

“Inteligența artificială nu va egala
niciodată prostia naturală.”

— Duca Iulian

Mate 1: Curs #1

Profesor: Iulian Duca

30 Septembrie 2019

1 Matrici

Fie $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ si $B = \{1, 2, 3, \dots, m\}$, $m, n \in \mathbb{N}^*$.

Se numeste **matrice** cu n linii si m coloane, orice aplicatie $f : A \times B \rightarrow I$, unde $(I, +, \cdot)$ inel.

Vom nota $f(i, j) = C_{ij}$, $C = (C_{ij})$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$.

Consideram **matricea extinsa**:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} & b_1 \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

a sistemului $A \cdot X = B$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, $A \in M_n(\mathbb{R})$

Se observa ca:

1. Daca se inverseaza doua linii pe matricea extinsa, se obtine o matrice extinsa a unui sistem echivalent cu cel initial.
2. Daca se inmulteste o linie cu un numar nenul si se adauga la alta linie, rezulta un sistem echivalent cu cel initial.

Daca folosim cele 2 operatii enuntate anterior $\implies (A|B) \sim \dots \sim (I_n|B^*)$

Observatie:

Daca avem un sistem $(A|C_1)$ si un alt sistem $(A|C_2)$, se pot rezolva simultan cele 2 sisteme cu **metoda Gauss-Jordan**:

$(A|C_1|C_2) \sim \dots \sim (I_n|C_1^*|C_2^*)$

$(A|C_1) \sim \dots \sim (I_n|C_1^*) \iff C_1^* = A^{-1} \cdot C_1$

Daca rezolva simultan n sisteme de ecuatii de forma $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\left(A \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right| \dots \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right) \Longleftrightarrow (A|I_n) \sim \dots \sim (I_n|A^{-1})$$

Pentru determinarea matricelor echivalente cu matricea initiala se poate proceda astfel:

1. Daca $A_{11} \neq 0$ se imparte linia 1 la A_{11} obtinand pe aceasta pozitie 1. Daca se inmulteste linia 1 cu $-A_{21}$ si se aduna la linia 2 se obtine pe linia $A_{21} = 0$. Se procedeaza analog cu celelalte linii pana cand sub elementul A_{11} raman numai valori 0. Ceea ce s-a facut pentru A_{11} se face si pentru elementele $A_{22}, A_{33}, \dots, A_{nn}$, obtinandu-se astfel pe diagonala principala numai valori 1 si sub aceasta numai valori 0.
2. Absolut analog cu pasul 1, incepand cu coloana n se obtin valori egale cu 0 deasupra diagonalei principale.

De remarcat este faptul ca in toate operatiunile descrise mai sus participa si elementele din coloana termenilor liberi.

Exemplu:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) = (I_n|A^{-1}) \end{aligned}$$

Se verifica usor ca matricea obtinuta este intradevar A^{-1} , intrucat respecta relatia $A \cdot A^{-1} = I_3$.

2 Spatii vectoriale

Fie $(V, +)$ un **grup abelian** si $(K, +, \cdot)$ un **corp**. Spunem ca **V are structura de spatiu vectorial peste corpul K** daca V si K sunt inzestrate cu **legea externa** $\cdot : K \times V \rightarrow V$ ce indeplineste urmatoarele proprietati:

1. **distributivitatea inmultirii cu un scalar fata de adunarea vectoriala:** $\lambda(v + u) = \lambda v + \lambda u \quad \forall \lambda \in K, v, u \in V$
2. **distributivitatea inmultirii cu un scalar in raport cu legea aditiva al corpului:** $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v \quad \forall \lambda, \mu \in K, v \in V$

3. **compatibilitatea inmultirii cu un scalar cu inmultirea corpului:**

$$\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v \quad \forall \lambda, \mu \in K, \forall v \in V$$

4. **elementul neutru al inmultirii cu un scalar:** $1 \cdot v = v, \forall v \in V$, unde 1 reprezinta elementul neutru al inmultirii din K

Elementele din V se numesc **vectori** iar elementele din K se numesc **scalari**.

Exemple de spatii vectoriale:

- $V = \mathbb{R}^n, K = \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$
- $V = \mathbb{C}, K = \mathbb{R}$
- $V = M_{n,m}(\mathbb{R}), K = \mathbb{R}$
- $V = \mathcal{V}_3, K = \mathbb{R}$
- $V = \mathbb{R}[X], K = \mathbb{R}$

Fie scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ si vectorii v_1, v_2, \dots, v_n . Atunci expresia $\alpha_1 \cdot v_1 + \dots + \alpha_n \cdot v_n$ se numeste **combinatie liniara** a vectorilor v_1, v_2, \dots, v_n , cu scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Definitie: Fie V un spatiu vectorial peste K . Vectorii $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ formeaza **sistem de generatori** pentru $V \iff \forall v \in V \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$ a.i. $v = \alpha_1 \cdot v_1 + \dots + \alpha_n \cdot v_n$.

Definitie: Vectorii v_1, v_2, \dots, v_n din spatiul vectorial V peste K formeaza un **sistem liniar independent** peste K daca din orice relatie $\alpha_1 \cdot v_1 + \dots + \alpha_n \cdot v_n = 0 \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = 0$. Altfel spus, un sistem de generatori nu poate fi scris ca o combinatie liniara decat daca toti scalarii acestia sunt nuli.

Definitie: Un spatiu vectorial care admite un sistem de generatori cu numar finit de vectori se numeste **spatiu vectorial finit generat**.

Definitie: O multime de vectori care formeaza un sistem de generatori liniar independenti se numeste **baza**.

Proprietate: Din orice sistem de generatori finit se poate extrage o baza.

Demonstratie: Vectorii din sistemul de generatori care se pot scrie ca fiind o combinatie liniara a celorlalti vectori se pot exclude din sistemul de generatori. Procedul poate sa fie continuat pana in momentul in care nici unul dintre vectori nu mai poate fi scris ca o combinatie liniara a celorlalti.