

Relatividad especial

Axel Gabriel Rodriguez Zarate

3 de diciembre de 2024

Índice

I	Intuición básica.	3
1.	Origen	3
1.1.	Las leyes de Maxwell y la velocidad de la radiación electromagnética.	3
1.2.	El marco de referencia universal.	3
1.3.	La aceptación de la velocidad de la luz como constante universal.	4
2.	Postulados de la relatividad especial y resultados elementales.	5
2.1.	Factor de Lorentz y dilatación del tiempo	5
2.1.1.	El tiempo esta bien definido.	5
2.1.2.	El factor de Lorentz	6
2.2.	Contracción de la longitud.	7
2.3.	Transformación de Lorentz	8
2.4.	Adición de velocidades relativista	10
3.	Referencias	12
II	Relatividad en el lenguaje de variedades	13
4.	Introducción	13
4.1.	Invariantes y la perspectiva geométrica	13
5.	Conceptos elementales de variedades	15
5.1.	Espacio euclidiano	15
5.2.	Variedades	15
5.3.	Vectores tangentes y campos vectoriales	16
5.4.	1-formas	18
6.	Tensores y algebra multilineal	19

7. El teorema de Poincaré-Hopf	21
7.1. El punto fijo de Lefschetz.	21
7.2. El teorema de Poincare-Hopf	21
8. Geometría Lorentziana	24
8.1. Aspectos básicos	24
8.1.1. Métricas	24
8.1.2. Cubiertas y particiones de la unidad	24
8.1.3. Variedades Riemannianas	24
8.1.4. Campos de marcos	25
8.2. Vectores tipo tiempo, variables tiempo-orientables y la existencia de una métrica de Lorentz.	25
8.2.1. Vectores y variedades de Lorentz tiempo orientables . . .	25
8.2.2. Existencia de una métrica de Lorentz	27
9. Aplicación a la relatividad especial	29
10. Notas finales	31
11. Referencias	32

Parte I

Intuición básica.

1. Origen

1.1. Las leyes de Maxwell y la velocidad de la radiación electromagnética.

A finales del siglo 18 y alrededor del siglo 19 hubieron grandes avances en el estudio del electromagnetismo. Coulomb, Amperé, Faraday, entre otros, estudiaron y publicaron sus estudios en electrodinámica.

Maxwell y Heaviside juntaron los resultados de estos experimentos y estudios, que estaban dispersos, para formular las ecuaciones de Maxwell que son la base del electromagnetismo:

Para un campo eléctrico E , B el campo magnético, ρ la densidad de carga eléctrica, J la densidad de corriente, ϵ_0 y μ_0 la permitividad y permeabilidad del vacío

$$\begin{aligned}\nabla \cdot E &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot B &= 0 \\ \nabla \times E &= -\frac{\partial B}{\partial t} \\ \nabla \times B &= \mu_0 \left(J + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right).\end{aligned}$$

A partir de estas ecuaciones se puede derivar la velocidad de la radiación electromagnética

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

que es constante. Más aún, el medir experimentalmente este valor daba mediciones muy cercanas a la ya estimada velocidad de la luz, por lo que Maxwell hipotetizó que la luz era una forma de radiación electromagnética.

1.2. El marco de referencia universal.

La pregunta que surge es

- ¿En qué marco de referencia son válidas estas ecuaciones?

Las ecuaciones de Maxwell parecían sugerir un marco de referencia preferido y universal para que esto fuera posible y compatible con la física clásica.

Este sería el marco de referencia dado por un hipotético medio llamado éter luminífero, que sería un medio universal por el que viajara la luz. Anteriormente ya se había notado que la luz mostraba un comportamiento de onda, y se

consideraba que debía haber un medio por el que se transmitiera la onda (así como en el oceano, el agua es el medio por el que las olas se propagan, o el aire el medio por el que las ondas de sonido se propagan). A este medio se le llamo éter.

1.3. La aceptación de la velocidad de la luz como constante universal.

A finales del siglo 19 y principios del siglo 20, el experimento de Michelson-Morley, mostro evidencia fuerte de que el éter lumnífero no existía, lo que llevo a tener que pensar en la teoría de la luz como una onda sin medio, y en su velocidad como válida y constante en todos los marcos de referencia.

Desde la perspectiva de la mecánica, esto ponía a la teoría electromagnética en conflicto con la mecánica Newtoniana, pues en está ultima siempre se supone la relatividad Galielana: Los observadores coinciden en el tiempo y si tenemos dos marcos de referencia $S = (x, y, z, t)$ y $S' = (x', y', z', t')$, donde suponemos sin perdida de generalidad que los sistemas de coordenadas estan alineados, y S' se encuentra a una velocidad (v_1, v_2, v_3) respecto a S entonces

$$t' = t, \quad x' = x - v_1 t, \quad y' = y - v_2 t, \quad z' = z - v_3 t.$$

A este cambio de coordenadas se la llama **transformación Galileana**. Todos los posibles cambios de coordenadas entre sistemas inertes forman un grupo, llamado el **grupo de Galileo**.

Estas suposiciones establecen que todos los marcos de referencia inertes son equivalentes y no existen velociades absolutas.

Lo anterior no es compatible con lo descubierto en el experimento de Michelson-Morley, por lo que llevó a los físicos, principalmente Einstein, a desarrollar una teoría de la mecánica que admitiese la velocidad universal de la luz.

2. Postulados de la relatividad especial y resultados elementales.

Los dos postulados de la teoría de la relatividad especial son:

1. Las leyes de la física son las mismas para todos los observadores inertes.
(En particular si una ley es cierta para un marco de referencia, también lo es para otro que se encuentre a velocidad constante)
2. La velocidad de la luz es la misma para todos los observadores inertes.

Proposición 1. *No existen velocidades absolutas. Toda velocidad es relativa.*

Demostración. Si fuera posible determinar que \mathcal{S} es absolutamente estático, entonces un marco de referencia a velocidad constante \mathcal{S}' se decidiría como absolutamente en movimiento. Sin embargo estos resultados físicos se cumplen también en \mathcal{S}' por el primer postulado, obteniendo que \mathcal{S}' es absolutamente estático, lo cual no es posible. \square

Los efectos interesantes de la relatividad especial, la **dilatación del tiempo** y la **contracción de longitudes**, son obra de tener que admitir este segundo postulado. El espacio-tiempo debe acomodar una velocidad universal.

2.1. Factor de Lorentz y dilatación del tiempo

2.1.1. El tiempo esta bien definido.

Antes de hablar de cualquier noción pertinente al tiempo, hay que verificar que dado un marco de referencia \mathcal{S} y un evento, se puede asignar un tiempo a dicho evento.

Para esto basta con considerar que si un evento sucede a una distancia del origen, un observador en el origen y otro en la posición del evento pueden sincronizar sus relojes: Si el observador en el origen emite una señal luminica al tiempo t , y el observador en el destino la regresa inmediatamente al recibirla, entonces el observador en el origen recibe de nuevo la señal en el tiempo t_f . Como la velocidad de la luz es constante en todas las direcciones, el observador en el destino sabe que el momento en que recibió la señal, su reloj debe marcar $t + \frac{1}{2}(t_f - t)$ para que estén sincronizados.

2.1.2. El factor de Lorentz

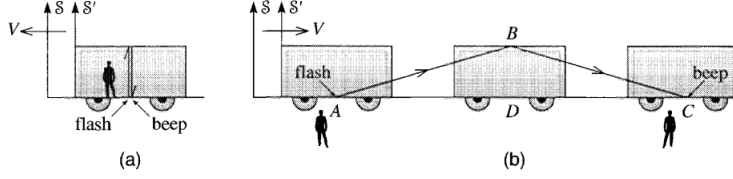


Figure 15.3 (a) The thought experiment as seen in frame S' . The light travels straight up and down again, and the flash and beep occur at the same place. (b) As seen in S , the flash and beep are separated by a distance $V \Delta t$. Notice that in S two observers are needed to time the two events, since they occur in different places.

Consideramos el siguiente experimento: Desde el piso de un tren se emite un rayo de luz perpendicular al piso, que rebota con un espejo en el techo del tren y vuelve al piso, momento en el que se escucha un bip. Nos interesa medir la longitud del tiempo Δt entre los dos eventos, desde la perspectiva de un observador dentro del tren y desde la perspectiva de fuera del tren (anclamos un marco de referencia al piso, aunque son necesarios dos observadores para medir el intervalo de tiempo).

- a) Desde el marco de referencia S dentro del tren, si la altura del tren es h , el rayo de luz va a recorrer una distancia de $2h$ pues simplemente viaja en la dirección vertical y vuelve. Entonces tiempo que tarda es $\frac{2h}{c} = \Delta t$.
- b) Desde el marco de referencia S' fuera del tren, obtenemos un triángulo isósceles. Su base mide $V\Delta t'$ donde V es la velocidad del tren, y el lado mide $c\frac{\Delta t'}{2}$ donde $\Delta t'$ es el intervalo de tiempo que queremos medir. Entonces por pitágoras

$$\begin{aligned}
 \left(c\frac{\Delta t'}{2}\right)^2 &= h^2 + \left(\frac{V\Delta t'}{2}\right)^2 \implies \Delta t'^2 \left(\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{V}{2}\right)^2\right) = h^2 \\
 \implies \Delta t' &= \frac{2h}{\sqrt{c^2 - V^2}} \\
 \implies \Delta t' &= \frac{2h}{c\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} \\
 \implies \Delta t' &= \gamma \Delta t
 \end{aligned}$$

donde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}$$

se le conoce como el **factor de Lorentz**. Notemos que $\gamma > 1$, por lo que $\Delta t' = \gamma \Delta t > \Delta t$. El observador dentro del tren midió un intervalo de tiempo mas pequeño.

Este resultado es asimétrico, $\Delta t' > \Delta t$, pero esto sucede porque \mathcal{S} es de hecho un marco de referencia preferido: Es el único marco de referencia, salvo rotación o traslación, desde el cual los dos eventos suceden en el mismo lugar, y por tanto puede ser medido por un solo observador. A $\Delta t'$ en este caso se le llama tiempo propio.

Cualquier otro marco de referencia que se encuentre en movimiento respecto a la localización de los dos eventos medirá un tiempo $\Delta t'$ mayor. Obtuvimos que el tiempo propio Δt es minimal comparado con el intervalo de tiempo medido en cualquier otro marco de referencia. Esto se traduce intuitivamente en que **el reloj transcurre más lento para todo marco de referencia en movimiento**. En este ejemplo los observadores fuera del tren vieron el reloj del tren ir más lento, de manera que el evento sucedió en tiempo $\Delta t'$ a pesar de que el reloj dentro del tren marcaba tiempo Δt en ese momento.

2.2. Contracción de la longitud.

El fenómeno de dilatación del tiempo está cercanamente relacionado con el de la contracción de la longitud, como se puede verificar de la siguiente manera: Ahora supongamos que tenemos un observador afuera del tren que lo verá pasar, y tenemos dos observadores uno al frente y otro al fondo del tren. Para medir la longitud del tren basta con que el observador de fuera reporte cuando él y el observador del frente del tren estuvieron alineados, y haga lo propio cuando este alineado con el observador de detrás del tren.

- Para el marco de referencia \mathcal{S}' fuera del tren, tendremos que la longitud percibida es $l' = V\Delta t'$. Donde $\Delta t'$ es el intervalo de tiempo entre el cual sucede el evento en el que el observador frontal está alineado con el observador de fuera, y el evento en el que el observador al fondo está alineado con el de fuera.
- Para el marco de referencia \mathcal{S} dentro del tren, la longitud debe ser $l = V\Delta t$, para los mismos eventos.

Debemos identificar en qué marco de referencia el tiempo es propio. Es claro que ambos eventos suceden en el mismo lugar desde la perspectiva de \mathcal{S}' , por lo que $\Delta t'$ es el intervalo de tiempo propio y minimal en el sentido antes dicho. Luego

$$\Delta t = \gamma \Delta t' > \Delta t'.$$

Entonces

$$\begin{aligned} l &= V\gamma \Delta t' = \gamma l' \\ l' &= V\Delta t' \end{aligned}$$

y por tanto $l > l'$.

Es decir, desde el marco de referencia dentro del tren, la longitud del tren es mayor de lo que lo perciben los que están afuera. Se traduce intuitivamente en que **la longitud de objetos en movimiento se contrae**. A la longitud medida desde el único marco de referencia sobre el cual el objeto al que se mide

la longitud es estatico se le llama longitud propia. Si l es la longitud propia, entonces $\frac{l}{\gamma} = l'$ es la longitud en otro marco de referencia en movimiento a velocidad constante.

2.3. Transformación de Lorentz

Asi como la transformacion de Galileo describe el cambio de coordenadas bajo cierta transformacion en mecanica clasica, en relatividad especial tenemos su analogo llamada transformacion de Lorentz.

Calculamos la transformacion de Lorentz del Boost horizontal: Sea (x, y, z, t) las coordenadas de una explosion en el tren respecto al piso \mathcal{S} , y (x', y', z', t') sus coordenadas respecto al marco de referencia del tren \mathcal{S}' . Utilizaremos la posicion de la marca que deja la explosion para pasar de un sistema de coordenadas a otro.

Se puede ver que no hay contracción de longitud sobre un eje cuando el movimiento es perpendicular a dicho eje, por lo tanto $y' = y$, $z' = z$.

Ahora, la longitud es x' desde el origen O' de \mathcal{S}' hasta la coordenada de la marca es la longitud propia, que es constante pues la marca de la explosion no cambia de posicion respecto al momento de la explosion. Ahora, para medir esa longitud desde la perspectiva de \mathcal{S} primero medimos la distancia hasta la explosion, que es x , y luego restamos la parte de la distancia que corresponde al paso de O a O' , que es Vt . Entonces esa longitud es $x - Vt$

Luego por contraccion de la longitud

$$x - Vt = \frac{x'}{\gamma} \implies x' = \gamma(x - Vt).$$

Entonces tenemos la parte espacial

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - Vt) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

Podemos invertir los roles, haciendo que la explosion sea en una pared fuera del tren para obtener una expresion para x

$$x' + Vt' = \frac{x}{\gamma}$$

y substituyendo x'

$$\begin{aligned}
 \gamma(x - Vt) + Vt' &= \frac{x}{\gamma} \implies t' = \frac{1}{V} \left(\frac{x}{\gamma} - \gamma(x - Vt) \right) \\
 &\implies t' = \gamma \left(\frac{x}{V\gamma^2} - \frac{1}{V} (x - Vt) \right) \\
 &\implies t' = \gamma \left(\frac{x}{V} \left(1 - \left(\frac{V}{c} \right)^2 \right) - \frac{x}{V} + t \right) \\
 &\implies t' = \gamma \left(t - \frac{xV}{c^2} \right).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - Vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma \left(t - \frac{xV}{c^2} \right) \end{cases}$$

es la transformacion de Lorentz. Revirtiendo los papeles de las variables primadas y las que no, y reemplazando V por $-V$ obtenemos la transformacion inversa

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + Vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma \left(t' + \frac{x'V}{c^2} \right) \end{cases}$$

Ejemplo. Supongamos que un coche, de longitud propia 100cm viaja a una velocidad constante $V = 0.6c$. Dicho tren tiene que pasar por un tunel de longitud propia 100cm que tiene puertas a la entrada y la salida. El operador de dicho tunel piensa cerrar y abrir las puertas justo cuando el coche se encuentre dentro para jugarle una broma.

- El operador piensa de la siguiente forma: El factor de Lorentz es

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{6}{10} \right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{64}{100}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{16}{25}}} = \frac{5}{4}$$

lo que implica que la longitud del carro desde su perspectiva será

$$\begin{aligned}
 l' &= \frac{l}{\gamma} \\
 &= 80\text{cm}.
 \end{aligned}$$

- El conductor del coche piensa de la siguiente forma: El tunel se acerca a mi a una velocidad de $0.6c$, por lo que la longitud del tunel desde mi perspectiva es de 80cm mientras que la longitud del coche es de 100cm, por lo que si el operador intenta cerrar las puertas estas le pegaran al coche.

Sea \mathcal{S}' la perspectiva del coche y \mathcal{S} la perspectiva del operador.

Para solucionar esta disputa, los eventos de interes son el tiempo y lugar en el que la puertas se cierran.

Desde la perspectiva del operador, tendremos que la puerta se cierra en $x_L = 0$ y $x_R = 100$, supongamos en el tiempo $t_L = t_R = 0$, momento en que el frente del coche esta en $x = 80$.

Ahora, por la transformacion de Lorentz, desde la perspectiva del coche

$$\begin{aligned} t'_L &= \gamma \left(t_L - \frac{Vx_L}{c^2} \right) = 0 \\ x'_L &= \gamma (x_L - Vt_L) = 0 \\ t'_R &= \gamma \left(t_R - \frac{Vx_R}{c^2} \right) = -2.5\text{ns} \\ x'_R &= \gamma (x_R - Vt_R) = 125\text{cm}. \end{aligned}$$

Lo que sucedió es que desde la perspectiva del coche, las puertas no se cerraron al mismo tiempo. Primero se cerro la puerta derecha antes que la puerta izquierda. Desde la perspectiva del coche la distancia entre el punto donde las puertas se cerraron fue de hecho 125cm debido a este efecto.

2.4. Adicion de velocidades relativista

Sea $r(t)$ una partícula en movimiento respecto a \mathcal{S} , y $r'(t')$ su movimiento respecto a \mathcal{S}' .

Por la transformacion de Lorentz, suponiendo \mathcal{S}' se mueve a una velocidad V respecto a \mathcal{S} .

$$\begin{cases} dx' = \gamma (dx - Vdt) \\ dy' = dy \\ dz' = dz \\ dt' = \gamma \left(dt - \frac{Vdx}{c^2} \right) \end{cases}$$

Luego

$$\begin{aligned} v'_x &= \frac{dx'}{dt'} \\ &= \frac{\gamma (dx - Vdt)}{\gamma \left(dt - \frac{Vdx}{c^2} \right)} \\ &= \frac{v_x - V}{1 - \frac{v_x V}{c^2}} \end{aligned}$$

y similarmente

$$\begin{aligned} v'_y &= \frac{v_y}{\gamma \left(1 - \frac{v_x V}{c^2} \right)} \\ v'_z &= \frac{v_z}{\gamma \left(1 - \frac{v_x V}{c^2} \right)} \end{aligned}$$

Tambien tenemos las relaciones inversas

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}$$

$$v_y = \frac{v'_y}{\gamma \left(1 + \frac{v'_x V}{c^2}\right)}$$

$$v_z = \frac{v'_z}{\gamma \left(1 + \frac{v'_x V}{c^2}\right)}$$

que se pueden deducir de la transformacion de Lorentz inversa (que es lo mismo que pensar que \mathcal{S}' esta estatico y \mathcal{S} se mueve a velocidad $-V$, y aplicar la transformación usual).

Ejemplo. Adicion de velocidades

Supongamos que una nave espacial viajando a $0.8c$ respecto a la tierra dispara rayos hacia adelante con una velocidad de $0.6c$ respecto a la tierra.

Entonces si \mathcal{S} es el marco de referencia de la tierra y \mathcal{S}' el de la nave,

$$V = 0.8c, \quad v' = 0.6c$$

Luego

$$\begin{aligned} v &= \frac{v' + V}{1 + \frac{v'V}{c^2}} \\ &= \frac{1.4c}{1 + \frac{(0.6)(0.8)c^2}{c^2}} \\ &= \frac{1.4c}{1 + 0.48} \\ &= \frac{1.4}{1.48}c \\ &= 0.95c. \end{aligned}$$

3. Referencias

- Taylor, J. R. (2005). Classical mechanics. University Science Books.
- Schwichtenberg, J. (2018). Physics from symmetry. Springer.
- Goldstein, H., Poole, C. P., & Safko, J. (2011). Classical mechanics. Pearson.

Parte II

Relatividad en el lenguaje de variedades

4. Introducción

Recordemos de la parte anterior la transformación de Lorentz correspondiente al boost horizontal:

$$\begin{cases} x' = \gamma (x - Vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma \left(t - \frac{xV}{c^2} \right) \end{cases}$$

De esto obtenemos que

$$\begin{aligned} (ct')^2 - (x')^2 &= \gamma^2 \left[c^2 \left(t - \frac{xV}{c^2} \right)^2 - (x - Vt)^2 \right] \\ &= \gamma^2 \left[c^2 t^2 - 2txV + \frac{x^2 V^2}{c^2} - x^2 + 2txV - V^2 t^2 \right] \\ &= \frac{c^2}{c^2 - V^2} \left[c^2 t^2 + \frac{x^2 V^2}{c^2} - x^2 - V^2 t^2 \right] \\ &= \frac{c^2}{c^2 - V^2} \left[t^2 (c^2 - V^2) - x^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \right] \\ &= c^2 t^2 \frac{(c^2 - V^2)}{c^2 - V^2} - x^2 \frac{c^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right)}{c^2 - V^2} \\ &= (ct)^2 - x^2. \end{aligned}$$

Entonces

$$(ct')^2 - (x')^2 - (y')^2 - (z')^2 = (ct)^2 - (x)^2 - (y)^2 - (z)^2$$

y como la transformación es lineal, si tenemos $\Delta t = t_1 - t_0$, y lo propio con el resto de variables y variables primadas,

$$(c\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2.$$

4.1. Invariantes y la perspectiva geométrica

En la mecánica clásica, siempre consideramos un tiempo global y absoluto, en el que coinciden todos los observadores. Por lo tanto, se trata el tiempo y las coordenadas espaciales de forma independiente.

En ese caso un invariante sobre el que coinciden todos los observadores es el de la distancia euclidiana usual.

Como vimos en la parte pasada, esto no necesariamente sucede en la relatividad especial, de hecho la **contracción de la longitud** es lo que impide que los observadores coincidan en distancias espaciales.

Sin embargo, la cantidad

$$(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$$

es una cantidad que siempre se conserva, desde la perspectiva de cualquier observador. Podemos interpretarla como una especie de **distancia**, pasando a la teoría de formas cuadráticas:

Si $x_0 = ct$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, en lenguaje infinitesimal

$$(ds)^2 = \begin{pmatrix} dx_0 & dx_1 & dx_2 & dx_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_0 \\ dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix}.$$

Notemos que también podríamos haber hablado de

$$(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - (c\Delta t)^2$$

no hay acuerdo entre físicos sobre cuál convención usar, la convención de arriba permite

$$(\Delta s)^2 \geq 0$$

en acuerdo de que la longitud $l = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$ recorrida en tiempo Δt no puede ser mayor a lo que la luz recorrería en dicho tiempo: $c\Delta t$.

Por lo anterior, es posible estudiar la Relatividad desde una perspectiva geométrica, interpretando a ds como una distancia en la que estan de acuerdo todos los observadores, así como sucedería con la distancia euclidiana en la mecánica clásica, y las formas bilineales también introducen un concepto de ángulos, por lo que permiten hacer geometría.

La **relatividad general** luego trabaja bajo la hipótesis de que la gravedad curva al espacio, por lo que hay que tener un poco mas de cuidado, para esto se define una forma bilineal distinta en cada punto.

Todas estas relaciones multilineales (en particular bilineales), posiblemente distintas en cada punto, dan motivación para definir el concepto de **campo tensorial**, a partir del cuál definiremos el concepto de **métrica** o tensor métrico viniendo de estas nociones intuitivas, que nos lleva al estudio de la geometría semi-Riemanniana.

5. Conceptos elementales de variedades

En esta sección se menciona por completitud principalmente conceptos elementales no vistos explícitamente en el libro de Guillemin & Pollack (o caracterizaciones o notaciones distintas)

5.1. Espacio euclidiano

\mathbb{R}^n con su producto interior usual es el **espacio euclidiano** de dimensión n . Denotamos por u^1, \dots, u^n las funciones proyección en cada uno de los componentes, a esta colección se le llamará **coordenadas naturales**. $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se dice suave si todas las parciales mixtas de todos los ordenes existen y son continuas en cada punto, mientras que $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ se dice suave si $f^i := u^i \circ f$ es suave.

5.2. Variedades

Definición 2. (Sistema de coordenadas y parametrización)

Un **sistema de coordenadas** $\xi : U \subseteq M \rightarrow \xi(U)$ es un homeomorfismo de un abierto $U \subseteq M$ a un abierto $\xi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Entonces

$$\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$$

y a las funciones ξ^i se le llama funciones coordenadas de ξ .

A ξ^{-1} se le llama una **parametrización**. En este caso

$$\xi^{-1}(x_1, \dots, x_n) \in M$$

donde $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.

Definición 3. (Atlas)

Un atlas de M es una colección de sistemas de coordenadas que cubren a M , tal que cualesquiera ξ, η sistemas de coordenadas son tales que sus llamados **mapeos de transición** $\xi \circ \eta^{-1}$ y $\eta \circ \xi^{-1}$ son suaves

A un atlas \mathcal{A} se le dice **completo** si cumple lo siguiente:

- Si ξ es un sistema de coordenadas de M tal que para todo $\eta \in \mathcal{A}$, se tiene que los mapeos de transición entre ξ y η son suaves, entonces $\xi \in \mathcal{A}$.

Teorema 4. *Todo atlas está contenido en un atlas completo único.*

Definición 5. Una variedad (diferenciable) M es un espacio **Hausdorff** dotado de un **atlas** (completo).

En la definición anterior siempre es posible suponer que el atlas de una variedad diferenciable es completo por el teorema de esta sección, cuya demostración es elemental y se puede consultar en la referencia de esta Parte.

5.3. Vectores tangentes y campos vectoriales

Dada una variedad diferenciable M , en lo siguiente denotamos por $\mathfrak{F}(M)$ como el conjunto de funciones $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ suaves, donde el concepto de funcion suave entre variedades es el mismo del libro de Guillemin & Pollack.

Definición 6. Vector tangente

Un vector tangente v en $p \in M$ es una funcion $v : \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ que es \mathbb{R} -lineal y leibniziana:

$$v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g).$$

Al conjunto de vectores tangentes se le denotara brevemente como $\mathcal{T}_p(M)$.

Definición 7. (Derivadas parciales en variedades)

Sea $\xi = (x^1, \dots, x^n)$ un sistema de coordenadas alrededor de $p \in M$, si $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ es suave, es decir $f \in \mathfrak{F}(M)$, definimos la derivada parcial de la manera intuitiva: Pasar al espacio euclidiano y diferenciar ahí

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \frac{\partial (f \circ \xi^{-1})}{\partial u^i}(\xi(p))$$

En lo siguiente tambien denotaremos

$$\partial_i|_p = \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$$

al operador diferencial que manda

$$f \xrightarrow{\partial_i|_p} \frac{\partial f}{\partial x^i}(p).$$

Teorema 8. La definición anterior de vector tangente es equivalente a la definición del libro de Guillemin & Pollack.

Demostración. Considera el mapeo $\Phi : \mathcal{T}_p(M) \rightarrow \mathcal{T}_p(M)$ dado por

$$\Phi(v) := D_v$$

donde D_v es el operador de la derivada en la direccion de v .

Claramente es lineal, por lo que basta verificar que es biyectivo.

- Es inyectivo pues supongamos que $D_v = 0$, entonces para $1 \leq i \leq n$

$$\begin{aligned} D_v(x^i) &= \sum_j v^j \partial_i|_p x^j \\ &= v^j \\ &= 0. \end{aligned}$$

entonces $v = 0$.

- Es sobreyectivo, pues si $D \in \mathcal{T}_p M$ entonces por una version de el teorema de Taylor si $f \in C^\infty$ en una vecindad de p , entonces existen funciones g_i tal que $g_i(p) = \frac{\partial f}{\partial u^i}(p)$, y

$$f(x) = f(p) + \sum_i (x^i - p^i) g_i(x)$$

Luego

$$\begin{aligned} D(f(x)) &= D(f(p)) + \sum_i (p^i - p^i) D(g_i(x)) + \sum_i D(x^i - p^i)(g_i(p)) \\ &= \sum_i D(x^i)(g_i(p)) \\ &= \sum_i D(x^i) \partial_i|_p f \end{aligned}$$

Entonces $D(f) = D_v(f)$ si $v = (D(x^1), \dots, D(x^n))$. \square

A partir de lo siguiente, con excepci3n de la secci3n de teor3a de punto fijo de Lefschetz y el teorema de Poincare-Hopf, se usara la definici3n anterior dada por las derivaciones, a cuyo espacio vectorial se le denotara por $T_p(M)$.

El siguiente resultado es consecuencia directa de lo anterior

Corolario 9. Si $\xi = (x^1, \dots, x^n)$ es un sistema de coordenadas alrededor de $p \in M$, entonces $\partial_1|_p, \dots, \partial_n|_p$ es una base de $T_p(M)$, y

$$v = \sum_{i=1}^n v(x^i) \partial_i|_p$$

El corolario anterior es muy importante ya que nos permite expresar todo vector tangente en terminos de las coordenadas locales, y se extiende trivialmente a campos vectoriales y 1-formas.

Definici3n 10. Un campo vectorial $V : M \rightarrow T_p(M)$ en una variedad M es una funcion que asigna a cada punto $p \in M$ un vector tangente V_p .

Diremos que V es suave si $p \mapsto V_p(f)$ es suave para toda $f \in \mathfrak{F}(M)$. Denotamos $(Vf)(p) := V_p f$

Denotaremos por $\mathfrak{X}(M)$ al conjunto de campos vectoriales suaves. En este caso define un modulo sobre $\mathfrak{F}(M)$ con la multiplicacion y producto obvios:

$$(fV + W)_p = f(p) V_p + W_p$$

Ejemplo. El operador ∂_i que manda $p \mapsto \partial_i|_p$ es un campo vectorial por todo lo visto. Se le llama el **campo vectorial de la i-esima coordenada**.

Teorema 11. Si V es un campo vectorial en M y $\xi = (x^1, \dots, x^n)$ es un sistema de coordenadas en un abierto U entonces

$$V = \sum_{i=1}^n V x^i \partial_i \text{ en } U.$$

Demostración. Es consecuencia directa de la representacion de los vectores tangentes, pues para $p \in U$

$$V_p = \sum_{i=1}^n (Vx^i)_p \partial_i|_p.$$

□

5.4. 1-formas

Al espacio dual del espacio tangente en un punto $T_p(M)^*$ le llamamos el **espacio cotangente**. A sus elementos le decimos **covectores**.

Definición 12. Una 1-forma θ en M es una asignación a cada punto un covector θ_p

$$\theta : M \rightarrow T_p(M)^*.$$

Entonces $\theta_p(v)$ asigna un numero a cada vector tangente en p .

Si X es un campo vectorial, denotamos por θX a la asignacion $p \mapsto \theta_p(X_p)$. Se dice que θ es suave si θX es suave para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Denotamos por $\mathfrak{X}^*(M)$ al conjunto de 1-formas suaves.

Definición 13. Dado $f \in \mathfrak{F}(M)$ definimos la 1-forma df , llamada **diferencial**, como aquella tal que

$$(df)(v) = v(f)$$

para todo vector tangente v de M .

Notemos que dx^1, \dots, dx^n los diferenciales de un sistema de coordenadas proveen una base dual a los campos vectoriales coordenados $\partial_1, \dots, \partial_n$ puesto que, dado que $\partial_j|_p$ es un vector tangente

$$\begin{aligned} (dx^i)_p (\partial_j|_p) &= \partial_j|_p (x^i) \\ &= \delta_{ij}, \quad \forall p \in M. \end{aligned}$$

Lo anterior implica el siguiente teorema

Teorema 14. Si (x^1, \dots, x^n) es un sistema de coordenadas en U , expresamos a cada 1-forma a partir de las coordenadas locales en U como

$$\theta = \sum_i \theta(\partial_i) dx^i$$

en particular

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

6. Tensores y algebra multilineal

La noción de tensor permite encapsular en un solo objeto matemático relaciones multilineales mas complejas. Nos permitirá describir, por ejemplo, un 'campo de productos escalares' al que llamaremos tensor métrico y permite hacer el estudio geométrico de espacios de interés.

Definición 15. (Tensor)

Dado un modulo V sobre un campo K , decimos que

$$A : (V^*)^r \times V^s \rightarrow K$$

es un tensor de tipo (r, s) sobre V si es K -multilineal.

Denotamos $\mathfrak{T}_s^r(V)$ al espacio de tensores de tipo (r, s) sobre V , que es un modulo sobre K .

Es necesario expresar estas nociones en terminos de modulos pues un modulo de interes es $\mathfrak{X}(M)$ sobre el campo $\mathfrak{F}(M)$, que no forman un espacio vectorial.

Definición 16. (Campo tensorial)

Un campo tensorial A sobre una variedad es un tensor de $\mathfrak{X}(M)$ sobre el campo $\mathfrak{F}(M)$:

$$A : \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \rightarrow \mathfrak{F}(M).$$

Entonces a partir de r 1-formas y s campos vectoriales obtenemos una funcion real-valuada

$$f = A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_m).$$

En este contexto a las r primeras componentes se les dice componentes contra-variantes, y a las siguientes s se les dice componentes covariantes.

Definición 17. (Producto tensorial)

Si $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ y $B \in \mathfrak{T}_{s'}^{r'}(M)$, se define

$$\begin{aligned} & (A \otimes B) (\theta^1, \dots, \theta^{r+r'}, X_1, \dots, X_{s+s'}) \\ & := A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) B(\theta^{r+1}, \dots, \theta^{r+r'}, X_{s+1}, \dots, X_{s+s'}) \end{aligned}$$

Definición 18. Recordamos que una forma bilineal b en V se dice positiva (resp. negativa) definida si $v \neq 0$ implica $b(v, v) > 0$ (resp. $b(v, v) < 0$).

Se dice positiva (resp. negativa) semidefinida si $b(v, v) \geq 0$ (resp. $b(v, v) \leq 0$).

Se dice no degenerada si $b(v, w) = 0$ para todo $w \in V$ implica $v = 0$.

Cuando no halla confusion, denotaremos los productos escalares (forma bilineal simetrica no degenerada) como $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Definición 19. El **indice** de una forma bilineal simetrica b sobre un espacio lineal V es el entero mas grande n para el que existe un subespacio lineal W tal que $b|_W$ es negativo definido

Teorema 20. Para cualquier base ortonormal e_1, \dots, e_n de V , el número de signos negativos en la signatura (ξ_1, \dots, ξ_n) del producto escalar es el índice v del mismo.

Demostración. Supongamos que los primeros m signos son negativos. Se cumple que $v \geq m$, pues si $x = \sum_i \alpha_i e_i$ es un vector del subespacio generado por los primeros e_1, \dots, e_m vectores básicos ortonormales, entonces dado que $\langle e_i, e_j \rangle = -\delta_{ij}$

$$\begin{aligned} \langle x, x \rangle &= \left\langle \sum_i \alpha_i e_i, \sum_i \alpha_i e_i \right\rangle \\ &= \sum_i \sum_j \langle \alpha_i e_i, \alpha_j e_j \rangle \\ &= -\sum_i \alpha_i^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto existe un subespacio S de dimensión m donde el producto escalar es negativo definido.

Ahora, si W es un subespacio donde el producto escalar es negativo definido, y la proyección ortonormal $\pi : W \rightarrow S$ está dada como

$$\pi(w) = -\sum_{i \leq m} \langle w, e_i \rangle e_i.$$

Verificaremos que es 1-1 de manera que $\dim W = v \leq m = \dim S$: en efecto si $\pi(w) = 0$ entonces es un vector ortonormal, por lo que tiene una expansión

$$w = \sum_{j > m} \langle w, e_j \rangle e_j$$

pero si $w \in W$,

$$0 \geq \langle w, w \rangle = \sum_{j > m} \langle w, e_j \rangle^2$$

por lo que necesariamente se cumple que $\langle w, e_j \rangle = 0$ para todo $j > m$. Pero entonces w es ortogonal a todos los vectores, debe ser que $w = 0$.

Por todo lo anterior $m = v$. □

7. El teorema de Poincaré-Hopf

7.1. El punto fijo de Lefschetz.

En lo siguiente M se considera una variedad orientada.

Utilizamos la teoría de intersección para hallar la cantidad de puntos comunes entre Δ la diagonal de f y $\text{graph}(f)$ la grafica de f . Esto es de interes pues precisamente los puntos fijos x_0 son aquellos tales que $(x_0, f(x_0)) \in \Delta$.

Definición 21. Definimos el **numero global de Lefschetz** como

$$L(f) = I(\Delta, \text{graph}(f))$$

Es obvio que si $f : M \rightarrow M$ es suave en una variedad orientada $L(f) \neq 0$, entonces f tiene un punto fijo. (Si f no tuviese puntos fijos, entonces Δ y $\text{graph}(f)$ son trivialmente transversales).

Se recuerdan algunas propiedades importantes de esta teoría a continuación.

De la definición como numero de intersección se sigue que:

Proposición 22. $L(f)$ es invariante homotopico.

Definimos la característica de Euler como $\chi(M) = I(\Delta, \Delta)$ (véase las notas finales de esta exposición), entonces por definición se tiene lo siguiente

Proposición 23. $L(I) = \chi(M)$. (Ver notas finales)

Definición 24. Se le llama **mapeo de Lefschetz** a aquellas funciones suaves tales que $\text{graph}(f) \pitchfork \Delta$

Definición 25. Sea p un punto fijo aislado de f . Si S_ϵ es una esfera de radio ϵ alrededor de p , definimos el **numero de Lefschetz local** $L_p(f)$ como el grado del mapeo $S_\epsilon \rightarrow S^{n-1}$ dado por

$$z \mapsto \frac{f(z) - z}{|f(z) - z|}$$

Teorema 26. Si f es una variedad compacta con una cantidad finita de puntos fijos, entonces

$$L(f) = \sum_{f(x)=x} L_x(f).$$

7.2. El teorema de Poincare-Hopf

Dado un campo vectorial X sobre una variedad diferenciable orientada M , nos interesa estudiar sus ceros. En particular el mapeo

$$p \mapsto \frac{X_p}{|X_p|}$$

definido en una esfera S_ϵ alrededor de p , donde identificamos $T_p(M)$ como el subespacio lineal de \mathbb{R}^N (Teorema 8).

Definimos el **índice** de X como el grado del mapeo anterior, es decir su numero de intersección.

Estableceremos una conexión entre el grado de un campo vectorial y su característica de Euler. Se puede verificar empíricamente que el comportamiento alrededor de los ceros de un campo vectorial se ve limitado por la topología del espacio, por lo que debe haber una conexión.

Esta conexión esta dada por la teoría de punto fijo de Lefschetz. Al estudiar los ceros de un campo vectorial en una variedad compacta, que es donde se encuentra el comportamiento interesante (alrededor de puntos $p \neq 0$ es localmente la identidad), podemos pasar los ceros al caso de puntos fijos mediante la construcción de una familia conveniente de funciones.

Definición 27. Sea $\{f_t\}$ una familia de homotopica de mapeos en M tal que $f_0 = I$ es la identidad. Si X es un campo vectorial, decimos que $\{f_t\}$ es tangente al campo vectorial cuando $t = 0$ si $X(p)$ es tangente a la curva $t \mapsto f_t(p)$ en $t = 0$.

Proposición 28. Si $\{f_t\}$ es una familia como en la definición anterior, tal que para $t \neq 0$ los mapeos no tienen puntos fijos excepto $p \in M$, y el campo vectorial X se desvanece unicamente en p . Si $\{f_t\}$ es tangente a X cuando $t = 0$, entonces el numero de Lefschetz local en cada f_t es igual al índice de X

$$\text{ind}_p(X) = L_p(f_t).$$

Demostración. Podemos suponer que f_t y X estan definidos en una vecindad abierta $U \subseteq \mathbb{R}^n$ del origen, identificando a p con 0 (Teorema 11).

Definimos a $f'_t(x)$ para $x \in U$ como el vector con coordenadas las derivadas a tiempo t de $f_t(x)$. Por la interpretación geométrica de la derivada en espacio euclidean, $f'_0(x) = X(x)$.

Fijando x , por un resultado de calculo y la igualdad anterior, existe una funcion suave $r(t, x)$ tal que

$$f_t(x) = f_0(x) + tX(x) + t^2r(t, x)$$

Entonces

$$f_t(x) - x = tX(x) + t^2r(t, x)$$

pero suponemos que $f_t(x) - x \neq 0$ siempre que $t \neq 0$. Variando $x \in S_\epsilon$, donde $S_\epsilon \subseteq U$ es una esfera en \mathbb{R}^n de radio ϵ , lo anterior es una igualdad de campos vectoriales. Entonces pasamos al índice considerando

$$\begin{aligned} \frac{f_t(x) - x}{|f_t(x) - x|} &= \frac{tX(x) + t^2r(t, x)}{|tX(x) + t^2r(t, x)|} \\ &= \frac{X(x) + tr(t, x)}{|X(x) + tr(t, x)|}. \end{aligned}$$

Por definicion, el grado del mapeo de la izquierda es el numero local de Lefschetz, mientras que del lado derecho, si $t = 0$, entonces tenemos

$$\frac{X(x)}{|X(x)|}$$

cuyo grado es por definición el índice de X . Como el grado es un invariante homotópico, entonces

$$L_0(f_t) = \text{ind}_0(X).$$

□

Recordamos el siguiente teorema técnico, cuya demostración se ve en el curso de topología diferencial.

Teorema 29. *Para una variedad compacta sin frontera $M \subseteq \mathbb{R}^N$, sea M^ϵ su ϵ -vecindad. Existe ϵ suficientemente pequeño tal que existe una función π que manda $w \in M^\epsilon$ a su punto mas cercano en M el cuál es único. Mas aún, π es una submersión.*

Teorema 30. (Poincare-Hopf) *Si X es un campo vectorial suave en la variedad orientada M con una cantidad finita de ceros, entonces la suma de índices de X es igual a la característica de Euler.*

Demostración. Utilizamos la propiedad de la familia anteriormente mencionada. Sea M^ϵ la ϵ -vecindad en $\mathbb{R}^N \supseteq M$ de la variedad. Para ϵ suficientemente pequeño, por el teorema anterior a este, existe la función π que manda cada punto en M^ϵ a su elemento mas cercano en M . Consideramos

$$f_t(p) = \pi(p + tX(p))$$

la cual no es difícil ver que satisface las propiedades de la proposición de esta sección, y por tanto

$$\text{ind}_p(X) = L_p(f_t)$$

Tendremos entonces que

$$\begin{aligned} \sum_i \text{ind}_{p_i}(X) &= \sum_i L_{p_i}(f_t) \\ &= L(f_t) \\ &= L(I) \\ &= \chi(M) \end{aligned}$$

donde la penultima igualdad se sigue de la invarianza bajo homotopia del número de Lefschetz. □

8. Geometría Lorentziana

8.1. Aspectos básicos

8.1.1. Métricas

Enunciamos definiciones básicas de métricas

Definición 31. Tensor métrico.

Dada una variedad diferenciable M , un tensor métrico g es un campo tensorial simétrico y no degenerado $(0, 2)$ de índice constante.

Es decir, estamos asignando una forma bilineal en cada punto (de hecho un producto escalar ya que pedimos que sea no degenerado). Solicitamos que el índice se mantenga constante en cada punto.

Definición 32. Variedad semi-Riemanniana.

Una variedad semi-Riemanniana es una variedad diferenciable a la que se le asigna un tensor métrico.

Los casos más relevantes para esta exposición son el caso de una **variedad Riemanniana**, donde el índice es cero y además se pide que sea positivo definido el producto interior en cada punto, y el de una **variedad de Lorentz**, donde el índice es 1 y $\dim M \geq 2$. En estos casos se le llama métrica Riemanniana o métrica de Lorentz.

8.1.2. Cubiertas y particiones de la unidad

El concepto de particiones de la unidad es importante para extender construcciones locales a objetos globales. Las ocuparemos en la siguiente subsección, por ejemplo, para construir una métrica Riemanniana.

Definición 33. Una partición de la unidad suave en una variedad M es una colección $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ de funciones $f_\alpha \in \mathfrak{F}(M)$ tal que

- i) $0 \leq f_\alpha \leq 1 \ \forall \alpha$.
- ii) $\{\text{supp } f_\alpha : \alpha \in A\}$ es localmente finito.
- iii) $\sum_\alpha f_\alpha = 1$.

Se dice que una partición de la unidad es subordinada a una cubierta abierta \mathcal{C} de M si cada $\text{supp } f_\alpha$ está contenido en algún elemento de \mathcal{C} .

La demostración del siguiente teorema se ve en el curso de topología diferencial, y también se puede hallar en el texto de Guillemin & Pollack.

Teorema 34. *Si M es una variedad diferenciable segundo-numerable, para toda cubierta abierta existe una partición de la unidad subordinada.*

8.1.3. Variedades Riemannianas

El siguiente es un resultado básico que revela la existencia de una métrica siempre que tengamos variedades segundo-numerables. Para ello utilizamos las coordenadas locales para construir el producto interior local y extendemos con particiones de la unidad.

Lema 35. *Toda variedad diferenciable segundo-numerable admite una métrica Riemanniana.*

Demostración. Con el uso de particiones de la unidad construimos suavemente una métrica en las vecindades coordinadas de una manera sencilla, utilizando el producto tensorial y las coordenadas locales: Sea $\{f_\alpha\}_\alpha$ una partición de la unidad subordinada al atlas de M . Para cada α sea x^1, \dots, x^n un sistema coordinado en $U \supseteq \text{supp} f_\alpha$.

Definimos

$$g_\alpha = \sum_i dx^i \otimes dx^i.$$

Recordemos que cada diferencial es un campo tensorial $(0, 1)$, entonces $dx^i \otimes dx^i$ es un campo tensorial $(0, 2)$

-Cada $dx^i \otimes dx^i$ es definido positivo por definición del producto tensorial (es el producto usual de funciones, por lo que al evaluar en (v, v) obtenemos un número real al cuadrado).

-La suma finita de productos interiores es un producto interior entonces g_α lo es.

- Por las propiedades de las particiones de la unidad obtenemos que $\sum_\alpha f_\alpha g_\alpha$ es un producto interior en cada punto, es decir el índice es constante cero, de lo que obtenemos una métrica Riemanniana. \square

8.1.4. Campos de marcos

Definición 36. A una base ortonormal de $T_p M$ se le llama un **marco** en el punto p .

Si tenemos E_1, \dots, E_n campos vectoriales ortogonales unitarios, se le conoce como **campo de marcos**.

Teorema 37. *Localmente, siempre existe un marco de campos en M .*

El teorema anterior se enuncia sin demostración para limitar la extensión de este trabajo, ya que requiere introducir muchos conceptos geométricos nuevos. Intuitivamente, se puede demostrar que si tenemos un marco en un punto, lo podemos extender a una curva, y por traslación paralela lo podemos extender a toda una vecindad.

8.2. Vectores tipo tiempo, variables tiempo-orientables y la existencia de una métrica de Lorentz.

Recordamos que una métrica de Lorentz es un tensor métrico de índice 1 (para una variedad de dimensión $\dim M \geq 2$.)

8.2.1. Vectores y variedades de Lorentz tiempo orientables

Definición 38. Un vector tangente $v \in T_p M$ se dice que es

- De tipo espacio si $\langle v, v \rangle > 0$ o $v = 0$.

- Nulo si $\langle v, v \rangle = 0$ y $v \neq 0$
- De tipo tiempo si $\langle v, v \rangle < 0$

Al conjunto de vectores en $T_p M$ de tipo nulo también se les dice el cono nulo. También se les llama de tipo luz. Esta terminología viene de la relatividad.

Definición 39. Si \mathcal{F} es el conjunto de todos los vectores tipo tiempo en una variedad de Lorentz, se define el **cono de tiempo que contiene a $u \in \mathcal{F}$ como**

$$C(u) = \{v \in \mathcal{F} : \langle u, v \rangle < 0\}$$

Se puede verificar con algebra lineal que el espacio ortogonal u^\perp consiste de vectores tipo espacio, y por tanto tenemos la descomposicion en suma directa $C(u) + u^\perp$.

Lema 40. Si $C(u)$ es un cono de tiempo. $v \in C(u)$ si y solo si $v = au + \bar{v}$ donde $\bar{v} \in u^\perp$ y $a > 0$.

Demostración. Se sigue de la descomposición mencionada previamente y que por definición

$$\begin{aligned}\langle v, u \rangle &= \langle au + \bar{v}, u \rangle \\ &= a|u|^2 + \langle \bar{v}, u \rangle \\ &< 0.\end{aligned}$$

Para esto necesariamente $a > 0$ ya que $|u|^2 < 0$. □

Lema 41. Los vectores tipo tiempo en un espacio vectorial de Lorentz estan en el mismo cono de tiempo si y solo si $\langle v, w \rangle < 0$.

Demostración. Sea $C(u)$ un cono de tiempo. Podemos suponer que u es unitario. Sea $v \in C(u)$. Si $v = au + \bar{v}$, $w = bu + \bar{w}$ donde \bar{v}, \bar{w} son ortogonales a u . Como $v \in C(u)$, tenemos que $a > 0$. Se cumple que

$$\begin{aligned}|\bar{v}| &\leq |v| + |au| \\ &< |a|\end{aligned}$$

dado que $|v| < 0$. Similarmente $|b| > |\bar{w}|$. Esto implica que $|\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle| < |ab|$ por Cauchy Schwarz.

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\langle v, w \rangle &= \langle au + \bar{v}, bu + \bar{w} \rangle \\ &= -ab + \langle \bar{v}, \bar{w} \rangle.\end{aligned}$$

es tal que $\text{sgn} \langle v, w \rangle = \text{sgn}(-ab)$ pues es el sumando de longitud más grande. Entonces $\text{sgn} \langle v, w \rangle < 0$ si y solo si $ab > 0$, es decir si y solo si $b > 0$, lo cual se cumple si y solo si $w \in C(u)$. □

Lema 42. *Los conos de tiempo son convexos*

Demostración. Para $a, b \geq 0$, no ambos cero, y para $v, w \in C(u)$, tenemos que

$$\begin{aligned}\langle av + bw, v \rangle &= a|v| + b\langle w, v \rangle \\ &< 0.\end{aligned}$$

Recordemos que por definicion $v \in C(u)$ implica $|v| < 0$, y $\langle w, v \rangle < 0$ por el lema anterior. Entonces $av + bw \in C(u)$. \square

Definición 43. Sea τ una funcion en M que asigna a cada punto p un cono de tiempo τ_p en $T_p(M)$. Se dice que es suave si para todo p existe un campo vectorial suave tal que en una vecindad alrededor de p se cumple que $V_q \in \tau_q$ para todo $q \in p$.

M se dice tiempo-orientable si existe dicha funcion τ suave, a la que se le llama orientación de tiempo.

En la siguiente sección se verán ejemplos de espacios tiempo orientables.

Lema 44. *Supongamos que U es un campo vectorial unitario en una variedad riemanniana M con métrica g .*

Denotemos por U^ la 1-forma tal que*

$$U^*(X) = g(U, X) \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

Entonces se cumple que

$$\tilde{g} = g - 2U^* \otimes U^*$$

es una métrica de Lorentz.

Demostración. Localmente, como se menciono en la sección sobre marcos, existe un campo de marcos U, E_2, \dots, E_n respecto a g .

Entonces por ortonormalidad

$$\tilde{g}(E_i, E_j) = \delta_{ij}$$

y

$$\begin{aligned}\tilde{g}(U, U) &= g(U, U) - 2g(U, U) \otimes g(U, U) \\ &= G(U, U) - 2g^2(U, U) \\ &= -1.\end{aligned}$$

y por lo tanto el índice es 1 (Teorema 20). \square

8.2.2. Existencia de una métrica de Lorentz

Teorema 45. *Para una variedad diferenciable M compacta, orientable y tiempo-orientable, lo siguiente es equivalente.*

- i) Existe una métrica de Lorentz en M*
- ii) Existe un campo vectorial que no se desvanece en M*
- iii) M tiene característica de Euler cero.*

Demostración. *ii)* y *iii)* son equivalentes por el teorema de Poincare-Hopf. Para ver *ii) \implies i)*, por el lema anterior vimos que un campo vectorial unitario induce una métrica de Lorentz. Si X no se desvanece, entonces $\frac{X}{|X|}$ está bien definido y es un campo vectorial unitario en M , entonces tenemos el resultado. Finalmente, para ver *i) \implies ii)*, sea τ una orientación de tiempo para M . Dado que τ es suave, es posible definir localmente un campo vectorial tipo-tiempo, cuyos valores alrededor de p están en τ_p . Sea $\{f_\alpha\}_\alpha$ una partición de la unidad subordinada a dichas vecindades donde se define el campo vectorial. Como las funciones f_α son no negativas y los conos de tiempo son convexos por un lema anterior, entonces $\sum f_\alpha X_\alpha$ es tipo tiempo, por lo que no se desvanece \square

El teorema anterior también se cumple si M no se conoce tiempo orientable e incluso también si no se conoce compacta, siempre podemos establecer la existencia de una métrica de Lorentz tiempo-orientable, pero sería necesario extender bastante esta exposición introductoria.

9. Aplicación a la relatividad especial

En espacio euclidiano \mathbb{R}^n , el producto punto usual otorga un tensor métrico

$$\begin{aligned}\langle v_p, w_p \rangle &= v \cdot w \\ &= \sum v^i w^i\end{aligned}$$

por lo que es una variedad Riemanniana.

Al cambiar de signo k de los sumandos, obtenemos un tensor métrico de índice k . (Teorema 20).

Asignando el tensor métrico

$$\langle v_p, w_p \rangle = - \sum_{i=1}^k v^i w^i + \sum_{i=k+1}^n v^i w^i$$

obtenemos un espacio \mathbb{R}_k^n al que se le llama semi-euclidean.

A \mathbb{R}_1^n se le llama el n -espacio de Minkowski.

Para $n = 4$, este tensor métrico es un invariante bajo la transformación de Lorentz, como se vio en la motivación, por lo que es un ejemplo de espacio relativista.

En los terminos vistos en secciones pasadas, tenemos un espacio vectorial de 3 dimensiones de tipo espacio, y un espacio vectorial de 1 dimension de tipo tiempo.

Este espacio es de particular interes no solo por ser el modelo de la relatividad especial, sino también porque de la definición de variedad de Lorentz, tenemos que **todo espacio tangente de una variedad de Lorentz es linealmente isométrico a \mathbb{R}_1^n** .

El caso cuando $n = 4$ se le llama espacio-tiempo de Minkowski, que es trivialmente una variedad de Lorentz.

Definición 46. Un espacio-tiempo es una variedad de Lorentz de 4 dimensiones, con orientación temporal

Definición 47. A la orientación temporal se le llama **futuro**, y a su negativo **pasado**. Una curva se dice que apunta al future si todos sus vectores de velocidad apuntan al future.

Ejemplo. Los fotones son una partícula de tipo luz. El estado de un foton define una geodésica que apunta al futuro bajo la orientación usual, por definición del tensor métrico y considerando el cambio de variable de la motivación $x_0 = ct$. Que la luz es una geodesica es una hipótesis fundamental de la relatividad. En general a una curva de tipo luz apuntando al futuro parametrizada por longitud de arco se le llama **partícula**. A la longitud de arco se le llama **tiempo propio**.

Definición 48. Cono de luz

Definimos anteriormente el cono nulo o cono de luz como el conjunto de vectores nulos distintos de cero (dicha definición fue en el espacio tangente, pero en espacio euclidiano podemos identificarlo con todo el espacio).

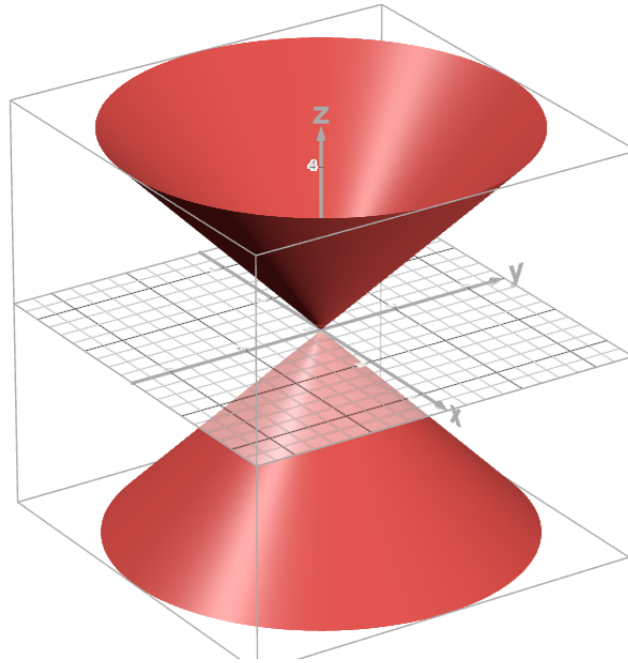


Figura 1: Cono nulo de \mathbb{R}_1^3 , graficando $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

La distinción entre vectores de tipo luz, de tipo espacio y de tipo tiempo aunado a los postulados de la relatividad nos otorga una relación causal.

- Dos eventos $x, y \in \mathbb{R}_1^4$ están relacionados causalmente si y solo si existe una partícula de x a y . Se puede verificar que dichos eventos que pueden influenciar a y son únicamente los que se encuentra dentro del cono de luz centrado en x . Estos van a ser exactamente los eventos de **tipo tiempo**.
- El caso de los eventos de **tipo espacio**, no existe una partícula entre ellos y por tanto no tienen relación causal.

Así como los conceptos anteriores, muchos conceptos físicos aterrizan en el lenguaje de variedades, y permiten estudiar de forma geométrica eventos de interés.

10. Notas finales

En esta exposición surgen dos nociones distintas de la característica de Euler, una como el número de intersección de la diagonal $I(\Delta, \Delta)$, que es un concepto completamente basado en el concepto diferenciabilidad según lo visto en Guillemin & Pollack, y la noción más general basada en grupos de Homología, que es un aspecto estrictamente topológico.

Para no involucrar muchos conceptos de homología y hacer el trabajo mucho más largo, esta disparidad no fue resuelta, pero es fundamental para entender por completo el paso de un invariante topológico a la geometría local de las variedades.

Queda pendiente el estudio de como se relacionan dichas dos nociones. Por lo pronto, puede ser consultado en el libro de Bott & Tu, siendo la proposición 11.24 del mismo.

11. Referencias

- O'Neill, B. (1983). Semi-riemannian geometry: With applications to relativity. Academic Press.
- Guillemin, V., & Pollack, A. (2014). Differential topology. AMS Chelsea Publishing.
- Taylor, J. R. (2005). Classical mechanics. University Science Books.
- Bott, R., & Tu, L. W. (2011). Differential forms in algebraic topology. Springer.
- Schwichtenberg, J. (2018). Physics from symmetry. Springer.