Mathématiques

Serrurot Gabin
BTS SNIR

13 octobre 2022

Table des matières

Chapitre 1

Trigonométrie

1.1 Cercle trigonométrique

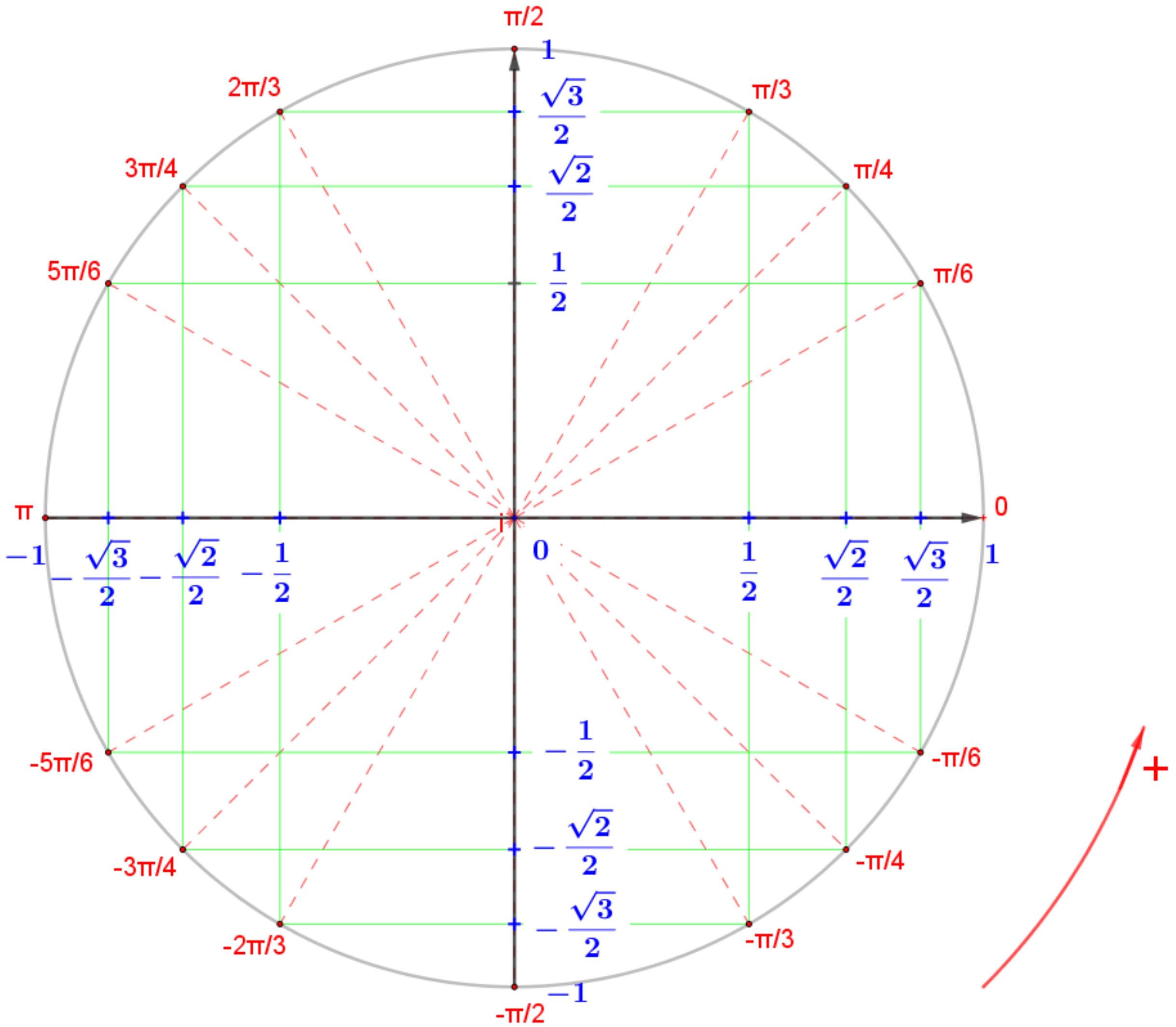

Figure 1.1 – Image montrant le cercle trigonométrique.

1.2 Fonctions sinus et cosinus

Cosinus Nous avons plusieurs relations remarquables pour la fonction $cos(x)$:

$$cos(x) = cos(-x) \tag{1.1}$$
$$cos(\pi - x) = -cos(x) = cos(\pi + x) \tag{1.2}$$

Nous pouvons associer à cette fonction la fonction $arccos(x)$ qui est sa **fonction réciproque**. Elle est définie sur $[0; \pi]$.

Sinus Nous avons plusieurs relations remarquables pour la fonction $sin(x)$:

$$sin(x) = -sin(x) \tag{1.3}$$
$$sin(\pi - x) = sin(x) \tag{1.4}$$
$$sin(\pi + x) = -sin(x) \tag{1.5}$$

Nous pouvons associer à cette fonction la fonction $arcsin(x)$ qui est sa **fonction réciproque**. Elle est définie sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

1.3 Fonction tangente

On peut définir la tangente comme étant le **rapport** du **sinus** et du **cosinus**. Elle est définie sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.
Nous avons donc sa représentation graphique suivante :

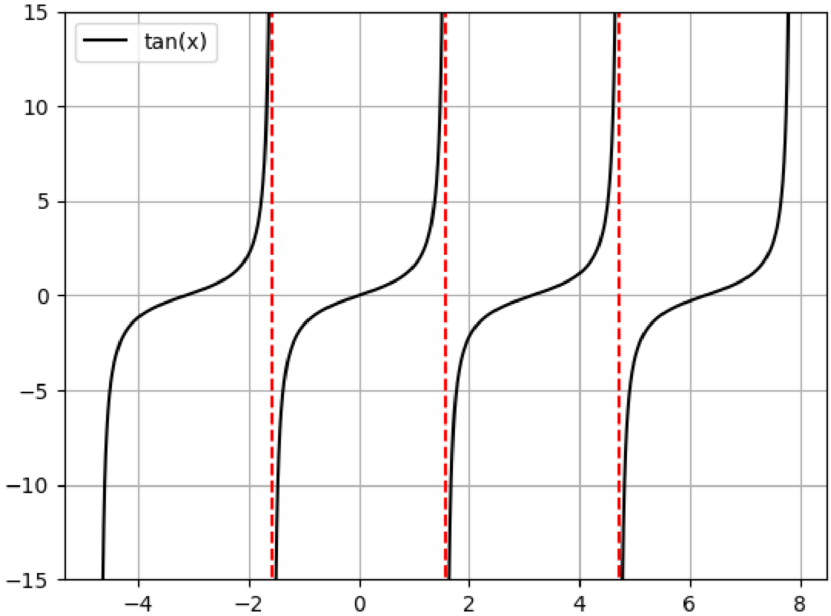

FIGURE 1.2 – graphique représentant l'allure de la fonction tangente.

Ses valeurs remarquables sont :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	interdit

TABLE 1.1 – Tableau montrant les valeurs remarquables de la fonction $tan(x)$.

Nous avons donc les propriétés suivantes :

$$tan(-x) = -tan(x) \tag{1.6}$$
$$tan(\pi - x) = -tan(x) \tag{1.7}$$
$$tan(\pi + x) = tan(x) \tag{1.8}$$

Nous pouvons associer à la fonction tangente une **fonction réciproque**, la fonction $arctan(x)$ dont la représentation est dans la figure ci-dessous :

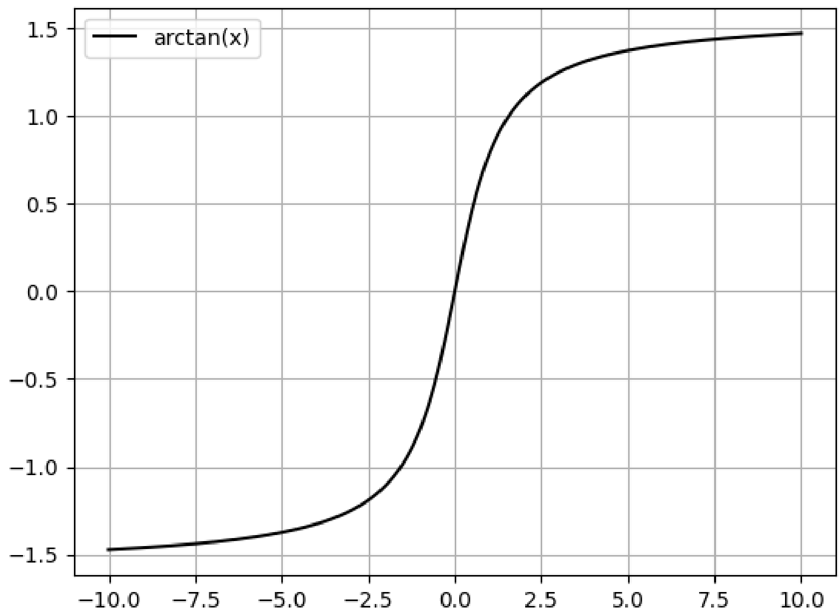

FIGURE 1.3 – Graphique montrant l'allure de la fonction $arctan(x)$.

Nous pouvons associer à cette fonction réciproque la relation :

$$arctan(-x) = -arctan(x) \tag{1.9}$$

Chapitre 2

Généralités sur les fonctions usuelles

2.1 Fonctions usuelles

Les fonctions usuelles sont représentées sur le graphe ci-dessous :

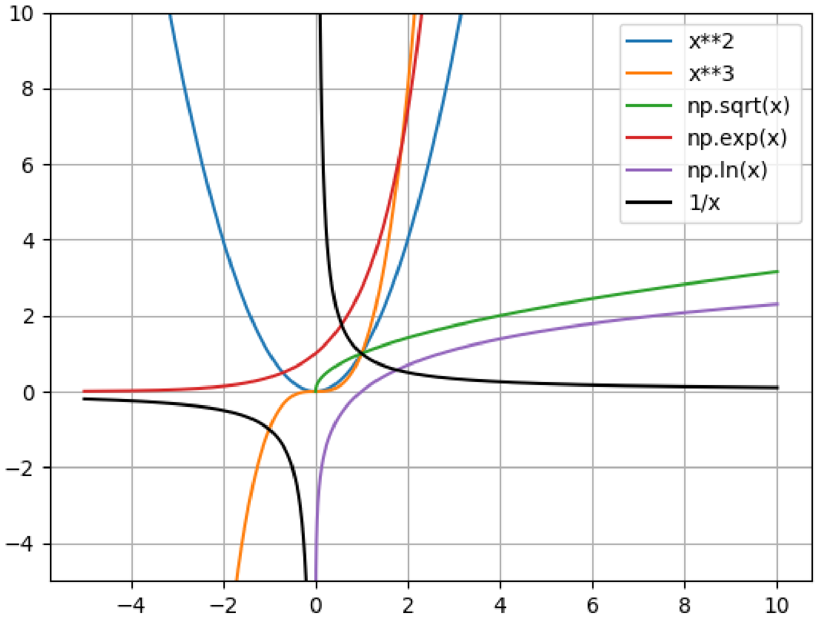

FIGURE 2.1 – Graphique montrant les fonctions usuelles.

2.2 Dérivées de fonctions usuelles

Le nombre dérivé d'une fonction **en un point** représente le **coefficient directeur** de la tangente en ce point. En effet, en chaque point nous pouvons tracer une droite qui **"colle"** à la courbe. On trouve ainsi une droite de la forme $y = ax + b$ dont le coefficient directeur est le nombre dérivé en ce point. Le nombre dérivé en a est noté $f'(a)$. En calculant le nombre dérivé pour **chacun des points** de la fonction, on obtient la **fonction dérivée**. En réalité, l'équation d'une tangente est de la forme :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a) \tag{2.1}$$

2.3 Calculer une dérivée de fonctions usuelles

Nous pouvons dresser le tableau qui donne les dérivées de chaque fonction usuelle :

$f(x)$	k	x^n	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$	e^x
$f'(x)$	0	nx^{n-1}	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	e^x

TABLE 2.1 – Tableau montrant la forme des dérivées des fonctions usuelles.

De plus, si nous avons la dérivée de fonctions usuelles avec une opération entre elles, nous avons les relations suivantes :

$f(x)$	$u(x)+v(x)$	$u(x)v(x)$	$ku(x)$	$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{k}{u(x)}$	$\frac{u(x)}{k}$
$f'(x)$	$u'(x)+v'(x)$	$u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$	$ku'(x)$	$\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$	$-\frac{ku'(x)}{u^2(x)}$	$\frac{u'(x)}{k}$

TABLE 2.2 – Forme des dérivées de fonctions usuelles.

Nous pouvons utiliser la notion de **dérivabilité** pour déduire le **nombre de solutions** d'une équation lorsque celle-ci n'est pas soluble. Ainsi, si nous avons :

1. f est dérivable et de variation strictement identique sur un intervalle I
2. k est un réel faisant partie de l'ensemble des images des réels parcourant I

alors, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution sur l'intervalle I.

Chapitre 3

Nombres complexes

3.1 Définir et représenter un nombre complexe

Un nombre complexe peut s'écrire $z = a + ib$. Cette représentation s'appelle **forme algébrique** ou **forme cartésienne**. Un nombre complexe est donc composé d'une partie réelle (ici $\mathfrak{Re}(z) = a$) et d'une partie imaginaire (ici $\mathfrak{Im}(z) = b$). Nous pouvons noter que si $a = 0$, alors z est un **imaginaire pur**. Si $b = 0$, alors z est un **nombre réel**.

Puisqu'un **réel** est représenté sur une droite (la **droite des réels**), un **nombre complexe** se représente dans le **plan complexe**.
!!! INSERER A L'OCCASION UN GRAPHE D'UN NOMBRE COMPLEXE!!!

3.2 Calculs avec les complexes

Si nous **n'avons pas** de division de complexes, alors pour réaliser les autres opérations il faut juste **remplacer** le nombre en mettant les **parenthèses**. Par exemple, si nous avons $z_1 = 2 - 3i$ et $z_2 = 1 + 4i$, alors le produit des deux donne :

$$\begin{aligned} z_1.z_2 &= (2-3i).(1+4i) \\ &= 2 + 8i - 3i - 12i^2 \\ &= 2 + 5i + 12 && \text{car } i^2 = -1 \\ &= 14 + 5i \end{aligned}$$

Nous pouvons introduire la notion de **complexe conjugué**. Il s'agit du complexe ayant la **même partie réelle** mais avec une **partie imaginaire opposée**. Par exemple, $z_1 = 2 - 3i$ a pour conjugué $\overline{z_1} = 2 + 3i$. Nous avons donc la relation suivante :

$$z\overline{z} = a^2 + b^2 \tag{3.1}$$

Cependant, si nous avons un **quotient** dans le calcul, alors nous devons **multiplier** au **numérateur et au dénominateur** par le complexe **conjugué** du **dénominateur**. Par exemple :

$$\begin{aligned} \frac{2-3i}{1+4i} &= \frac{(2-3i).(1-4i}{(1+4i).(1-4i)} \\ &= \frac{2-8i-3i-12i^2}{17} \\ &= \frac{14-11i}{17} \\ &= \frac{14}{17} - \frac{11}{17}i \end{aligned}$$

3.3 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Lorsqu'un nombre complexe est représenté dans le plan complexe, il forme alors un **triangle rectangle** de côtés a et b. L'**hypoténuse** de ce triangle rectangle s'appelle le **module** de z et se note $|z| = r$ tandis que l'angle qui est **opposé** à b s'appelle l'**argument** et se note $arg(z) = \theta$. Pour calculer le module, nous avons :

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{3.2}$$

Pour calculer l'argument, nous avons :

$$arg(z) = \theta = arctan(\frac{b}{a}) \qquad \text{si } a > 0 \tag{3.3}$$

$$arg(z) = \theta = arctan(\frac{b}{a}) + \pi \qquad \text{si } a < 0 \tag{3.4}$$

Avec tout ceci, en utilisant **SoCaTo**, nous trouvons que $a = rcos(\theta)$ et $b = rsin(\theta)$. Ainsi, nous avons :

$$z = a + ib = r(cos(\theta) + isin(\theta)) \tag{3.5}$$

Cette manière d'écrire un nombre complexe s'appelle la **forme trigonométrique** et peut se noter de manière simplifiée $z = [r, \theta]$. Nous pouvons noter que par identification entre la forme algébrique et la forme trigonométrique, nous avons :

$$\begin{aligned}
|r| &= \sqrt{a^2 + b^2} \\
\theta &= arctan(\frac{b}{a}) && \text{si } a > 0 \\
&= arctan(\frac{b}{a}) + \pi && \text{si } a < 0 \\
a &= |r|cos(\theta) \\
b &= |r|sin(\theta)
\end{aligned}$$

Nous avons des relations remarquables sur le module et l'argument d'un nombre complexe :

$$|zz'| = |z|.|z'| \qquad \text{et} \qquad arg(zz') = arg(z) + arg(z') \tag{3.6}$$

$$|\frac{z}{z'}| = \frac{|z|}{|z'|} \qquad \text{et} \qquad arg(\frac{z}{z'}) = arg(z) - arg(z') \tag{3.7}$$

3.4 Racines complexes d'un polynôme du second degré à coefficients réels