HW6

Dennis Gabriela Coy Calderón
Código : 614181026

3 de octubre de 2020

Introducción

El problema de los n-cuerpos es un problema fundamental en mecánica celeste y consiste en determinar todas las posibles trayectorias de n-cuerpos perfectamente esféricos, sometidos a una interacción gravitacional. Este es un problema abierto y su solución analítica solo se tiene en dos casos, $n = 1$, llamado problema de Kepler y $n = 2$, problema de dos cuerpos.[1] Estas dinámicas entre cuerpos permiten realizar simulaciones sobre sistemas elípticos planetarios, similares al sistema solar, sin embargo, dada las características de algunos modelos y el tamaño de las masas, se puede aplicar específicamente a cuerpos binarios, despreciando la atracción gravitacional que ejerce todas las masas en uno individual. En este proyecto se intentará relacionar el problema de uno y dos cuerpos para simular la rotación de la tierra alrededor del sol mientras se calcula a partir de una simulación de markov monte carlo la posibilidad de que un cometa de otro sistema solar colisione con la tierra.

Definición matemática del problema

- **Suposiciones.**
  - Las masas deben tener una contextura totalmente esférica.
  - Una de las masas debe tener una masa mucho más grande que la otra.
  - No existe algún tipo de fricción en el movimiento de los cuerpos.
- **Definición de variables.**
  - r : Distancia entre los cuerpos.
  - E : Energía total.
  - T : Energía cinética.
  - U : Energía potencial.
  - m : Masa del cuerpo.
  - $\vec{r}$: Vector posición.

- L : Momento angular.

- **Modelo.**

  Energía en coordenadas polares.

  La energía E es la suma de la energía cinética T y la energía potencial U

$$E = T + U$$

Donde T es el trabajo proporcional a la masa del cuerpo multiplicado por el vector velocidad $\dot{\vec{r}}$ al cuadrado.

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{\vec{r}})^2$$

y U es inversamente proporcional a la distancia entre las masas

$$U = \frac{k}{r}$$

Nota: La derivada del vector posición es $\dot{\vec{r}} = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$

Por ende la energía se expresa de la forma

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{k}{r}$$

Momento angular

L se define como el producto entre la masa del objeto, la distancia que hay entre los objetos al cuadrado y el cambio del ángulo a través del tiempo

$$L = mr^2\dot{\theta}$$

Por lo tanto el cambio del ángulo a través del tiempo es igual a

$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$$

Planteamiento de la ecuación diferencial

De las expresiones de momento angular y energía se obtiene que:

$$E = \frac{1}{2}m\frac{dr^2}{dt} + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{k}{r}$$

Despejando $\frac{dr}{dt}$ en lo anterior

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}\right)}$$

Al dividir la derivada de la distancia entre la derivada del angulo con respecto al tiempo se tiene la siguiente ecuación diferencial en términos de r y θ

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{\frac{L}{mr^2}}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}\right)}}$$

Ecuación que modela la dinamica de dos cuerpos

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{(1+q)x}{\sqrt{x^2+y^2}^3}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{(1+q)y}{\sqrt{x^2+y^2}^3}$$

Siendo x y y las posiciones horizontal y vertical respectivamente, mientras que q es el ratio de las masas

Para resolver esta ecuacion se separara en 4 ecuacioness diferentes denotando nuevas variables v_x, v_y como las derivadas de x y y, luego se aplicara runge kutta de orden 4

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt}$$

$$v'_x = -\frac{(1+q)x}{\sqrt{x^2+y^2}^3}$$

$$v'_y = -\frac{(1+q)y}{\sqrt{x^2+y^2}^3}$$

Objetivos

- Realizar un estudio de estabilidad y puntos de equilibrio para conocer propiedades sobre los sistemas dinámicos presentados.
- Resolver numéricamente las ecuaciones diferenciales y se comparan con el proceso linealizado para ver las propiedades de las ecuaciones en puntos específicos.
- Realizar una simulacion monte carlo para educir el comportamiento de algunos cometas en otro sistema solar y la probabilidad de que uno de ellos entre al sistema [2].
- Calcular la dinamica del cometa entrando al sistema solar y observar si colisiona con la tierra.

Referencias

[1] John A. Arredondo and Alejandra T. Manotas. Potencial homogéneo generalizado y el problema de kepler. *Miscelánea matemática*, 68:85 – 112, 2019.

[2] JQ Zheng and MJ Valtonen. On the probability that a comet that has escaped from another solar system will collide with the earth. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 304(3):579–582, 1999.

[3] Samik Raychaudhuri. Introduction to monte carlo simulation. In *2008 Winter simulation conference*, pages 91–100. IEEE, 2008.

[4] Julie Bellerose and Daniel J Scheeres. Energy and stability in the full two body problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 100(1):63–91, 2008.