Mate 1: Curs #0

Profesor: Radu Gologan

26 Septembrie 2019

Obtinere Nota

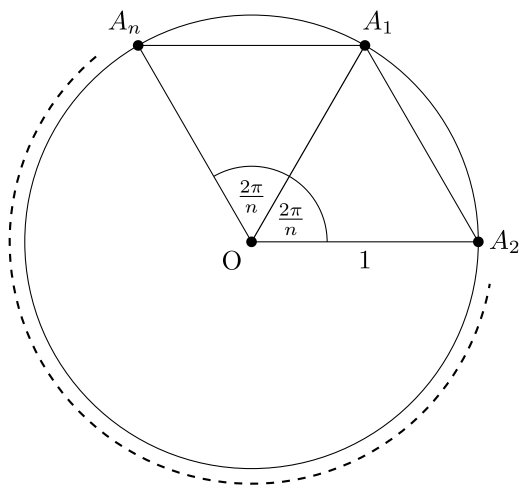
Nota finala maxima este de 100 de puncte, iar pentru promovare este necesar un minim de 41 de puncte. Punctele se vor obtine dintr-un test final alcatuit din 5 probleme, care valoreaza 50 de puncte. Restul de 50 de puncte din nota finala se vor obtine din seminar. La seminar, 10 puncte vor fi acordate pentru prezenta, 10 vor fi acordate pe activitatea la seminar, iar restul de 30 de puncte vor fi obtinute din doua teste partiale, fiecare in valoare de 15 puncte, sustinute in saptamana a 8-a, respectiv saptamana a 13-a.

Resurse

Grup Facebook: CA-Mate1_2019
Tania-Luminita Costache - Analiza a Culegere de Probleme
Matematici pentru politehnisti - Canal de YouTube
Matematici pentru politehnisti - Grup de Facebook
Blogul personal al Dl. Prof. Negrescu

1 Aproximarea lungimii unui cerc cu ajutorul analizei matematice

Fie $\mathscr{C}(O,1)$, $A_1\ A_2\ A_3\ ...\ A_n$ un poligon regulat inscris in $\mathscr{C}$ si $B_1\ B_2\ B_3\ ...\ B_n$ un poligon regulat circumscris lui $\mathscr{C}$ a.i. segmentul B_iB_{i+1} este tangent la $\mathscr{C}$ in A_i . Vom demonstra folosind principii de analiza matematica ca $P(\mathscr{C}) = 2\pi$. Vom demonstra ca perimetrele celor doua poligoane au acceeasi limita atunci cand $n \to \infty$.



Folosind teorema cosinusului:
$A_iA_{i+1} = \sqrt{2 - 2cos\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)} = \sqrt{4sin^2\left(\dfrac{\pi}{n}\right)} = 2sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$.

Deci, perimetrul poligonului inscris in $\mathscr{C}$ este $P_A(n) = 2n \cdot sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$.

Din faptul ca B_iB_{i+1} este tangent la $\mathscr{C}$ in A_i, rezulta ca $\triangle OA_iB_i$ este dreptunghic in A_i
$\Longrightarrow\ A_iB_i = tg\left(\dfrac{\pi}{n}\right) \Longrightarrow\ B_iB_{i+1} = 2tg\left(\dfrac{\pi}{n}\right) \Longrightarrow\ P_B(n) = 2n \cdot tg\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$.
Intrucat $P_A(n) < P(\mathscr{C}) < P_B(n), \forall n \geqslant 3$, trecand la limita cand $n \to \infty$ vom avea:

$$\lim_{n\to\infty} P_A(n) \leqslant P(\mathscr{C}) \leqslant \lim_{n\to\infty} P_B(n) \iff$$

$$\lim_{n\to\infty} 2n \cdot sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \leqslant P(\mathscr{C}) \leqslant \lim_{n\to\infty} 2n \cdot tg\left(\frac{\pi}{n}\right) \iff$$

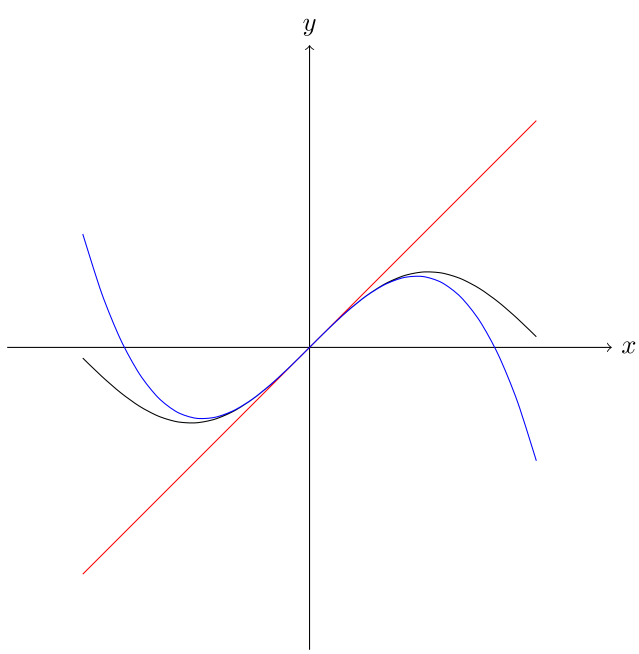
$$\lim_{n\to\infty} 2\pi \cdot \frac{sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)}{\dfrac{\pi}{n}} \leqslant P(\mathscr{C}) \leqslant \lim_{n\to\infty} 2\pi \cdot \frac{tg\left(\dfrac{\pi}{n}\right)}{\dfrac{\pi}{n}} \iff$$

$$2\pi \leqslant P(\mathscr{C}) \leqslant 2\pi \iff P(\mathscr{C}) = 2\pi \blacksquare$$

2 Aproximarea functiei $sin(x)$ pentru valori foarte mici ale lui x

$$\lim_{x\to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1 \implies x \lll,\ sin(x) \approx x$$

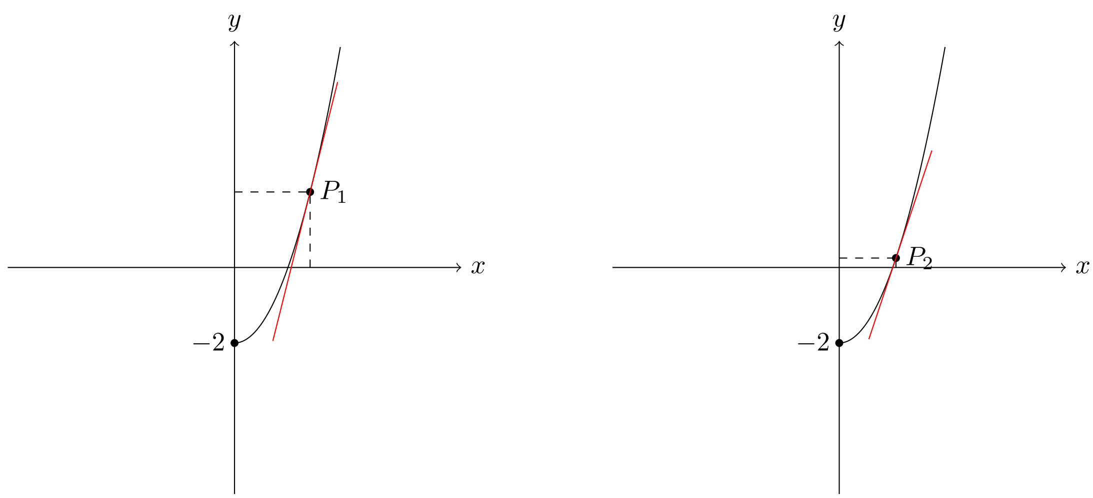
$$\lim_{x\to 0} \frac{x - sin(x)}{x^3} = \frac{1}{6} \implies x \lll,\ sin(x) \approx x - \frac{x^3}{6}$$



Se observa din graficul celor 3 functii $sin(x)$ - negru; x - rosu si $x - \dfrac{x^3}{6}$ - albastru, ca cea de-a doua aproximare este mai precisa decat prima.

3 Aproximarea lui $\sqrt{2}$ folosind metoda tangentei

Fie $f : [0, \infty] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 2$, sirul $(x_n)_{n \geqslant 1},\ x_1 = 2,\ x_{n+1} = \dfrac{x_n^2 + 2}{2x_n}$ si punctele $P_i = (x_i, f(x_i)),\ \forall\ i \in \mathbb{N}^*$.
Vom demonstra ca sirul $(x_n)_{n \geqslant 1}$ este convergent, si are limita $\sqrt{2}$.



Consideram tangenta la graficul functiei $f(x)$ in punctul P_1. Ecuatia tangentei este $y - f(x_1) = f'(x_1) \cdot (x - x_1) \implies x = \dfrac{x_1 \cdot f'(x_1) + y - f(x_1)}{f'(x_1)}$ pentru $y = 0 \implies x = \dfrac{2x_1^2 - x_1^2 + 2}{2x_1} = \dfrac{x_1^2 + 2}{2x_1} = x_2$, de unde rezulta ca x_2 este solutie pentru tangenta la $f(x)$ in punctul P_1. Prin inductie matematica, se poate demonstra recurenta sirului $(x_n)_{n \geqslant 1}$.
Folosind inegalitatea mediilor:

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n} \geqslant \frac{2\sqrt{2x_n^2}}{2x_n} = \sqrt{2} \implies x_n \geqslant \sqrt{2},\ \forall\ n \geqslant 2 \tag{1}$$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n} - x_n = \frac{2 - x_n^2}{2x_n}$$

$$(1) \implies x_{n+1} - x_n \leqslant \frac{2 - \sqrt{2}^2}{2\sqrt{2}} = 0 \implies x_n \searrow \tag{2}$$

Ca urmare a teoremei lui Weierstrass:

$$(1), (2) \implies \exists\ l \geqslant \sqrt{2},\ a.i.\ \lim_{n \to \infty} x_n = l$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2+2}{2x_n} \iff l = \frac{l^2+2}{2l} \iff l = \sqrt{2} \blacksquare$$

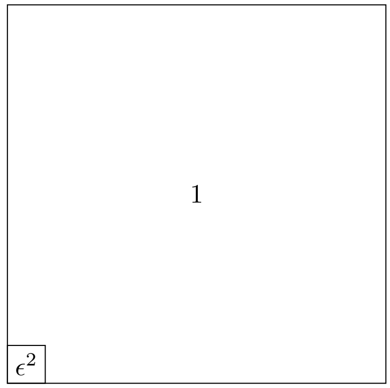
In continuare, vom studia viteza de convergenta a sirului x_n.
Notam $y_{n+1} = x_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{2+x_n^2}{2x_n} - \sqrt{2} = \dfrac{2-2\sqrt{2}x_n + x_n^2}{2x_n} = \dfrac{(x_n-\sqrt{2})^2}{2x_n} = \dfrac{y_n^2}{2x_n}$.
$x_n \geqslant \sqrt{2} > 1 \implies y_{n+1} < \dfrac{y_n^2}{2}$.
$y_{n+1} < \dfrac{y_n^2}{2} < \dfrac{1}{2} \cdot (\dfrac{y_{n-1}^2}{2})^2 = \dfrac{y_{n-1}^4}{2^3}$.
Se demonstreaza prin inductie matematica inegalitatea:
$y_{n+1} < \dfrac{1}{2^{1+2^2+\ldots+2^{n-1}}} \cdot y_1^{2^n} = \dfrac{y_1^{2^n}}{2^{2^n-1}}$.
$y_1 = 2-\sqrt{2} > \dfrac{1}{2} \implies y_{n+1} < \dfrac{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2^n}}{2^{2^n-1}} = \dfrac{2}{2^{2^{n+1}}}$.
Astfel, pentru a obtine o aproximare a lui $\sqrt{2}$ cu k zecimale exacte:
$\exists\ n \geqslant\ 2\ a.i.\ y_n < \dfrac{2}{2^{2^n}} < 10^{-k} \implies 2^{2^n} \approx k \cdot \log_2 10 \implies n \approx log_2(log_2(k))$.

4 Calculul dimensiunii unei figuri

Consideram un segment de lungime 1, si un segment de lungime $\epsilon > 0,\ \epsilon \lll$

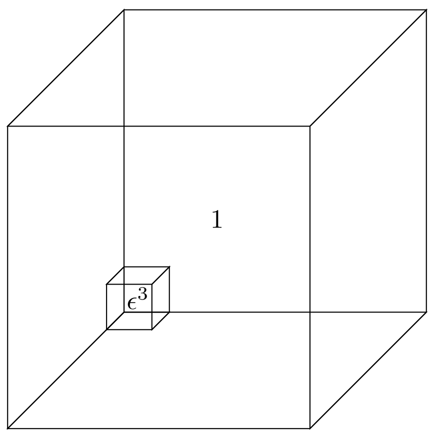
Fie n numarul de segmente ϵ necesare pentru a acoperi intregul segment.
$(n-1)\cdot\epsilon < 1 < n\cdot\epsilon \implies n \approx \epsilon^{-1}$.

Consideram un patrat cu latura de lungime 1, si un patrat cu latura de lungime $\epsilon > 0,\ \epsilon \lll$



Fie n numarul de patrate ϵ necesare pentru a acoperi intregul patrat.
$(n-1)\cdot\epsilon^2 < 1 < n\cdot\epsilon^2 \implies n \approx \epsilon^{-2}$.

Consideram un cub cu latura de lungime 1, si un cub cu latura de lungime $\epsilon > 0,\ \epsilon \lll$



Fie n numarul de cuburi ϵ necesare pentru a acoperi intregul cub.
$(n-1)\cdot\epsilon^3 < 1 < n\cdot\epsilon^3 \implies n \approx \epsilon^{-3}$.

Notam $A \subseteq \mathbb{R}^2$ suprafata unei figuri, dimensiunea lui A cu $d = dim(A),\ d \leqslant 2$ si $N(\epsilon) =$ *numarul de patrate de latura* $\epsilon \lll$ *necesare pentru a acoperi* A.

In mod general, definim d atunci cand $N(\epsilon) \approx \epsilon^{-d} \iff d \approx \dfrac{ln(N(\epsilon))}{ln\left(\dfrac{1}{\epsilon}\right)}$.

$$\text{Pentru } \epsilon = \frac{1}{2^n} \implies d = \lim_{n\to\infty} \frac{ln\left(N\left(\dfrac{1}{2^n}\right)\right)}{ln(2^n)}.$$

Intrucat $\exists\ d = \lim_{n\to\infty} \frac{ln\left(N\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)}{ln(2^n)}$, $\lim_{n\to\infty} ln(2^n) = \infty$ si $ln(2^{n+1}) - ln(2^n) = ln(2) \implies ln(2^n) \nearrow$, putem aplica lema Stolz-Cesaro:

$$d = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{ln(2)} \cdot ln\left(\frac{N\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)}{N\left(\frac{1}{2^n}\right)}\right)$$

Pentru o mai buna intelegere, vizionati Fractals are typically not self-similar ce ofera o interpretare geometrica asupra problemei.