Universidad de Guanajuato
(Campus Guanajuato)

División de Ciencias Naturales y Exactas

Departamento de Matemáticas

Teorema de Invarianza de Dominio de Brouwer

Presentado por:
Axel Gabriel Rodríguez Zarate (Licenciatura en Matemáticas)
Fabián Domínguez López (Licenciatura en Matemáticas)

Diciembre, 2023

Índice

1. Preliminares

1.1. Convergencia uniforme

El límite puntual de una sucesión de funciones continuas no necesariamente es continuo. Esta y otras propiedades muy deseables de límites no se cumplen para el caso puntual. Sin embargo existe otro tipo de convergencia, la uniforme, donde varias propiedades deseables se cumplen.

Definición 1. *Sean $\{f_n\}_n$ una sucesión de funciones de S a (T, d_T). Decimos que $f_n \to f$ uniformemente si para todo $\epsilon > 0$ existe una $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$d_T\left(f_n(x), f(x)\right) < \epsilon \quad \forall x \in S, \forall n \geq N.$$

Notemos que esto es equivalente a que

$$\sup_{x \in X} d_T\left(f_n(x), f(x)\right) \leq \epsilon \quad \forall n \geq N.$$

La diferencia entre la convergencia uniforme y la convergencia puntual es que en el caso uniforme mientras incrementa la n, las f_n se acercan arbitrariamente a f en todo el dominio al mismo tiempo. Mientras que en el caso puntual las f_n se acercan a f posiblemente a una velocidad distinta dependiendo del punto del dominio.

Proposición 2. *Sea $f_n, f : (S, d_S) \to (T, d_T)$, donde f_n es uniformemente continua para todo n. Si $f_n \to f$ uniformemente, entonces f es uniformemente continua.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Sean $x, y \in S$. Toma δ_n tal que para todo $x, y \in S$

$$d_S(x, y) < \delta_n \implies d_T\left(f_n(x), f_n(y)\right) < \frac{\epsilon}{3}.$$

Por la convergencia uniforme para el mismo ϵ podemos tomar N tal que

$$d_T\left(f_n(x), f(x)\right) < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall n \geq N$$

y

$$d_T\left(f_n(y), f(y)\right) < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall n \geq N$$

Entonces si para cualesquiera $x, y \in S$ tenemos que

$$d_S(x, y) < \delta_N$$

obtendremos que

$$\begin{aligned} d_T\left(f(x), f(y)\right) &\leq d_T\left(f(x), f_N(x)\right) + d_T\left(f_N(x), f_N(y)\right) + d_T\left(f_N(y), f(y)\right) \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

□

La proposición anterior también se cumple para el caso continuo, la prueba es análoga.

Proposición 3. *Sea $f : S \to T$ donde (S, d_S) y (T, d_T) son espacios métricos. Si $x_n \to x$ puntualmente, $f_n \to f$ uniformemente, y f_n es continua para toda n, entonces $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Por convergencia uniforme existe N tal que

$$d_T(f_n(x_n), f(x_n)) \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq N.$$

Podemos suponer que para el mismo N, ya que $x_n \to x$,

$$d_S(x_n, x) < \delta \quad \forall n \geq N$$

donde δ es elegida tal que por la continuidad de f , lo anterior implica que

$$d_T(f(x_n), f(x)) < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq N.$$

f es continua por lo mencionado previamente en esta sección, ya que cada f_n es continua y $f_n \to f$ uniformemente.

Por lo tanto para todo $n \geq N$ se cumple que

$$\begin{aligned} d_T(f_n(x_n), f(x)) &\leq d_T(f_n(x_n), f(x_n)) + d_T(f(x_n), f(x)) \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

□

1.2. Funciones suaves

Definimos la noción de suavidad para el caso multivariado y resultados elementales.

Definición 4. *Decimos que una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es clase C^1 si $\frac{\partial}{\partial x_i} f_j$ existe y es continua para todo $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$. Decimos que es de clase C^∞ si las funciones componente dejando el resto de entradas fijas menos una son todas de clase C^∞.*

Observación 5. *La definicion dada aquí de funcion clase C^1 es equivalente a la definición vista en el curso (en particular equivalente a la definición en el libro de Principios de Análisis Matemático de Rudin). La demostración de este hecho se puede hallar en dicho libro. Como en el trabajo no se usará la otra definición y son conceptos de cálculo, directamente definimos de esta manera el concepto sin demostración de la equivalencia.*

Proposición 6. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ clase C^1, entonces si $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es compacto, se cumple que existe $J > 0$ tal que*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq J \|x - y\|.$$

Demostración. Sea $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Considera $f=(f_1,f_2,\ldots,f_m)$. Definimos una funcion $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sea de clase C^1 si todas las derivadas parciales de cada f_i son continuas.

Luego, sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto. Entonces $f_i:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es tal que si definimos $f_{i,j}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ como $f_{i,j}(x) = f(x_1,\ldots,x_{j-1},x,x_{j+1}\ldots,x_n)$ donde fijamos todas las entradas excepto la $j-$esima, tendremos que $f'_{i,j} = \frac{\partial}{\partial x_j} f_i$ es continua. Por lo tanto es acotada en $\pi_j(K)$ que es compacto pues π_j es continua.

Entonces tenemos que

$$|f_{i,j}(x) - f_{i,j}(y)| \leq C|x-y| \, \forall x,y \in \pi_j(K), \forall j = 1,\ldots,n.$$

Notemos que podemos elegir C la misma constante simplemente tomando el máximo.

Ahora, suponemos que $n=2$ para probar que f_i es lipschitz, el caso general se realiza por inducción:

$$\begin{aligned}
|f_i(x_1,x_2) - f_i(y_1,y_2)| &\leq |f_i(x_1,x_2) - f_i(y_1,x_2)| \\
&\quad + |f_i(y_1,x_2) - f_i(y_1,y_2)| \\
&\leq C_1(|x_1-y_1| + |x_2-y_2|) \\
&\leq C_2 \|(x_1,x_2)-(y_1,y_2)\| \quad \forall x_1,y_1 \in \pi_1(K), \forall x_2,y_2 \in \pi_2(K)
\end{aligned}$$

para algun $C_1, C_2 > 0$, donde la ultima desigualdad se sigue de la equivalencia bilipschitz de las ρ_l demostrada en una tarea del curso.

Finalmente, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|f(x)-f(y)\| &= \|(f_1(x),\ldots,f_n(x)) - (f_1(y),\ldots,f_n(y))\| \\
&\leq J_1(|f_1(x)-f_1(y)| + \cdots + |f_n(x)-f_n(y)|) \\
&\leq J_2|x-y| \quad \forall x,y \in K
\end{aligned}$$

para algun $J_1, J_2 > 0$ donde de nuevo las primer desigualdad se sigue de la equivalencia bilipschitz, y la segunda del hecho de que f_i es lipschitz para todo i en K. Entonces hemos hallado $J = J_2$ que cumple con el enunciado. $\square$

1.3. El teorema de extensión de Tietze

El siguiente teorema fue demostrado en el curso de topología por lo que se enuncia sin demostración

Teorema 7. *Si X es un espacio normal y A un subespacio cerrado, entonces toda función continua $f:A\to[a,b]$ se puede extender a una función $F:X\to[a,b]$*

Todo espacio métrico es normal, en particular $\mathbb{R}^n$ es normal, por lo que este teorema se usará sin reservas.

1.4. Medida en $\mathbb{R}^n$

Definición 8. *Un cubo de lado de longitud ℓ en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ de la forma $C = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$, donde $|a_i - b_i| = \ell$ para toda $i \in [n]$. El volumen de C se denota por $|C|$ y se define como $|C| = \ell^n$.*

Definición 9. *Un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ tiene medida cero si para toda $\epsilon > 0$, existe una colección de cubos $\{C_i, i \in \mathbb{N}\}$ tal que*

$$A \subseteq \cup_{i=1}^{\infty} C_i \quad y \sum_{i=1}^{\infty} |C_i| < \epsilon.$$

Proposición 10. *La unión contable de conjuntos de medida cero tiene medida cero.*

Demostración. Sea $\{U_i, i \in \mathbb{N}\}$ un colección de conjuntos de medida cero. Sea $\epsilon > 0$. Como U_i tiene medida cero, existe una colección $\{C_i^j, j \in \mathbb{N}\}$ de cubos tales que

$$\sum_{j=1}^{\infty} |C_i^j| < \epsilon \cdot 2^{-i}.$$

Entonces $\{C_i^j : i, j \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta numerable de $\cup_{i=1}^{\infty} U_i$ tal que

$$\sum_{i,j \in \mathbb{N}} |C_i^j| < \epsilon \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} = \epsilon.$$

□

Proposición 11. *Sea $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ una función C^1. Si $A \subseteq \mathbb{R}^m$ es un subconjunto compacto de medida cero, entonces $f(A)$ tiene medida cero.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Como A tiene medida cero, existe una colección $\{C_i, i \in \mathbb{N}\}$ de cubos tales que

$$A \subseteq \cup_{i=1}^{\infty} C_i \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{\infty} |C_i| < \epsilon.$$

Como A es compacto, por un resultado de la sección de funciones suaves es lipschitz, de manera que existe $M > 0$ tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|,$$

para cualesquiera $x, y \in A$. Así que si C_i es un cubo con lado de longitud ℓ, $f(A \cap C_i)$ está contenida en un cubo C_i' con lado de longitud $\ell\sqrt{m}M$.

Notemos que

$$f(A) = \cup_{i=1}^{\infty} f(A \cap C_i) \subseteq \cup_{i=1}^{\infty} C_i'.$$

Además
$$\sum_{i=1}^{\infty}|C_i'| = \sum_{i=1}^{\infty}(\ell\sqrt{m}M)^m = (\sqrt{m}M)^m\sum_{i=1}^{\infty}|C_i| < (\sqrt{m}M)^m\epsilon.$$
Entonces, por la Proposición 7, $f(A)$ tiene medida cero. $\square$

Proposición 12. *Si $U \subseteq \mathbb{R}^n$ tiene medida cero, entonces $V \subseteq U$ tiene medida cero.*

Demostración. Como U tiene medida cero, existe una colección $\{C_i, i \in \mathbb{N}\}$ de cubos tales que

$$U \subseteq \cup_{i=1}^{\infty} C_i \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{\infty}|C_i| < \epsilon.$$

Como V está contenido en U, se sigue que

$$V \subseteq \cup_{i=1}^{\infty} C_i.$$

Por lo tanto V también tiene medida cero. $\square$

2. Teoría de aproximaciones y el teorema de aproximación de Weierstrass multivariado

El objetivo de esta sección es probar un resultado muy importante que permite aproximar funciones suaves por funciones continuas, conocido como el Teorema de aproxixmación de Weierstrass. Necesitamos la aproximación multivariada de estas funciones.

2.1. Aproximación por convoluciones y el teorema de aproximación de Weierstrass

Definición 13. *Denotamos a la convolución de funciones f, g en $\mathbb{R}^n$ de la siguiente manera*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy$$

Teorema 14 (Aproximación por convoluciones)**.** *Sea $\{H_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $\sup_k \|H_k\|_1 < \infty$ y $\int_{\mathbb{R}^n} H_k(x)\,dx = 1$ para todo k. Supongamos también que*

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\|x\|>\delta} |H_k(x)\,dx| = 0.$$

Entonces para toda función $f \in C(\mathbb{R}^n)$ acotada, $H_k * f \to f$ uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$.

Demostración. Fija $r > 0$, y considera a f en la bola $\overline{B_r}$ centrada en 0 de radio r. Es suficiente considerar bolas arbitrarias centradas en 0 pues todo compacto $K \subseteq \mathbb{R}^n$, al ser acotado, es subconjunto de alguna bola centrada en 0. Define ahora el módulo de continuidad

$$\omega(f;\delta) = \sup\{|f(x-y) - f(x)| : \|x\| \leq r, \|y\| \leq \delta\}.$$

Como f es uniformemente continua en $\overline{B_r}$, para todo $\epsilon > 0$, existe δ_0 tal que si $\|x-y\| \leq \delta_0$ entonces $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Sea pues $\epsilon > 0$. Supongamos que $\delta \downarrow 0$, entonces eventualmente $\|x-y-x\| = \|y\| \leq \delta_0$ y por tanto $|f(x-y) - f(x)| < \epsilon$. Esto es

$$\omega(f;\delta) \to 0 \,\text{cuando}\, \delta \downarrow 0.$$

Considera de nuevo algún $\epsilon > 0$ y δ tal que

$$\omega(f;\delta) < \frac{\epsilon}{2M}$$

donde $M = \sup_k \|H_k\|_1$. Por el límite de la hipótesis tenemos que existe N tal que

$$\int_{\|y\|>\delta} |H_k(y)|\,dy < \frac{\epsilon}{4\|f\|_\infty} \quad \forall k \geq N$$

Ahora

Por la desigualdad del valor absoluto para integrales

$$\begin{aligned}\left|\left(H_k * f\right)(x) - f(x)\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} H_k(y)\left[f(x-y) - f(x)\right] dy\right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^s} \left|H_k(y)\right| \left|f(x-y) - f(x)\right| dy\end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^s} \left|H_k(y)\right| \left|f(x-y) - f(x)\right| dy \\ =& \int_{\|y\|>\delta} \left|H_k(y)\right| \left|f(x-y) - f(x)\right| \\ +& \int_{\|y\|\leq\delta} \left|H_k(y)\right| \left|f(x-y) - f(x)\right|\end{aligned}$$

donde por la monotonía de la integral

$$\begin{aligned}\int_{\|y\|>\delta} \left|H_k(y)\right| \left|f(x-y) - f(x)\right| &\leq 2\left\|f\right\|_\infty \int_{\|y\|>\delta} \left|H_k(y)\right| dy \\ &\leq 2\left\|f\right\|_\infty \frac{\epsilon}{4\left\|f\right\|_\infty} \\ &= \frac{\epsilon}{2}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\int_{\|y\|\leq\delta} \left|H_k(y)\right| \left|f(x-y) - f(x)\right| &\leq \omega(f;\delta) \int_{\|y\|\leq\delta} \left|H_k(y)\right| dy \\ &\leq \frac{\epsilon}{2M}\left\|H_k\right\|_1 \\ &\leq \frac{\epsilon}{2}.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\left|\left(H_k * f\right)(x) - f(x)\right| \leq \epsilon \quad \forall k \geq N, \quad \forall x \in \overline{B_r}$$

$\square$

Lema 15. *Las funciones*

$$H_k(x) = \begin{cases} c_k\left(1 - \|x\|^2\right)^k & \|x\| \leq 1 \\ 0 & \|x\| > 1 \end{cases}$$

donde c_k es una constante tal que $\int_{\mathbb{R}^n} H_k(x)\, dx = 1$ cumplen con las hipótesis del teorema anterior.

Observación 16. *Las constantes del lema anterior existen porque la integral de* $\left(1-\|x\|^2\right)^k$ *es finita en la bola cerrada de radio* 1 *por ser acotada, ya que la bola cerrada* $\overline{B}_1$ *de radio* 1 *es compacto, y por la linealidad de la integral entonces podemos reescalar para que el valor de la integral sea* 1. *La demostración del lema anterior es simplemente verificar las propiedades. Para evitar hacer mas largo este trabajo con cuentitas de Cálculo IV se omite, pero se puede consultar en el libro A Course in Approximation Theory de Cheney, p.150.*

Teorema 17 (Teorema de aproximación de Weierstrass multivariado)**.** *Sea* $K \subseteq \mathbb{R}^n$ *compacto. Para toda* $f \in C(K)$ *existe una sucesión de polinomios en* n *variables* $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *tal que* $p_k \to f$ *uniformemente.*

Demostración. Sea $f \in C(K)$. Como K es compacto es acotado entonces podemos hallar un radio $r > 0$ y una bola $\overline{B_r}$ de radio r tal que $K \subseteq \overline{B_r}$. Sea

$$K' = \frac{1}{3r}K := \left\{\frac{1}{3r}k : k \in K\right\}.$$

Tenemos que $K' \subseteq \overline{B_{1/3}}$ pues si $k' \in K'$, entonces existe un $k \in K \subseteq \overline{B_r}$ tal que se cumple que

$$\|k'\| = \left\|\frac{1}{3r}k\right\| \leq \frac{1}{3r}r = \frac{1}{3}.$$

Ahora define $g : K' \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = f(3rx)$.

Por el teorema de extensión de Tietze, podemos suponer que $g \in C(\mathbb{R}^n)$ de manera que g sigue siendo acotada y $g(x) = 0$ cuando $x \notin B_{1/2}$. (Vía definiendo una función $g' : K' \cup B_{1/2}^{\complement} \to \mathbb{R}$ que es $g(x)$ en $K' \subseteq \overline{B_{1/3}}$ y es 0 en $B_{1/2}^{\complement}$, ambos conjuntos cerrados entonces por Tietze g' es extendible. Como g' era acotada en K y constante en el resto de su dominio entonces es acotada).

Para $k \in \mathbb{N}$ sea $H_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$H_k(x) = \begin{cases} c_k\left(1-\|x\|^2\right)^k & \|x\| \leq 1 \\ 0 & \|x\| > 1 \end{cases}$$

donde c_k es una constante tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} H_k(x)\,dx = 1.$$

Por el teorema anterior,

$$H_n * g \to g$$

converge uniformemente en K' cuando $n \to \infty$.

Ahora vemos que $H_k * g$ es un polinomio para todo n. En efecto, como g se anula fuera de $B_{1/2}$:

$$(H_k * g)(x) = \int_{B_{1/2}} g(y) H_k(x-y)\, dy.$$

Por lo tanto para $x \in K'$, $\|x\| \leq \frac{1}{3}$, y como en la integral de $H_k * g$ por el dominio de integración tenemos que $\|y\| \leq \frac{1}{2}$, se sigue que $\|x-y\| \leq 1$ dentro de la integral por lo que por definición de H_k,

$$H_k(x-y) = c_k \left(1 - \|x-y\|^2\right)^k.$$

dentro de la integral. Para simplificar la notación mostramos que dicha integral es un polinomio para $k=2$ y $n=2$, a partir del cuál es fácilmente generalizable para k y n arbitrarios:

$$\begin{aligned}
(H_k * g)(x) &= \int_{B_{1/2}} g(y)\, c_n \left(1 - \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}^{\,2}\right)^2 dy \\
&= \int_{\pi_1(B_{1/2})} \int_{\pi_2(B_{1/2})} g(y)\, c_n \left(1 - \left|(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2\right|\right)^2 dy_1 dy_2 \\
&= \int_{\pi_1(B_{1/2})} \int_{\pi_2(B_{1/2})} g(y)\, c_n \left(1 - (x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2\right)^2 dy_1 dy_2 \\
&= \int_{\pi_1(B_{1/2})} \int_{\pi_2(B_{1/2})} g(y)\, c_n \left(1 - (x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2\right)^2 dy_1 dy_2
\end{aligned}$$

Claramente $1-(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2$ es un polinomio en x_1, x_2 y por tanto $\left(1 - (x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2\right)^2$ también lo es. Para este caso tenemos cierta expresión de la forma

$$\left(1 - (x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2\right)^2 = \sum_i \left(\prod_j x_{j_i}\right) f_i(y_1, y_2)$$

entonces por la linealidad de la integral

$$\begin{aligned}
&(H_2 * g)(x) \\
&= \int_{\pi_1(B_{1/2})} \int_{\pi_2(B_{1/2})} g(y)\, c_n \left(1 - (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2\right)^2 dy_1 dy_2 \\
&= \int_{\pi_1(B_{1/2})} \int_{\pi_2(B_{1/2})} g(y) \left[\sum_i \left(\prod_j x_{j_i}\right) f_i(y_1, y_2)\right] dy_1 dy_2 \\
&= \sum_i \left(\prod_j x_{j_i}\right) \left[\int_{\pi_1(B_{1/2})} \int_{\pi_2(B_{1/2})} g(y)\, f_i(y_1, y_2)\, dy_1 dy_2\right] \\
&= \sum_i \left(\prod_j x_{j_i}\right) C_i.
\end{aligned}$$

por lo tanto tenemos un polinomio.

En general $p_k := H_k * g$ es un polinomio, que como fue mencionado converge uniformemente a g en K'.

Ahora considera

$$q_k(x) = p_k\left(\frac{x}{3r}\right)$$

recordamos que por como definimos K', se tiene que $K = 3rK'$, entonces dado $\epsilon > 0$, ya que $H_k * g = p_k \to g$ uniformemente en K', existe N tal que

$$\begin{aligned}
|f(x) - q_k(x)| &= |f(3rz_x) - q_k(3rz_x)| \\
&= |g(z_x) - p_k(z_x)| \\
&< \epsilon \quad \forall k \geq N, \forall x \in K.
\end{aligned}$$

□

Corolario 18. *Sea $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua y $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto. Para $\delta > 0$ existe una función clase C^∞ $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que para todo $x \in \Sigma$ se cumple que*

$$\|P(x) - G(x)\| < \delta.$$

Demostración. Basta demostrar el caso para $\|\cdot\|_1$, la norma-1 pues la densidad se conserva bajo métricas equivalentes.

Sea $G = (G_1, \ldots, G_n)$ continua. Luego $G_1, \ldots, G_n$ son funciones continuas de Σ a $\mathbb{R}$.

Sea $\epsilon > 0$. Por el teorema de aproximación de Weierstrass existe un polinomio $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $d_\infty(p_i, G_i) < \frac{\epsilon}{n}$ en Σ. Esto implica que

$$|p_i(x) - G_i(x)| < \frac{\epsilon}{n} \quad \forall x \in \Sigma.$$

Sea $P = (p_1, \ldots, p_n)$. Se cumple que

$$\|P(x) - G(x)\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |p_i(x) - G_i(x)| < \epsilon.$$

Se cumple que esta funcion es C^∞ pues las funciones componentes de P son polinomios. $\square$

3. El teorema del punto fijo de Brouwer

3.1. Intuición

El objetivo de esta sección es mostrar que toda $f : \overline{B}^n \to \overline{B}^n$ continua tiene un punto fijo, donde $\overline{B}^n$ es la bola de radio 1 centrada en 0 en $\mathbb{R}^n$.

Empezamos con la intuición de este resultado y la idea que busca la demostración formal:

Suponemos primero que $g : \overline{B}^n \to \overline{B}^n$ es una funcion continua tal que no tiene ningun punto fijo. Esto es que $g(x)$ nunca es x. Gracias a esto podemos trazar una recta que empieza en $g(x)$ y en dirección a x, que intercepta a la frontera de la bola: la esfera S^{n-1}, en un solo punto. Define a partir de esto una funcion $f(x)$ que manda x a la intersección de la prolongación de la recta que une a $g(x)$ y x con la esfera. Esto es, una función $f : \overline{B}^n \to S^{n-1}$. Esta es una función que naturalmente solo se puede definir en toda la bola gracias a que g no tiene un punto fijo, lo cuál nos da la dirección para trazar la recta y que una funcion f definida de esta manera fija a todos los puntos $x \in S^{n-1}$, pues la prolongación de la recta que empieze en $g(x)$ y termine en x intersecta a S^{n-1} justamente en x que ya esta ahí.

Resulta que si suponemos que g es suave, entonces f también es suave. Esto es intuitivamente factible pues $g(x)$ y x se van a mover de manera suave por la bola, entonces la linea que las une tambien se va a mover de dicha manera y en consecuencia el punto $f(x)$ de la interseccion se moverá de manera suave.

Si tenemos resultados de suavidad, por el teorema de aproximación de Weierstrass podemos aproximarlos a resultados de solo continuidad.

En resumen, para un g en la bola que no tenga un punto fijo y sea suave, obtenemos una funcion f que es suave, que mapea la bola a la esfera, y que fija los puntos en la esfera.

Enseguida empezamos con las demostraciones formales, comenzando con el lema mas fuerte que inmediatamente contradice la posibilidad de hacer lo anterior, y por ende que exista g en la bola sin puntos fijos.

3.2. El teorema

Lema 19. *No existe un mapeo C^1 $f : \overline{B}^n \to S^{n-1}$ tal que $f(x) = x$ para todo $x \in S^{n-1}$*

Demostración. En busqueda de una contradicción, supongamos que f existe. Considera para $t \in [0,1]$ la función $f_t : \overline{B}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} f_t(x) &= (1-t)\,x + tf(x) \\ &= x + tg(x) \end{aligned}$$

donde $g(x) = f(x) - x$. Se cumple que $f_t\left(\overline{B}^n\right) \subseteq \overline{B}^n$ pues es una combinación convexa en un convexo:

$$\begin{aligned}\|f_t(x)\| &= \|(1-t)x + tf(x)\| \\ &\leq (1-t)\|x\| + t\|f(x)\| \\ &\leq (1-t) + t \\ &= 1.\end{aligned}$$

Entonces f_t es de $\overline{B}^n$ a $\overline{B}^n$.

Es claro que g es C^1 por la linearidad de la derivada y ya que el mapeo identidad es C^1.

Por ser C^1 y ya que $\overline{B}^n$ es compacto por Heine Borel, se sigue de un resultado de la sección anterior que existe $C > 0$ tal que

$$\|g(x_2) - g(x_1)\| \leq C\|x_2 - x_1\| \quad \forall x_1, x_2 \in \overline{B}^n.$$

Ahora, verificamos que f_t es inyectiva para ciertos valores de t:

Supongamos que f_t no es inyectiva existe $x_1, x_2 \in \overline{B}^n$distintos tal que $f_t(x_1) = f_t(x_2)$. Esto es que $x_1 + tg(x_1) = x_2 + tg(x_2)$, o bien

$$x_2 - x_1 = t(g(x_2) - g(x_1))$$

luego

$$\|x_2 - x_1\| = t\|g(x_2) - g(x_1)\| \leq Ct\|x_2 - x_1\|$$

entonces como $\|x_2 - x_1\| > 0$, tendremos que $Ct \geq 1$. Acabamos de ver que f_t no inyectiva implica que $Ct \geq 1$, por lo que si $t < \frac{1}{C}$ entonces f_t es inyectiva.

Recordamos que $f_t(x) = x + tg(x)$, por lo que la derivada en x de f_t es

$$f_t'(x) = I + tg'(x)$$

donde I es la identidad.

Entonces

$$\begin{aligned}\det f_t'(x) &= \det\left(I + tg'(x)\right) \\ &= \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \left[I + tg'(x)\right]_{i.\sigma(i)}.\end{aligned}$$

Donde $\prod_{i=1}^{n}[I + tg'(x)]_{i.\sigma(i)} = \prod_{i=1}^{n}\left[tu_{i,\sigma(i)}(x) + \delta_{i,\sigma(i)}\right]$, δ siendo la delta de Kronecker, y $u_{i,j}$ una funcion continua de x (en particular es la parcial de alguna funcion componente).

Por lo tanto $\det f_t'(x)$ es un polinomio en t con un termino constante $p_0 \geq 1$ (dicho termino constante viene por la multiplicación de terminos donde la delta de Kronecker no se anula) y donde los coeficientes son funciones continuas de x. Estas funciones por tanto son acotadas en $\overline{B}^n$ de manera que $|\det f_t'(x)| = c + M(t)$ para algun $c \geq 1$ donde $M(t) \to 0$ cuando $t \to 0$. Podemos elegir t_0 suficientemente pequeño tal que $\det f_t'(x) > 0$ para todo $t \in [0, t_0]$, ademas elegimos de forma que también $t_0 < \frac{1}{C}$ para que f_t sea inyectiva.

Recordamos el enunciado del teorema de la funcion inversa: Si $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es de clase C^1 en un abierto E, $f'(x)$ es invertible en algun $x \in E$, entonces existen abiertos tal que $a \in U$, $f(a) \in V$, f es biyectiva en U y su inversa en U es continua.

En alguna tarea se probó que el teorema de la funcion inversa implica que f es un mapeo abierto. Entonces, regresando a la demostración, por el teorema de la funcion inversa

$$f_t(B^n) \text{ es abierto para } t \in [0, t_0]$$

donde f_t es inyectiva por como seleccionamos t_0.

Ahora, obtenemos que

$$f_t(B^n) = B^n$$

para $t \in [0, t_0]$, pues supongamos que no sucede: Recordamos que f_t es de $\overline{B}^n \to \overline{B}^n$, entonces ya que $f_t(B_n)$ es abierto, necesariamente

$$f_t(B_n) \subseteq \operatorname{int}\left(\overline{B}^n\right) = B^n.$$

Luego, si $f_t(B^n) \neq B^n$, entonces $f_t(B^n) \subset B^n$ estricto. Esto implica que

$$\partial f_t(B^n) \cap B^n \neq \emptyset$$

Toma $y_0 \in \partial f_t(B^n) \cap B^n$. Como $y_0 \in \partial f_t(B^n)$, entonces $\operatorname{dist}(y_0, f_t(B^n)) = 0$, y podemos tomar una sucesion $x_l \in B^n$ tal que

$$f_t(x_l) \to y_0.$$

Por la compacidad de $\overline{B}^n$, tenemos compacidad secuencial, entonces existe una subsucesion $x_{l_k} \to x_0$ para algun $x_0 \in \overline{B}^n$. Por continuidad se sigue que

$$f_t(x_{l_k}) \to f_t(x_0)$$

lo que nos permite concluir que

$$y_0 = f_t(x_0)$$

por la unicidad del límite.

Como $y_0 = f_t(x_0) \in \partial f_t(B_n)$ pero $f_t(B^n) \subseteq B^n$ por lo mencionado anteriorente, entonces

$$x_0 \in \left(\overline{B}^n \setminus B^n\right) = S^{n-1}.$$

Recordamos una vez mas que definimos $f_t(x) = (1-t)x + tf(x)$, y como suponemos que el lema es cierto para buscar una contradicción, suponemos que $f(x) = x$ para todo $x \in S^{n-1}$. Esto implica que

$$f_t(x_0) = (1-t)x_0 + tx_0 = x_0 \in S^{n-1}.$$

Esto contradice que $y_0 \in \partial f_t(B^n) \cap B^n$.

Por todo lo anterior, necesariamente

$$f_t(B_n) = B_n.$$

y como$f_t(x) = x$ para todo $x \in S^{n-1}$, $f_t\left(S^{n-1}\right) = S^{n-1}$, además f_t es inyectivo, por lo que concluímos que

$$f_t : \overline{B}^n \to \overline{B}^n \text{ es una biyección.}$$

Ahora define

$$F(t) = \int_{\overline{B}^n} \det f_t'(x)\, dx$$

Como ya fue argumentado previamente, $\det f_t'(x)$ es un polinomio en t. Entonces F por ser la integral de un polinomio en t, es un polinomio en t.

Por el teorema de cambio de variable visto en Calculo IV, cuando $t \in [0, t_0]$ ya que f_t es biyectiva

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_{\overline{B}^n} \det f_t'(x)\, dx \\ &= \int_{f\left(\overline{B}^n\right)} dx \\ &= \int_{\overline{B}^n} dx \\ &= \operatorname{Vol}\left(\overline{B}^n\right) \end{aligned}$$

donde $\operatorname{Vol}\left(\overline{B}^n\right)$ es el volumen de $\overline{B}^n$.

Esto implica que $F(t)$ es constante en $[0, t_0]$. Como F es un polinomio, si F no es constante en $[0, 1]$ entonces su derivada es un polinomio y por tanto con una cantidad finita de raices, pero $[0, t_0]$ son una cantidad no finita raices de $F'(t)$. Se sigue que $F(t)$ es constante en todo $t \in [0, 1]$.

Esto implica que

$$F(1) = \operatorname{Vol}\left(\overline{B}^n\right) > 0.$$

Como definimos $f_t(x) = (1-t)x + tf(x)$, recordando que $f : \overline{B}^n \to S^{n-1}$, entonces

$$f_1(x) = f(x) \in S^{n-1} \quad \forall x \in \overline{B}^n$$

de manera que $\langle f_1(x), f_1(x)\rangle = \|f_1(x)\|^2 = 1^2 = 1.$

Recordamos la propiedad de la derivada del producto (producto punto) de funciones: para $r, s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \langle r(x_i), s(x_i) \rangle = \left\langle r(x_i), \frac{\partial s}{\partial x_i} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial r}{\partial x_i}, s(x_i) \right\rangle$$

entonces tomando $r = s = f_1$ podemos obtener que

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial (f_1)_i}{\partial x_i}, f_1 \right\rangle &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \|(f_1)_i\|^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Esto se cumple para todo $i = 1, \ldots, n$.

Por algebra lineal recordamos que $(\mathrm{row} A)^{\perp} = \mathrm{null} A$ donde row es el espacio fila y null el kernel.

Por lo tanto $f_1 \in (\mathrm{row} f_1'(x))^{\perp} = \mathrm{null}(f_1'(x))$ entonces $\dim \mathrm{null}(f_1'(x)) > 0$ y por el teorema de la dimension del rango mas la del kernel,

$$\mathrm{rank} f_1'(x) \leq n - 1$$

para todo $x \in \overline{B}^n$,donde rank es la dimension del rango. Se sigue que $\det f_1'(x) = 0$ para todo $x \in \overline{B}^n$ pues rango de dimension menor al de la matriz implica que hay 2 filas linealmente dependientes, esto implica que $F(1) = 0$, pero $F(1) > 0$. Entoces tenemos una contradicción.

Por todo lo anterior, no puede existir f clase C^1 con dominio en la bola cerrada que fije los puntos de la esfera.

□

Ahora sí, formalizamos la idea de la intuición para dar la versión suave del Teorema de punto fijo de Brouwer:

Lema 20. *Todo mapeo C^1 $g : \overline{B}^n \to \overline{B}^n$ tiene un punto fijo.*

Demostración. Supongamos que g no tiene un punto fijo. Entonces $\|x - g(x)\| \neq 0$. Para $x \in \overline{B}^n$ sea

$$f : \overline{B}^n \to S^{n-1}$$

dado por

$$f(x) = x + tu$$

donde $u = \frac{x - g(x)}{\|x - g(x)\|}$ es la dirección normalizada de $g(x)$ desde x. Necesitamos encontrar $t := t(x) \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|x + tu\| = 1.$$

Elevando al cuadrado esto es

$$\begin{aligned}\langle x+tu, x+tu\rangle &= \langle x,x\rangle + \langle x,tu\rangle + \langle tu,x\rangle + \langle tu,tu\rangle \\ &= \|x\|^2 + 2t\langle x,u\rangle + t^2\|u\|^2 \\ &= t^2 + (2\langle x,u\rangle)\, t + \|x\|^2 \\ &= 1.\end{aligned}$$

Hállamos las raízes de $t^2 + (2\langle x,u\rangle)\, t + \|x\|^2 - 1$ por la fórmula cuadrática:

$$\begin{aligned}t &= \frac{-2\langle x,u\rangle + \sqrt{4\langle x,u\rangle^2 - 4\|x\|^2 + 4}}{2} \\ &= -\langle x,u\rangle + \sqrt{1 - \langle x,x\rangle + \langle x,u\rangle^2}.\end{aligned}$$

Sea pués

$$u = \frac{x - g(x)}{\|x - g(x)\|}, \quad t = -\langle x,u\rangle + \sqrt{1 - \langle x,x\rangle + (\langle x,u\rangle)^2}$$

entonces por construcción es claro que $f(x) = x + tu$ es un mapeo de $\overline{B}^n$ a la esfera S^{n-1}. Notemos que como $\langle x,x\rangle \leq 1$, pues $x \in \overline{B}^n$, entonces el término dentro de la raíz es estrictamente positivo.

Si $x \in S^{n-1}$, $\langle x,x\rangle = 1$ y obtenemos que

$$\begin{aligned}t &= -\langle x,u\rangle + \langle x,u\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

de manera que

$$f(x) = x \quad \forall x \in S^{n-1}.$$

Además, f es clase C^1 : El mapeo identidad es clase C_1, entonces basta notar que tu es C_1, pero esto sucede ya que u es C^1, puesto que $x - g(x)$ es suma de funciones diferenciables entonces es diferenciable, y es suma de funciones continuas entonces es continua. Como es clase C^1 entonces sus componentes son clase C^1, y $\frac{1}{\|x-g(x)\|}$ es clase C^1 pues

$$\|x - g(x)\| = \sqrt{(x_1 - g_1(x))^2 + \cdots + (x_n - g_n(x))^2}$$

es composicion y suma de funciones C^1. De forma similar el producto escalar es una función C^1 por lo que t también es C^1, entonces de nuevo fijandose en las componentes podemos concluír que tu es C^1.

A partir de una g suave en la bola unitaria cerrada acabamos de exhibir una funcion $f : \overline{B}^n \to S^{n-1}$ que fija a la esfera S^{n-1}, pero por el lema anterior no existe una función así, entonces g necesariamente tiene un punto fijo. $\square$

Finalmente, aproximando por funciones suaves uniformemente, gracias al buen comportamiento de la convergencia uniforme, podemos obtener el resultado general:

Teorema 21. *Punto fijo de Brouwer*
Sea $f : \overline{B}^n \to \overline{B}^n$ un mapeo continuo, entonces f tiene al menos un punto fijo.

Sea $f : \overline{B}^n \to \overline{B}^n$ continua, entonces por la aproximación de Weierstrass existe una sucesión de polinomios $\{p_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ con $p_l : \overline{B}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$\|f(x) - p_l(x)\| \leq \frac{1}{l} \ \ \forall x \in \overline{B}^n.$$

pues $p_l \to f$ uniformemente en $\overline{B}^n$.
Entonces

$$\begin{aligned} \|p_l(x)\| &\leq \|f(x)\| + \|p_l(x) - f(x)\| \\ &\leq 1 + \frac{1}{l} \ \ \forall x \in \overline{B}^n. \end{aligned}$$

Define

$$h_l(x) := \frac{p_l(x)}{\left(1 + \frac{1}{l}\right)}$$

entonces $\|h_l\| \leq 1$ por la última desigualdad vista, de manera que $h_l : \overline{B}^n \to \overline{B}^n$.

También tendremos que $h_l \to f$ uniformemente, pues es producto de funciones acotadas en $\overline{B}^n$ que convergen uniformemente, de manera que $p_l \frac{1}{\left(1+\frac{1}{l}\right)} \to f \cdot 1$. La demostración de este hecho sigue la demostración del producto de límites de sucesiones vista en cálculo, donde en ese caso utilizamos el hecho que las sucesiones convergentes son acotadas, y en este caso la hipótesis de que las funciones son acotadas pues son continuas en un compacto.

Como cada $h_l : \overline{B}^n \to \overline{B}^n$ es un polinomio reescalado, entonces es suave. Por el lema anterior tiene un punto fijo. Sea pues x_l un punto fijo de h_l. Como $\overline{B}^n$ es compacto entonces es secuencialmente compacto, por lo que existe $x_{l_k} \to x_0$ para algun $x \in \overline{B}^n$ de manera que

$$\lim_{k\to\infty} h_{l_k}(x_{l_k}) = \lim_{k\to\infty} x_{l_k} = x_0$$

y como $h_l \to f$ uniformemente y cada h_l es suave, por un resultado de la sección de convergencia uniforme

$$\lim_{k\to\infty} h_{l_k}(x_{l_k}) = f(x_0)$$

por lo que $x_0 = f(x_0)$ y hémos hallado un punto fijo.

4. Teorema de Invarianza del Dominio de Brouwer

Lema 22. *Sean* $f : \overline{B^n} \to \mathbb{R}^n$ *y* $h : f(\overline{B^n}) \to \mathbb{R}^n$ *funciones continuas tales que*

$$\|h(f(x)) - x\| \leq 1, \quad \textit{para toda } x \in \overline{B^n}.$$

Entonces, existe $x_0 \in \overline{B^n}$ *tal que* $h(f(x_0)) = 0$.

Demostración. Consideremos la función $\widetilde{h} : \overline{B^n} \to \mathbb{R}^n$ dada por $\widetilde{h}(x) = x - h(f(x))$. Por hipótesis, $\widetilde{h}(\overline{B^n}) \subseteq \overline{B^n}$. Así que, por el Teorema del punto fijo de Brouwer, existe $x_0 \in \overline{B^n}$ tal que $\widetilde{h}(x_0) = x_0$. Por lo tanto, $h(f(x_0)) = 0$. □

Teorema 23. *Sea* $f : \overline{B^n} \to \mathbb{R}^n$ *una función continua e inyectiva. Entonces* $f(0)$ *está en el interior de* $f(\overline{B^n})$.

Demostración. Procedemos por contradicción. Supongamos que $f(0)$ no es un punto en el interior de $f(\overline{B^n})$.

Por hipótesis, $f : \overline{B^n} \to f(\overline{B^n})$ es una función continua y biyectiva de un conjunto compacto a un conjunto de Hausdorff. Así que f es un homeomorfismo; por lo cual tiene una inversa continua $f^{-1} : f(\overline{B^n}) \to \overline{B^n}$. Como $f(\overline{B^n})$ es compacto, y por lo tanto cerrado, por el Teorema de Extensión de Tietze, existe una función continua $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$g(x) = f^{-1}(x), \quad \text{para toda } x \in f(\overline{B^n}).$$

Como g es continua, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\|g(y)\| = \|g(y) - g(f(0))\| < \frac{1}{4}, \tag{1}$$

siempre que $\|y - f(0)\| < 2\epsilon$. Dado que $f(0)$ no es un punto interior de $f(\overline{B^n})$, existe $c \in \mathbb{R}^n \backslash f(\overline{B^n})$ tal que $\|c - f(0)\| < \epsilon$.

Ahora, definamos los conjuntos

$$\Sigma_1 := \{y \in f(\overline{B^n}) : \|y - c\| \geq \epsilon\}, \quad \Sigma_2 := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - c\| = \epsilon\}.$$

Entonces $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ es compacto y $f(0) \notin \Sigma$.

Por construcción, tenemos

$$f(0) \notin \Sigma_1 \subseteq f(\overline{B^n}).$$

Así que $g(y) \neq 0$, para toda $y \in \Sigma_1$. Por continuidad de g y compacidad de Σ_1, existe $0 < \delta < \frac{1}{2}$ tal que

$$\|g(y)\| \geq \delta, \quad \text{para toda } y \in \Sigma_1.$$

Por el Teorema de aproximación de Weierstrass, existe una función polinomial $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$\|p(y) - g(y)\| < \frac{\delta}{2}, \quad \text{para toda } y \in \Sigma. \tag{2}$$

En particular, $p(y) \neq 0$ para toda $y \in \Sigma_1$.

Ahora, notemos que Σ_2 es la frontera de una bola con centro en c y radio ϵ. Entonces, Σ_2 tiene medida cero y, dado que p es un polinomio, $p(\Sigma_2)$ también tiene medida cero. Esto implica que $B(0, \frac{\delta}{2}) \nsubseteq p(\Sigma_2)$, pues si $B(0, \frac{\delta}{2})$ fuera un subconjunto de $p(\Sigma_2)$, este también tendría medida cero. Por lo tanto, existe $a_0 \in B(0, \frac{\delta}{2})$ tal que $a_0 \notin p(\Sigma_2)$.

Definimos la función $\widetilde{p} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ por $\widetilde{p}(y) = p(y) - a_0$. Notemos que $\widetilde{p} \neq 0$ en Σ. En efecto, por (2) y el hecho de que $a_0 \in B(0, \frac{\delta}{2})$, tenemos

$$\|\widetilde{p}(y) - g(y)\| < \delta, \quad \text{para toda } y \in \Sigma. \tag{3}$$

En particular, para $y \in \Sigma_1$ se tiene que $\|\widetilde{p}(y) - g(y)\| < \delta$, lo que implica que $\widetilde{p}(y) \neq 0$. Además, por construcción, $\widetilde{p}(y) \neq 0$ para $y \in \Sigma_2$.

Ahora, definimos la función $\Phi : f(\overline{B^n}) \to \Sigma$ por

$$\Phi(y) = \begin{cases} y & si \quad \|y - c\| \geq \epsilon \\ \\ c + \epsilon \frac{y-c}{\|y-c\|} & si \quad \|y - c\| \leq \epsilon \end{cases}$$

Como $c \notin f(\overline{B^n})$, Φ está bien definida y es continua. Sea $h : f(\overline{B^n}) \to \mathbb{R}^n$ dada por $h(y) = \widetilde{p}(\Phi(y))$. Se sigue que h es continua y $h(y) \neq 0$ para toda $y \in f(\overline{B^n})$.

Veamos que $\|h(f(x)) - x\| \leq 1$, para toda $x \in \overline{B^n}$. Sea $x \in \overline{B^n}$, tenemos dos casos:

Caso 1: $f(x) \in \Sigma_1$.

En este caso, tenemos

$$\|h(f(x)) - x\| = \|\widetilde{p}(\Phi(f(x))) - g(f(x))\| = \|\widetilde{p}(f(x)) - g(f(x))\| < \delta < \frac{1}{2}.$$

Caso 2: $f(x) \notin \Sigma_1$.

Sea $y = f(x)$. Como $y \notin \Sigma_1$, tenemos

$$\|y - f(0)\| \leq \|y - c\| + \|c - f(0)\| < 2\epsilon.$$

Entonces, por (1),

$$\|g(y)\| < \frac{1}{4}. \tag{4}$$

Por otro lado,

$$\|\Phi(y) - f(0)\| \leq \|\Phi(y) - c\| + \|c - f(0)\| < 2\epsilon.$$

Así que

$$\|g(\Phi(y))\| < \frac{1}{4}. \tag{5}$$

Por (3), (4) y (5), obtenemos

$$\begin{aligned}\|h(f(x)) - x\| =& \|h(y) - g(y)\| \\ =& \|\widetilde{p}(\Phi(y)) - g(\Phi(y))\| + \|g(\Phi(y)) - g(y)\| \\ <& \delta + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ <& 1.\end{aligned}$$

De los casos anteriores, concluimos que

$$\|h(f(x)) - x\| \leq 1, \quad \text{para toda } x \in \overline{B^n}.$$

Entonces, por el Lema 21, existe $x_0 \in \overline{B^n}$ tal que $h(f(x_0)) = 0$, lo que es una contradicción.

Por lo tanto, $f(0)$ es un punto en el interior de $f(\overline{B^n})$. □

Teorema 24. ***(Teorema de Invarianza del Dominio).*** *Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $f : U \to \mathbb{R}^n$ una función inyectiva y continua. Entonces $f(U)$ es abierto en $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Sea $y \in f(U)$. Existe $x \in U$ tal que $y = f(x)$. Como $x \in U$ y U es abierto, existe $r > 0$ tal que $\overline{B}(x, r) \subseteq U$. Sea $g : \overline{B^n} \to \overline{B}(x, r)$ el homeomorfismo dado por $g(y) = yr + x$. Notemos que $g(0) = x$. Luego, sea $\widetilde{f} : \overline{B^n} \to \mathbb{R}^n$ dada por $\widetilde{f} = f \circ g$. Se sigue que $\widetilde{f}$ es continua e inyectiva. Por el Teorema 22, $\widetilde{f}(0)$ es un punto interior de $\widetilde{f}(\overline{B^n})$. Tenemos

$$\widetilde{f}(0) = f(g(0)) = f(x) = y$$

y

$$\widetilde{f}(\overline{B^n}) = f(g(\overline{B^n})) = f(\overline{B}(x, r)).$$

Así que y es un punto interior de $f(\overline{B}(x, r))$. Dado que $f(\overline{B}(x, r)) \subseteq f(U)$, el punto y también está en el interior de $f(U)$.

Como y fue arbitrario, concluimos que $f(U)$ es abierto. □

Corolario 25. *Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, entonces U no es homeomorfo a ningún subconjunto de $\mathbb{R}^m$ para $m < n$. En particular, $\mathbb{R}^n$ no es homeomorfo a $\mathbb{R}^m$ para $m < n$.*

Demostración. Procedemos por contradicción. Supongamos que existe un homeomorfismo $h : U \to V$ para algún $V \subseteq \mathbb{R}^m$. Sea $\iota : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ la función dada por

$$\iota(x_1, \cdots, x_m) = (x_1, \cdots, x_m, 0, \cdots, 0).$$

Notemos que la función $f : U \to \mathbb{R}^n$ definida por $f(x) = \iota(h(x))$ es continua e inyectiva. Entonces, por el Teorema 23, $f(U)$ es abierto.

Sea $y = (y_1, \cdots, y_m, 0, \cdots, 0) \in f(U)$. Como $f(U)$ es abierto, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$B(y, \epsilon) \subseteq f(U).$$

Notemos que $y' := (y_1, \cdots, y_m, \frac{\epsilon}{2}, 0, \cdots, 0) \in B(y, \epsilon)$, pero $y' \notin f(U)$; lo que es una contradicción.

Por lo tanto, U no es homeomorfo a ningún subconjunto de $\mathbb{R}^m$. $\square$