SINTEZE METODE DE NUMARARE

Notiuni teoretice	Exemple si aplicatii
Numim **cardinalul** unei **multimi finite** numarul de elemente al acelei multimi.	*Exemplu*: Daca $A=\left\{n\in N^{*} \middle\| n\le 400, n\,\vdots\, 2\right\}$, atunci $card(A)=200$.
Principiul includerii si excluderii: daca $A\ si\ B$ sunt doua multimi finite, atunci: $\boxed{card(A\cup B)= card(A)+card(B)-card(A\cap B)}$	*Aplicatie:* Din cei 30 de angajati ai unei firme 15 cunosc limba engleza, iar 10 limba franceza. Stiind ca doar 5 angajati cunosc ambele limbi straine, sa se afle cati angajati nu cunosc nici una din cele doua limbi. *Solutie.* Fie A este multimea angajatilor care cunosc limba engleza si B multimea angajatilor care cunosc limba franceza. Avem: $\boxed{card(A\cup B)= card(A)+card(B)-card(A\cap B)= 15+10-5=20}$, deci $30-20=10$ dintre cei 30 de angajati nu cunosc nici una din cele doua limbi straine.
Cardinalul produsului cartezian: daca $A\ si\ B$ sunt multimi finite, atunci: $\boxed{card(A\times B)=card(A)\cdot card(B)}$	*Exemplu*: daca $A=\{1,2,3\}$, $B=\{5,6\}$, atunci: $\boxed{A\times B=\{(1,5),(1,6),(2,5),(2,6),(3,5),(3,6)\} \quad card(A\times B)=3\cdot 2=6}$
Numarul functiilor de la o multime finita A cu m elemente la o multime finita B cu n elemente ($f:A\to B$) este n^{m}.	*Aplicatie:* Un test grila cuprinde 10 intrebari, la fiecare intrebare fiinde propuse 5 raspunsuri. In cate moduri se poate raspunde daca se aleg la intamplare raspunsurile? *Solutie.* Daca $A=\{i_1,i_2,....,i_{10}\}$ este multimea intrebarilor si $B=\{R_1,R_2,..,R_5\}$ este multimea raspunsurilor, numarul functiilor $f:A\to B$ este 5^{10}, deci se poate raspunde in 5^{10} moduri.

SINTEZE METODE DE NUMARARE

Multime ordonata: o multime impreuna cu o ordine fixata a elementelor sale. *Observatii:* **1.** O *multime ordonata* este caracterizata atat de *elementele* sale cat si de *ordinea* acestora. **2.** Doua *multimi ordonate* formate din aceleasi elemente dar avand o *ordine* diferita, nu sunt egale.	*Exemplu*: multimea ordonata $(1,2,3,4)$ este diferita de multimea ordonata $(2,1,3,4)$ deoarece *difera ordinea elementelor*.
Permutare de n elemente: multime ordonata a unei multimi de n elemente.	*Exemplu*: Permutarile multimii $A=\{1,2,3\}$ sunt multimile ordonate: $\boxed{(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)}$
Numarul de permutari de n elemente (numarul de permutari al unei multimi de n elemente.) $\boxed{P_n=n!=1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}$ *Observatii:* 1. $0!=1$; 2. Daca $card(A)=n$, atunci numarul functiilor bijective $f:A\to A$ este $n!$.	*Aplicatie:* Determinati cardinalul unei multimi, stiind ca numarul permutarilor acesteia este cuprins intre $1000\ si\ 10000$. *Solutie.* $\boxed{6!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6=720,\ 7!=6!\cdot 7=5040,\ 8!=7!\cdot 8=40320}$, deci multimea va avea 7 elemente.
Aranjament de n elemente luate cate k elemente: o *submultime ordonata* de k elemente a unei multimi de n elemente $(0\le k\le n)$.	*Exemplu*: Cu elementele multimii $A=\{1,2,3\}$ se pot forma urmatoarele *submultimi ordonate* de cate 2 elemente: $\boxed{(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2)}$

SINTEZE METODE DE NUMARARE

Numarul aranjamentelor de n elemente luate cate k: $\boxed{A_n^k=\underbrace{n(n-1)(n-2)....(n-k+1)}_{k\ factori}=\frac{n!}{(n-k)!}}$ *Observatii:* 1. $A_n^0=1$; 2. Daca $card(A)=k, card(B)=n,$ $1\le k\le n$, atunci numarul functiilor injective $f:A\to B$ este A_n^k.	*Aplicatie:* Se considera un alfabet format din 10 litere.Cate cuvinte de 3 litere distincte se pot forma cu literele acestui alfabet? *Solutie.* Daca alfabetul este multimea $A=\{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j\}$, numarul de cuvinte este egal cu numarul functiilor injective $f:\{1,2,3\}\to A$, adica: $\boxed{A_{10}^3=10\cdot 9\cdot 8=720}$
Combinare de n elemente luate cate k elemente: o submultime de k elemente a unei multimi de n elemente $(0\le k\le n)$.	*Exemplu*:Cu elementele multimii $A=\{1,2,3\}$ se pot forma urmatoarele submultimi de 2 elemente: $\boxed{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}}$
Numarul combinarilor de n elemente luate cate k: $\boxed{C_n^k=\frac{A_n^k}{P_k}=\frac{n(n-1)(n-2)......(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot ....\cdot k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}}$ *Observatii:* 1. $C_n^0=1$; 2. Daca $1\le k\le n$, atunci numarul functiilor strict crescatoare $f:\{1,2,,,,k\}\to\{1,2,...,n\}$ este C_n^k.	*Aplicatie*:Sa se determine numarul functiilor strict monotone $f:\{1,2,3\}\to\{1,2,3,...,10\}$ si sa se precizeze dintre acestea functiile a caror imagine este multimea $\{5,9,8\}$. *Solutie.* Avem $C_{10}^3=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}=120$ functii strict crescatoare si $C_{10}^3=120$ functii strict descrescatoare, deci sunt 240 de functii strict monotone. Functiile ale avand imaginea multimea $\{5,9,8\}$ sunt: $\boxed{\begin{array}{l}f(1)=5, f(2)=8, f(3)=9\ \ (str.cr.)\ si\\ g(1)=9, g(2)=8, g(3)=5\ (str.descr.).\end{array}}$

SINTEZE METODE DE NUMARARE

Proprietati ale combinarilor:

1. Formula *combinarilor complementare*:

$$\boxed{C_n^k = C_n^{n-k}}$$

2. Formula de *recurenta*:

$$\boxed{C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}}$$

3. Numarul *tuturor submultimilor* unei multimi de n elemente:

$$\boxed{C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots\ldots + C_n^n = 2^n}$$

Aplicatie: Calculati numarul de submultimi ale multimii $\{1,2,3,4,5,6\}$ care au un numar par de elemente.

Solutie.

$$\boxed{C_6^0 + C_6^2 + C_6^4 + C_6^6 = 2C_6^0 + 2C_6^2 = 2\cdot 1 + 2\cdot\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2} = 32.}$$

Formula lui Newton:

$$\boxed{(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^{n-2} a^2 b^{n-2} + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n}$$

Observatii:

1. Coeficientii $C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^{n-1}, C_n^n$ se numesc *coeficienti binomiali*.
2. *Coeficientii binomiali* egal departati de extreme sunt *egali*:

$$\boxed{\underbrace{C_n^0,\overbrace{C_n^1,\ldots,\underbrace{C_n^k,\ldots,C_n^k}_{=},\ldots,C_n^{n-1}}^{=},C_n^n}_{=}}$$

3. *Termenul general* al dezvoltarii (de rang $k+1$) este:

$$\boxed{T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k}$$

Aplicatie: Determinati termenul care il contine pe a^4 in dezvoltarea $\left(\frac{\sqrt{a}}{3} + \frac{3}{\sqrt[3]{a}}\right)^{13}$.

Solutie.

$$\boxed{T_{k+1} = C_{13}^k \left(\frac{\sqrt{a}}{3}\right)^{13-k} \left(\frac{3}{\sqrt[3]{a}}\right)^k = C_{13}^k \left(3^{-1} a^{\frac{1}{2}}\right)^{13-k} \left(3a^{-\frac{1}{3}}\right)^k = C_{13}^k 3^{k-13} a^{\frac{13-k}{2}} 3^k a^{-\frac{k}{3}} = C_{13}^k 3^{2k-13} a^{\frac{13-k}{2}-\frac{k}{3}}}$$

Din conditia $\frac{13-k}{2} - \frac{k}{3} = 4$ rezulta $39 - 5k = 24$, deci $k = 5$, de unde se obtine

$$\boxed{T_6 = C_{13}^5 3^{2\cdot 5-13} a^4 = \frac{C_{13}^5}{3^3} a^4}.$$