

Introducción a la Mecánica Cuántica y el Efecto de Hall.

Axel Gabriel Rodríguez Zárate

Asesores: Dr. Fernando Núñez Medina, Dr. Ehyter Matías Martín
González.

18 de Junio de 2025

1. Introducción

Este documento está dedicado a dar una introducción al modelado matemático surgido de la mecánica cuántica, la cual es un área de la física que rompe con muchas de las leyes clásicas estudiadas hasta antes del siglo XX. Terminamos con la introducción de un fenómeno cuántico que puede revolucionar la computación: el efecto de Hall.

Este trabajo supone conocimientos básicos de Mecánica Clásica, Electrodinámica y Análisis Funcional.

Una onda se suele describir físicamente como una perturbación de un estado de equilibrio que se propaga en el espacio. La ecuación de onda en una dimensión está dada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

donde $u(x, t)$ es una función real-valuada que puede representar, por ejemplo, el desplazamiento vertical de un punto sobre una cuerda desde su posición de equilibrio (véase la figura 1), y $x \in \mathbb{R}, t > 0$ son coordenadas espaciales y temporales respectivamente. La constante $c > 0$ representa la velocidad de propagación. A la solución $u(x, t)$ se le llama **función de onda**.

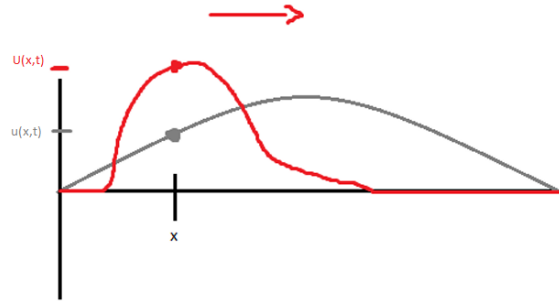


Figura 1: Una función de onda puede representar, por ejemplo, un desplazamiento desde una posición de equilibrio. Se ilustran funciones de onda $u(x, t)$ y $U(x, t)$ a tiempo fijo.

Ejemplo 1. Una onda electromagnética es una perturbación en el campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ o magnético $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$. Las ecuaciones de onda son las ecuaciones de Maxwell.

En la teoría clásica del electromagnetismo, las perturbaciones surgen de la aceleración de cargas. Una sola carga puntual brevemente acelerada emite un pulso (una onda viajera no periódica), véase la figura 2. Un dipolo eléctrico emite una onda periódica mientras las dos cargas aceleran oscilatoriamente.

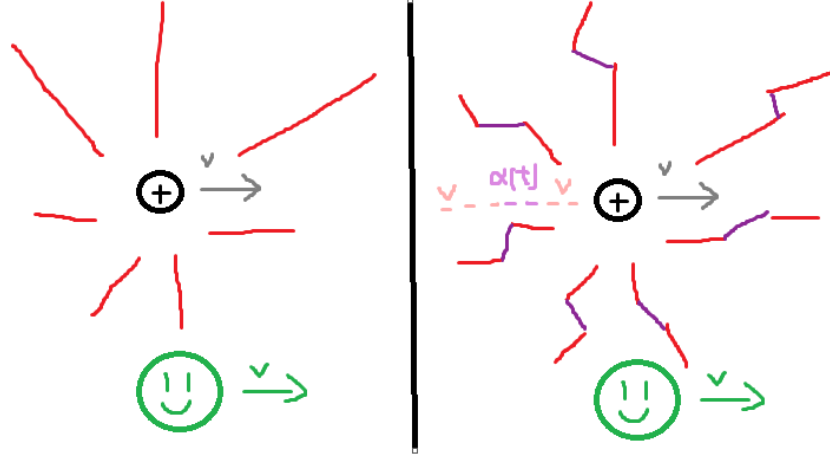


Figura 2: A la izquierda una carga viajando con una rapidez fija v . El campo eléctrico (en rojo) no tiene perturbaciones, de hecho es constante respecto al tiempo en el marco de referencia del observador en color verde. A la derecha, una aceleración por un breve periodo de tiempo donde se tiene la rapidez $\alpha(t)$, ilustrado de color morado, causa la emisión de un pulso.

La radiación electromagnética es un tipo de onda electromagnética que transporta energía. La ley de Rayleigh-Jeans utiliza resultados de la mecánica clásica para aproximar la radiación emitida por las estrellas y objetos de características similares llamados objetos negros, en función de la temperatura T y la frecuencia $\omega > 0$ de la radiación. Siendo $B_\omega(T)$ dicha intensidad, la ley establece que

$$B_\omega(T) = CT\omega^2,$$

donde $C > 0$ es constante. Se tiene que

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} B_\omega(T) = \infty,$$

sin embargo, experimentalmente, no se dispara la radiación al observar las frecuencias más altas.

La falla se encuentra en que el Teorema de Equipartición, un principio físico del que se deriva la ley, permite que la energía de la vibración térmica tome valores continuos [3]. Buscando ajustar mejor los datos experimentales, Max Planck en 1900 propuso que dicha energía corresponde a

$$E = nh\omega \tag{1}$$

donde h es una constante, llamada **constante de Planck**, y $n \in \mathbb{N}$. Esta cuantización (término que se refiere a tomar un conjunto discreto, de hecho usualmente numerable, de valores en lugar de un intervalo continuo) es comúnmente referida como el nacimiento de la mecánica cuántica.

En los años siguientes, Bohr propone que la órbita de los electrones alrededor de los átomos está cuantizada, y de Broglie, inspirado en dicho modelo, introduce su hipótesis de la cuantización del momento angular y, en términos de una longitud de onda, también introduce un comportamiento de onda,

$$p = \hbar k, \tag{2}$$

donde $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ y λ representa una longitud de onda. Al orbitar un átomo, k es una cantidad cuantizada.

Finalmente, el famoso experimento de la doble rendija mostró que otras partículas, además de la luz, mostraban un comportamiento de onda o de partícula dependiente de si se observaban o no. Erwin Schrödinger propone una ecuación de onda para modelar este comportamiento, cuyas funciones de onda ψ cumplen que $|\psi|^2$ describe una densidad de probabilidad según la interpretación de la mecánica cuántica de Born.

2. Bases de la mecánica cuántica

En lo siguiente \mathcal{H} denotará un espacio de Hilbert complejo. El producto interior de \mathcal{H} se considera antilineal en la primera entrada.

2.1. Principios

Definición 2. (Operador no acotado)

Decimos que $A : D \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ es un operador no acotado en \mathcal{H} si es un operador lineal y el dominio D es un subconjunto denso en \mathcal{H} .

La definición anterior realmente corresponde a la de un operador no necesariamente acotado, pues también incluye a los operadores acotados, por lo que el nombre es desafortunado. De aquí en adelante, todo operador se supone no acotado a menos que se indique lo contrario.

Notación. Un operador A actúa en un vector $\psi \in \text{dom}(A)$ mediante la evaluación. Denotamos

$$A\psi := A(\psi),$$

y denotamos la composición de operadores A y B , siempre que tenga sentido, de la siguiente manera,

$$AB := A \circ B.$$

Definición 3. (Adjunto de un operador, operador auto-adjunto y operador simétrico)

Sea A un operador y $\psi \in \mathcal{H}$, para $v \in \text{dom}(A)$ definamos $\Upsilon_\psi(v) = \langle \psi, Av \rangle$ y sea $G = \{\psi \in \mathcal{H}, \Upsilon_\psi \text{ es acotado}\}$. Definimos al **operador adjunto** de A como el operador $A^* : G \rightarrow \mathcal{H}$ tal que $A^*\psi$ cumple que

$$\langle A^*\psi, \phi \rangle = \langle \phi, A\psi \rangle \quad \text{para todo } \phi \in \text{dom}(A).$$

Decimos que un operador es auto-adjunto si $A^* = A$, es decir, si $\text{dom}(A) = G$, y que es simétrico si

$$\langle A\psi, \phi \rangle = \langle \psi, A\phi \rangle \quad \forall \phi, \psi \in \text{dom}(A).$$

El operador A^* podría estar definido en un conjunto más grande que $\text{dom}(A)$, por lo que no todo operador simétrico es auto-adjunto.

El adjunto está bien definido por el teorema de Riesz y propiedades de los operadores acotados. Los detalles se pueden consultar en [4].

Los principios básicos que seguimos para modelar la teoría de la mecánica cuántica, de manera estadística según la interpretación de Copenhagen y de Max Born, son los siguientes:

1. El estado de un sistema cuántico es representado por un vector unitario $\psi \in \mathcal{H}$. Si $\varphi = c\psi$ para algún $c \in \mathbb{C}$ con $|c| = 1$, entonces φ y ψ representan el mismo sistema.
2. Para cada f real valuada que representa un observable clásico (por ejemplo una posición, o la energía en un sistema mecánico), existe un operador auto-adjunto $\hat{f} : D \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ que representa el observable cuántico.
3. Si un sistema cuántico está descrito por $\psi \in \mathcal{H}$, la distribución de probabilidad para la medición de alguna propiedad observable f cumple que

$$\mathbb{E}(f^m) = \left\langle \psi, \left(\hat{f}\right)^m \psi \right\rangle.$$

4. Si $\psi \in \mathcal{H}$ es el estado inicial de un sistema y se mide un observable f con resultado λ , inmediatamente después el sistema adquiere el estado $\psi' \in \mathcal{H}$ tal que $\hat{f}\psi' = \lambda\psi'$.

Al principio 4 se le llama el colapso de la función de onda. El siguiente teorema ilustra la situación experimental asociada a los principios 3 y 4.

Teorema 4. Sea \hat{f} un observable cuántico y sean $\psi \in \mathcal{H}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que

$$\hat{f}\psi = \lambda\psi.$$

Entonces la única medida de probabilidad μ correspondiente a la medición de f es aquella que cumple $\mu(f = \lambda) = 1$.

Demostración. Notemos que f debe cumplir que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f^m) &= \left\langle \psi, \left(\hat{f}\right)^m \psi \right\rangle \\ &= \langle \psi, \lambda^m \psi \rangle \\ &= \lambda^m.\end{aligned}$$

Es claro que si μ es tal que $\mu(f = \lambda) = 1$,

$$\int x^n d\mu(x) = \lambda^n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Ahora, si suponemos que μ es una medida de probabilidad tal que $\mathbb{E}(f^m) = \lambda^m$, entonces dado que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[e^{itf}] &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \mathbb{E}(f^k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it\lambda)^k}{k!} \\ &= e^{i\lambda t}\end{aligned}$$

para $|t|$ suficientemente pequeño, obtenemos que la función característica de μ es idéntica a la de δ_λ la medida de probabilidad tal que $\delta_\lambda(x = \lambda) = 1$, por lo que $\mu = \delta_\lambda$. \square

2.2. Operadores posición y momento

Consideremos $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ y $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ un vector unitario, donde $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Sea

$$(\hat{x}\psi)(x) := x\psi(x),$$

de manera que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(x) &= \langle \psi, \hat{x}\psi \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} x |\psi(x)|^2 dx.\end{aligned}$$

El vector $\psi(x)$ simboliza una función de onda de una partícula en movimiento, a tiempo constante, y \hat{x} se le llama el **operador posición**. Según la interpretación de Born de la mecánica cuántica, $|\psi(x)|^2$ representa una densidad de probabilidad.

En búsqueda de definir un operador que simbolice el momento de una partícula, consideremos primero una órbita circular. Conocemos el momento de un electrón en dicha órbita por la hipótesis de de Broglie. Entonces consideramos $\mathcal{H} = L^2([0, 2\pi])$. Por el teorema de Stone-Weierstrass el conjunto

$$\left\{ \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

forma una base ortonormal de $L^2([0, 2\pi])$. Si ψ es unitario entonces

$$\psi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}},$$

con

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 = 1.$$

De nuevo, $|\psi(x)|^2 = |a_k|^2$ representa una densidad de probabilidad. Si suponemos que

$$\hat{p}e^{ikx} = \hbar k e^{ikx} \quad (3)$$

obtenemos que

$$\hat{p} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_k \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_k \frac{\hbar k e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(p^m) &= \langle \psi, \hat{p}^m \psi \rangle \\ &= \int_0^{2\pi} \hat{p} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_k \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{a_k} \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \int_0^{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 \hbar k \frac{e^{(m-k)x}}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hbar k |a_k|^2, \end{aligned}$$

de lo anterior tenemos que (3) implica cumplir con la interpretación estadística. El operador que cumple dicha condición es

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx},$$

al que llamaremos el **operador momento**.

De manera básica, utilizando las herramientas de la transformada de Fourier, se puede expandir esta misma definición para $\psi \in L^2(\mathbb{R})$. Los detalles se pueden consultar en [4].

Se cumple, como veremos a continuación, que \hat{x} y \hat{p} operadores no acotados, por lo que no pueden estar definidos en todo $L^2(\mathbb{R})$. Sin embargo, sí están definidos en un subconjunto denso del mismo. En particular, dados

$$\begin{aligned} D_x &:= \left\{ \psi \in L^2(\mathbb{R}) : x\psi \in L^2(\mathbb{R}) \right\}, \\ D_p &:= \left\{ \psi \in L^2(\mathbb{R}) : \frac{d\psi}{dx} \in L^2(\mathbb{R}) \right\}, \end{aligned}$$

se cumple que

$$C_c^\infty(\mathbb{R}) \subseteq D_p.$$

Para D_x tenemos el siguiente teorema.

Proposición 5. *El conjunto*

$$D = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : xf(x) \in L^2(\mathbb{R}) \right\}$$

es denso en $L^2(\mathbb{R})$.

Demostración. Sean $f \in L^2(\mathbb{R})$ y

$$f_n(x) := f(x) 1_{[-n,n]}(x),$$

donde

$$1_{[-n,n]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-n, n] \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Se tiene que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |x f_n(x)|^2 dx &= \int_{-n}^n |x f(x)|^2 dx \\ &\leq |n| \int_{-n}^n |f(x)|^2 dx \\ &< \infty\end{aligned}$$

por lo que $f_n(x) \in D$. Se cumple también que

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R} \setminus [-n, n]} |f(x)|^2 dx \rightarrow 0$$

cuando $n \rightarrow \infty$, obteniendo el resultado. \square

Proposición 6. *Los operadores \hat{x}, \hat{p} son lineales y simétricos.*

Demostración. La linealidad es clara. Luego,

$$\begin{aligned}\langle \hat{x}\psi, \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x \overline{\psi(x)} \varphi(x) dx \\ &= \langle \psi, \hat{x}\varphi \rangle.\end{aligned}$$

Para \hat{p} , utilizando integración por partes,

$$\begin{aligned}\langle \hat{p}\psi, \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} -i\hbar \overline{\psi'(x)} \varphi(x) dx \\ &= i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi'(x)} \varphi(x) dx \\ &= -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(x)} \varphi'(x) dx \\ &= \langle \psi, \hat{p}\varphi \rangle.\end{aligned}$$

\square

En los dominios seleccionados, los operadores no son auto-adjuntos, sin embargo, la cerradura de sus gráficas en $L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$ es la gráfica de un operador auto-adjunto, por lo que se les llama **esencialmente auto-adjuntos**. Por brevedad se refiere a la discusión de estos dominios a [4].

Definición 7. (Conmutador)

Sean A, B operadores en \mathcal{H} . Siempre que esté definida la expresión, definimos

$$[A, B]\psi := (AB - BA)\psi.$$

Proposición 8. $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar I$

Demostración. Se tiene que

$$\begin{aligned}\hat{p}\hat{x}\psi &= -i\hbar \frac{d}{dx} (x\psi(x)) \\ &= -i\hbar \frac{d}{dx} \psi(x) - i\hbar x \frac{d\psi}{dx} \\ &= -i\hbar \psi(x) + \hat{x}\hat{p}\psi,\end{aligned}$$

para todo ψ en el subconjunto adecuado de \mathcal{H} . \square

Los operadores posición y momento se definen de forma análoga para \mathbb{R}^n , en particular,

$$\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$$

y coordenada a coordenada actúa como

$$\hat{p}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x},$$

y $\hat{\mathbf{x}}$ actúa coordenada a coordenada como

$$\hat{x}_j\psi = x_j\psi,$$

como se puede consultar en [4].

Como observación final que será relevante en la tercera sección de este documento, el operador momento

$$\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$$

en general no corresponde a un observable físico verdadero. Esto es porque en la presencia de un campo magnético, se define el **momento canónico** de una carga q como

$$\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{x}} + q\mathbf{A},$$

donde \mathbf{A} es el potencial vectorial. Pero para todo campo magnético $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ hay varias elecciones de \mathbf{A} . En particular $\mathbf{A} + \nabla f$ para algún campo escalar f es otra elección posible. En física la dependencia del potencial vectorial se considera una cantidad no física. Sin embargo, es a \mathbf{p} a quien corresponde el operador cuántico $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$ en esos casos. Los detalles se pueden consultar en [8] y [9].

2.3. La ecuación de Schrödinger

De aquí en adelante se sigue la convención física de denotar cantidades vectoriales por negritas y de denotar por \dot{f} a la derivada respecto al tiempo de la función f . La derivación de la ecuación de Schrödinger a continuación fue obtenida de [2].

Consideremos una masa puntual. Sea $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ un campo vectorial en \mathbb{R}^n tal que

$$-\nabla V = \mathbf{F}.$$

Entonces

$$E(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) := \frac{1}{2}m|\dot{\mathbf{x}}|^2 + V(\mathbf{x})$$

es tal que si $\mathbf{x}(t)$ es una curva solución de la ecuación

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{x}},$$

se cumple que

$$\frac{d}{dt}E(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) = 0. \quad (4)$$

A E se le llama una **función de energía** y la ecuación (4) menciona que es una **cantidad conservada**.

La energía se puede reformular en términos del momento:

$$\begin{aligned} H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) &:= \frac{1}{2m} \sum_{j=1}^n m_j^2 \dot{x}_j^2 + V(\mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{2m} \sum_{j=1}^n p_j^2 + V(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

A H se le llama el **Hamiltoniano** del sistema y será nuestra cantidad conservada por defecto cuando se estudie en el contexto independiente del tiempo.

Se puede derivar la ecuación de onda para la materia (ecuación de Schrödinger) de la siguiente forma: Consideremos una solución general de la forma

$$\Psi(x, t) = \psi_0 e^{i(kx - \omega t)}.$$

Notemos que

$$\hbar \left(i \frac{\partial}{\partial t} \psi_0 e^{i(kx - \omega t)} \right) = \hbar \omega \psi_0 e^{i(kx - \omega t)} \quad (5)$$

y

$$\frac{\hbar^2}{2m} \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_0 e^{i(kx - \omega t)} \right) = \frac{\hbar^2}{2m} \left(k^2 \psi_0 e^{i(kx - \omega t)} \right). \quad (6)$$

Luego, por (2),

$$H = \frac{\hbar^2}{2m} k^2 + V(x) = \hbar \omega$$

y por (1), suponiendo que la energía $E = H$ se conserva, la ecuación anterior implica que

$$\frac{\hbar^2}{2m} k^2 \psi_0 e^{i(kx - \omega t)} + \psi_0 e^{i(kx - \omega t)} V(x) = \hbar \omega \psi_0 e^{i(kx - \omega t)},$$

y por (5) y (6),

$$\frac{\hbar^2}{2m} k^2 \psi_0 e^{i(kx - \omega t)} + \psi_0 e^{i(kx - \omega t)} V(x) = \hbar \omega \psi_0 e^{i(kx - \omega t)}.$$

Por lo anterior, si $\eta(x) = \psi_0 e^{ikx}$ $\gamma(t) = e^{-i\omega t}$, de manera que $\Psi(x, t) = \eta(x) \gamma(t)$,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\gamma(t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \eta(x) \right) + \Psi(x, t) V(x) = \hbar \eta(x) \left(i \frac{\partial}{\partial t} \gamma(t) \right),$$

donde al dividir por $\Psi(x, t)$,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\frac{\partial^2}{\partial x^2} \eta(x)}{\eta(x)} \right) + V(x) = i\hbar \left(\frac{\frac{d}{dt} \gamma(t)}{\gamma(t)} \right) = E.$$

De la ecuación anterior se sigue que

$$E = i\hbar \frac{\frac{d}{dt} \gamma}{\gamma} \quad (7)$$

y

$$E = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\frac{\partial^2}{\partial x^2} \eta(x)}{\eta(x)} \right) + V(x). \quad (8)$$

Reescribimos (7) y renombramos la variable γ por ψ para obtener que

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \hat{H} \psi.$$

Esta es la **ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo**.

La igualdad (8), en vista de la definición

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$$

y del operador

$$\hat{V}(x) := V(x)$$

se transforma en

$$E\psi = \hat{H}\psi(x),$$

donde

$$\hat{H} = \frac{(\hat{p})^2}{2m} + \hat{V}(x).$$

2.4. Observaciones finales de operadores que no conmutan

Decimos que $v \in \mathcal{H}$ es un eigenvector simultáneo de dos operadores A y B si

$$Av = \lambda v, \quad Bv = \mu v$$

para ciertos escalares λ y μ . Se cumple el siguiente teorema, los detalles se pueden encontrar en [10] y [1] en las secciones del principio de incertidumbre y los conjuntos completos de observadores compatibles (denominados CSCO por sus siglas en inglés).

Teorema 9. *Sean A y B operadores auto-adjuntos con espectro puntual. Se cumple que A y B conmutan si y solo si existe una base de eigenvectores simultáneos con eigenvalores reales.*

Por el colapso de la función de onda, si pudiéramos medir dos observables \hat{f} y \hat{g} al mismo tiempo, con resultados λ y μ respectivamente, el sistema inmediatamente adquiere un estado ψ' que es eigenvector simultáneo de ambos observables con su respectivo eigenvalor. Pero este vector ψ' no necesariamente existe si \mathcal{H} no tiene una base de eigenvectores simultáneos. Por lo tanto, si \hat{f} y \hat{g} no conmutan, se dice que son inconmensurables, o que no se pueden medir al mismo tiempo.

Ya conocemos dos operadores que no conmutan: los operadores \hat{x} y \hat{p} . Dada nuestra interpretación estadística de la mecánica cuántica, donde definimos el valor esperado de un observable $\mathbb{E}(f)$, podemos definir también la desviación estándar. A partir de esto se tienen estimaciones para la pérdida de precisión de la medición del momento al momento de ajustar la precisión de la medición de la posición, y viceversa. A esto se le conoce como el **principio de incertidumbre**. Los detalles se pueden consultar en [4].

3. El efecto de Hall

3.1. El oscilador armónico

Un oscilador armónico es un sistema en el que, al desplazarse un objeto de una posición de equilibrio, hay una fuerza proporcional al desplazamiento que intenta devolver al objeto a su posición de equilibrio. Un ejemplo de esto es un resorte.

Ejemplo 10. Si el sistema no tiene amortización y solo tiene una fuerza restaurativa proporcional al desplazamiento

$$\begin{aligned} F &= -kx \\ &= m\ddot{x}, \end{aligned}$$

entonces

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

para ciertas constantes A, B , denotando por $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ a la frecuencia angular. El Hamiltoniano del sistema es

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}.$$

Ahora, queremos estudiar el operador

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \hat{x}^2 \\ &= \frac{1}{2m} \left(\hat{p}^2 + (m\omega \hat{x})^2 \right). \end{aligned}$$

Definimos los operadores

$$a := \frac{m\omega \hat{x} + i\hat{p}}{\sqrt{2\hbar m\omega}} \quad \text{y} \quad a^* := \frac{m\omega \hat{x} - i\hat{p}}{\sqrt{2\hbar m\omega}},$$

que llamaremos **operador descendente** y **operador ascendente**.

Luego,

$$\begin{aligned} a^*a &= \left(\frac{m\omega \hat{x} + i\hat{p}}{\sqrt{2\hbar m\omega}} \right) \left(\frac{m\omega \hat{x} - i\hat{p}}{\sqrt{2\hbar m\omega}} \right) \\ &= \frac{1}{\hbar\omega} \frac{1}{2m} \left(\hat{p}^2 + (m\omega \hat{x})^2 \right) - \frac{1}{2}I, \end{aligned}$$

de manera que podemos expresar \hat{H} en términos de dicho operador:

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(a^*a + \frac{1}{2}I \right). \quad (9)$$

Esta identidad nos dice que podemos estudiar las propiedades espectrales de a^*a para conocer el comportamiento de \hat{H} .

Se cumple que

$$\begin{aligned} [a, a^*] &= \frac{1}{2\hbar m\omega} ([m\omega \hat{x}, -i\hat{p}] + [i\hat{p}, m\omega \hat{x}]) \\ &= \frac{1}{2\hbar m\omega} (2\hbar m\omega I) \\ &= I. \end{aligned}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} [a, a^*a] &= [a, a^*]a + a^*[a, a] \\ &= a, \end{aligned}$$

y similarmente,

$$[a^*, a^* a] = -a^*.$$

También se cumple que $a^* a$ es simétrico.

El siguiente teorema justifica el nombre de los operadores.

Teorema 11. *Supongamos que ψ es un eigenvector de $a^* a$ y eigenvalor asociado λ , entonces*

$$a^* a (a\psi) = (\lambda - 1) a\psi,$$

$$(a^* a) (a^* \psi) = (\lambda + 1) a^* \psi.$$

Demostración. Se cumple que

$$\begin{aligned} a^* a (a\psi) &= (a (a^* a) - [a, a^* a]) \psi \\ &= (a (a^* a) - a) \psi \\ &= (a^* a - 1) a\psi \\ &= (\lambda - 1) a\psi, \end{aligned}$$

el otro caso es similar. □

Se tiene que si ψ es eigenvector de $a^* a$ con eigenvalor $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \lambda \langle \psi, \psi \rangle &= \langle \psi, a^* a \psi \rangle \\ &= \langle a\psi, a\psi \rangle \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

por lo que $\lambda > 0$. Esto implica que existe $N \geq 0$ tal que $\psi_0 := a^N \psi$ es tal que $\psi_0 \neq 0$, pero $a^{N+1} \psi = 0$. Se tiene que

$$(a^* a) \psi_0 = 0$$

por lo que ψ_0 eigenvector de $a^* a$ con eigenvalor cero.

Teorema 12. *Si ψ_0 es un vector unitario con $a\psi_0 = 0$, entonces los vectores $\psi_n := (a^*)^n \psi_0$ cumplen que*

$$a^* \psi_n = \psi_{n+1}, \quad a^* a \psi_n = n \psi_n, \quad \langle \psi_n, \psi_m \rangle = n! \delta_{n,m}, \quad a\psi_{n+1} = (n+1) \psi_n.$$

Demostración. Solo probaremos la tercera y cuarta ecuación, el resto son claras. Para la tercera solo hace falta probar el caso $n = m$. En el caso base se cumple que $\langle \psi_0, \psi_0 \rangle = 1$. Si para $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $\langle \psi_n, \psi_n \rangle = n!$ entonces

$$\begin{aligned} \langle \psi_{n+1}, \psi_{n+1} \rangle &= \langle a^* \psi_n, a^* \psi_n \rangle \\ &= \langle \psi_n, a a^* \psi_n \rangle \\ &= \langle \psi_n, (a^* a + 1) \rangle \\ &= (n+1) \langle \psi_n, \psi_n \rangle \\ &= (n+1)!, \end{aligned}$$

y para la cuarta ecuación

$$a\psi_{n+1} = a a^* \psi_n = (a^* a + I) \psi_n = (n+1) \psi_n.$$

□

Podemos preguntarnos si $\{\psi_n, n \geq 0\}$ es una base ortogonal de \mathcal{H} . Si no lo fuera, fijándonos en el complemento ortogonal de $\text{span}\{\psi_n, n \geq 0\}$ podríamos encontrar otro estado mínimo ε_0 tal que $a\phi_0 = 0$. Lo que es lo mismo: si la ecuación $a\psi = 0$ solo tiene una solución, entonces $\{\psi_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base ortogonal por el teorema anterior.

Ahora, sea $D = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ y consideremos los operadores

$$\bar{x} = \frac{x}{D}, \quad \frac{d}{d\bar{x}} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \frac{d}{dx},$$

de manera que obtenemos

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\bar{x} + \frac{d}{d\bar{x}} \right), \quad a^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\bar{x} - \frac{d}{d\bar{x}} \right).$$

Dada la ecuación

$$\begin{aligned} a\psi_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{x}\psi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d}{d\bar{x}} \psi_0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

se tiene

$$\frac{d}{d\bar{x}} \psi_0 = -\bar{x}\psi_0 \tag{10}$$

y en consecuencia

$$\psi_0(\bar{x}) = C e^{-\bar{x}^2/2}$$

es solución de (10). Si $C = \frac{\sqrt{\pi}}{D}$ entonces

$$\int \left| C e^{-\bar{x}^2/2} \right|^2 dx = 1,$$

por lo que obtenemos más explícitamente el estado mínimo

$$\psi_0 = \sqrt{\frac{\pi m \omega}{\hbar}} e^{-\frac{m \omega}{2 \hbar} x^2}.$$

Teorema 13. *Los estados ψ_n son de la forma*

$$\psi_n = H_n \psi_0$$

donde H_n es un polinomio que cumple que

$$H_0(\bar{x}) = 1, \quad H_{n+1}(\bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(2\bar{x}H_n(\bar{x}) - \frac{dH_n(\bar{x})}{d\bar{x}} \right).$$

Demostración. Procederemos por inducción. El caso base $n = 0$ es claro. Supongamos que se cumplen las hipótesis para $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\begin{aligned} \psi_{n+1} &= a^* \psi_n \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\bar{x} - \frac{d}{d\bar{x}} \right] \right) H_n \psi_0 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\bar{x} H_n(\bar{x}) \psi_0 - \frac{d}{d\bar{x}} [H_n(\bar{x}) \psi_0] \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(2\bar{x} H_n(\bar{x}) - \frac{dH_n}{d\bar{x}} \right) C e^{-\bar{x}^2/2} \\ &= H_{n+1}(\bar{x}) \psi_0(\bar{x}). \end{aligned}$$

Recordemos que ψ_0 es eigenvector de a^*a con eigenvalor cero, así que por (9) y por el teorema 11 obtenemos que

$$\hat{H}\psi_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \psi_n.$$

□

Denotamos $E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$. Se trata de los niveles de energía del sistema. Estos niveles de energía permiten deducir el movimiento del sistema. Una revisión más detallada de esto se puede encontrar en [7].

3.2. El efecto de Hall

Consideremos un circuito por el que fluye una corriente I y un conductor rectangular de ancho t .

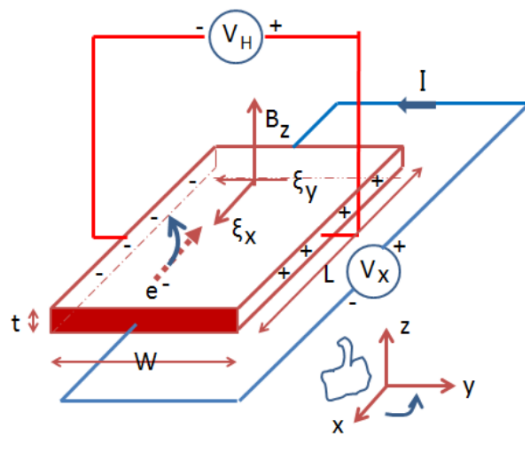


Figura 3: El efecto de Hall.

Si sometemos al conductor a un campo magnético uniforme $\mathbf{B} = (0, 0, B_z)$, en cada carga q de la corriente tendremos una fuerza dada por la ley de fuerza de Lorentz

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

que ocasiona el movimiento de las cargas sobre el eje y como se muestra en la Figura 3. La acumulación de carga positiva y negativa en cada extremo ocasiona una diferencia de potencial, otorgando una medición de voltaje V_H . Esta es la versión clásica del efecto de Hall.

Ahora, queremos estudiar el comportamiento si esta corriente está compuesta de electrones. Nos interesa únicamente el caso cuando t es cercano a cero, tanto que podemos suponer que se trata de un conductor en 2 dimensiones. El modelo de Drude, propuesto por Paul Drude en 1902, realiza este estudio suponiendo un comportamiento clásico de los electrones. Si q_e denota la carga elemental:

$$\mathbf{F} = -q_e \mathbf{E} - q_e (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{\tau} \mathbf{p}. \quad (11)$$

Los primeros dos términos corresponden a la ley de fuerza usual inducidas por \mathbf{E} y \mathbf{B} . La novedad del modelo de Drude es considerar una fuerza opuesta proporcional al momento del electrón. Se considera un momento promedio \mathbf{p} . A τ se le llama el **tiempo de dispersión** y representa el tiempo promedio entre colisiones de los electrones. Según el modelo de Drude, los electrones colisionan con los iones en el metal, que son mucho más pesados. Véase la figura 4,

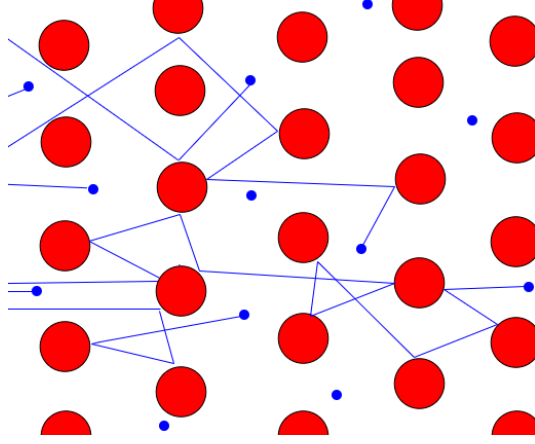


Figura 4: Los electrones, en azul, colisionan con los iones en el metal, impidiendo su paso.

Estudiando el equilibrio de (11), es decir cuando $\mathbf{F} = 0$ y a partir de la ley de Ohm, como en [8], encontramos la conductividad

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ -\sigma_{xy} & \sigma_{xx} \end{pmatrix}.$$

En la matriz anterior, σ_{xy} representa la conductividad en la dirección x consecuencia de aplicar el campo eléctrico en la dirección y . Si $\omega = \frac{q_e B_z}{m}$, entonces

$$\sigma = \frac{\left(\frac{nq_e^2\tau}{m}\right)}{1 + \omega\tau^2} \begin{pmatrix} 1 & -\omega\tau \\ \omega\tau & 1 \end{pmatrix}$$

y obtenemos la resistividad

$$\begin{aligned} \rho &= \sigma^{-1} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{nq_e^2\tau}{m}\right)} \begin{pmatrix} 1 & \omega\tau \\ -\omega\tau & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De manera similar a la conductividad, ρ_{xy} representa la resistividad en la dirección x al aplicar el campo eléctrico en la dirección y . De anterior tenemos que

$$\rho_{xx} = \frac{m}{nq_e^2\tau}, \quad \rho_{xy} = \frac{B_z}{nq_e}.$$

Este es el comportamiento esperado de la resistividad dependiente de la intensidad del campo B_z .

Los resultados experimentales bajo ciertas condiciones de temperatura y intensidad de \mathbf{B} , sin embargo, son muy distintos, véase la figura 5.

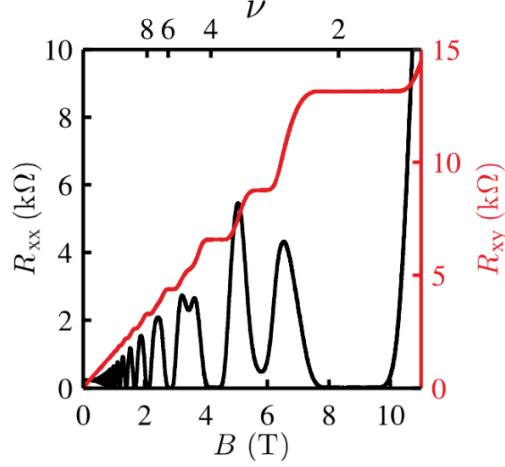


Figura 5: Efecto de Hall. En este caso $R_{xy} = \rho_{xy}$ y R_{xx} es linealmente dependiente de ρ_{xx} . Para mayor información al respecto véase [8].

El resultado experimental arroja que ρ_{xy} avanza a ciertos niveles en los que se vuelve constante, mientras ρ_{xx} es exactamente cero excepto durante el avance de ρ_{xy} . Los valores en los que ρ_{xy} se vuelve constante se cuantizan de forma extremadamente precisa, tomando el valor

$$\rho_{xy} = \frac{2\pi\hbar}{q_e^2} \frac{1}{\nu}, \quad \nu \in \mathbb{Z}.$$

La cuantización parece aumentar a medida que se aumenta el ruido de la medición, lo cual es poco intuitivo, pues generalmente queremos disminuir el ruido durante los experimentos. Cuando disminuimos el ruido, según resultados experimentales, el efecto se vuelve menos pronunciado pero ahora los valores de ρ_{xy} se cuantizan de forma fraccionaria:

$$\rho_{xy} = \frac{2\pi\hbar}{q_e^2} \frac{1}{\nu}, \quad \nu \in \mathbb{Q}.$$

Preliminarmente, estudiamos este efecto de la manera siguiente. Sea $-q_e$ una carga de masa m en movimiento bajo la influencia de un campo magnético $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, donde \mathbf{A} es un potencial vectorial. El Hamiltoniano asociado, como se ve en [8], se puede escribir de la forma

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} + q_e \mathbf{A})^2$$

para

$$\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{x}} - q_e \mathbf{A}$$

el momento canónico. El operador correspondiente al momento canónico en \mathbb{R}^n , como fue referenciado anteriormente, es de la forma

$$\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla.$$

Luego, definimos

$$\hat{\boldsymbol{\pi}} = \hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A},$$

el operador del momento mecánico donde $\hat{\mathbf{A}}$ opera por multiplicación de manera análoga al operador posición. Denotamos por $\hat{\pi}_x = \frac{\partial}{\partial x} + e\hat{A}_x$.

Podemos definir ahora los operadores descendente y ascendente

$$a = \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B_z}} (\pi_x - i\pi_y), \quad a^* = \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B_z}} (\pi_x + i\pi_y).$$

Se cumple que $[a, a^*] = 1$ y podemos reescribir

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(a^*a + \frac{1}{2} \right).$$

Por lo anterior, tenemos una ecuación análoga al oscilador armónico. Los niveles de energía los conocemos en automático:

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

A estos niveles de energía se les llama **niveles de Landau**. Resulta que el entero ν en la cuantización de la resistividad y la conductividad corresponde aproximadamente al número de niveles de Landau llenados por los electrones. Los detalles se pueden consultar en [8].

4. Conclusión

El estudio de la mecánica cuántica con base en la teoría matemática permite formalizar y hacer predicciones del comportamiento de sistemas físicos. Como el efecto de Hall ilustra, existen sistemas físicos donde el comportamiento global exhibe características que no corresponden a la teoría de la mecánica clásica.

Estos sistemas pueden ser de amplio interés, en particular el efecto de Hall es la base de un nuevo tipo de computadora cuántica, llamada computadora cuántica topológica, que a diferencia de las computadoras cuánticas modernas, sería tolerante a errores [5], y por tanto podría implementar, por ejemplo, el algoritmo de Shor [6], capaz de romper la encriptación de muchísimos sistemas informáticos actuales. Es de interés continuar estudiando el efecto de Hall para entender las características topológicas de este efecto y su potencial computacional.

Referencias

- [1] Jiří Blank, Pavel Exner, and Miloslav Havlíček. *Hilbert Space Operators in Quantum Physics*. Springer, Dordrecht, 2 edition, 2010.
- [2] Jeffrey R. Chasnov. 9.08: The schrödinger equation. <https://math.libretexts.org>, 2021. Section from *Differential Equations* (Chasnov), LibreTexts.
- [3] Jayanta Das. Blackbody radiation, 2019. Department of Physics, Maharaja College, Ara, Bihar.
- [4] Brian C. Hall. *Quantum Theory for Mathematicians*, volume 267 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, NY, 2013.
- [5] A. Yu. Kitaev. Fault-tolerant quantum computation by anyons. *Annals of Physics*, 303(1):2–30, 2003.
- [6] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, Cambridge, 10th anniversary edition edition, 2010.
- [7] David Skinner. Principles of quantum mechanics: Lecture notes. <https://www.damtp.cam.ac.uk/user/dbs26/PQM/chap3.pdf>, 2021. Lecture notes, Part II Mathematical Tripos, University of Cambridge.
- [8] David Tong. Lectures on the quantum hall effect. <https://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/qhe/qhe.pdf>, 2016. Lecture notes, TIFR, Mumbai.
- [9] David Tong. Lectures on applications of quantum mechanics. <https://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/aqm/aqm.pdf>, 2017. Lecture notes, University of Cambridge.
- [10] Barton Zwiebach. *Mastering Quantum Mechanics: Essentials, Theory, and Applications*. MIT Press, Cambridge, MA, 2022.