8 (ocho)

PROBABILIDAD y ESTADÍSTICA (61.09 - 81.04)

Evaluación integradora
Duración: 4 horas.

Segundo cuatrimestre – 2022
3/8/2023 – 9:00 hs.

Curso: 21 Vera Mail: glitardo@fi.uba.ar

Apellido y Nombres: Litardo Gabriel Julián

Padrón o legajo: 109856

El examen se aprueba con al menos 3 ejercicios correctamente desarrollados, justificados y resueltos, de los cuales al menos uno debe ser el ejercicio 4 ó el 5.

1. Pablito compra 1 chocolatín por semana durante 5 semanas. Cada vez que compra un chocolatín es igualmente probable que obtenga alguno de los personajes. Freddy, Jason o Pennywise. Calcular la probabilidad de que Pablito haya obtenido el mismo personaje en exactamente 3 semanas consecutivas y haya completado la colección.

2. Un proyecto consta de cuatro etapas consecutivas. Sean T_1, T_2, T_3 y T_4 los tiempos (en días) que tardan en completarse cada una de ellas. Se sabe que T_1, T_2, T_3 y T_4 son variables aleatorias independientes, con distribución Gamma de parámetros $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 4$, $\nu_3 = 3$ y $\nu_4 = 5$ respectivamente, y $\lambda = 1.5$ común a todas. Calcular una cota superior para la probabilidad de que el tiempo total hasta completar el proyecto sea mayor a 10 días.

3. A un call center llegan llamadas que pueden ser quejas, consultas generales o problemas técnicos. Las llamadas por quejas ocurren con probabilidad 0.1, las consultas generales con probabilidad 0.5, y las consultas técnicas con probabilidad 0.4. *Los motivos de las distintas llamadas son independientes entre sí.* Cada uno de los agentes se toma un descanso luego de atender la primera llamada por queja. Hallar la esperanza de la cantidad de llamadas por problemas técnicos atendidas por un agente hasta su primer descanso.

4. El tiempo (en meses) que tarda en florecer un bulbo de tulipán desde que se planta es una variable aleator X cuya función densidad está dada por

$$f_\theta(x) = \frac{\theta}{x^2} 1\{x \geq \theta\}$$

Xime plantó 5 bulbos, los que florecieron en $3, 4.5, 3, 3.5$ y 4 meses, respectivamente. En base a es información, estimar por máxima verosimilitud la probabilidad de que al plantar otro bulbo, florezca antes los 4 meses.

5. Se tiene una máquina expendedora de gaseosas cuya descarga (en mililitros) cada vez que presionan otón es una variable aleatoria con distribución normal de media 175 y varianza 100. Se propone compr na nueva máquina, cuyo volumen descargado también tiene distribución normal de media 175, pero variar ^{2} desconocida. Se comprará la nueva máquina solo si se encuentra evidencia de que es más precisa que tual. Para decidir, se tomaron 21 mediciones y se obtuvo una varianza muestral $\hat{\sigma}^2 = 80$. Plantear un t hipótesis que cumpla con que la probabilidad de cambiar la máquina, si en realidad es menos precisa, 0.01. En base a la información muestral, ¿recomendaría comprar la máquina?

Estrada Gabriel

5- X_1 "descarga de gaseosa (en mm) de la máquina 1" $\sim N(175, 100)$

X_2: "descarga de gaseosa (en mm) de la máquina 2" $\sim N(175, \sigma^2)$

$\hat{\sigma}^2 = 80$ $\quad n = 21$

$\alpha = 0.01$

$H_0: \sigma^2 \geq 100 \to \sigma_0^2$ vs $H_1: \sigma^2 < 100$

solo quiero cambiar de máquina si tengo evidencia suficiente para rechazar Ho y por lo tanto, poder decir que la máquina 2 es más precisa

¿X_2 es flia exponencial?

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad f_{\underline{X}}(\underline{x}) = \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}}}_{A(\sigma^2)} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2} \cdot \underbrace{1}_{h(\underline{x})}$$

$c(\sigma^2) = -\frac{1}{2\sigma^2}$ creciente para σ^2

~~mi estadístico del test~~ $T(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$ → mi estadístico del test

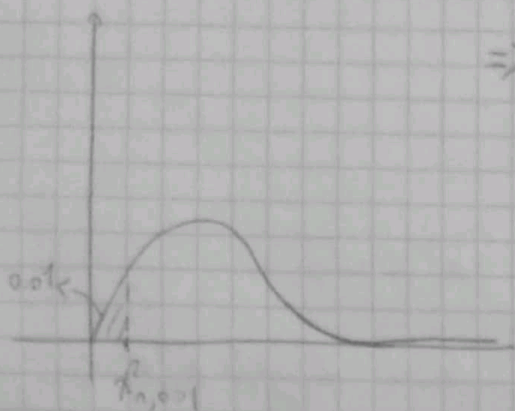
mi test preliminar será

→ mismo signo que H1 pues $c(\sigma^2)$ es creciente para

$$\phi(\underline{X}) = 1\!\!1\left\{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 < k_\alpha\right\}$$

$$\alpha = 0.01 \geq P_{\sigma^2=\sigma_0^2}\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}}_{U\sim\chi^2_n} < \frac{K_\alpha}{\sigma_0^2}\right) = P_{\sigma^2=\sigma_0^2}\left(U < \frac{K_\alpha}{\sigma_0^2}\right) \leq 0.01$$

$$\Rightarrow \frac{K_\alpha}{\sigma_0^2} \leq \chi^2_{n,0.01} \Rightarrow K_\alpha = \chi^2_{n,0.01}\,\sigma_0^2 = 889,72$$



$\Rightarrow$ mi test finalmente queda

$$\delta(\underline{x}) = \mathbb{1}\left\{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 < 889,72\right\}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 = \hat{\sigma}^2(n-1) = 1600$$

aplicando los datos de la muestra al test

$$\delta(\underline{x}) = \mathbb{1}\{1600 < 889,72\} = 0$$ no tengo evidencia suficiente para rechazar H_0

[illegible]
Gabriel

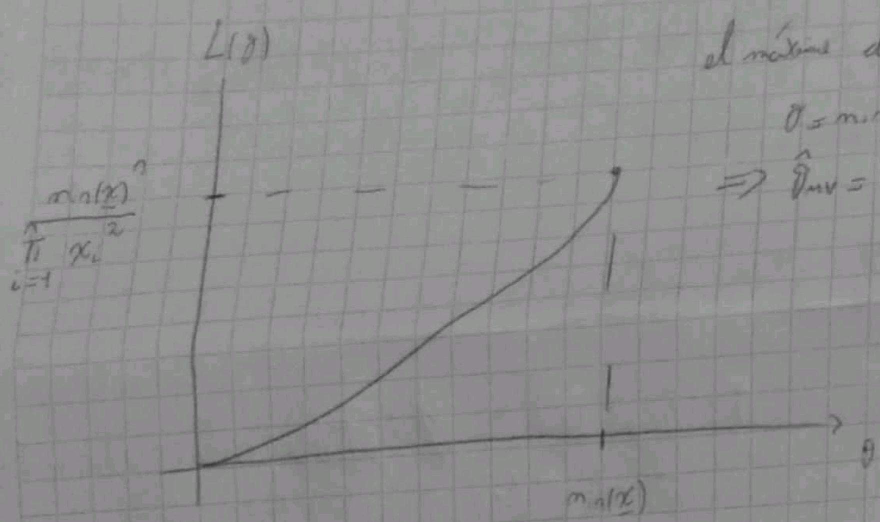
4_ X: "tiempo que tarda en florecer un bulbo de tulipán"

$$f_\theta(x) = \frac{\theta}{x^2} \mathbb{1}\{x \geq \theta\}$$

busco $\hat{\theta}_{MV} \Rightarrow$ busco $L(\theta)$

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) = \frac{\theta^n}{\prod_{i=1}^{n} x_i^2} \mathbb{1}\{\min(\underline{x}) \geq \theta\}$$

no puedo derivar para hallar el máximo



el máximo de $L(\theta)$ se encuentra en

$\theta = \min(\underline{x})$

$\Rightarrow \hat{\theta}_{MV} = \min(\underline{X})$

mi estimación basada en la m.a. será

$$\hat{\theta}_{MV}(\underline{x}) = \min(\underline{x}) = 3 \quad \text{con } \underline{x} = (3;\ 4.5;\ 3;\ 3.5;\ 4)$$

$$\widehat{P}(X < 4) = \int_{-\infty}^{4} f_{\hat{\theta}_{MV}}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{4} \frac{3}{x^2} \mathbb{1}\{x \geq 3\} = 3 \int_{3}^{4} x^{-2}\,dx =$$

$$= 3 \left(\frac{1}{x} \Big|_{4}^{3} \right) = \frac{1}{4}$$

3_ T: "# de llamadas por problemas técnicos que atiende un agente hasta su descanso"

G: "# de llamadas que atiende el agente hasta la 1º llamada para pagar" $\sim$ Geo(0.1)

$$T\Big|_{G=g} \sim Bin\left(g-1,\ \frac{0.4}{1-0.1}\right) \sim Bin\left(g-1,\ \frac{4}{9}\right)$$

$E[T] = E[E[T/G]]$

¿$E[T/G]$?

$E[T/G=g] = \frac{4(g-1)}{9} \Rightarrow E[T/G] = \frac{4(G-1)}{9}$

$\Rightarrow E[T] = E\left[\frac{4(G-1)}{9}\right] \underset{\downarrow}{=} \frac{4}{9} E[G-1] = \frac{4}{9} E[G] - \frac{4}{9} E[1] = \frac{4}{9} E[G] - \frac{4}{9} = (*)$

la esperanza es lineal

$E[G] = \frac{1}{0.1} = 10 \Rightarrow (*) = 4$

2_

$T_1 \sim \Gamma(2, 1.5)$

$T_2 \sim \Gamma(4, 1.5)$

$T_3 \sim \Gamma(3, 1.5)$

$T_4 \sim \Gamma(5, 1.5)$

T: "tiempo total" $= T_1+T_2+T_3+T_4 \sim \Gamma(2+4+3+5, 1.5)$

esto es porque son independientes

$\Rightarrow T \sim \Gamma(14, 1.5)$

ANULADO

$P(T > 10) =$ 0.30122 y podría calcularlo, pero me piden una cota superior

$P\left(\sum_{i=1}^{4} T_i > 10\right)$

$E\left[\sum_{i=1}^{4} T_i\right] = \sum_{i=1}^{4} E[T_i] =$

$= \frac{1}{1.5}(14) = \frac{28}{3}$ $\quad Var\left(\sum_{i=1}^{4} T_i\right) = Var(T) = \frac{14}{1.5^2} = \frac{56}{9}$

$$\Rightarrow P\left(\frac{\sum_{i=1}^{4} T_i - \frac{28}{3}}{\sqrt{\frac{56}{9}}} > \frac{2/3}{\frac{\sqrt{56}}{3}}\right) \underset{\text{por TCL}}{\approx} \phi\left(\frac{2}{\sqrt{56}}\right)$$

[illegible] Gabriel

$\cancel{P\left(\sum_{i=1}^{4} T_i > 10\right) \simeq \phi\left(-\frac{2}{\sqrt{50}}\right) \approx 0.3946^3}$

1_ F: "Pedrito obtiene a Freddy" $P(F) = P(J) = P(P)$

J: " " "Jason"

P: " " "Pennywise"

espacio equiprobable => uso Laplace

$\#CP$:

F	F	F	F	F
J	J	J	J	J
P	P	P	P	P

$= 3^5$

A: "obtiene el mismo personaje 3 veces consecutivas y completa la colección"

ANULADO

CF.

F F F J P	J J J F P	P P P F J
F F F P J	J J J P F	P P P J F
J F F F P	F J J J P	F P P P J
P F F F J	P J J J F	J P P P F
J P F F F	F P J J J	F J P P P
P J F F F	P F J J J	J F P P P

$= 6^3$

$$P(A) = \frac{6^3}{3^5} = \frac{8}{9}$$

Alfonso Gabriel

2 — $T_1+T_2+T_3+T_4 = T \sim \Gamma(14, 1.5)$ (T_i independientes)

$P(T > 10)$ / $E[T] = \frac{28}{3}$

~~$P(T - E[T] > 10 - E[T]) = P(T - E[T] \geq 10 - E[T]) \leq \frac{Var(T)}{(10-E[T])^2}$ por chebyshev~~

Desigualdad de Markov: (X estrictamente > 0)

$$P(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}$$

~~$P(T > 10) = P\left(T - \frac{28}{3} \geq \frac{2}{3}\right) \leq \frac{\frac{56}{9}}{\frac{4}{9}} = 14$~~

$$P(T > 10) = P(T \geq 10) \underset{\text{por Markov}}{\leq} \frac{E[T]}{10} = \frac{14}{15}$$ es una cota superior para la pedida

pero Markov da una cota muy alta otra forma es utilizando TCL

así que

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} T_i - E[\sum_{i=1}^{n} T_i]}{\sqrt{Var(\sum_{i=1}^{n} T_i)}} > a\right) = \phi(-a)$$

lo que significa que con $n \to \infty$ me acerco al valor

por lo que $P\left(\frac{\sum_{i=1}^{4} T_i - E[\sum_{i=1}^{4} T_i]}{\sqrt{Var(\sum_{i=1}^{n} T_i)}} > a\right) < \phi(-a)$

$$P(T > 10) = P\left(\sum_{i=1}^{4} T_i > 10\right) = P\left(\underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{4} T_i - E[\sum_{i=1}^{4} T_i]}{\sqrt{Var(\sum_{i=1}^{4} T_i)}}}_{Z} > \frac{10 - E[\sum_{i=1}^{4} T_i]}{\sqrt{Var(\sum_{i=1}^{4} T_i)}}\right) = (*)$$

$E[\sum_{i=1}^{4} T_i] = E[T] = \frac{14}{1.5} = \frac{28}{3}$ y $Var(\sum_{i=1}^{4} T_i) = Var(T) = \frac{56}{9}$

$$(*) = P\left(Z > \frac{2}{\sqrt{56}}\right) < \phi\left(-\frac{2}{\sqrt{56}}\right) \simeq 0.39463$$