Mate 1: Curs #1

Profesor: Iulian Duca

30 Septembrie 2019

1 Matrici

Fie $A = \{1, 2, 3, ..., n\}$ si $B = \{1, 2, 3, ..., m\}, m, n \in \mathbb{N}^*$.
Se numeste matrice cu n linii si m coloane, orice aplicatie $f : A \times B \to I$, unde $(I, +, \cdot)$ inel.
Vom nota $f(i, j) = C_{ij},\ C = (C_{ij}), 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant m$.

Consideram matricea extinsa: $\left(\begin{array}{cccc|c} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} & b_1 \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} & b_m \end{array}\right)$

a sistemului $A \cdot X = B,\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},\ A \in M_n(\mathbb{R})$

Se observa ca daca se inverseaza doua linii pe matricea extinsa, se obtine o matrice extinsa a unui sistem echivalent cu cel initial.
Daca se inmulteste o linie cu un numar nenul si se adauga la alta linie, rezulta un sistem echivalent cu cel original.
Daca folosim cele 2 operatii enuntate anterior $\implies (A|B) \sim \dots \sim (I_n|B^*)$

Observatie:
Daca avem un sistem $(A|C1)$ si un alt sistem $(A|C2)$, se pot rezolva simultan cele 2 sisteme cu metoda Gauss-Jordan:
$(A|C1|C2) \sim \dots \sim (I_n|C_1^*|C_2^*)$
$(A|C1) \sim \dots \sim (I_n|C_1^*) \iff C_1^* = A^{-1} \cdot C_1$ Daca rezolva simultan n sisteme de ecuatii de forma $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\left(A \,\middle|\, \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix} \,\middle|\, \ldots \,\middle|\, \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}\right) \Longleftrightarrow (A|I_n)\sim\ldots\sim(I_n|A^{-1})$$

Pentru determinarea matricelor echivalente cu matricea initiala se poate proceda astfel:

1. Daca $A_{11} \neq 0$ se imparte linia 1 la A_{11} obtinand pe aceasta pozitie 1. Daca se inmulteste linia 1 cu $-A_{21}$ si se aduna la linia 2 se obtine pe linia $A_{21} = 0$. Se procedeaza analog pana cand sub elementul A_{21} sunt numai valori 0. Ceea ce s-a facut cu A_{11} se face si cu elementele $A_{22}, A_{33}, \ldots, A_{nn}$, obtinandu-se astfel pe diagonala principala numai valori 1 si sub aceasta numai valori 0.

2. Absolut analog cu pasul 1, incepand cu coloana n se obtin valori egale cu 0 deasupra diagonalei principale.

De remarcat este faptul ca in toate operatiunile descrise mai sus participa si elementele din coloana termenilor liberi.
Exemplu:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&1&1&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\1&1&0&0&1&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&1&0\\0&1&1&1&0&0\\1&1&0&0&0&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&1&1&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\1&1&0&0&1&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&1&0\\0&1&1&1&0&0\\0&1&-1&0&1&1\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&1&0\\0&1&1&1&0&0\\0&0&-2&-1&-1&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&1&0\\0&1&1&1&0&0\\0&0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&1&0\\0&1&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{array}\right)=(I_n|A^{-1})$$

Se verifica usor ca matricea obtinuta este intradevar A^{-1}, intrucat respecta relatia $A \cdot A^{-1} = I_3$.