“Inteligenta artificiala nu va egala niciodata prostia naturala.”

— Duca Iulian

Mate 1: Curs #1

Profesor: Iulian Duca

30 Septembrie 2019

1 Matrici

Fie $A = \{1, 2, 3, ..., n\}$ si $B = \{1, 2, 3, ..., m\}, m, n \in \mathbb{N}^*$.
Se numeste **matrice** cu n linii si m coloane, orice aplicatie $f : A \times B \to I$, unde $(I, +, \cdot)$ inel.
Vom nota $f(i, j) = C_{ij},\ C = (C_{ij}), 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant m.$
Consideram **matricea extinsa**: $\left(\begin{array}{cccc|c} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} & b_1 \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} & b_m \end{array}\right)$
a sistemului $A \cdot X = B,\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},\ A \in M_n(\mathbb{R})$

Se observa ca:

1. Daca se inverseaza doua linii pe matricea extinsa, se obtine o matrice extinsa a unui sistem echivalent cu cel initial.

2. Daca se inmulteste o linie cu un numar nenul si se adauga la alta linie, rezulta un sistem echivalent cu cel initial.

Daca folosim cele 2 operatii enuntate anterior $\implies (A|B) \sim \dots \sim (I_n|B^*)$

Observatie:
Daca avem un sistem $(A|C1)$ si un alt sistem $(A|C2)$, se pot rezolva simultan cele 2 sisteme cu **metoda Gauss-Jordan**:
$(A|C1|C2) \sim \dots \sim (I_n|C_1^*|C_2^*)$
$(A|C1) \sim \dots \sim (I_n|C_1^*) \iff C_1^* = A^{-1} \cdot C_1$ Daca rezolva simultan n sisteme de ecuatii de forma $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\left(A \left| \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} \right| \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix} \left| \dots \right| \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}\right) \Longleftrightarrow (A|I_n)\sim\dots\sim(I_n|A^{-1})$$

Pentru determinarea matricelor echivalente cu matricea initiala se poate proceda astfel:

1. Daca $A_{11} \neq 0$ se imparte linia 1 la A_{11} obtinand pe aceasta pozitie 1. Daca se inmulteste linia 1 cu $-A_{21}$ si se aduna la linia 2 se obtine pe linia $A_{21} = 0$. Se procedeaza analog cu celelalte linii pana cand sub elementul A_{11} raman numai valori 0. Ceea ce s-a facut pentru A_{11} se face si pentru elementele $A_{22}, A_{33}, \dots, A_{nn}$, obtinandu-se astefel pe diagonala principala numai valori 1 si sub aceasta numai valori 0.

2. Absolut analog cu pasul 1, incepand cu coloana n se obtin valori egale cu 0 deasupra diagonalei principale.

De remarcat este faptul ca in toate operatiunile descrise mai sus participa si elementele din coloana termenilor liberi.
Exemplu:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&1&1&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\1&1&0&0&1&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&1&0\\0&1&1&1&0&0\\1&1&0&0&0&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&1&1&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\1&1&0&0&1&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&1&0\\0&1&1&1&0&0\\0&1&-1&0&1&1\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&1&0\\0&1&1&1&0&0\\0&0&-2&-1&-1&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&1&0\\0&1&1&1&0&0\\0&0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&1&0\\0&1&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{array}\right)=(I_n|A^{-1})$$

Se verifica usor ca matricea obtinuta este intradevar A^{-1}, intrucat respecta relatia $A \cdot A^{-1} = I_3$.

2 Spatii vectoriale

Fie $(V, +)$ un **grup abelian** si $(K, +, \cdot)$ un **corp**. Spunem ca **V are structura de spatiu vectorial peste corpul K** daca V si K sunt inzestrate cu **legea externa** $\cdot : K \times V \to V$ ce indeplineste urmatoarele proprietati:

1. **distributivitatea inmultirii cu un scalar fata de adunarea vectoriala**: $\lambda(v + u) = \lambda v + \lambda u \ \forall \lambda \in K, v, u \in V$

2. **distributivitatea inmultirii cu un scalar in raport cu legea aditiva al corpului**: $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v \ \forall \lambda, \mu \in K, v \in V$

3. **compatibiliatea inmultirii cu un scalar cu inmultirea corpului**: $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v \; \forall \lambda, \mu \in K, \forall v \in V$

4. **elementul neutru al inmultirii cu un scalar**: $1 \cdot v = v, \forall\, v \in V$, unde 1 reprezinta elementul neutru al inmultirii din K

Elementele din V se numesc **vectori** iar elementele din K se numesc **scalari**.
Exemple de spatii vectoriale:

- $V = \mathbb{R}^n, K = \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$
- $V = \mathbb{C}, K = \mathbb{R}$
- $V = M_{n,m}(\mathbb{R}), K = \mathbb{R}$
- $V = \mathscr{V}_3, K = \mathbb{R}$
- $V = \mathbb{R}[X], K = \mathbb{R}$

Fie scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ si vectorii $v_1, v_2, \ldots v_n$. Atunci expresia $\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n$ se numeste **combinatie liniara** a vectorilor $v_1, v_2, \ldots v_n$, cu scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Definitie: Fie V un spatiu vectorial peste K. Vectorii $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ formeaza **sistem de generatori** pentru $V \iff \forall\; v \in V\; \exists\; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$ a.i. $v = \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n$.

Definitie: Vectorii $v_1, v_2, \ldots v_n$ din spatiul vectorial V peste K formeaza un **sistem liniar independent** peste K daca din orice relatie $\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n = 0 \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = 0$. Altfel spus, un sistem de generatori nu poate fi scris ca o combinatie liniara decat decat daca toti scalarii acesteia sunt nuli.

Definitie: Un spatiu vectorial care admite un sistem de generatori cu numar finit de vectori se numeste **spatiu vectorial finit generat**.

Definitie: O multime de vectori care formeaza un sitem de generatori liniar independenti se numeste **baza**.

Proprietate: Din orice sistem de generatori finit se poate extrage o baza.
Demonstratie: Vectorii din sistemul de generatori care se pot scrie ca fiind o combinatie liniara a celorlalti vectori se pot exclude din sistemul de generatori. Procedeul poate sa fie continuat pana in momentul in care nici unul dintre vectori nu mai poate fi scris ca o combinatie liniara a celorlalti.