** $L_3 = L_1 + L_2$

10f) Numa matriz triangular, o determinante é o produto dos elementos da diagonal principal. Então: det = 1.2.7 = 14

11a) 10 **11b)** –10 **11c)** 20 **11d)** –10 **11e)** –60 **11f)** 80 **11g)** 10 **11h)** 10 **11i)** –60

12) S = {± 5} **13)** 11 **14)** S = {0 , 3} **15)** 4 **16)** D = –100 **17)** –386 **18)** zero

19) det(M) = 52 **20a)** $\det(A) = 3x^2 - 3x - 6$ **20b)** S = {–1, 2} **21)** B **22)** 6 matrizes

Para refletir:

Verdadeiramente,
o que mais prazer me proporciona,
não é o saber, mas o estudar;
não a posse, mas a conquista;
não o estar aqui, mas o chegar além.

Carl Friedrich Gauss

Aplicações de Determinantes

Dentre as várias aplicações dos determinantes, vamos destacar uma delas. É a técnica para encontrar as equações de algumas formas geométricas (curvas e superfícies), tais como a reta, a circunferência, o plano, a esfera, entre outras.

• A Equação de uma Reta

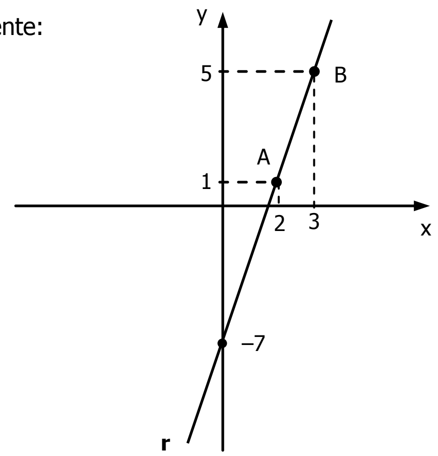
[Relembrando] Um dos métodos para se encontrar a equação de uma reta (no plano) que passa por dois pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ conhecidos é:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Exemplo: Determine a equação da reta **r** que passa pelos pontos $A(2,1)$ e $B(3,5)$.

Resolução:

Graficamente:



Substituindo as coordenadas dos pontos na equação dada acima, temos: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Desenvolvendo o determinante (pela a Regra de Sarrus), temos:

$x + 3y + 10 - (3 + 5x + 2y) = 0 \quad \therefore \quad -4x + y + 7 = 0$

Assim, a equação da reta **r** que passa pelos pontos A e B é: $4x - y - 7 = 0$

A equação da reta em questão, escrita na forma de função, será: $y = 4x - 7$

• A Equação de uma Circunferência

Para três pontos conhecidos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ distintos e não colineares no plano, teremos uma circunferência. A sua equação pode ser dada por:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_A^2 + y_A^2 & x_A & y_A & 1 \\ x_B^2 + y_B^2 & x_B & y_B & 1 \\ x_C^2 + y_C^2 & x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Exemplo: Encontre a equação da circunferência que passa pelos pontos $A(1,7)$, $B(6,2)$ e $C(4,6)$.

Resolução:

Substituindo as coordenadas dos pontos dados na respectiva equação, temos: $\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ 1^2 + 7^2 & 1 & 7 & 1 \\ 6^2 + 2^2 & 6 & 2 & 1 \\ 4^2 + 6^2 & 4 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0$

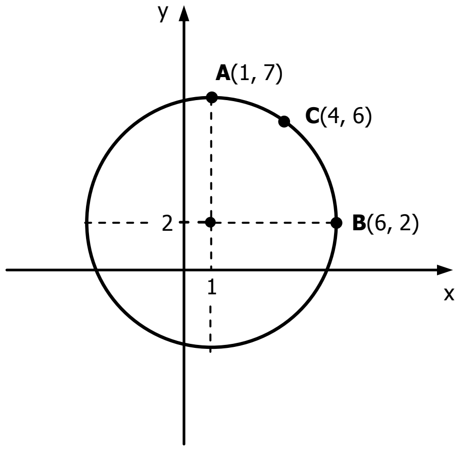
Então: $\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ 50 & 1 & 7 & 1 \\ 40 & 6 & 2 & 1 \\ 52 & 4 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Desenvolvendo o determinante, encontramos: $10x^2 + 10y^2 - 20x - 40y - 200 = 0$

Simplificando a expressão, teremos a equação (geral) da circunferência dada: $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$

Escrevendo a equação encontrada na forma padrão (reduzida) da circunferência: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$

Assim, a circunferência em questão tem centro de coordenadas $(1,2)$ e raio $r = 5$.

Geometricamente, temos:



• **A Equação de um Plano**

Podemos utilizar um método análogo aos anteriores para encontrar a equação de um plano no espaço tridimensional, conhecendo três pontos $A(x_A,\ y_A,\ z_A)$, $B(x_B,\ y_B,\ z_B)$ e $C(x_C,\ y_C,\ z_C)$ não colineares:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_A & y_A & z_A & 1 \\ x_B & y_B & z_B & 1 \\ x_C & y_C & z_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

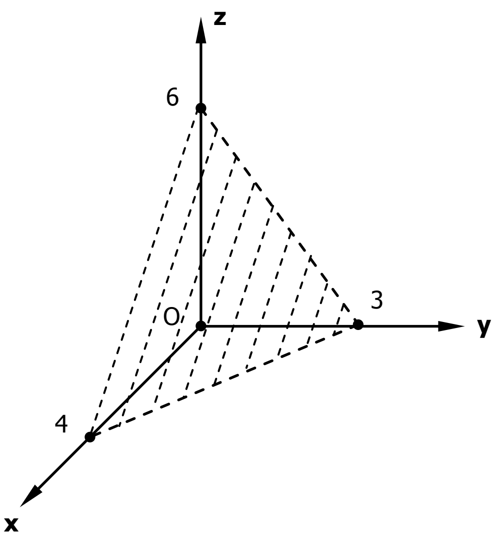
Exemplo: Determine a equação do plano que passa pelos pontos (não colineares) $A(2,1,1)$, $B(0,3,0)$ e $C(-2,1,7)$.

Resolução:

Substituindo as coordenadas dos pontos na expressão, temos: $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Desenvolvendo o determinante, chegaremos à equação (mais simples) do plano em questão: $3x+4y+2z-12=0$

Representando graficamente (uma parte do plano), no espaço tridimensional, temos:



Existem outras figuras (formas geométricas) no plano e no espaço que podem ter suas equações determinadas pelo método apresentado aqui. São Parábolas, Hipérboles, Elipses, Esferas, Hiperplanos, entre outras. Pesquise!

Exercícios no livro: ANTON, Howard; RORRES, Chris. **Álgebra Linear com aplicações.** [Conjunto de Exercícios 11.1 – p. 366]