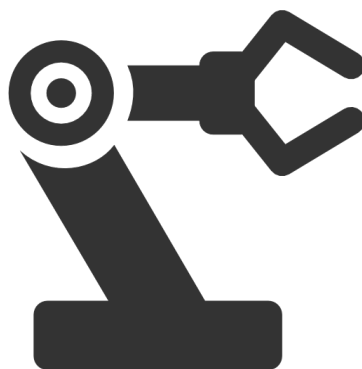


# Desarrollo de trabajos de la cátedra Robótica 2



Autor: Gianluca Lovatto y Gabriel Andrés Aguirre  
Última modificación: 23 de noviembre de 2021

# Avisos

## Licencia

Esta obra está bajo una licencia [Creative Commons “Reconocimiento 4.0 Internacional”](#).



# Sobre el documento

## Prefacio

Este documento corresponde a un trabajo práctico final para la aprobación de la asignatura *Robótica 2* de la Facultad de Ciencias de Alimentación de la Universidad Nacional de Entre Ríos.

# Índice general

<b>1. Modelo cinemático del ABB-IRB120</b>	<b>2</b>
1.1. El modelo cinemático inverso . . . . .	3
1.2. Cálculo de modelo cinemático inverso . . . . .	3
1.2.1. Cálculo de la posición . . . . .	4
1.2.2. Cálculo de la orientación . . . . .	9
1.2.3. Representación de la orientación . . . . .	14
1.2.4. Conclusiones del modelo cinemático inverso . . . . .	16
1.3. Implementación de la cinemática inversa . . . . .	16
1.3.1. Obteniendo el espacio de soluciones . . . . .	17
1.3.2. Obteniendo las combinaciones . . . . .	18
1.3.3. Acotando el espacio de soluciones . . . . .	19
<b>2. Modelo cinemático de un robot móvil diferencial</b>	<b>22</b>
2.1. Análisis del móvil diferencial . . . . .	23
2.1.1. Modelo cinemático directo . . . . .	23

# Capítulo 1

## Modelo cinemático del ABB-IRB120

---

1.1. El modelo cinemático inverso . . . . .	3
1.2. Cálculo de modelo cinemático inverso . . . . .	3
1.2.1. Cálculo de la posición . . . . .	4
1.2.2. Cálculo de la orientación . . . . .	9
1.2.3. Representación de la orientación . . . . .	14
1.2.4. Conclusiones del modelo cinemático inverso . . . . .	16
1.3. Implementación de la cinemática inversa . . . . .	16
1.3.1. Obteniendo el espacio de soluciones . . . . .	17
1.3.2. Obteniendo las combinaciones . . . . .	18
1.3.3. Acotando el espacio de soluciones . . . . .	19

---

## Introducción

En este capítulo se desarrollará el modelo cinemático inverso del manipulador ABB. Para esto es necesario saber que se abordó el problema tratando de encontrar las relaciones mas simples posibles.

## 1.1. El modelo cinemático inverso

En Robótica, la cinemática inversa (MCI) es la técnica que permite determinar el movimiento de una cadena de articulaciones para lograr que un actuador final se ubique en una posición concreta. El cálculo de la cinemática inversa es un problema complejo que consiste en la resolución de una serie de ecuaciones cuya solución normalmente no es única.

El objetivo de la cinemática inversa es encontrar los valores que deben tomar las coordenadas articulares del robot para que su extremo se posicione y oriente según una determinada localización y orientación espacial. Depende fuertemente de la configuración del robot.

Siempre que se especifica una posición de destino y una orientación en términos cartesianos, debe calcularse la cinemática inversa del dispositivo para poder despejar los ángulos de articulación requeridos. Los sistemas que permiten describir destinos términos cartesianos son capaces de mover el manipulador a puntos que nunca fueron capaces de mover el espacio de trabajo a los cuales tal vez nunca haya ido antes. A estos puntos los llamaremos puntos calculados.

El movimiento de una cadena cinemática ya sea si es un robot o un personaje animado es modelado por ecuaciones cinemáticas propias de la misma cadena. Estas ecuaciones definen la configuración de la cadena en términos de sus parámetros.

Por ejemplo las fórmulas de la cinemática inversa permiten el cálculo de los parámetros de unión del brazo de un robot para levantar un objeto. Ya que una de las Fórmulas similares es determinar las posiciones del esqueleto de un personaje animado que se va a mover de una manera en particular.

## 1.2. Cálculo de modelo cinemático inverso

Para calcular la cinemática inversa del robot, nos basamos en el metodo de [Pieper](#) que consiste en descomponer el problema de 6 grados de libertad, en dos problemas de 3 grados de libertad. Esto es posible gracias a que los ejes de rotación de las ultimas 3 juntas se cortan en un punto. Esto se denomina desacoplo cinemático.

A continuación se muestran las dimensiones y características físicas el ABB IRB120:

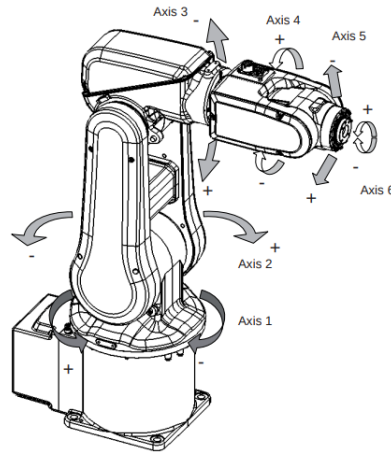


Figura 1.1: Articulaciones del robot manipulador.

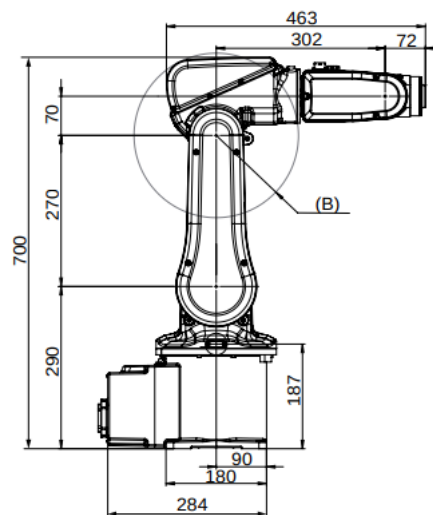


Figura 1.2: Cotas del brazo robot.

Por conveniencia y simplicidad de solución, nos centraremos en resolver las dos etapas del método de Pieper trasladando y orientando el efector final hacia la muñeca. Esto facilitará enormemente los despejes de los valores articulares.

### 1.2.1. Cálculo de la posición

Para este tipo de problemas, es más sencillo calcular los valores de las 3 primeras articulaciones mediante un método gráfico.

#### Cálculo de $q_1$

Si proyectamos el punto de corte de las juntas rotacionales en el suelo del robot, y trazamos un triángulo debido a la rotación, nos queda formado el siguiente rectángulo:

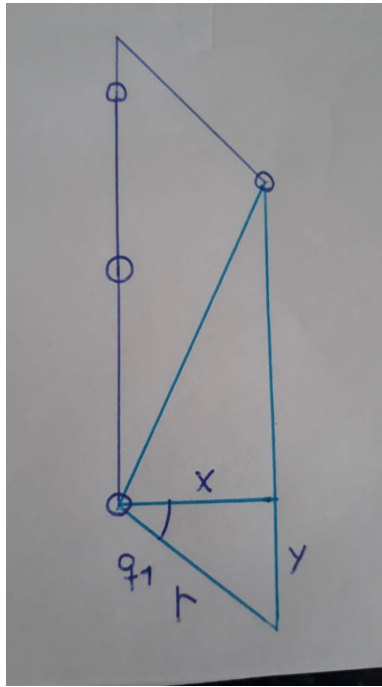


Figura 1.3: Rotación obtenida.

Analizando el efecto de la junta de la base en la Figura 1.3, vemos que una rotación de  $q_1$  provoca traslaciones de la posición de la muñeca en torno al eje  $x$  e  $y$ . Entonces podemos obtener una relación directamente de la posición esperada tanto en  $x$  como  $y$ :

$$q_1 = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (1.1)$$

### Cálculo de $q_2$

El efecto de  $q_2$  sobre la posición de la muñeca es generar un desplazamiento de un radio  $r$ . Se puede ver en la siguiente figura:



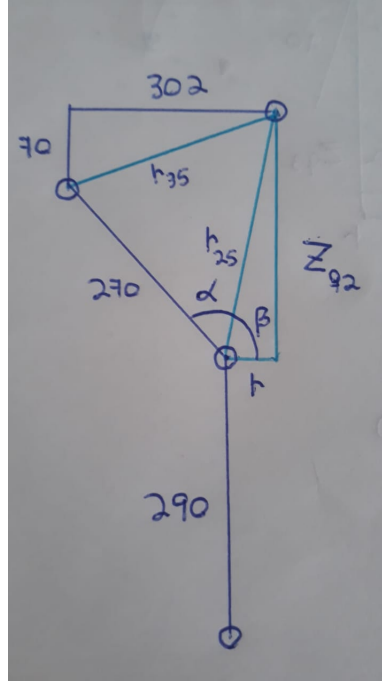


Figura 1.4: Rotación obtenida.

Vemos que nuestro ángulo  $q_2$  es generado por la suma de los ángulos  $\beta$  y  $\alpha$ . En donde  $\beta$  se puede encontrar de manera directa.

Sin embargo antes de eso definimos un par de medidas que tomamos de la Figura 1.4:

$$z_{q2} = z - 290 \quad (1.2)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1.3)$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{z_{q2}}{r}\right) \quad (1.4)$$

Para el calculo de  $\alpha$  nos tenemos que valer de otro triangulo (no rectangulo) formado por  $r_{35}$  y  $r_{25}$ .  $r_{35}$  sale de la hipotenusa de los catetos formados por la junta 3 y 4:

$$r_{35} = \sqrt{302^2 + 70^2} \quad (1.5)$$

$$r_{25} = \sqrt{r^2 + z_{q2}^2} \quad (1.6)$$

El triangulo formado para  $\alpha$  no es un triangulo rectangulo, lo que ocasiona que no sea posible obtenerlo en función a una tangente. Es por esto que se opto por el teorema del coseno.

*Dado un triángulo ABC cualquiera, siendo  $\alpha, \beta, \gamma$ , los ángulos, y  $a, b, c$ , los lados respectivamente opuestos a estos ángulos entonces:*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos(\beta)$$

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2cb \cdot \cos(\alpha)$$

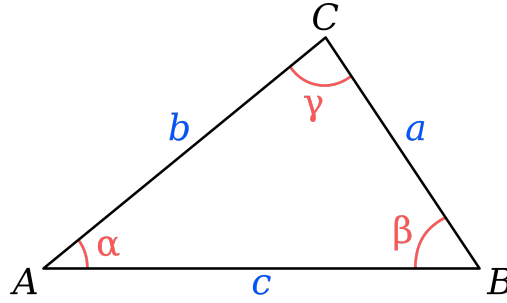


Figura 1.5: Triángulo de análisis para el teorema del coseno.

Con esto podemos extraer una relación para nuestro ángulo  $\alpha$ :

$$r_{35}^2 = 270^2 + r_{25}^2 - 2 \cdot 270 \cdot r_{25} \cdot \cos(\alpha)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{270^2 + r_{25}^2 - r_{35}^2}{2 \cdot 270 \cdot r_{25}} \quad (1.7)$$

De aquí obtenemos el  $\cos(\alpha)$ , pero nosotros buscamos una relación en función a tangentes. Es por esto que despejamos el  $\sin(\alpha)$  para luego dividir ambos y obtener la ecuación final.

Despejamos  $\sin(\alpha)$  de la siguiente identidad:

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

$$\sin(\alpha) = \pm \sqrt{1 - \cos^2(\alpha)} \quad (1.8)$$

Ahora dividimos la Ecuación (1.8) sobre (1.7):

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\pm \sqrt{1 - \cos^2(\alpha)}}{\cos(\alpha)}\right) \quad (1.9)$$

Podemos observar que tenemos dos soluciones posibles para obtener  $q_2$ . Todas estas ecuaciones extra que aparezcan serán evaluadas luego, ya que es posible que algunas de estas soluciones se salgan del espacio de trabajo, den resultados complejos, o correspondan a rotaciones no permitidas por las juntas. En cuyo caso se irán descartando una a una.

$$q_2 = 90 - \alpha - \beta \quad (1.10)$$

**Cálculo de  $q_3$** 

En el caso de  $q_3$  ya disponemos de todos los datos, puesto que se aplica el mismo caso anterior que  $q_2$ :

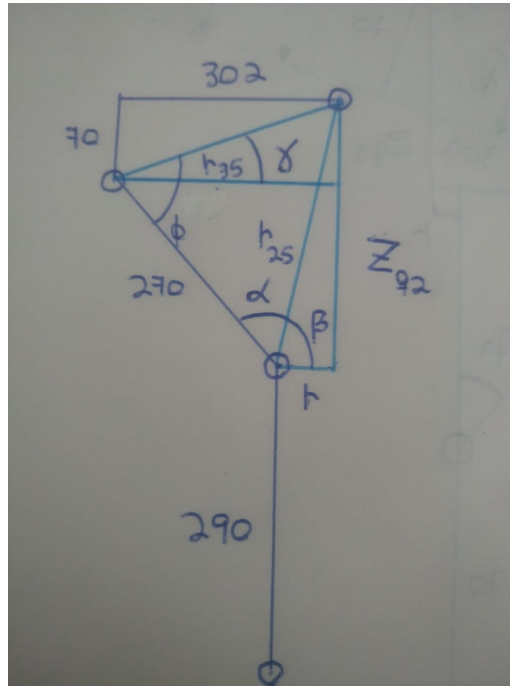


Figura 1.6: Rotación obtenida.

A  $\gamma$  lo podemos obtener de manera directa:

$$\gamma = \arctan\left(\frac{302}{70}\right) \quad (1.11)$$

A  $\sin(\phi)$  lo podemos obtener del teorema del seno. Obteniendo una relación del triángulo formado.

*Si en un triángulo  $ABC$ , las medidas de los lados opuestos a los ángulos  $A$ ,  $B$  y  $C$  son respectivamente  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , entonces:*

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

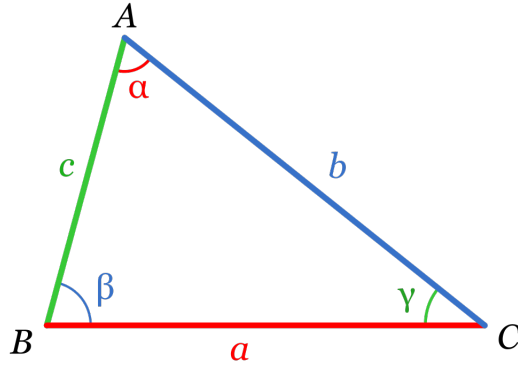


Figura 1.7: Triángulo de análisis para el teorema del seno.

Aplicando este teorema, podemos despejar directamente  $\sin(\phi)$ :

$$\begin{aligned}\frac{r_{25}}{\sin(\phi)} &= \frac{r_{35}}{\sin(\alpha)} \\ \sin(\phi) &= \frac{r_{25} \cdot \sin(\alpha)}{r_{35}}\end{aligned}\tag{1.12}$$

Ahora obtenemos  $\cos(\phi)$  por el teorema del coseno como en  $q_2$ :

$$\cos(\phi) = \frac{270^2 + r_{35}^2 - r_{25}^2}{2 \cdot 270 \cdot r_{35}}\tag{1.13}$$

De aquí obtenemos el resultado de  $q_3$  aplicando la tangente que sale de dividir (1.12) sobre (1.13):

$$\phi = \arctan\left(\frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)}\right)\tag{1.14}$$

$$q_3 = 180 - \phi - \gamma\tag{1.15}$$

### 1.2.2. Cálculo de la orientación

#### Matrices para el despeje

Lo primero que debemos hacer es encontrar las matrices de todo el robot. Para luego encontrar un grupo de expresiones para despejar:

$$A_0 = A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 \times A_5 \times A_6\tag{1.16}$$

Vemos que  $A_0$  es la matriz final del efector final de robot. Esta matriz se puede definir para la cinemática inversa, como la matriz objetivo a la cual queremos llegar, multiplicada la matriz del efector final.

La matriz objetivo tiene una serie de parámetros que indican tanto la posición como la orientación de nuestro robot:

$$A_T = \begin{bmatrix} nx & ox & ax & Px \\ ny & oy & ay & Py \\ nz & oz & az & Pz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

Entonces la matriz de la muñeca queda definida como:

$$A_m = A_T \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -72 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \hat{z} \quad (1.18)$$

O tambien como:

$$A_m = A_T \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -72 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

Por comodidad:

$$A_{mm} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -72 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

Como  $A_T = A_0$  entonces podemos sustituir y depear las tres primeras juntas de las 3 últimas:

$$A_3^{-1} \times A_2^{-1} \times A_1^{-1} \times A_m = A_4 \times A_5 \times A_6 \times A_{mm} \quad (1.21)$$

Como resultado del modelo cinemático directo tenemos las matrices correspondientes a cada junta:

$$A_1 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 290 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} S_2 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ C_2 & -S_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & 270 \\ S_3 & C_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} C_4 & -S_4 & 0 & 70 \\ 0 & 0 & 1 & 302 \\ -S_4 & -C_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} C_5 & -S_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ S_5 & C_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} C_6 & -S_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 72 \\ -S_6 & -C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

Obtenemos uno de los lados de la igualdad del cálculo de la CI:

$$A_4 \times A_5 \times A_6 \times A_{mm} = A_{46}$$

$$A_{46} = \begin{bmatrix} -S_4S_6 + C_4C_5C_6 & -S_4C_6 - S_6C_4C_5 & -S_5C_4 & 70 \\ S_5C_6 & -S_5S_6 & C_5 & 302 \\ -S_4C_5C_6 - S_6C_4 & S_4S_6C_5 - C_4C_6 & S_4S_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

Como los parametros posicionales de la Ecuación (1.28) no nos interezan podemos incluso descartarlos:

$$A_{46} = \begin{bmatrix} -S_4S_6 + C_4C_5C_6 & -S_4C_6 - C_4C_5S_6 & -C_4S_5 \\ S_5C_6 & -S_5S_6 & C_5 \\ -S_4C_5C_6 - C_4S_6 & S_4C_5S_6 - C_4C_6 & S_4S_5 \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

Obtenemos el otro lado de la igualdad del cálculo de la CI sin las componentes de traslación:

$$A_3^{-1} \times A_2^{-1} \times A_1^{-1} \times A_m = A_{31invT}$$

$$A_{31invT} = \begin{bmatrix} nx C_1 (S_2 C_3 + C_2 S_3) & ox C_1 (S_2 C_3 + C_2 S_3) & ax C_1 (S_2 C_3 + C_2 S_3) \\ + & + & + \\ ny S_1 (S_2 C_3 + C_2 S_3) & oy S_1 (S_2 C_3 + C_2 S_3) & ay S_1 (S_2 C_3 + C_2 S_3) \\ + & + & + \\ nz (C_2 C_3 - S_2 S_3) & oz (C_2 C_3 - S_2 S_3) & az (C_2 C_3 - S_2 S_3) \\ nx C_1 (C_2 C_3 - S_2 S_3) & ox C_1 (C_2 C_3 - S_2 S_3) & ax C_1 (C_2 C_3 - S_2 S_3) \\ + & + & + \\ ny S_1 (C_2 C_3 - S_2 S_3) & oy S_1 (C_2 C_3 - S_2 S_3) & ay S_1 (C_2 C_3 - S_2 S_3) \\ - & - & - \\ nz (C_2 S_3 + S_2 C_3) & oz (C_2 S_3 + S_2 C_3) & az (C_2 S_3 + S_2 C_3) \\ -nx S_1 + ny C_1 & -ox S_1 + oy C_1 & -ax S_1 + ay C_1 \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

Teniendo las siguientes identidades podemos simplificar aun mas la matriz:

$$S_2 C_3 + C_2 S_3 = S_{23} \quad (1.31)$$

$$C_2C_3 - S_2S_3 = C_{23} \quad (1.32)$$

Quedandonos con esta simple matriz:

$$A_{31invT} = \begin{bmatrix} nx C_1 S_{23} & ox C_1 S_{23} & ax C_1 S_{23} \\ + & + & + \\ ny S_1 S_{23} & oy S_1 S_{23} & ay S_1 S_{23} \\ + & + & + \\ nz C_{23} & oz C_{23} & az C_{23} \\ nx C_1 C_{23} & ox C_1 C_{23} & ax C_1 C_{23} \\ + & + & + \\ ny S_1 C_{23} & oy S_1 C_{23} & ay S_1 C_{23} \\ - & - & - \\ nz S_{23} & oz S_{23} & az S_{23} \\ -nx S_1 + ny C_1 & -ox S_1 + oy C_1 & -ax S_1 + ay C_1 \end{bmatrix} \quad (1.33)$$

### Cálculo de $q_5$

Vemos que de la Matriz (1.29) el elemento a despejar mas sensillo es el  $[2, 3]$ , en donde tenemos:

$$q_5 = \arccos(ax C_1 C_{23} + ay S_1 C_{23} - az S_{23}) \quad (1.34)$$

### Cálculo de $q_4$

Encontrar una relación para  $q_4$  es un poco mas complicado, pero si dividimos el elemento  $[3, 3]$  sobre  $[1, 3]$  podemos llegar a un despeje adecuado:

$$S_4 S_5 = -ax S_1 + ay C_1 \quad (1.35)$$

$$-C_4 S_5 = ax C_1 S_{23} + ay S_1 S_{23} + az C_{23} \quad (1.36)$$

Vemos que nos queda la siguiente expresión:

$$-\frac{S_4 S_5}{C_4 S_5} = \frac{-ax S_1 + ay C_1}{ax C_1 S_{23} + ay S_1 S_{23} + az C_{23}}$$

Para que esta división sea válida, se tiene que cumplir que  $q_5 \neq 0$ . Concluimos que este valor para  $q_5$  corresponde a una singularidad, en donde el ángulo  $q_4$  no esta definido.

$$q_4 = \arctan\left(\frac{ax S_1 - ay C_1}{ax C_1 S_{23} + ay S_1 S_{23} + az C_{23}}\right) \quad (1.37)$$

**Cálculo de  $q_6$** 

Podemos encontrar una relación para  $q_6$  si dividimos el elemento  $[2, 2]$  sobre  $[2, 1]$ :

$$-S_5S_6 = oxC_1C_{23} + oyS_1C_{23} - ozS_{23}$$

$$S_5C_6 = nxC_1C_{23} + nyS_1C_{23} - nzS_{23}$$

Vemos que nos queda la siguiente expresión:

$$\frac{-S_5S_6}{S_5C_6} = \frac{oxC_1C_{23} + oyS_1C_{23} - ozS_{23}}{nxC_1C_{23} + nyS_1C_{23} - nzS_{23}}$$

Simplificamos un poco y observamos que nuevamente todo esto es posible si  $q_5 \neq 0$  debido a la singularidad:

$$q_6 = \arctan \left( -\frac{oxC_1C_{23} + oyS_1C_{23} - ozS_{23}}{nxC_1C_{23} + nyS_1C_{23} - nzS_{23}} \right) \quad (1.38)$$

**Solución alternativa para la orientación**

Hay una solución adicional que se obtienen volteando la muñeca del manipulador. Para cada una de las cuatro soluciones calculadas antes, obtenemos la solución inversa mediante:

$$\begin{aligned} q_4' &= q_4 \pm 180 \\ q_5' &= -q_5 \\ q_6' &= q_6 \pm 180 \end{aligned}$$

**Cálculo de  $q_4$  y  $q_6$  para  $q_5 = 0$** 

Cuando  $q_5 = 0$  el sistema se encuentra en una singularidad, pero **¿Qué efectos tiene esta singularidad?**

Lo que ocurre es que desaparece un grado de libertad pues  $q_4$  y  $q_6$  consiguen el mismo efecto ya que coinciden los sistemas de coordenadas de ambas articulaciones.

Bien, ahora tomemos el elemento  $[1, 1]$  para analizar:

$$-S_4S_6 + C_4C_5C_6 = nxC_1S_{23} + nyS_1S_{23} + nzC_{23}$$

Si  $q_5 = 0$ , entonces el resultado de  $C_5 = 1$ :

$$-S_4S_6 + C_4C_6 = nxC_1S_{23} + nyS_1S_{23} + nzC_{23}$$

Vamos a analizar un poco la expresión obtenida. Tenemos en una misma ecuación a  $q_4$  y  $q_6$ , esto quiere decir que ambos ángulos son dependientes. Entonces es posible obtener un ángulo si le damos valores al otro, pero, para simplificar un poco las cosas, si damos valores de  $-90$ ,  $0$  o  $90$  a uno de los ángulos. Un termino del lado izquierdo de la igualdad, correspondiente a  $-S_4S_6 + C_4C_6$  se cancela completamente.



Y se puede obtener facilmente el valor de ecuación.

Suponemos a continuación que damos valores a  $q_4$  (*también puede aplicarse a  $q_6$  como ya vimos*):

$$q_4 = -90:$$

$$q_6 = \arcsin (nx C_1 S_{23} + ny S_1 S_{23} + nz C_{23}) \quad (1.39)$$

$$q_4 = 0:$$

$$q_6 = \arccos (nx C_1 S_{23} + ny S_1 S_{23} + nz C_{23}) \quad (1.40)$$

$$q_4 = 90:$$

$$q_6 = -\arcsin (nx C_1 S_{23} + ny S_1 S_{23} + nz C_{23}) \quad (1.41)$$

Obteniendo 3 distintas soluciones posibles para la orientación de la muñeca cuando nos encontramos en el punto singular de  $q_5 = 0$ .

### 1.2.3. Representación de la orientación

La matriz objetivo tiene una serie de parámetros que indican tanto la posición como la orientación de nuestro robot:

$$A_T = \begin{bmatrix} nx & ox & ax & Px \\ ny & oy & ay & Py \\ nz & oz & az & Pz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Los parámetros de posición no son mas que las coordenadas en el sistema cartesiano del efector final. Mientras que la submatriz de orientación es una combinación de parámetros de las matrices de rotación.

**Rotación en torno al eje X:**

$$R_x(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(A) & -\sin(A) \\ 0 & \sin(A) & \cos(A) \end{bmatrix}$$

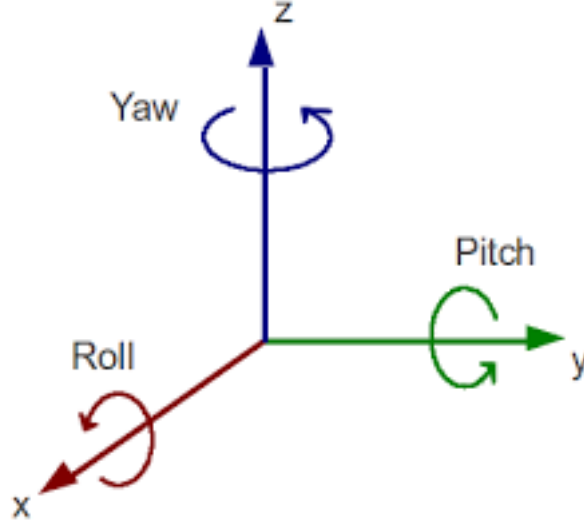
**Rotación en torno al eje Y:**

$$R_y(B) = \begin{bmatrix} \cos(B) & 0 & \sin(B) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(B) & 0 & \cos(B) \end{bmatrix}$$

**Rotación en torno al eje Z:**

$$R_z(C) = \begin{bmatrix} \cos(C) & -\sin(C) & 0 \\ \sin(C) & \cos(C) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Estas rotaciones son llamadas Roll (eje X), Pitch (eje Y) y Yaw (eje Z), o también conocidas como ángulos de euler:



Podemos decir entonces que la submatriz de rotación objetivo (NOA) es la combinación de estas 3 matrices de rotación puras:

$$R_t(A, B, C) = R_x(A) \cdot R_y(B) \cdot R_z(C)$$

$$R_t(A, B, C) = \begin{bmatrix} C_B C_C & -C_B S_C & S_B \\ S_A S_B C_C + C_A S_C & -S_A S_B S_C + C_A C_C & -S_A C_B \\ -C_A S_B C_C + S_A S_C & C_A S_B S_C + S_A C_C & C_A C_B \end{bmatrix}$$

Si queremos hacer el paso contrario, es decir, obtener los ángulos de euler con la matriz de orientación, debemos despejar igualdades con la matriz objetivo:

$$R_t(A, B, C) = A_T$$

$$\begin{bmatrix} C_B C_C & -C_B S_C & S_B \\ S_A S_B C_C + C_A S_C & -S_A S_B S_C + C_A C_C & -S_A C_B \\ -C_A S_B C_C + S_A S_C & C_A S_B S_C + S_A C_C & C_A C_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} nx & ox & ax \\ ny & oy & ay \\ nz & oz & az \end{bmatrix}$$

### Cálculo de A

Tomamos los elementos [2, 3], [3, 3] y los dividimos:

$$\frac{-S_A C_B}{C_A C_B} = \frac{ay}{az}$$

Si B es distinto de  $\pm 90$  podemos obtener A:

$$\frac{-S_A}{C_A} = \frac{ay}{az}$$

$$A = \arctan\left(-\frac{ay}{az}\right) \quad (1.42)$$

### Cálculo de $B$

Tomamos el elemento  $[1, 3]$  y despejamos:

$$S_B = ax$$

$$B = \arcsin(ax) \quad (1.43)$$

### Cálculo de $C$

Tomamos los elementos  $[1, 2]$ ,  $[1, 1]$  y los dividimos:

$$\frac{-C_B S_C}{C_B C_C} = \frac{ox}{nx}$$

Si  $B$  es distinto de  $\pm 90$  podemos obtener  $C$ :

$$\frac{-S_C}{C_C} = \frac{ox}{nx}$$

$$C = \arctan\left(-\frac{ox}{nx}\right) \quad (1.44)$$

#### 1.2.4. Conclusiones del modelo cinemático inverso

Se observa que para la resolución de la cinemática inversa del manipulador, en varios ángulos se corresponden distintas soluciones posibles. Todo esta combinatoria se denomina espacio de soluciones. Este espacio de soluciones puede contener elementos que no den un resultado esperado, es decir, que es posible que la orientación, posición o incluso rotación de las articulaciones, correspondan a valores inalcanzables.

### 1.3. Implementación de la cinemática inversa

Pudimos obtener posibles soluciones correspondientes al modelo cinemático inverso del ABB IRB120. Sin embargo, en sí, nunca definimos la combinatoria o el algoritmo para obtener el espacio de soluciones que tiene el manipulador. Una vez que se han calculado las soluciones, habrá que descartar algunas de ellas (*o incluso todas*) debido a violaciones en los límites de las articulaciones. De cualquier solución válida restante, generalmente se selecciona la más cercana a la configuración actual del manipulador.

Así que nos proponemos a crear un algoritmo que sirva para la implementación, y que nos devuelva el espacio de soluciones **posibles** para posicionar y orientar el efector final.

### 1.3.1. Obteniendo el espacio de soluciones

#### Análisis de $q_1$

$q_1$  lo pudimos obtener de manera directa, entonces solo queda definido una solución posible:

$$q_1 = \arctan\left(\frac{Py}{Px}\right) \quad (1.45)$$

#### Análisis de $q_2$

$q_2$  posee dos soluciones posibles debido a que este ángulo se calcula con el teorema del coseno:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\pm\sqrt{1 - \cos^2(\alpha)}}{\cos(\alpha)}\right)$$

$$q_2 = 90 - \alpha - \beta \quad (1.46)$$

#### Análisis de $q_3$

Con  $q_3$  pasa lo mismo que con  $q_1$ , lo obtuvimos de manera directa y solo hay una solución:

$$q_3 = 180 - \phi - \gamma \quad (1.47)$$

#### Análisis de $q_5$

$q_5$  es función del arco coseno:

$$q_5 = \arccos(axC_1C_{23} + ayS_1C_{23} - azS_{23}) \quad (1.48)$$

#### Análisis de $q_4$

$q_4$  tiene cuatro posibles soluciones. Estas soluciones dependen del valor obtenido de  $q_5$ :

**Cuando  $q_5 \neq 0$**

$$q_4 = \arctan\left(\frac{axS_1 - ayC_1}{axC_1S_{23} + ayS_1S_{23} + azC_{23}}\right) \quad (1.49)$$

**Cuando  $q_5 = 0$**

$$q_4 = -90 \quad (1.50)$$

$$q_4 = 0 \quad (1.51)$$

$$q_4 = 90 \quad (1.52)$$

**Análisis de  $q_6$** 

$q_6$  tiene cuatro posibles soluciones. Estas soluciones dependen del valor obtenido de  $q_5$  y de  $q_4$ :

**Cuando  $q_5 \neq 0$**

$$q_6 = \arctan \left( -\frac{oxC_1C_{23} + oyS_1C_{23} - ozS_{23}}{nxC_1C_{23} + nyS_1C_{23} - nzS_{23}} \right) \quad (1.53)$$

**Cuando  $q_5 = 0$**

**Para  $q_4 = -90$ :**

$$q_6 = \arcsin (nxC_1S_{23} + nyS_1S_{23} + nzC_{23}) \quad (1.54)$$

**Para  $q_4 = 0$ :**

$$q_6 = \arccos (nxC_1S_{23} + nyS_1S_{23} + nzC_{23}) \quad (1.55)$$

**Para  $q_4 = 90$ :**

$$q_6 = -\arcsin (nxC_1S_{23} + nyS_1S_{23} + nzC_{23}) \quad (1.56)$$

**Análisis de orientación inversa**

**Cuando  $q_5 \neq 0$**

$$q_4' = q_4 - 180 \quad (1.57)$$

$$q_5' = -q_5 \quad (1.58)$$

$$q_6' = q_6 - 180 \quad (1.59)$$

**1.3.2. Obteniendo las combinaciones**

	$q_1$	$q_2$	$q_3$	$q_5$	$q_4$	$q_6$
1		+		$\neq 0$ +	+	+
2		+		$\neq 0$ -	-	-
3		-		$\neq 0$ +	+	+
4		-		$\neq 0$ -	-	-
5		+		$= 0$	-90	+
6		+		$= 0$	0	
7		+		$= 0$	90	-
8		-		$= 0$	-90	+
9		-		$= 0$	0	
10		-		$= 0$	90	-

El signo  $+$  hace referencia a la solución positiva de la raíz, mientras que el  $-$  a la negativa. Para  $q_5$  el  $\neq 0$  indica que el ángulo obtenido no es cero, mientras que  $= 0$  indica que si lo es. El primer signo después del 0 indica si se toma la alternativa de solución. Un  $+$  indica que la solución es directa, un  $-$  sin embargo, refiere a la configuración de muñeca invertida. Fijese que este signo afecta también a  $q_4$  y  $q_6$ .

Con esta tabla queda definido el espacio de soluciones posibles. Ahora solo queda obtener el subespacio aplicable dependiendo de los valores que se vayan obteniendo.

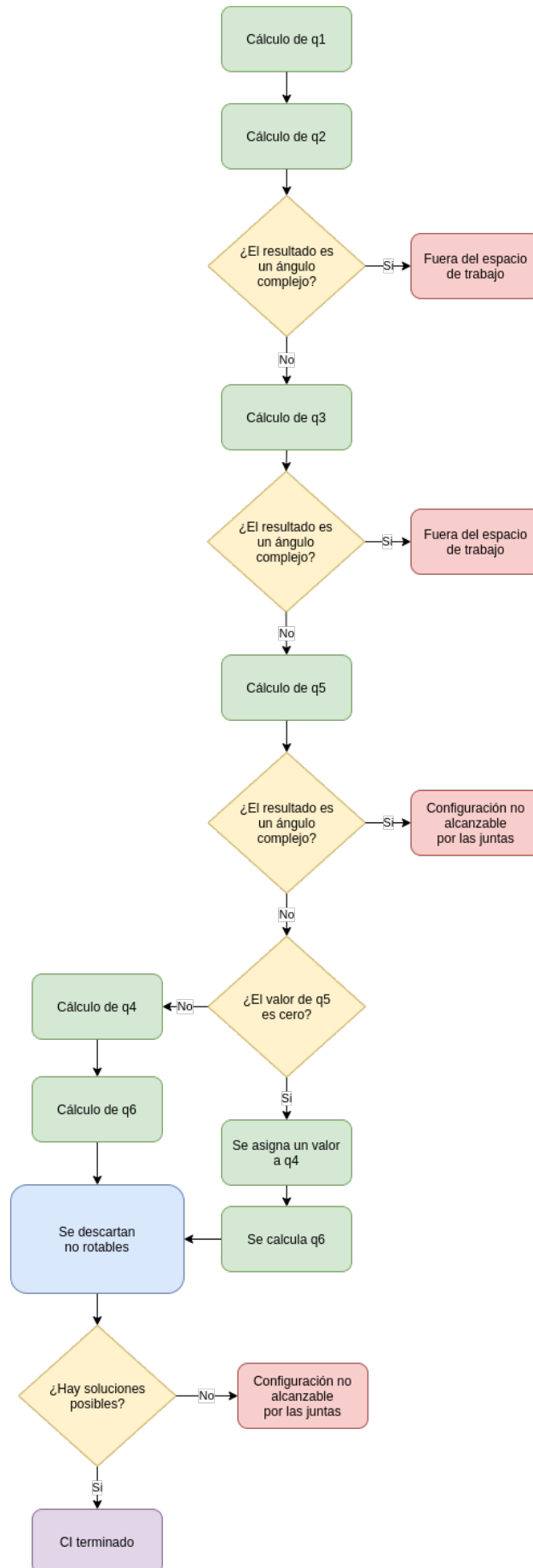
En el algoritmo de obtención de la CI se obtendrán los valores angulares de la siguiente manera:

1. Se obtiene  $q_1$ .
2. Se obtiene  $q_2$ .
3. Se obtiene  $q_3$ .
4. Se obtiene  $q_5$ .
5. Se obtiene  $q_4$ .
6. Se obtiene  $q_6$ .

### 1.3.3. Acotando el espacio de soluciones

Es lógico asumir que no todas las soluciones son aplicables de manera simultánea. Para ser más claros, no podemos utilizar las ecuaciones para obtener  $q_4$  y  $q_6$  con  $q_5 = 0$  si el valor de  $q_5$  nos dio 45. Otro caso puede ser que la solución con seno negativo de  $q_2$  salga de la rotación posible por la articulación.

Debido a lo anterior mencionado, se desarrolla un diagrama de flujo que contemple las combinaciones matemáticamente posibles:



Este flujo de cálculo debemos implementar en nuestro programa de Python.



## Capítulo 2

# Modelo cinemático de un robot móvil diferencial

---

2.1. Análisis del móvil diferencial . . . . .	23
2.1.1. Modelo cinemático directo . . . . .	23

---

## Introducción

Este capítulo muestra como se implento el modelo cinemático para controlar un autito de tipo diferencial.

## 2.1. Análisis del móvil diferencial

Los robots móviles son capaces de realizar movimientos en espacios de trabajo ilimitados en comparación a los robots manipuladores y uno de sus principales objetivos es efectuar de forma autónoma movimientos planificados con gran exactitud, para esto se requiere diseñar estructuras de control que mejoren la respuesta del robot. Por lo tanto, en este trabajo se presenta el diseño y análisis matemático de una estructura de control acotada, que en conjunto con el estudio de la cinemática y la dinámica de un robot móvil de configuración diferencial permite simular y analizar el comportamiento que el robot móvil presenta al efectuar una trayectoria deseada.

El modelado cinemático es el estudio de movimiento de sistemas mecánicos sin considerar las fuerzas que afectan dicho movimiento. Para el robot móvil de direccionamiento diferencial, el propósito principal del modelado cinemático es representar la velocidad del robot en función a las velocidades de las ruedas conjuntamente a los parámetros geométricos del robot.

Un robot móvil con ruedas es un dispositivo que debe moverse sobre una superficie mediante la acción de ruedas montadas en él, se asumen las siguientes hipótesis:

1. El robot móvil se mueve sobre una superficie plana horizontal, es decir la energía potencial es constante.
2. Los ejes de referencia son perpendiculares al suelo.
3. No existen elementos flexibles en la estructura del robot, incluyendo las ruedas.
4. El contacto entre cada rueda y el suelo se reduce a un solo punto.
5. No existe deslizamiento.

De acuerdo con las hipótesis anteriores, se aborda el caso bidimensional debido a que el robot solo se mueve en un plano.

### 2.1.1. Modelo cinemático directo

Partimos de la siguiente situación con un móvil:

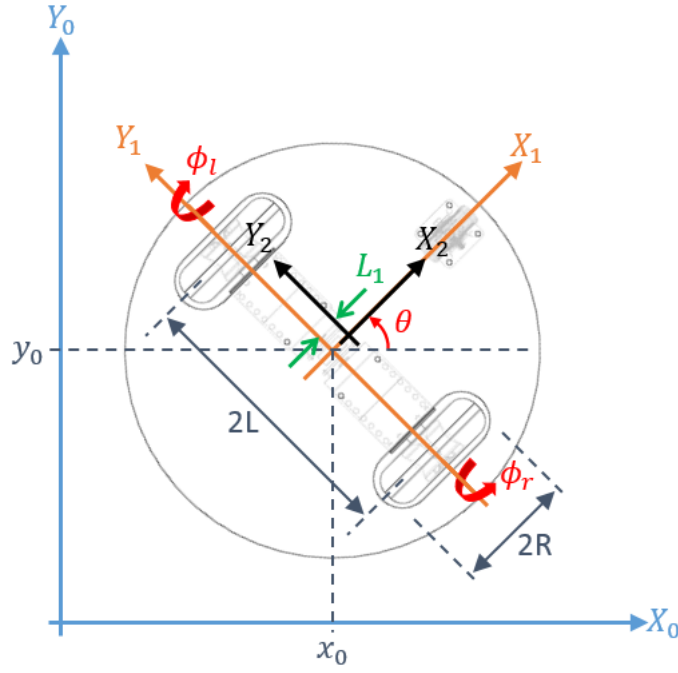


Figura 2.1: Sistema de análisis para el modelo cinemático.

Podemos obtener por una relación directa la velocidad tangencial y angular del móvil:

$$v = \frac{v_r + v_l}{2} = \frac{\dot{\phi}_r + \dot{\phi}_l}{2} \cdot R \quad (2.1)$$

$$\omega = \frac{v_r - v_l}{2 \cdot L} = \frac{\dot{\phi}_r - \dot{\phi}_l}{2 \cdot L} \cdot R \quad (2.2)$$

Donde:

- $v$  es la velocidad tangencial del móvil.
- $\omega$  es la velocidad angular del móvil tomando como  $+$  si el sentido es antihorario y  $-$  si es horario.
- $v_r, v_l$  corresponde a la velocidad tangencial de cada rueda.
- $\dot{\phi}_r, \dot{\phi}_l$  corresponde al ángulo de cada rueda.
- $R$  es el radio de cada rueda.
- $L$  es la distancia entre los ejes de las ruedas al centro del vehículo.

Con estas expresiones podemos despejar las velocidades angulares de las ruedas.

**Para la rueda izquierda:**

$$v = \frac{\dot{\phi}_r + \dot{\phi}_l}{2} \cdot R$$

$$\begin{aligned}\frac{2}{R} \cdot v &= \dot{\phi}_r + \dot{\phi}_l \\ \dot{\phi}_r &= \frac{2}{R} \cdot v - \dot{\phi}_l\end{aligned}\tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{\dot{\phi}_r - \dot{\phi}_l}{2 \cdot L} \cdot R \\ \frac{2 \cdot L}{R} \cdot \omega &= \dot{\phi}_r - \dot{\phi}_l \\ \dot{\phi}_r &= \frac{2 \cdot L}{R} \cdot \omega + \dot{\phi}_l\end{aligned}\tag{2.4}$$

Si igualamos (2.3) con (2.4):

$$\begin{aligned}\frac{2}{R} \cdot v - \dot{\phi}_l &= \frac{2 \cdot L}{R} \cdot \omega + \dot{\phi}_l \\ \frac{2}{R} \cdot v - \frac{2 \cdot L}{R} \cdot \omega &= \dot{\phi}_l + \dot{\phi}_l \\ \frac{2}{R} \cdot v - \frac{2 \cdot L}{R} \cdot \omega &= 2 \cdot \dot{\phi}_l \\ \dot{\phi}_l &= \frac{(v - L \cdot \omega)}{R}\end{aligned}\tag{2.5}$$

Para la rueda derecha:

$$\begin{aligned}v &= \frac{\dot{\phi}_r + \dot{\phi}_l}{2} \cdot R \\ \frac{2}{R} \cdot v &= \dot{\phi}_r + \dot{\phi}_l \\ \dot{\phi}_l &= \frac{2}{R} \cdot v - \dot{\phi}_r\end{aligned}\tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{\dot{\phi}_r - \dot{\phi}_l}{2 \cdot L} \cdot R \\ \frac{2 \cdot L}{R} \cdot \omega &= \dot{\phi}_r - \dot{\phi}_l \\ \dot{\phi}_l &= \dot{\phi}_r - \frac{2 \cdot L}{R} \cdot \omega\end{aligned}\tag{2.7}$$

Si igualamos (2.6) con (2.7):

$$\begin{aligned}\frac{2}{R} \cdot v - \dot{\phi}_r &= \dot{\phi}_r - \frac{2 \cdot L}{R} \cdot \omega \\ \frac{2}{R} \cdot v + \frac{2 \cdot L}{R} \cdot \omega &= \dot{\phi}_r + \dot{\phi}_r\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{2}{R} \cdot v + \frac{2 \cdot L}{R} \cdot \omega &= 2 \cdot \dot{\phi}_r \\ \dot{\phi}_r &= \frac{(v + L \cdot \omega)}{R}\end{aligned}\tag{2.8}$$

### Valores de posición y orientación:

Planteamos entonces en base a las ecuaciones anteriores las expresiones de las variables de interés.

$$\dot{x} = v \cdot \cos(\theta)\tag{2.9}$$

$$\dot{y} = v \cdot \sin(\theta)\tag{2.10}$$

$$\dot{\theta} = \omega\tag{2.11}$$

Expresado de forma matricial (2.9), (2.10) y (2.11) tenemos:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}\tag{2.12}$$

Que será nuestro modelo cinemático directo del autito.

# Bibliografía

- [TEPSL] Puesta en marcha de brazo robótico y desarrollo de aplicaciones, Tesis de Fin de Grado. Escuela Politécnica Superior de Linares, Septiembre de 2016.
- [FRC] Robótica, Control de Robots Manipuladores, Fernando Reyes Cotés.