

## STUDIUL CIRCUITULUI SERIE R,L,C ÎN REGIM PERMANENT SINUSOIDAL

### 1. Breviar teoretic

Se consideră circuitul liniar format dintr-un rezistor, legat în serie cu o bobină și un condensator, alimentat cu o tensiune sinusoidală de forma:

$$u = U\sqrt{2} \sin(\omega t + \gamma), \quad \omega = 2\pi f, \quad (1)$$

în care  $U$  este valoarea efectivă, iar  $\gamma$  este faza inițială a tensiunii la borne.

Curentul care va lua naștere prin circuit va fi tot o funcție sinusoidală în timp (fig.1), având aceeași frecvență ca și tensiunea aplicată și defazată în urma acesteia, de forma:

$$i = I\sqrt{2} \sin(\omega t + \gamma - \varphi), \quad (2)$$

în care  $I$  este valoarea efectivă a curentului, iar  $\varphi$  este defazajul dintre tensiune și curent.

Expresiile în complex ale tensiunii la borne și curentului sunt:

$$\underline{U} = U \cdot e^{j\gamma}, \text{ respectiv } \underline{I} = I \cdot e^{j(\gamma - \varphi)}. \quad (3)$$

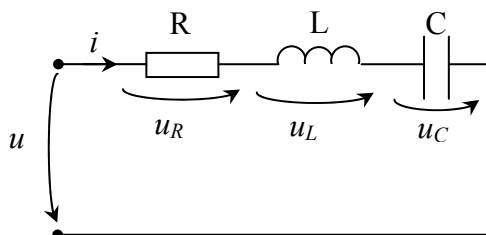


Fig.1

Presupunând condiții inițiale nule, ecuația circuitului este:

$$u = u_R + u_L + u_C \Rightarrow u = R \cdot i + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i \cdot dt \quad (4)$$

Ținând seama de regulile de derivare și integrare, ecuația circuitului, în complex, devine:

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C \Rightarrow \underline{U} = R \cdot \underline{I} + j\omega L \cdot \underline{I} + \frac{1}{j\omega C} \cdot \underline{I} = \underline{Z} \cdot \underline{I} \quad (5)$$

$\underline{Z} = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = R + jX$  reprezintă impedanța complexă a circuitului.

Pe baza relației (5) se poate trasa diagrama fazorială (fig.2).

Se vede din figura 2 că:

$$\varphi = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad (6)$$

și

$$\begin{aligned} R &= Z \cos \varphi \\ X &= Z \sin \varphi \end{aligned} \quad (7)$$

Curentul în complex se va deduce în mod simplu:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{U \cdot e^{j\gamma}}{R + jX} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X^2}} e^{j(\gamma - \arctg \frac{X}{R})} \quad (8)$$

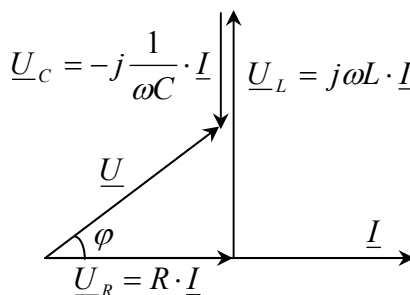


Fig.2

Ținând seama de relația curentului din (3), se identifică  $I$  și  $\varphi$ :

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X^2}}, \quad \varphi = \arctg \frac{X}{R} \quad (9)$$

Intensitatea curentului electric, ca funcție de timp, este atunci:

$$i = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X^2}} \cdot \sqrt{2} \sin(\omega t + \gamma - \arctg \frac{X}{R}) \quad (10)$$

### Rezonanța circuitului serie R,L,C (rezonanța de tensiune)

Se știe că pentru un circuit în regim permanent sinusoidal se pot defini următoarele puteri:

- puterea instantanee:  $p = u \cdot i$
- puterea aparentă:  $S = U \cdot I$
- puterea activă:  $P = U \cdot I \cdot \cos \varphi = R \cdot I^2$
- puterea reactivă:  $Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi = X \cdot I^2$
- puterea complexă:  $\underline{S} = P + jQ$

Se afirmă că un circuit electric în regim permanent sinusoidal se află în stare de *rezonanță electrică* dacă puterea reactivă asociată lui este nulă:  $Q = 0$ .

Ținând seama de expresia lui  $Q$  din (11), condiția de rezonanță este echivalentă cu:

$$X = 0 \quad (12)$$

Pentru un circuit R,L,C serie, relația (12) se scrie:

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \quad (13)$$

Îndeplinirea condiției (13) se poate obține în două moduri:

- menținând  $\omega$  constant și modificând  $L$  sau  $C$ ;
- menținând  $L$  și  $C$  constante și modificând pulsația  $\omega$ , respectiv frecvența  $f$ .

Pulsația (frecvența) pentru care se realizează condiția (13) se notează cu  $\omega_0$  ( $f_0$ ) și se numește *pulsație (frecvență) de rezonanță*:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (14)$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (15)$$

Ca urmare a stării de rezonanță electrică rezultă următoarele consecințe:

a) din relația lui  $Q$  din (11), deoarece  $U \neq 0$  și  $I \neq 0$ , rezultă  $\varphi = 0$  (curentul este în fază cu tensiunea), respectiv  $\cos \varphi = 1$  (factor de putere unitar);

b)  $S = P = U \cdot I = R \cdot I^2$

c)  $R = Z \cos \varphi = Z$

d)  $I_0 = \frac{U}{R}$  (curentul are valoare maximă la rezonanță);

e) din (13) rezultă  $\omega_0 L \cdot I_0 = \frac{1}{\omega_0 C} \cdot I_0 \Rightarrow U_{L0} = U_{C0}$  (tensiunea la bornele inductanței este egală cu tensiunea la bornele capacității);

f) din diagrama fazorială la rezonanță (fig.3) se observă că  $U_{L0}$  și  $U_{C0}$  sunt nu numai egale ca valoare, dar și în opoziție de fază;

g) din fig.3 se observă că  $\underline{U} = \underline{U}_R$  (întreaga tensiune a rețelei apare la bornele rezistorului).

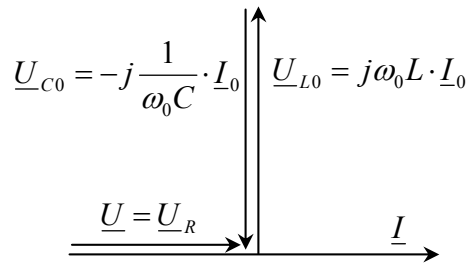


Fig.3

### Caracteristica de rezonanță

Caracteristica de rezonanță este reprezentarea grafică a variației valorii efective a intensității curentului electric în funcție de pulsație sau frecvență, în jurul frecvenței de rezonanță.

$$I = f(\omega) \Big|_{\omega_0 = \omega} \quad (16)$$

Din relația (9), expresia lui  $I$  în funcție de pulsație se scrie:

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X^2}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (17)$$

Se definește factorul de calitate al circuitului ca raportul:

$$Q_s = \frac{U_{L0}}{U_{R0}} = \frac{U_{C0}}{U_{R0}} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (18)$$

După prelucrări succesive, relația (17) devine:

$$I = \frac{U}{R \cdot \sqrt{1 + Q_s^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} \quad (19)$$

La trasarea curbelor de rezonanță este obișnuit să se considere valorile relative (raportate) ale mărimilor în locul celor absolute. Notând  $\omega_r = \frac{\omega}{\omega_0}$  (pulsăția relativă) și

$I_r = \frac{I}{I_0}$  (curentul relativ), unde  $I_0$  este curentul la rezonanță, relația (19) devine:

$$I_r = \frac{1}{\sqrt{1 + Q_s^2 \left( \omega_r - \frac{1}{\omega_r} \right)^2}} \quad (20)$$

Reprezentând grafic această relație, pentru diferite valori ale lui  $Q_s$ , se obține familia de curbe de rezonanță (fig.4).

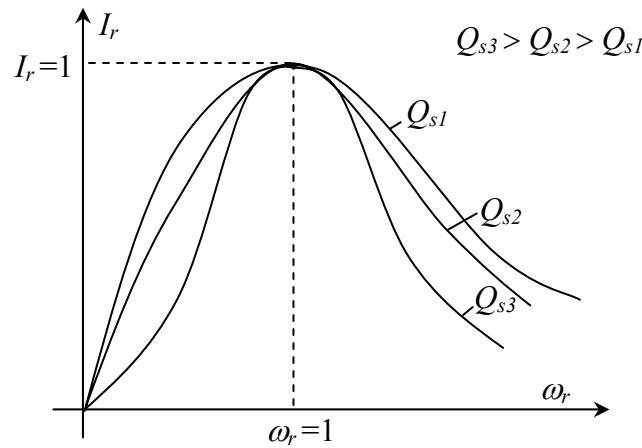


Fig.4

Introducând valoarea relativă a pulsăției,  $\omega_r$ , în expresia defazajului (6), se obține:

$$\varphi = \arctg \left[ Q_s \cdot \left( \omega_r - \frac{1}{\omega_r} \right) \right] \quad (21)$$

În figura 5 sunt reprezentate curbele  $\varphi = \varphi(\omega_r)$  la un circuit serie, considerând diferite valori pentru factorul de calitate  $Q_s$ .

În cazul circuitului serie prezintă interes și variația valorilor efective ale tensiunilor la bornele elementelor reactive (L,C) în funcție de frecvență.

Tensiunea la bornele bobinei este:

$$U_L = \omega L \cdot \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \quad (22)$$

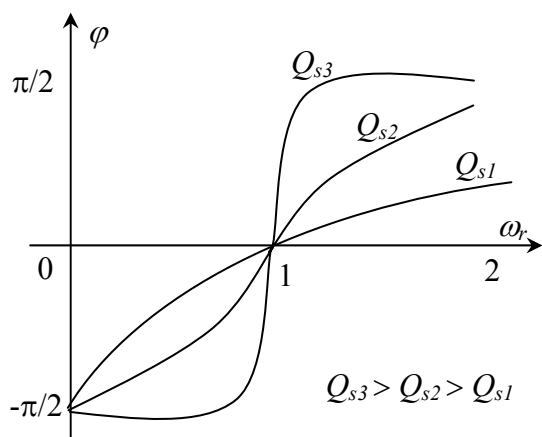


Fig.5

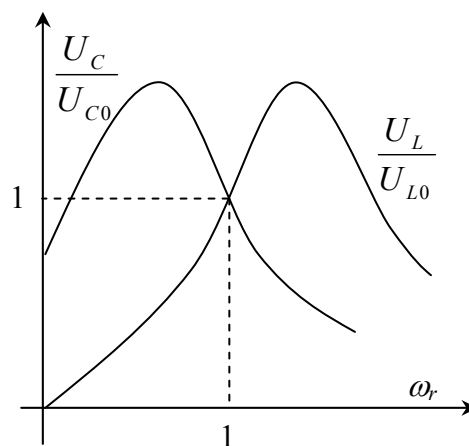


Fig.6

Raportând tensiunea  $U_L$  la valoarea tensiunii la bornele bobinei obținută la rezonanță  $U_{L0}$ , rezultă:

$$\frac{U_L}{U_{L0}} = \frac{\omega_r}{\sqrt{1 + Q_s^2 \cdot \left(\omega_r - \frac{1}{\omega_r}\right)^2}} = \omega_r \cdot I_r \quad (23)$$

Tensiunea la bornele condensatorului este:

$$U_C = \frac{1}{\omega C} \cdot \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (24)$$

Raportând tensiunea  $U_C$  la valoarea sa la rezonanță  $U_{C0}$ , rezultă:

$$\frac{U_C}{U_{C0}} = \frac{1}{\omega_r \cdot \sqrt{1 + Q_s^2 \cdot \left(\omega_r - \frac{1}{\omega_r}\right)^2}} = \frac{1}{\omega_r} \cdot I_r \quad (25)$$

În figura 6 s-au reprezentat curbele  $\frac{U_L}{U_{L0}} = f(\omega_r)$  și  $\frac{U_C}{U_{C0}} = f(\omega_r)$  pentru o aceeași valoare a factorului de calitate  $Q_s$ .

## 2. Chestiuni de studiat

Se va studia rezonanța în două moduri:

2.1. Menținând  $f = \text{constantă}$  ( $f = 50 \text{ Hz}$ ) și  $L = \text{constantă}$ , se variază  $C$ , punându-se în evidență rezonanța.

2.2. Menținând  $L = \text{constantă}$  și  $C = \text{constantă}$ , se variază frecvența  $f$ , punându-se în evidență rezonanța.

### 3. Scheme de lucru și aparate utilizate

**3.1.** Pentru primul caz, când variază capacitatea circuitului C, se folosește schema din fig.5, în care:

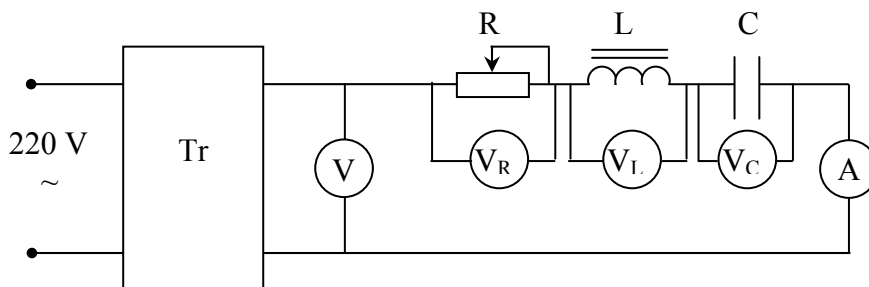


Fig.5

**Tr** – transformator de tensiune, coborât;

**R** – rezistor variabil în decade, în domeniul (1..1000)  $\Omega$ ;

**L** – bobină cu miez feromagnetic;

**C** – condensator variabil, în domeniul (0.1..11)  $\mu\text{F}$ ;

**V, V<sub>R</sub>, V<sub>L</sub>, V<sub>C</sub>** – voltmetre digitale, cu domeniul de 1000 V;

**A** – multimetru digital, selectat pe domeniul de 1 A.

**3.2.** În cazul în care se dorește varierea frecvenței, la L și C constante, se folosește schema din fig.6, în care:

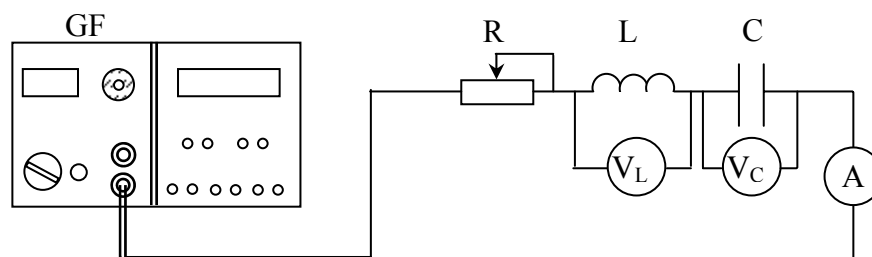


Fig.6

**GF** – generator de tensiuni cu frecvențe variabile, tip HAMEG HM 8032;

**R** – rezistor variabil în decade, în domeniul (1..1000)  $\Omega$ ;

**L** – bobină fără miez feromagnetic;

**C** – condensator variabil, în domeniul (0.1..11)  $\mu\text{F}$ ;

**V<sub>L</sub>, V<sub>C</sub>** – voltmetre digitale, cu domeniul de 1000 V;

**A** – multimetru digital, selectat pe domeniul de 1 A.

### 4. Modul de lucru

**4.1.** Se realizează schema din fig.5. Se fixează rezistența (în decade) astfel încât rezistența circuitului să fie de 580  $\Omega$ . Se alimentează montajul. Se alege la ieșirea transformatorului Tr o tensiune de 50 V, 60 V sau 70 V. Se dau diferite valori lui C (între 1  $\mu\text{F}$  și 10  $\mu\text{F}$ ), citindu-se tensiunile  $U_R$ ,  $U_L$  și  $U_C$  la voltmetre, precum și curentul I la ampermetru. În timpul acestor citiri tensiunea U citită la voltmetrul V se menține constantă. Se reține în mod special valoarea maximă a curentului  $I_0$  atunci când C variază. Această valoare corespunde stării de rezonanță. În această stare se verifică dacă  $U_{L0} = U_{C0}$  (dacă aceste valori nu sunt egale, aceasta se datorează faptului că bobina de inductanță L mai are și

o rezistență ohmică proprie  $r$ , astfel încât căderea de tensiune pe ea este cuprinsă în  $U_{L0}$  și nu poate fi separată de aceasta).

Datele obținute se trec în tabelul 1.

Tabelul 1

Nr.crt.	U [V]	R [ $\Omega$ ]	L [H]	C [ $\mu$ F]	U <sub>R</sub> [V]	U <sub>L</sub> [V]	U <sub>C</sub> [V]	I [mA]	Obs.
1.									
2.									
3.									
4.									
5.									
6.									
7.									
8.									
9.									
10.									

**4.2.** Se realizează schema din fig.6. Se fixează rezistența (în decade) astfel încât rezistența circuitului să fie de 20  $\Omega$ . Se dă o valoare capacității C (între 4  $\mu$ F și 6  $\mu$ F). Se alimentează montajul prin punerea în funcțiune a GF. Se modifică valoarea frecvenței, acționând butonul corespunzător al GF, din 50 în 50 Hz, începând cu circa 200 Hz, până când, citind curentul la ampermetrul A se obține valoarea maximă  $I_0$  (pentru care se reține frecvența de rezonanță  $f_0$ ). Apoi se continuă citirile pentru frecvențe mai mari decât  $f_0$ , luând valori din 100 în 100 Hz.

Măsurătorile se repetă cu o rezistență  $R' = \frac{R}{2} = 10 \Omega$ , ceea ce corespunde unui factor de calitate  $Q_s'$  de două ori mai mare. Datele obținute se trec în tabelul 2.

Tabelul 2

Nr.crt.	R [ $\Omega$ ]	L [H]	C [ $\mu$ F]	f [Hz]	U <sub>L</sub> [V]	U <sub>C</sub> [V]	I [mA]	$\varphi$ [rad]	Obs.
1.									
2.									
3.									
4.									
5.									
6.									
7.									
8.									
9.									
10.									
11.									
12.									
13.									
14.									

## 5. Prelucrarea datelor

5.1. Pentru fiecare caz în parte, se compară valoarea capacității sau frecvenței pentru care s-a atins starea de rezonanță cu valoarea capacității sau frecvenței obținută prin calcul, cu ajutorul relației (15).

5.2. Folosind date din tabelul 1, se vor face diagrame fazoriale (la scară) cel puțin pentru trei determinări: la rezonanță, pentru cazul când circuitul este inductiv, pentru cazul când circuitul este capacitiv.

5.3. Cu datele din tabelul 2, se vor construi caracteristicile de rezonanță ( $I = I(f)$  sau  $I_r = I_r(\omega_r)$ ), precizând valoarea factorului de calitate în fiecare caz.

5.4. Se va calcula defazajul cu relația (6), iar rezultatele se trec în tabelul 2. Se va reprezenta grafic  $\varphi = \varphi(\omega_r)$  și se vor compara caracteristicile obținute pentru cele două valori ale rezistenței (ale lui  $Q_s$ ).

5.5. Se vor reprezenta grafic, comparativ, caracteristicile  $\frac{U_L}{U_{L0}}$  și  $\frac{U_C}{U_{C0}}$  în funcție de pulsația relativă  $\omega_r$  pentru o valoare a lui  $Q_s$ .

## 6. Întrebări de control

6.1. La rezonanță  $U_{L0}$  și  $U_{C0}$  sunt maxime?

6.2. Ce se întâmplă cu valorile maxime ale tensiunilor  $U_L$  și  $U_C$  dacă valoarea factorului de calitate crește ?

6.3. Ce valoare se obține, la rezonanță, pentru curent într-un circuit constituit numai din elemente L și C legate în serie ?

## Bibliografie

- [1] S. Pușcașu, I. Fetiță, M. Badea, D. Topan ș.a., *Bazele electrotehnicii. Lucrări de laborator*, Reprografia Universității din Craiova, 1989.
- [2] C. I. Mocanu, *Teoria circuitelor electrice*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1979.
- [3] C. Șora, *Bazele electrotehnicii*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982.
- [4] A. Timotin, V. Hortopan, A. Ifrim, M. Preda, *Lecții de Bazele electrotehnicii*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1970.