Universidad de Guanajuato
(Campus Guanajuato)

División de Ciencias Naturales y Exactas

Departamento de Matemáticas

Series aleatorias y Ley Fuerte de los Números Grandes

Presentado por:
Daniela Márquez Morales (Licenciatura en Matemáticas)
Axel Gabriel Rodríguez Zarate (Licenciatura en Matemáticas)

Diciembre, 2022

Índice general

Capítulo 1

Truncamiento y equivalencia

Definición 1.1 (Sucesiones de variables equivalentes en la cola) *Si $\{X_n\}$ y $\{Y_n\}$ son sucesiones de variables aleatorias definidas sobre el mismo espacio de probabilidad, decimos que ellas son equivalentes en la cola si*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left[\{X_n \neq Y_n\}\right] < \infty.$$

Proposición 1.1 (Equivalencia) *Sean $\{X_n\}$ y $\{Y_n\}$ sucesiones de variables aleatorias equivalentes en la cola. Entonces se cumple lo siguiente:*

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(X_n - Y_n)$ *converge casi seguramente.*

2. a) $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ *converge casi seguramente si y sólo si* $\sum_{n=1}^{\infty} Y_n$ *converge casi seguramente.*

   b) $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ *diverge casi seguramente si y sólo si* $\sum_{n=1}^{\infty} Y_n$ *diverge (en el mismo sentido que* $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$*) casi seguramente.*

3. *Si existen una variable aleatoria X y una sucesión de reales $\{a_n\}$ tales que $a_n \uparrow \infty$ y*

$$\frac{1}{a_n}\sum_{j=1}^{n} X_j \overset{c.s.}{\to} X,$$

entonces también se cumple que

$$\frac{1}{a_n}\sum_{j=1}^{n} Y_j \overset{c.s.}{\to} X.$$

Demostración.

1. Por el Lema de Borel-Cantelli se sigue que $\mathbb{P}\left[\{X_n \neq Y_n,\ i.o.\}\right] = 0$, o de manera equivalente,

$$1 = \mathbb{P}\left[\left(\limsup_{n\to\infty}\{X_n \neq Y_n\}\right)^{\complement}\right] = \mathbb{P}\left[\liminf_{n\to\infty}\{X_n = Y_n\}\right].$$

Dado que

$$\liminf_{n\to\infty}\{X_n = Y_n\} = \bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n}\{\omega\in\Omega : X_k(\omega) = Y_k(\omega)\},$$

para cada $\omega \in \liminf_{n\to\infty}\{X_n = Y_n\}$ existe $N(\omega)\in\mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N(\omega)$ se cumple $X_n(\omega) - Y_n(\omega) = 0$, por lo que para todo $n \geq N(\omega)$ tenemos:

$$\left|\sum_{j=1}^{n}(X_j(\omega) - Y_j(\omega))\right| = \left|\sum_{j=1}^{N(\omega)}(X_j(\omega) - Y_j(\omega))\right|.$$

Notemos que esto implica que

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}(X_j(\omega) - Y_j(\omega)) = \sum_{j=1}^{N(\omega)}(X_j(\omega) - Y_j(\omega)).$$

Si S es la variable aleatoria dada por

$$S(\omega) := \sum_{j=1}^{N(\omega)}(X_j(\omega) - Y_j(\omega)),$$

entonces $\sum_{n=1}^{\infty}(X_n - Y_n) \xrightarrow{c.s.} S$.

2. Sea $\omega \in \liminf_{n\to\infty}\{X_n = Y_n\}$. Existe $N(\omega)\in\mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=N(\omega)}^{\infty} X_n(\omega) = \sum_{n=N(\omega)}^{\infty} Y_n(\omega).$$

a) Supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} X_n(\omega)$ converge a $Z(\omega)$ (donde Z es una variable aleatoria). Luego, para $\varepsilon > 0$ existe $M\in\mathbb{N}$ tal que para todo índice $m \geq M$ se cumple

$$\left|\sum_{n=1}^{m} X_n(\omega) - Z(\omega)\right| < \varepsilon.$$

Entonces para todo natural $m \geq \max\{N(\omega), M\}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\varepsilon &> \left| \sum_{n=1}^{N(\omega)-1} X_n(\omega) + \sum_{n=N(\omega)}^{m} X_n(\omega) - Z(\omega) \right| \\
&= \left| \sum_{n=1}^{N(\omega)-1} X_n(\omega) + \sum_{n=N(\omega)}^{m} Y_n(\omega) - Z(\omega) \right| \\
&= \left| \sum_{n=1}^{m} Y_n(\omega) + \sum_{n=1}^{N(\omega)-1} (X_n(\omega) - Y_n(\omega)) - Z(\omega) \right| \\
&= \left| \sum_{n=1}^{m} Y_n(\omega) + S(\omega) - \big(X_{N(\omega)}(\omega) - Y_{N(\omega)}\big) - Z(\omega) \right| \\
&= \left| \left(\sum_{n=1}^{m} Y_n(\omega) \right) - (Z(\omega) - S(\omega)) \right|,
\end{aligned}$$

por lo que $\sum_{n=1}^{\infty} Y_n$ converge casi seguramente a $Z - S$. El recíproco del inciso se prueba intercambiando los papeles de X_n y Y_n.

b) La prueba es análoga al inciso anterior.

3. Existe N nulo tal que para todo $\omega \in N^{\complement}$ se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \sum_{j=1}^{n} X_j(\omega) = X(\omega).$$

Entonces para todo $\omega \in N^{\complement} \cap \liminf_{n\to\infty} \{X_n = Y_n\}$ existe $N(\omega) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N(\omega)$, $X_n(\omega) - Y_n(\omega) = 0$. Además, para $\varepsilon > 0$ existe $M \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq M$, entonces

$$\left| \left(\frac{1}{a_m} \sum_{j=1}^{m} X_j(\omega) \right) - X(\omega) \right| < \varepsilon,$$

por lo que, para todo $m \geq \max\{M, N(\omega)\}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{a_m} \sum_{j=1}^{m} (X_j(\omega) - Y_j(\omega)) \right| &= \left| \frac{1}{a_m} \sum_{j=1}^{N(\omega)-1} (X_j(\omega) - Y_j(\omega)) + \frac{1}{a_m} \sum_{j=N(\omega)}^{m} (X_j(\omega) - Y_j(\omega)) \right| \\
&= \left| \frac{1}{a_m} \sum_{j=1}^{N(\omega)-1} (X_j(\omega) - Y_j(\omega)) \right|,
\end{aligned}$$

por lo que, al hacer $m \to \infty$ se sigue que

$$\frac{1}{a_m} \sum_{j=1}^{m} (X_j(\omega) - Y(\omega)) \to 0,$$

es decir, $\dfrac{1}{a_n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(X_j - Y_j) \overset{c.s.}{\to} 0$. Luego, para todo $\omega \in N^{\complement} \cap \liminf_{n\to\infty}\{X_n = Y_n\}$ existen $M_1, M_2 \in \mathbb{N}$ tales que para todo $n \geq M_1$ y todo $m \geq M_2$ se cumple que

$$\left|\frac{1}{a_n}\sum_{j=1}^{n}(X_j(\omega) - Y_j(\omega))\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{y} \qquad \left|\left(\frac{1}{a_m}\sum_{j=1}^{m}X_j(\omega)\right) - X(\omega)\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

por lo que para todo $n \geq \max\{M_1, M_2\}$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\left|\left(\frac{1}{a_n}\sum_{j=1}^{n}Y_j(\omega)\right) - X(\omega)\right| &= \left|\left(\frac{1}{a_n}\sum_{j=1}^{n}(Y_j(\omega) - X_j(\omega))\right) + \left(\frac{1}{a_n}\sum_{j=1}^{n}X_j(\omega)\right) - X(\omega)\right| \\
&\leq \left|\frac{1}{a_n}\sum_{j=1}^{n}(X_j(\omega) - Y_j(\omega))\right| + \left|\left(\frac{1}{a_n}\sum_{j=1}^{n}X_j(\omega)\right) - X(\omega)\right| \\
&< \varepsilon,
\end{aligned}$$

que es justo lo que se quería probar.

$\blacksquare$

Capítulo 2

Convergencia casi segura de series de variables aleatorias independientes

Definición 2.1 *Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias definidas sobre el mismo espacio de probabilidad. Diremos que $\{X_n\}$ es de Cauchy en probabilidad si se cumple:*

$$\lim_{m,n\to\infty} \mathbb{P}\left[|X_n - X_m| > \varepsilon\right] = 0, \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

Se puede probar que una sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}$ es de Cauchy en probabilidad si y sólo si es convergente en probabilidad.

Definición 2.2 *Una sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}_n$ se dice que es de Cauchy casi seguramente si existe un conjunto medible nulo N tal que para todo $\omega \in N^{\complement}$ se tiene $\{X_n(\omega)\}_n$ es de Cauchy.*

Nuevamente, es posible demostrar que una sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}$ converge casi seguramente si y sólo si es de Cauchy casi seguramente.

Proposición 2.1 (Desigualdad de Skorokhod) *Sean $\{X_n\}$ variables aleatorias independientes y sea $\alpha > 0$ fijo. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $S_n := \sum_{j=1}^{n} X_j$ y definamos*

$$c := \sup_{j\leq N} \mathbb{P}\left[|S_N - S_j| > \alpha\right].$$

Si $c < 1$, entonces

$$\mathbb{P}\left[\sup_{j\leq N} |S_j| > 2\alpha\right] \leq \frac{1}{1-c}\mathbb{P}\left[|S_N| > \alpha\right]$$

Demostración. Denotemos

$$m = \inf\{j : |S_j| > 2\alpha\}$$

Como estamos trabajando con subconjuntos finitos, notemos que los ínfimos y supremos son en realidad mínimos y máximos respectivamente. Podemos pensar a m como el primer índice tal que $|S_m| > 2\alpha$ y a $\left\{\sup_{j\leq N}|S_j| > 2\alpha\right\}$ como el evento que denota que hay al menos un índice $j \leq N$ tal que $|S_j| > 2\alpha$. Con esto en mente obtenemos que

$$\sup_{j\leq N}|S_j| > 2\alpha \iff m \leq N \iff \bigcup_{j=1}^{N}\{m=j\}$$

donde la ultima unión es disjunta. Por lo tanto

$$\left\{\sup_{j\leq N}|S_j| > 2\alpha\right\} = \{m \leq N\} = \left\{\bigcup_{j=1}^{N}\{m=j\}\right\}. \tag{2.1}$$

Ahora, supongamos que

$$|S_N - S_k| \leq \alpha$$

y

$$m = k$$

Por definición de m se cumple que $|S_k| > 2\alpha$. Procediendo por casos supongamos que $S_k > 2\alpha$, entonces

$$0 < \alpha = 2\alpha - \alpha < S_k - \alpha \leq S_N = |S_N|.$$

Ahora supongamos que $S_k < -2\alpha$, entonces

$$S_N \leq S_k + \alpha < -2\alpha + \alpha = -\alpha < 0$$

lo que implica que

$$|S_N| = -S_N > \alpha.$$

Por lo tanto,

$$\{|S_N - S_k| \leq \alpha, m = k\} \subseteq \{|S_N| > \alpha\} \tag{2.2}$$

Finalmente, notemos que

$$\{m = k\} = \left\{\sup_{j\leq k-1}|S_j| \leq 2\alpha, |S_k| > 2\alpha\right\} \perp \{|S_N - S_k| \leq \alpha\} \tag{2.3}$$

Por (2.1), (2.2), y (2.3)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[|S_N| > \alpha\right] &\geq \mathbb{P}\left[|S_N| > \alpha, m \leq N\right] \\
&= \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}\left[|S_N| > \alpha, m = k\right] \\
&\geq \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}\left[|S_N - S_k| \leq \alpha, m = k\right] \\
&= \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}\left[|S_N - S_k| \leq \alpha\right] \mathbb{P}\left[m = k\right] \\
&= \sum_{k=1}^{N} \left(1 - \mathbb{P}\left[|S_N - S_k| > \alpha\right]\right) \mathbb{P}\left[m = k\right] \\
&\geq (1-c) \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}\left[m = k\right] \\
&= (1-c)\, \mathbb{P}\left[\sup_{j \leq N} |S_j| > 2\alpha\right].
\end{aligned}$$

Por lo tanto, dado que $c < 1$,

$$\frac{\mathbb{P}\left[|S_N| > \alpha\right]}{1-c} \geq \mathbb{P}\left[\sup_{j \leq N} |S_j| > 2\alpha\right].$$

■

Teorema 2.1 (Teorema de Lévy) *Si $\{X_n\}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ converge casi seguramente si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ converge en probabilidad. Esto implica que si $S_n := \sum_{j=1}^{n} X_j$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) $\{S_n\}$ es de Cauchy en probabilidad.

b) $\{S_n\}$ converge en probabilidad.

c) $\{S_n\}$ converge casi seguramente.

d) $\{S_n\}$ es de Cauchy casi seguramente.

Demostración. Supongamos que $\{S_n\}_n$ converge en probabilidad. Esto sucede si y solo si S_n es Cauchy en probabilidad. Ahora, vemos que

$$\begin{aligned}
\sup_{m,n \geq N} |S_m - S_n| &= \sup_{m,n \geq N} |S_m + S_N - S_N - S_n| \\
&\leq 2 \sup_{n \geq N} |S_n - S_N| \\
&\leq 2 \sup_{j \geq 0} |S_{N+j} - S_N|.
\end{aligned}$$

Como

$$M_N = \sup_{j\geq 0} |S_{N+j} - S_N|$$

es una sucesion decreciente, basta ver que

$$\sup_{j\geq 0} |S_{N+j} - S_N| \xrightarrow{P} 0.$$

Por ser cauchy en probabilidad, vemos que para $\epsilon > 0, \frac{1}{2} > \delta > 0$ y $m, m' \geq N_0$ con N_0 suficientemente grande,

$$\mathbb{P}\left[|S_m - S_{m'}| > \frac{\epsilon}{2}\right] \leq \delta$$

por lo que

$$\mathbb{P}\left[|S_{N+j} - S_N| > \frac{\epsilon}{2}\right] \leq \delta$$

para todo $N \geq N_0$, $j \geq 0$.

Entonces, para $N = N(N_0)$ por la monotonia de M_N se cumple que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[\sup_{j\geq 0} |S_{N+j} - S_N| > \epsilon\right] &= \mathbb{P}\left[\lim_{N'\to\infty}\left\{\sup_{N'\geq j\geq 0} |S_{N+j} - S_N| > \epsilon\right\}\right] \\ &= \lim_{N'\to\infty} \mathbb{P}\left[\left\{\sup_{N'\geq j\geq 0} |S_{N+j} - S_N| > \epsilon\right\}\right].\end{aligned}$$

Por ser Cauchy en probabilidad

$$\sup_{N'\geq j} \mathbb{P}\left[|S_{N+N'} - S_{N+j}| > \frac{1}{2}\epsilon\right] \leq \delta,$$

por lo que, por Skorohod para $\xi'_N = \mathbb{P}[\sup_{N'\geq j} |S_{N+j} - S_N| > \epsilon]$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[\xi_{N'}\right] &\leq \left(\frac{1}{1 - \sup_{N'\geq j} \mathbb{P}\left[|(S_{N+N'} - S_N) - (S_{N+j} - S_N)| > \frac{1}{2}\epsilon\right]}\right) \mathbb{P}\left[|S_{N+N'} - S_N| > \frac{1}{2}\epsilon\right] \\ &\leq \frac{1}{1-\delta}\delta \\ &\leq 2\delta\end{aligned}$$

Por lo tanto, dado que $\delta > 0$ fue arbitrario.

$$\sup_{j\geq 0} |S_{N+j} - S_N| \xrightarrow{P} 0.$$

■

Teorema 2.2 (Criterio de convergencia de Kolmogorov) *Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes. Se cumple que*

$$\sum_{j=1}^{\infty} Var\left[X_j\right] < \infty \Longrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \left(X_j - \mathbb{E}\left[X_j\right]\right) \text{ converge casi seguramente.}$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\mathbb{E}[X_n] = 0$. Entonces

$$\sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{Var}[X_j] < \infty \Longrightarrow \lim_{m,n\to\infty} \sum_{j=n+1}^{m} \operatorname{Var}[X_j] = 0.$$

Luego,

$$0 \leq \lim_{m,n\to\infty} \mathbb{P}[|S_n - S_m| > \varepsilon] \leq \lim_{m,n\to\infty} \frac{\operatorname{Var}[S_n - S_m]}{\varepsilon^2} = \lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{j=m}^{n} \operatorname{Var}[X_j] = 0.$$

En consecuencia, por el Teorema de Lévy, $\{S_n\}$ es convergente casi seguramente. De esta forma, existe un conjunto medible N nulo tal que para todo $\omega \in N^{\complement}$,

$$\left| \sum_{j=1}^{\infty} X_j(\omega) \right| < \infty,$$

lo cual implica que

$$\left| \sum_{j=1}^{\infty} (X_j(\omega) - \mathbb{E}[X_j]) \right| = \left| \sum_{j=1}^{\infty} X_j(\omega) \right| < \infty.$$

■

Capítulo 3

Leyes de números grandes

3.1. Introducción y motivación.

Una parte de probabilidad que nos interesa conocer mas a fondo, y con aplicaciones importantes tanto teóricas como especialmente practicas, es la del comportamiento al realizar ciertos experimentos independientes una gran cantidad de veces.

En efecto, resulta intuitivo pensar que al realizar un numero cada vez mas grande de observaciones de un experimento, la media de esta cantidad de experimentos (llamada media empírica o media muestral) se acercará al valor esperado del experimento. Si tiramos una moneda al aire asignando el valor 1 a la cara y el 0 a la cruz, se espera que al repetir el experimento varias veces, el promedio de nuestros resultados se acercara a 0,5.

Hay varios resultados interesantes concernientes a este fenómeno. A aquellos resultados que involucran la convergencia del promedio de una secuencia de experimentos generalmente les llamaremos leyes de números grandes.

Este hecho se ha estudiado por siglos y ha fomentado en gran medida el desarrollo de la probabilidad como campo de estudio. La primer formulación rigurosa de una ley de los grandes numeros se le atribuye a Jacob Bernoulli en su famoso libro Ars Conjectandi, publicado en 1713 y considerado una de las obras mas influyentes de la historia de la probabilidad.

Teorema 3.1 (Teorema de Bernoulli.) *Sea $r, s \in \mathbb{N}$ y sea n un numero natural grande. Sea $k(n) = n(r+s)$ el numero de intentos donde la probabilidad de exito es de $p = \frac{r}{r+s}$. Sea μ el numero de exitos. Se cumple que*

$$\mathbb{P}\left[\left|\frac{\mu}{k(n)} - p\right| \leq \frac{1}{r+s}\right] \geq 1 - \frac{1}{1+c(n)}$$

donde $c(n)$ crece a medida que $k(n)$ crece.

Comenzamos definiendo formalmente la media muestral y enunciando la versión elemental de la ley débil de los números grandes, cuya demostración se puede encontrar en las notas del curso de Probabilidad como consecuencia inmediata de la desigualdad de Tchebysheff.

Definición 3.1 (Media muestral) *Sea $\{X_n\}_n$ una sucesión de variables aleatorias. Definimos la media muestral o media empírica de las primeras n variables aleatorias, denotada por $\overline{X_n}$, como*

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_n.$$

Teorema 3.2 (Ley débil de los números grandes, varianza finita) *Sea $\{X_n\}_n$ una sucesión de variables aleatorias iid con valor esperado μ y varianza finita σ^2. Se cumple que*

$$\overline{X_n} \xrightarrow{P} \mu.$$

Intuitivamente, este primer enunciado de la ley de los números grandes nos dice que mientras mas observaciones hagamos, el promedio de estas se acercara al valor esperado.

Ejemplo 3.1. *Supongamos que elegimos aleatoriamente a un estudiante de DEMAT y medimos su altura, y después les pedimos a otros estudiantes estimar su altura usando solo su vista. La ley débil de los números grandes nos dice que a mayor numero de alumnos que les pidamos realizar la estimación, el promedio de sus respuestas se acercara cada vez mas a la altura exacta del estudiante.* ◀

Habiendo introducido la ley y entendiendo un poco mejor sus implicaciones, ahora si empezamos a profundizar sobre el comportamiento del promedio y el valor esperado de sucesiones de variables aleatorias independientes.

3.2. Ley débil de los números grandes

Queremos indagar un poco mas en leyes débiles de los números grandes, aquellas que involucran convergencia en probabilidad. Buscamos encontrar resultados similares al teorema 3.2 donde no dependamos de varianza finita (primer o segundo momento finitos).

Procedemos a partir de un resultado que nos permite deshacernos de cualquier hipótesis sobre momentos, y después construir sobre el.

Teorema 3.3 (Una versión general de la ley débil de los números grandes) *Sea $\{X_n\}_n$ una sucesión de variables aleatorias independientes tal que*

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}\left[|X_j| > n\right] \to 0$$

y

$$\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left[X_j^2 \mathbb{1}_{\{|X_j| \leq n\}}\right] \to 0$$

entonces se cumple que

$$\overline{X_n} - \frac{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left[X_j \mathbb{1}_{\{|X_j| \leq n\}}\right]}{n} \xrightarrow{P} 0.$$

Notemos que, en efecto, el teorema anterior no supone nada acerca de los momentos de algun X_j, ya que para cualquier variable aleatoria se cumple que

$$\mathbb{E}\left[X_j^2 \mathbb{1}_{\{|X_j|\leq n\}}\right] \leq \mathbb{E}\left[n^2\right] = n^2.$$

Procedemos con la demostración.

Demostración.

Tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{\sum_{j=1}^n X_j}{n} - \frac{\sum_{j=1}^n \mathbb{E}\left[X_j \mathbb{1}_{\{|X_j|\leq n\}}\right]}{n} = & \frac{\sum_{j=1}^n X_j}{n} - \frac{\sum_{j=1}^n X_j \mathbb{1}_{\{|X_j|\leq n\}}}{n} \\ & + \frac{\sum_{j=1}^n X_j \mathbb{1}_{\{|X_j|\leq n\}}}{n} - \frac{\sum_{j=1}^n \mathbb{E}\left[X_j \mathbb{1}_{\{|X_j|\leq n\}}\right]}{n}\end{aligned}$$

Notemos que para $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[\left|\sum_{j=1}^n X_j - \sum_{j=1}^n X_j \mathbb{1}_{\{|X_j|\leq n\}}\right| > \epsilon\right] &\leq \mathbb{P}\left[\sum_{j=1}^n X_j \mathbb{1}_{\{|X_j|\leq n\}} \neq \sum_{j=1}^n X_j\right] \\ &\leq \mathbb{P}\left[\bigcup_{j=1} \left(X_j \mathbb{1}_{\{|X_j|\leq n\}} \neq X_j\right)\right] \\ &\leq \sum_{j=1}^n \mathbb{P}\left[X_j \mathbb{1}_{\{|X_j|\leq n\}} \neq X_j\right] \\ &= \sum_{j=1}^n \mathbb{P}\left[|X_j| > n\right] \\ &\to 0.\end{aligned}$$

Entonces tenemos que

$$\sum_{j=1}^n X_j - \sum_{j=1}^n X_j \mathbb{1}_{\{|X_j|\leq n\}} \xrightarrow{P} 0. \tag{3.1}$$

Ahora, por la desigualdad de Tchebysheff,

$$\mathbb{P}\left[\left|\frac{\sum_{j=1}^n X_j \mathbb{1}_{\{|X_j|\leq n\}}}{n} - \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^n X_j \mathbb{1}_{\{|X_j|\leq n\}}\right]}{n}\right| > \epsilon\right] \leq \frac{\mathrm{Var}\left(\sum_{j=1}^n X_j \mathbb{1}_{\{|X_j|\leq n\}}\right)}{n^2\epsilon^2}$$

pero vemos que, como $\{X_n\}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{Var}\left(\sum_{j=1}^{n} X_j \mathbb{1}_{\{|X_j|\leq n\}}\right)}{n^2\epsilon^2} &= \frac{\sum_{j=1}^{n} \operatorname{Var}\left(X_j \mathbb{1}_{\{|X_j|\leq n\}}\right)}{n^2\epsilon^2} \\
&\leq \frac{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left[X_j^2 \mathbb{1}_{\{|X_j|\leq n\}}\right]}{n^2\epsilon^2} \\
&= \frac{1}{\epsilon^2}\left(\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left[X_j^2 \mathbb{1}_{\{|X_j|\leq n\}}\right]\right) \\
&\to 0
\end{aligned}$$

donde la convergencia final se da por hipotesis. Entonces tenemos que

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} X_j \mathbb{1}_{\{|X_j|\leq n\}}}{n} - \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{n} X_j \mathbb{1}_{\{|X_j|\leq n\}}\right]}{n} \xrightarrow{P} 0 \tag{3.2}$$

Por (3.1) y (3.2) se sigue que

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} X_j}{n} - \frac{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left[X_j \mathbb{1}_{\{|X_j|\leq n\}}\right]}{n} \xrightarrow{P} 0.$$

■

Gracias al resultado anterior ahora podemos probar la versión clásica de la ley débil de los números grandes. Notemos que no suponemos varianza finita como en la versión elemental de la ley. Lo único que requerimos es que las variables aleatorias sean integrables.

Corolario 3.1 (Ley débil de los números grandes/Ley de Khintchin) *Sea $\{X_n\}_n$ una sucesión de variables aleatorias iid con media μ tal que $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$. Se cumple que*

$$\overline{X_n} \xrightarrow{P} \mu.$$

Demostración. Verificamos las condiciones para aplicar la ley general. Se cumple que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}[|X_1| > n] &= n\mathbb{P}[|X_1| > n] \\
&= \mathbb{E}\left[n\mathbb{1}_{\{|X_1|>n\}}\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[|X_1|\, \mathbb{1}_{\{|X_1|>n\}}\right] \\
&\to 0.
\end{aligned}$$

También vemos que para $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\mathbb{E}\left[X_1^2\mathbb{1}_{\{|X_1|\leq n\}}\right] &\leq \frac{1}{n}\left(\mathbb{E}\left[X_1^2\mathbb{1}_{\left\{|X_1|<\epsilon\sqrt{n}\right\}}\right]+\mathbb{E}\left[X_1^2\mathbb{1}_{\left\{\epsilon\sqrt{n}\leq|X_1|\leq n\right\}}\right]\right)\\ &\leq \epsilon^2+\frac{1}{n}\mathbb{E}\left[X_1^2\mathbb{1}_{\left\{\epsilon\sqrt{n}\leq|X_1|\leq n\right\}}\right]\\ &\leq \epsilon^2+\frac{1}{n}\mathbb{E}\left[n\left|X_1\right|\mathbb{1}_{\left\{|X_1|\geq\epsilon\sqrt{n}\right\}}\right]\\ &\to \epsilon^2.\end{aligned}$$

Por lo anterior,

$$\frac{1}{n^2}\mathbb{E}\left[X_1^2\mathbb{1}_{\{|X_1|\leq n\}}\right]\to 0.$$

Con lo anterior y por la versión general de la ley débil de los números grandes, se cumple que

$$\overline{X_n}-\frac{\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{n}X_j\mathbb{1}_{\{|X_j|\leq n\}}\right]}{n}\xrightarrow{P}0. \tag{3.3}$$

Pero vemos que

$$\begin{aligned}\left|\frac{\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}\left[X_1\mathbb{1}_{\{|X_1|\leq n\}}\right]}{n}-\mathbb{E}\left[X_1\right]\right| &\leq \left|\mathbb{E}\left[X_1\mathbb{1}_{\{|X_1|\leq n\}}\right]-\mathbb{E}\left[X_1\right]\right|\\ &= \left|\mathbb{E}\left[X_1\left(1-\mathbb{1}_{\{|X_1|\leq n\}}\right)\right]\right|\\ &\leq \mathbb{E}\left[\left|X_1\right|\mathbb{1}_{\{|X_1|>n\}}\right]\\ &\to 0,\end{aligned}$$

con lo que

$$\frac{\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{n}X_j\mathbb{1}_{\{|X_j|\leq n\}}\right]}{n}\to\mu.$$

Por (3.3),

$$\overline{X_n}\xrightarrow{P}\mu.$$

■

Para el lector interesado, y a pesar de que no se demostrará en este documento, con la ley general vista también se puede probar una segunda ley débil de los números grandes que no supone integrabilidad.

Corolario 3.2 (Ley débil de los números grandes de Kolmogorov-Feller) *Sea* $\{X_n\}_n$ *una sucesión de variables aleatorias iid tal que*

$$x\mathbb{P}\left[|X_1|>x\right]\to 0,\quad x\to\infty.$$

Se cumple que

$$\overline{X_n}-\mathbb{E}\left[X_1\mathbb{1}_{\{|X_1|\leq n\}}\right]\xrightarrow{P}0.$$

3.3. Ley fuerte de los números grandes

En esta sección queremos indagar en resultados concernientes a leyes de los grandes números que involucran convergencia casi segura. El resultado final y mas importante de esta sección sera la clásica ley fuerte de los números grandes de Kolmogorov. Empezamos buscando demostrar un resultado muy importante. El lema de Kronecker.

Lema 3.1 (Sumas por partes.) *Sean* $\{a_n\}_n$, $\{b_n\}_n$ *dos sucesiones de numeros reales. Entonces*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_n \sum_{k=1}^{n} b_k - \sum_{j=1}^{n-1} \left[(a_{j+1} - a_j) \sum_{k=1}^{j} b_k \right]$$

Demostración. Procedemos por induccion. Para $n = 1$ es claro que

$$a_1 b_1 = a_1 b_1 - 0.$$

Ahora supongamos que se cumple para n, entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} a_k b_k &= \sum_{k=1}^{n} a_k b_k + a_{n+1} b_{n+1} \\
&= a_n \sum_{k=1}^{n} b_k - \sum_{j=1}^{n-1} \left[(a_{j+1} - a_j) \sum_{k=1}^{j} b_k \right] + a_{n+1} b_{n+1} \\
&= a_n \sum_{k=1}^{n} b_k - \sum_{j=1}^{n-1} \left[(a_{j+1} - a_j) \sum_{k=1}^{j} b_k \right] \\
&+ (a_{n+1} - a_n) \sum_{k=1}^{n} b_k - (a_{n+1} - a_n) \sum_{k=1}^{n} b_k + a_{n+1} b_{n+1} \\
&= (a_{n+1} - a_n + a_n) \sum_{k=1}^{n} b_k + a_{n+1} b_{n+1} \\
&- \sum_{j=1}^{n-1} \left[(a_{j+1} - a_j) \sum_{k=1}^{j} b_k \right] - (a_{n+1} - a_n) \sum_{k=1}^{n} b_k \\
&= a_{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} b_k - \sum_{j=1}^{n} \left[(a_{j+1} - a_j) \sum_{k=1}^{j} b_k \right].
\end{aligned}$$

■

Lema 3.2 (Lema de Kronecker) *Sea* $\{b_n\}_n$ *una sucesión de números reales tal que y*

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = c$$

para algún $c \in \mathbb{R}$, y sea $\{a_n\}_n > 0$ otra sucesión tal que $a_n \uparrow \infty$ Entonces

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k}{a_n} \to 0.$$

Demostración. Sea $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$. Por el lema 3.1 se cumple que

$$\begin{aligned}\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k}{a_n} &= \frac{1}{a_n}\left(a_n B_n - \sum_{k=1}^{n-1}\left(a_{k+1}-a_k\right)B_n\right)\\ &= B_n - \frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(a_{k+1}-a_k\right)B_k\end{aligned}$$

Sea $\epsilon > 0$ y sea N_0 tal que $|B_n - c| < \epsilon$ para todo $n \geq N_0$. Entonces

$$\begin{aligned}&B_n - \frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(a_{k+1}-a_k\right)B_k\\ =&B_n - \frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{N_0-1}\left(a_{k+1}-a_k\right)B_k - \frac{1}{a_n}\sum_{k=N_0}^{n-1}\left(a_{k+1}-a_k\right)B_k\\ =&B_n - \frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{N_0-1}\left(a_{k+1}-a_k\right)B_k - \frac{1}{a_n}\sum_{k=N_0}^{n-1}\left(a_{k+1}-a_k\right)\left(c + B_k - c\right)\\ =&B_n - \frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{N_0-1}\left(a_{k+1}-a_k\right)B_k - \frac{1}{a_n}\sum_{k=N_0}^{n-1}\left(a_{k+1}-a_k\right)c - \frac{1}{a_n}\sum_{k=N_0}^{n-1}\left(a_{k+1}-a_k\right)\left(B_k - c\right)\\ =&B_n - \frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{N_0-1}\left(a_{k+1}-a_k\right)B_k - c\left(1 - \frac{a_{N_0}}{a_n}\right) - \frac{1}{a_n}\sum_{k=N_0}^{n-1}\left(a_{k+1}-a_k\right)\left(B_k - c\right)\\ \to& - \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_n}\sum_{k=N_0}^{n-1}\left(a_{k+1}-a_k\right)\left(B_k - c\right)\right)\end{aligned}$$

Pero vemos que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_n}\sum_{k=N_0}^{n-1}\left(a_{k+1}-a_k\right)\left(B_k - c\right)\right) &\leq \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_n}\sum_{k=N_0}^{n-1}\left(a_{k+1}-a_k\right)\epsilon\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{a_{N_0}}{a_n}\right)\epsilon\\ &= \epsilon.\end{aligned}$$

Entonces

$$-\epsilon \leq \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k}{a_n}\right) \leq 0$$

para todo $\epsilon > 0$. Lo anterior implica que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k}{a_n}\right) = 0.$$

■

Como una primera aplicación de este lema, obtenemos la primera ley fuerte de números grandes de la sección.

Corolario 3.3 *Sea $\{X_n\}_n$ una sucesión de variables aleatorias independientes con $\mathbb{E}\left[X_n^2\right] < \infty$. Sea $a_n \uparrow \infty$. Si*

$$\sum_{k=1}^{\infty} Var\left(\frac{X_k}{a_k}\right) < \infty$$

entonces

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{a_n} - \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right]}{a_n} \stackrel{c.s.}{\to} 0.$$

Demostración. Por el criterio de convergencia de Kolmogorov

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{X_k - \mathbb{E}\left[X_k\right]}{a_k}\right) < \infty \quad c.s.$$

para algun $c \in \mathbb{R}$. Por el lema de Kronecker

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k \left(\frac{X_k - \mathbb{E}[X_k]}{a_k}\right)}{a_n} = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{a_n} - \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right]}{a_n}$$
$$\to 0$$

por lo que

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{a_n} - \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right]}{a_n} \stackrel{c.s.}{\to} 0.$$

■

Ahora nos centramos en el objetivo de probar la ley fuerte de los numeros grandes de Kolmogorov

Lema 3.3 (Una caracterización de la esperanza para v.a.s no negativas) *Sea X una variable aleatoria no negativa. Si X es continua, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X\right] = \int_0^{\infty} \mathbb{P}\left[X \geq x\right] dx.$$

Si X es discreta, entonces

$$\mathbb{E}\left[X\right] = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}\left[X > j\right].$$

Demostración. Probaremos el caso de una variable aleatoria continua. El caso discreto es análogo reemplazando las integrales por sumas.

Se cumple que

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathbb{P}\left[X \geq x\right] dx &= \int_0^\infty \int_x^\infty f(t)dtdx \\ &= \int_0^\infty \int_0^t f(t)dxdt \\ &= \int_0^\infty tf(t)dt \\ &= \mathbb{E}\left[X\right].\end{aligned}$$

■

Lema 3.4 *Sea $\{X_n\}_n$ una sucesión de variables aleatorias iid. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) $\mathbb{E}\left[|X_1|\right] < \infty$.

ii) $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{X_n}{n}\right| \overset{c.s.}{=} 0$

iii) Para $\epsilon > 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left[|X_1| \geq \epsilon n\right] < \infty.$$

Demostración. Por el lema 3.3 se cumple que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[|X_1|\right] &= \int_0^\infty \mathbb{P}\left[|X_1| \geq x\right] dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} \mathbb{P}\left[|X_1| \geq x\right] dx.\end{aligned}$$

Entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left[|X_1| \geq n+1\right] \leq \mathbb{E}\left[|X_1|\right] \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left[|X_1| \geq n\right].$$

Esta ultima desigualdad se cumple porque $f(x) = \mathbb{P}\left[|X_1| \geq x\right]$ es no negativa y no creciente. Se sigue que $\mathbb{P}\left[|X_1| \geq n\right]$ es la suma superior de Riemann en el intervalo $[n, n+1]$, y $\mathbb{P}\left[|X_1| \geq n+1\right]$ la suma inferior. Ahora, por la anterior desigualdad se cumple que para $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{E}\left[\left|\frac{X_1}{\epsilon}\right|\right] < \infty$$

si y solo si

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left[|X_1| \geq \epsilon n\right] < \infty.$$

Lo anterior prueba que i) y ii) son equivalentes. Ahora, supongamos que para todo $\epsilon > 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left[|X_1| \geq \epsilon n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left[|X_n| \geq \epsilon n\right] < \infty,$$

entonces por la ley 0-1 de Borel,

$$\mathbb{P}\left[\limsup_{n\to\infty} \{|X_n| \geq \epsilon n\}\right] = 0.$$

Pero

$$\limsup_{n\to\infty} \{|X_n| \geq \epsilon n\} = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{j\geq n} \left\{\left|\frac{X_j}{j}\right| \geq \epsilon\right\},$$

es decir, para todo n existe $j \geq n$ tal que $\left|\frac{X_j}{j}\right| \geq \epsilon$. Esto es, $\left\{\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{X_j}{j}\right| > \epsilon\right\}$. Entonces $\mathbb{P}\left[\limsup_{n\to\infty} \{|X_n| \geq \epsilon n\}\right] = 0$ implica que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|X_n|}{n} < \epsilon$$

casi seguramente, entonces

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|X_n|}{n} \overset{c.s.}{=} 0.$$

Análogamente, si

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|X_n|}{n} \overset{c.s.}{=} 0,$$

entonces

$$\mathbb{P}\left[\limsup_{n\to\infty} \{|X_n| \geq \epsilon n\}\right] = 0$$

lo que implica que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left[|X_1| \geq \epsilon n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left[|X_n| \geq \epsilon n\right] < \infty.$$

Por lo tanto, ii) y iii) son equivalentes. ■

Con las herramientas que hemos introducido hasta el momento, estamos listos para demostrar la ley fuerte de los números grandes.

Teorema 3.4 (Ley fuerte de los números grandes de Kolmogorov) *Sea* $\{X_n\}_n$ *una sucesión de variables aleatorias iid. Se cumple que* $\mathbb{E}\left[|X_1|\right] < \infty$ *si y solo si*

$$\overline{X_n} \xrightarrow{c.s.} \mu$$

donde $\mu = \mathbb{E}\left[X_1\right]$. *Mas aun, si* $\mathbb{E}\left[|X_1|\right] = \infty$ *entonces* $\overline{X_n}$ *no converge casi seguramente.*

Demostración. Supongamos que $\overline{X_n} \overset{c.s.}{\to} \mu$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{X_n}{n} &= \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n} + \frac{\sum_{k=1}^{n-1} X_k}{n} \\
&= \frac{\sum_{k=1}^{n} X_n}{n} - \frac{n-1}{n}\frac{\sum_{k=1}^{n-1} X_k}{n-1} \\
&= \overline{X_n} - \frac{n-1}{n}\overline{X_n} \\
&\overset{c.s.}{\to} 0.
\end{aligned}$$

Se sigue del lema 3.4 que $\mathbb{E}\left[|X_1|\right] < \infty$.

Ahora supongamos que $\mathbb{E}\left[|X_1|\right] < \infty$,

Se cumple que

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k 1_{\{|X_k|\leq k\}}}{n} - \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} X_k 1_{\{|X_k|\leq k\}}\right]}{n} - \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k 1_{\{|X_k|\leq k\}}}{n} - \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right]}{n}\right)\right| \\
=&\left|\frac{\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right]}{n} - \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} X_k 1_{\{|X_k|\leq k\}}\right]}{n}\right| \\
=&\left|\mathbb{E}\left[X_1\right] - \frac{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[X_k 1_{\{|X_k|\leq k\}}\right]}{n}\right| \\
=&\left|\mathbb{E}\left[X_1\right] - \mathbb{E}\left[X_1 1_{\{|X_1|\leq n\}}\right]\right| \\
=&\left|\mathbb{E}\left[X_1\left(1 - 1_{\{|X_1|\leq n\}}\right)\right]\right| \\
=&\left|\mathbb{E}\left[X_1 1_{\{|X_1|>n\}}\right]\right| \\
\leq&\mathbb{E}\left[\left|X_1\right| 1_{\{|X_1|>n\}}\right] \\
\to&0.
\end{aligned}$$

Tenemos por tanto que

$$\frac{\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} X_k 1_{\{|X_k|\leq k\}}\right]}{n} \to \mathbb{E}\left[X_1\right]. \tag{3.4}$$

Ahora, notemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{Var}\left(\frac{X_j 1_{\{|X_j|\leq j\}}}{j}\right) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Var}\left(X_j 1_{\{|X_j|\leq j\}}\right)}{j^2} \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}\left[X_j^2 1_{\{|X_j|\leq j\}}\right]}{j^2} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{j} \frac{\mathbb{E}\left[X_j^2 1_{\{k-1<|X_j|\leq k\}}\right]}{j^2} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} \frac{\mathbb{E}\left[X_j^2 1_{\{k-1<|X_j|\leq k\}}\right]}{j^2}
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\frac{1}{j^2} &\leq \frac{1}{j\,(j-1)} \\
&= \int_{j-1}^{j} \frac{1}{x^2} dx.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{j^2} &\leq \sum_{j=k}^{\infty} \int_{j-1}^{j} \frac{1}{x^2} dx \\
&= \int_{k-1}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \\
&= \frac{1}{k-1} \\
&\leq \frac{2}{k}, \quad k \geq 2.
\end{aligned}$$

Se sigue que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} \frac{\mathbb{E}\left[X_j^2 1_{\{k-1<|X_j|\leq k\}}\right]}{j^2} &\leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{k} \mathbb{E}\left[X_1^2 1_{\{k-1<|X_1|\leq k\}}\right] \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{k} \mathbb{E}\left[|X_1|\,|X_1|\,1_{\{k-1<|X_1|\leq k\}}\right] \\
&\leq \sum_{k=2}^{\infty} 2\mathbb{E}\left[|X_1|\,1_{\{k-1<|X_1|\leq k\}}\right] \\
&\leq 2\mathbb{E}\left[|X_1|\right] \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{Var}\left(\frac{X_j 1_{\{|X_j|\leq j\}}}{j}\right) < \infty.$$

Por el corolario del lema de Kronecker se sigue que

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} X_j 1_{\{|X_j|\leq j\}}}{n} - \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{n} X_j 1_{\{|X_j|\leq j\}}\right]}{n} \overset{c.s.}{\to} 0$$

y por (3.4),

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} X_j 1_{\{|X_j|\leq j\}}}{n} \overset{c.s.}{\to} \mu.$$

Pero por el lema 3.4, dado que $\mathbb{E}\left[|X_1|\right] < \infty$ se cumple que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\left[X_k \neq X_k 1_{\{|X_k|\leq k\}}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\left[|X_k| > k\right] < \infty$$

Entonces ambos son equivalentes en la cola, se sigue por la proposicion 1.1 que

$$\overline{X_n} \stackrel{c.s.}{\to} \mu.$$

$\blacksquare$