Mate 1: Curs #2

Profesor: Radu Gologan

3 Octombrie 2019

1 Latice

Definitie: $(X, \leqslant)$ se numeste **latice completa** daca $\forall A \subseteq X \implies \exists sub_A, inf_A \in X$ $f : X \to X$ este o functie monotona crescatoare(descrescatoare) daca $x \leqslant y \implies f(x) \leqslant (\geqslant) f(y)$
Exemplu:
Fie M o multime, atunci $\mathscr{P}(M)$ este o latice completa relativ la relatia de incluziune $\subseteq$, cu $sup_{A_i} = \bigcup_i A_i$ si $inf_{A_i} = \bigcap_i A_i,\ A_i \in \mathscr{P}(M)$
Teorema (Tarski):
Fie $(X, \leqslant)$ o latice completa si $f : X \to X$ o functie monotona. Atunci f admite un punct fix: $\exists u \in X\ a.i.\ f(u) = u$
Demonstratie:
Fie $A \subseteq X\ a.i\ A = \{x \in X \mid x \leqslant f(x)\}\ si\ u = sup_A$.
Din faptul ca $x \in A \implies x \leqslant f(x)$, dar f este monotona $\implies f(x) \leqslant f(f(x)) \implies f(x) \in A\ \forall x \in A$ (1)
$\forall x \in A,\ x \leqslant u$ si f monotona $\implies f(x) \leqslant f(u) \implies x \leqslant f(x) \leqslant f(u) \implies f(u)$ majorant pentru A, dar $u = sup_A \implies u \leqslant f(u)$ (2)
Din faptul ca $u \leqslant f(u) \implies u \in A$, dar din (1) rezulta ca $f(u) \in A\ si\ u = sup_A \implies f(u) \leqslant u$ (3)
Din (2) si (3) $\implies f(u) = u$ ∎

Consecinta a teoremei Tarski - Teorema lui Bernstein:
Fie A, B doua multimi, astfel incat $\exists f : A \to B,\ g : B \to A$ doua functii injective. Atunci exista o functie $h : A \to B$ bijectiva.
Demonstratie:
Fie $\phi : \mathscr{P}(A) \to \mathscr{P}(A)$ o functie. ϕ este o functie crescatoare(descrescatoare) daca ϕ are urmatoarea proprietate $\forall U, V \in \mathscr{P}(A)\ a.i.\ U \subseteq V \implies$
$\phi(U) \subseteq (\supseteq) \phi(V)$ (4)
Fie A o multime si $\phi : \mathscr{P}(A) \to \mathscr{P}(A),\ \phi(X) = A \backslash X$ o functie. Pentru $U, V \in \mathscr{P}(A), U \subseteq V \implies \phi(U) \supseteq \phi(V),\ din\ (1) \implies \phi$ este descrescatoare.(5)
Pentru $f : A \to B$, vom nota pentru $X \in \mathscr{P}(A), f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$.

Fie $f : A \to B$ si $g : B \to A$ doua funictii injective.
Fie $S : \mathscr{P}(A) \to \mathscr{P}(A),\ S(X) = g(B \backslash f(A \backslash X))$. Din (4) si (5) rezulta ca S

este crescatoare. Deoarece S este monotona, din teorema lui Tarski rezulta ca $\exists C \in \mathscr{P}(A)\ a.i.\ S(C) = C \implies \forall x,\ x \in C \iff x \in g(B\backslash f(A\backslash C)$ (6).

Fie $R = \{(x,y) \in A \times B \,|\, x \notin C\ si\ y = f(x),\ sau\ x \in C\ si\ x = g(y)\}$ o functie definita pe A, cu valori in B, vom arata ca R este o functie bijectiva.
Fie $y \in B$. Daca $y \in f(A\backslash C) \implies \exists x \in A\backslash C\ a.i.\ f(x) = y$. Daca $y \notin f(A\backslash C) \implies y \in B\backslash f(A\backslash C) \implies \exists x = g(y) \in C$. Rezulta ca R este surjectiva (7)

2 Numarabilitate

Definitie:
Fie A, B doua multimi, supunem ca A si B sunt **echivalente** $\iff \exists f : A \to B$ o functie bijectiva.
Definitie:
O multime A echivalenta cu $\mathbb{N}$ se numeste **numarabila**.
Notam $card(A)$ **cardinalul** lui A = clasa de echivalenta a lui A fata de relatia de echivalenta cu N.
Notam $card(\mathbb{N}) = \aleph_0$
Altfel spus, A este numarabila $\iff \exists (a_n)_{n \geqslant 0}\ a.i.\ \forall x \in A\ \exists i \in \mathbb{N}\ a.i.\ a_i = x$

Propozitie: daca A si B sunt numarabile $\implies A \times B$ este numarabila.
Demonstratie:
Este suficient sa demonstram ca $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ este numarabila, intrucat daca A si B sunt echivalente cu $\mathbb{N} \implies A \times B$ este echivalenta cu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(n,m) \,|\, n, m \in \mathbb{N}\}$
Fie $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f((i,j)) = \frac{(i+j)\cdot(i+j-1)}{2} + i$.
Vom demonstra ca f este bijectiva.
Se observa ca daca $a + b = k \implies f((a,b)) \in \left[\frac{k(k-1)}{2}, \frac{k(k+1)}{2}\right)$ si oricare doua astfel de intervale sunt disjuncte $\implies f((a,b)) = f((c,d)) \iff a + b = c + d$
Daca $a+b = c+d\ si\ f((a,b)) = f((c,d)) \implies \frac{(a+b)\cdot(a+b-1)}{2} + a = \frac{(c+d)\cdot(c+d-1)}{2} + c \iff a = c$, dar $a + b = c + d \implies b = d \implies f$ este injectiva. (1)

Fie $x \in \mathbb{N} \implies \exists k \in \mathbb{N}\ a.i.\ x \in \left[\frac{k(k-1)}{2}, \frac{k(k+1)}{2}\right)$. Notam $y = x - \frac{k(k-1)}{2} \implies f((y, k-y)) = x \implies \forall x \in \mathbb{N}\ \exists (y, k-y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\ a.i.\ f((y, k-y)) = x \implies f$ este surjectiva (2)
Din (1) si (2) $\implies f$ este bijectiva $\implies \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ este numarabila ■

Fie $\mathbb{Q}_+ = \{\frac{p}{q} \,|\, p, q \in \mathbb{N}\}$ si $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_+,\ g((a,b)) = \frac{a}{b}$ o functie evident bijectiva $\implies \mathbb{Q}_+$ este echivalenta cu $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \implies \mathbb{Q}_+$ este numarabila. Analog se demonsteaza ca $\mathbb{Q}_- = \{-\frac{p}{q} \,|\, p, q \in \mathbb{N}\}$ este numarabila $\implies \mathbb{Q}$ este numarabila.