Universidad de Guanajuato
(Campus Guanajuato)

División de Ciencias Naturales y Exactas

Departamento de Matemáticas

Introducción a la teoría de desigualdades variacionales

Presentado por:
Axel Gabriel Rodríguez Zarate (Licenciatura en Matemáticas)

Junio, 2024

Índice

1. Preliminares

1.1. Espacios prehilbert.

Aquí y en lo que resta de este documento, y a menos que se indique lo contrario, $\mathbb{R}$ siempre se considera con el producto interior estándar. De igual manera, todo espacio vectorial se considera sobre el campo $\mathbb{R}$.

Definición 1. *Forma bilineal*

Una forma bilineal sobre un espacio vectorial V es un mapeo $a : V \times V \to \mathbb{R}$ que es lineal en ambas entradas de forma separada.

Definición 2. *Producto interior*

Un producto interior en V es una forma bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ que cumple lo siguiente:

1. Es simétrico: $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ para todo $v, w \in V$.
2. Es positivo-definido: $\langle v, v \rangle > 0$ para todo $v \neq 0$.

A la dupla $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se le llama **espacio prehilbert**.

Teorema 3. *Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio prehilbert. Entonces*

$$\|v\|_V := \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

es una norma.

1.2. Espacios de Hilbert

Definición 4. *Espacio de Hilbert*
Si un espacio prehilbert es completo se le llama espacio de Hilbert.

En lo que sigue siempre H denotará un espacio de Hilbert.

Teorema 5. *Sea V un espacio vectorial normado y $a : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal.*
Son equivalentes:

1. a es continuo.
2. a es continuo en 0.
3. Existe $C > 0$ tal que $a(v, w) \le C \|v\| \|w\|$ para todo v, w.

Demostración. $(2) \implies (3)$: En busqueda de una contradicción supongamos que es falso. Para cada n existe (x_n, y_n) tal que

$$\|a(x_n, y_n)\| > n^2 \|x_n\| \|y_n\|.$$

Sean $\overline{x}_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|}$ y $\overline{y}_n = \frac{y_n}{n\|y_n\|}$, entonces ambas convergen a 0 pero

$$\|a(\overline{x}_n, \overline{y}_n)\| > 1 \quad \forall n$$

lo que contradice que a es continua en 0.

$(3) \implies (1)$: Sean $x_n \to x$ y $y_n \to y$. Sea $M > 0$ tal que $\|x_n\|, \|y_n\| \le M$. Entonces

$$\begin{aligned}
\|a(x_n, y_n) - a(x, y)\| &\le \|a(x_n, y_n - y)\| + \|a(x_n - x, y)\| \\
&\le C \|x_n\| \|y_n - y\| + C \|x_n - x\| \|y\| \\
&\le CM (\|y_n - y\| + \|x_n - x\|) \\
&\to 0.
\end{aligned}$$

□

Definición 6. *A una forma bilineal como antes se le dice coerciva si existe $\alpha > 0$ tal que*

$$a(v, v) \ge \alpha \|v\|^2 \quad \forall v \in V.$$

Intuitivamente, una forma coerciva explota en los extremos.

Es claro que todo producto interior es una forma bilineal coerciva

$$\langle v, v \rangle = \|v\|^2 \quad \forall v \in V.$$

2. El teorema de representación de Riesz-Fréchet.

2.1. Proyecciones

Teorema 7. *Ley del Paralelogramo*

$$2\|a\|^2 + 2\|b\|^2 = \|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 \quad \forall a, b \in H$$

Demostración. Utilizando la identidad $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$ y usando las propiedades del producto interior obtenemos obtenemos el resultado:

$$\langle f+g, f+g\rangle + \langle f-g, f-g\rangle = 2\langle f, f\rangle + 2\langle g, g\rangle .$$

□

Teorema 8. *Proyección sobre un conjunto convexo y cerrado.*
Sea $K \subseteq H$ un subconjunto cerrado y convexo. Para todo $f \in H$ existe un único $u \in K$ tal que

$$\|f-u\| = \min_{v\in K} \|f-v\| = dist\,(f, K)$$

y

$$\langle f-u, w-u\rangle \leq 0 \quad \forall w \in K.$$

Denotamos

$$u =: \Pr_K f.$$

Demostración. Primero verificamos la equivalencia de las dos caraterizaciónes de u:

- Supongamos que $u \in K$ es tal que $\|f-u\| = dist\,(f, K)$. Luego, dado $w \in K$ y $v = tw + (1-t)\,u$ tendremos que

  $$\|f-u\| \leq \|f-v\| = \|(f-u) - t\,(w-u)\|$$

  entonces

  $$\begin{aligned}\|f-u\|^2 &\leq \langle (f-u) - t\,(w-u)\,, (f-u) - t\,(w-u)\rangle \\ &= \|f-u\|^2 - 2\,\langle f-u, t\,(w-u)\rangle + \|t\,(w-u)\|^2 \\ &= \|f-u\|^2 - 2t\,\langle f-u, w-u\rangle + t^2\,\|w-u\|^2\end{aligned}$$

  Se sigue que

  $$\langle f-u, w-u\rangle \leq \frac{t\,\|w-u\|^2}{2}$$

  Si $t \to 0$, tendremos que

  $$\langle f-u, w-u\rangle \leq 0 \quad \forall w \in K.$$

- Ahora sea u tal que
$$\langle f-u, w-u\rangle \leq 0 \quad \forall w \in K$$
entonces
$$\begin{aligned}
&\|f-u\|^2-\|f-w\|^2\\
=&\langle f-u, f-u\rangle-\langle f-w, f-w\rangle\\
=&\langle f, f-u\rangle+\langle -u, f-u\rangle+\langle w, f-w\rangle+\langle -f, f-w\rangle\\
=&\langle f, f\rangle+\langle f, -u\rangle+\langle -u, f\rangle+\langle u, u\rangle+\langle w, f\rangle+\langle w, -w\rangle\\
+&\langle -f, f\rangle+\langle f, w\rangle+\langle w-u, w-u\rangle-\langle w-u, w-u\rangle\\
=&2\langle f-u, w-u\rangle-\|w-u\|^2\\
\leq&0.
\end{aligned}$$

Enseguida verificamos la existencia y unicidad:
Sea $\{v_n\}_n \subseteq K$ una sucesión minimizante de $\{\|f-v\| : v \in K\}$; es decir, tal que
$$\|f-v_n\| =: d_n \to d$$
con
$$d = \inf_{v\in K} \|f-v\|.$$
Notemos que la ley del paralelogramo implica que
$$\frac{\|a\|^2+\|b\|^2}{2} = \left\|\frac{a+b}{2}\right\|^2+\left\|\frac{a-b}{2}\right\|^2 \quad \forall a, b \in H.$$
Sustituyendo $a = f-v_n$ y $b = f-v_m$ podremos estimar $\|v_n-v_m\|$ de la siguiente manera:
$$\begin{aligned}
\left\|f-\frac{v_n+v_m}{2}\right\|^2+\left\|\frac{v_n-v_m}{2}\right\|^2 &= \frac{d_n^2+d_m^2}{2}.\\
&\geq d^2+\left\|\frac{v_n-v_m}{2}\right\|^2
\end{aligned}$$
donde la desigualdad de sigue de que $\frac{v_n+v_m}{2} \in K$ por ser una convinacion convexa y por tanto
$$\left\|f-\frac{v_n+v_m}{2}\right\| \geq d.$$
Por todo lo anterior tendremos que
$$\left\|\frac{v_n-v_m}{2}\right\|^2 \leq \frac{d_n^2+d_m^2}{2}-d^2$$

y

$$\lim_{n,m\to\infty} \left\| \frac{v_n - v_m}{2} \right\|^2 = 0.$$

Se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} v_n = u \in K.$$

Ahora, para la unicidad, si $u_1, u_2 \in K$ son tales que

$$\langle f - u_1, w - u_1 \rangle \leq 0 \quad \forall w \in K$$

y

$$\langle f - u_2, w - u_2 \rangle \leq 0 \quad \forall w \in K$$

entonces

$$\begin{aligned} &\langle f - u_1, u_2 - u_1 \rangle + \langle f - u_2, u_1 - u_2 \rangle \\ =&\langle u_1 - f, u_1 - u_2 \rangle + \langle f - u_2, u_1 - u_2 \rangle \\ =&\|u_1 - u_2\|^2 \\ \leq& 0 \end{aligned}$$

por lo que necesariamente $u_1 = u_2$. □

Observación 9. *Todo subespacio es convexo.*

Proposición 10. *Sea $K \subseteq H$ no vacío, cerrado y convexo, entonces*

$$\|P_K f_1 - P_K f_2\| \leq \|f_1 - f_2\| \quad \forall f_1, f_2 \in H.$$

Demostración. Para todo $v \in K$ se cumple que

$$\langle f_1 - P_K f_1, v - P_K f_1 \rangle \leq 0$$

y

$$\langle f_2 - P_K f_2, v - P_K f_2 \rangle \leq 0$$

Luego

$$\begin{aligned} &\langle f_1 - P_K f_1 - f_2 + P_K f_2, P_K f_2 - P_K f_1 \rangle \\ =&\langle f_1 - f_2, P_K f_2 - P_K f_1 \rangle + \|P_K f_2 - P_K f_1\|^2 \\ \leq& 0 \end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \|P_K f_2 - P_K f_1\|^2 &\leq \langle f_1 - f_2, P_K f_1 - P_K f_2 \rangle \\ &\leq \|f_1 - f_2\| \, \|P_K f_1 - P_K f_2\| \end{aligned}$$

de lo que se sigue el resultado. □

Corolario 11. *P_K es un operador continuo.*

Teorema 12. *Sea $M \subseteq H$ un subespacio cerrado. Sea $f \in H$. Entonces $\Pr_M f \in M$ se caracteriza por*

$$\left\langle f - \Pr_M f, v \right\rangle = 0 \quad \forall v \in M$$

Demostración. Se cumple que

$$\left\langle f - \Pr_M f, v - \Pr_M f \right\rangle \leq 0 \quad \forall v \in M$$

y por tanto

$$\left\langle f - \Pr_M f, tv - \Pr_M f \right\rangle \leq 0 \quad \forall v \in M, \forall t \in \mathbb{R},$$

Esto implica que

$$t \left\langle f - \Pr_M f, v \right\rangle \leq \left\langle f - \Pr_M f, \Pr_M f \right\rangle \quad \forall v \in M, \forall t \in \mathbb{R}$$

lo cuál solo es posible si $\langle f - \Pr_M f, v\rangle = 0$.

Ahora, supongamos que

$$\left\langle f - \Pr_M f, v \right\rangle = 0 \quad \forall v \in M$$

entonces

$$\left\langle f - \Pr_M f, v - \Pr_M f \right\rangle = 0$$

□

Corolario 13. *P_M el operador que manda $f \in H$ a su proyección sobre el subespacio cerrado M es un operador lineal.*

Demostración. Para $f, g \in H$, $\beta \in \mathbb{R}$,se puede verificar por linealidad del producto interior que

$$\left\langle f + \beta g - \left(\Pr_M f + \beta \Pr_M g \right), v \right\rangle = 0 \quad \forall v \in M$$

y por la unicidad de la proyección tenemos el resultado. □

2.2. Espacios duales y el teorema

Definición 14. *En un espacio vectorial V, denotamos por V^* al espacio dual continuo: El conjunto de todas las funcionales lineales continuas.*

Es claro que el espacio dual es un espacio vectorial.

Definición 15. *Par dual canónico.*

Dado $\varphi \in V^*$, se denota al mapeo evaluación de la siguiente manera

$$\langle \varphi, v \rangle_{V^*,V} := \varphi(v).$$

Definición 16. *Dado un espacio vectorial normado V, denotamos a la norma canónica de V^* como*

$$\|\varphi\|_{V^*} := \sup_{\|v\| \leq 1} |\varphi(v)|.$$

Proposición 17. *Sea H espacio de Hilbert y $f \in H$ fijo, entonces*

$$\gamma(u) := \langle f, u \rangle \quad \forall u \in H$$

es una funcional lineal continua.

Demostración. El resultado es consecuencia de la desigualdad de Cauchy-Schwarz. □

Notemos que si $f \neq g$, entonces

$$\langle f - g, u \rangle = \langle f, u \rangle - \langle g, u \rangle \neq 0.$$

Teorema 18. *El teorema de representación de Riesz-Frechet.*

Dado $\varphi \in H^*$, existe un único $f \in H$ tal que

$$\langle \varphi, u \rangle_{V^*,V} = \langle f, u \rangle$$

y

$$\|f\|_H = \|\varphi\|_{H^*}.$$

Demostración. Sea $M = \varphi^{-1}(\{0\})$. Por la continuidad de φ se tiene que M es un subespacio cerrado de H.

Si $H = M$ entonces $\varphi = 0$, y claramente existe $0 \in H$ tal que se cumple las condiciones. Si

Si $H \neq M$, sea $g_0 \in H \setminus M$ y $g_1 = P_M g_0$, se sigue que

$$g = \frac{g_0 - g_1}{\|g_0 - g_1\|}$$

es tal que

$$\|g\| = 1$$

y

$$\langle g, v\rangle = \frac{1}{\|g_0 - g_1\|} \langle g_0 - P_M g_0, v\rangle = 0 \quad \forall v \in M.$$

Como $\langle g, g\rangle = 1$, entonces lo anterior implica que $g \notin M$.

Luego, sea $u \in H$ fijo, y

$$v = u - \frac{\langle \varphi, u\rangle_{V^*,V}}{\langle \varphi, g\rangle_{V^*,V}} g.$$

Nótese que como $g \notin M$, $\langle \varphi, g\rangle_{V^*,V} \neq 0$. Además por la linealidad de φ,

$$\begin{aligned} \langle \varphi, v\rangle_{V^*,V} &= \langle \varphi, u\rangle_{V^*,V} - \frac{\langle \varphi, u\rangle_{V^*,V}}{\langle \varphi, g\rangle_{V^*,V}} \langle \varphi, g\rangle_{V^*,V} \\ &= 0 \end{aligned}$$

por lo que $v \in M$.

Finalmente

$$\begin{aligned} \langle g, v\rangle &= \langle g, u\rangle - \frac{\langle \varphi, u\rangle_{V^*,V}}{\langle \varphi, g\rangle_{V^*,V}} \langle g, g\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

de manera que

$$\begin{aligned} \langle \varphi, u\rangle_{V^*,V} &= \langle \varphi, g\rangle_{V^*,V} \langle g, u\rangle \\ &= \left\langle \langle \varphi, g\rangle_{V^*,V}\, g, u \right\rangle \end{aligned}$$

por lo que $f_\varphi = \langle \varphi, g\rangle_{V^*,V}\, g$ es la representación buscada.

Verificamos que es única, supongamos que

$$\begin{aligned} \langle \varphi, u\rangle_{V^*,V} &= \langle f, u\rangle \\ &= \langle g, u\rangle \end{aligned}$$

entonces tendremos que

$$\langle f - g, u\rangle = 0 \quad \forall u \in H$$

lo que implica que $\langle f - g, f - g\rangle = 0$ y por tanto $f = g$.

Ahora, como se cumple que

$$\langle \varphi, u \rangle_{V^*,V} = \langle f_\varphi, u \rangle \quad \forall u \in H$$

tendremos que

$$|\varphi(u)| \leq \|f_\varphi\| \, \|u\| \quad \forall u \in H$$

lo que implica que $\|\varphi\|_{H^*} \leq \|f_\varphi\|$. Al mismo tiempo

$$\begin{aligned} \langle \varphi, f_\varphi \rangle_{V^*,V} &= \|f_\varphi\| \left\langle \varphi, \frac{f_\varphi}{\|f_\varphi\|} \right\rangle_{V^*,V} \\ &= \|f_\varphi\|^2 \\ &\leq \|f_\varphi\| \, \|\varphi\|_{H^*} \end{aligned}$$

de manera que $\|f_\varphi\| \leq \|\varphi\|_{H^*}$. $\square$

Corolario 19. *H y H^* son isométricos.*

3. Desigualdades variacionales

3.1. Introducción

Las desigualdades variacionales, informalmente, son desigualdades que involucran formas lineales. Muchos problemas de la vida real se reducen a encontrar elementos que cumplen estas desigualdades Sea $f \in C^1([a,b])$. El problema consiste en hállar todos los puntos x_0 para lo que

$$f(x_0) = \min_{x \in [a,b]} f(x).$$

Existen 3 posibilidades:

1. $x_0 \in (a,b)$, en cuyo caso $f'(x_0) = 0$
2. $x_0 = a$, donde puede suceder que $f'(x_0) \geq 0$
3. $x_0 = b$, y $f'(x_0) \leq 0$.

Esto se reduce a encontrar los puntos x_0 tal que

$$f'(x_0)(x - x_0) \geq 0 \quad \forall x \in I$$

por lo que este problema involucra una desigualdad variacional. Extrapolamos en problema anterior a f definida sobre $K \subseteq \mathbb{R}^n$ donde K es cerrado y convexo. Buscamos de nuevo $x_0 \in K$ tales que

$$f(x_0) = \min_{x \in K} f(x).$$

Notamos que si $x_0 \in K$ es un punto donde obtenemos dicho mínimo, entonces para $x \in K$ tendremos que

$$\varphi(t) = f(x_0 + t(x - x_0)) \quad 0 \leq t \leq 1$$

alcanza un mínimo en $t = 0$, en cuyo caso

$$\nabla f(x_0) \frac{(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = \varphi'(0) \geq 0 \quad x \in K$$

entonces todo punto x_0 debe ser tal que $x_0 \in K$ y

$$\nabla f(x_0)(x - x_0) \geq 0 \quad \forall x \in K.$$

Teorema 20. *Teo. punto fijo de Brouwer*

Sea F un mapeo continuo de la bola cerrada $B \subseteq \mathbb{R}^n$ a sí mismo, entonces F tiene un punto fijo.

Corolario 21. *Teo. punto fijo de Brouwer*

Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto y convexo. Sea $F : K \to K$ continuo. Entonces F tiene un punto fijo.

Demostración. K es acotado. Sea B una bola cerrada tal que $K \subseteq B$. Como Pr_K es continuo, tendremos que

$$F \circ \operatorname*{Pr}_K : B \to K$$

es un mapeo continuo de la bola a sí misma, entonces tiene un punto fijo

$$F\left(\operatorname*{Pr}_K x\right) = x \in K.$$

Como $x \in K$, se sigue que $\operatorname{Pr}_K x = x$ y por tanto $F(x) = x$. $\square$

3.2. Un problema de desigualdades variacionales en $\mathbb{R}^n$.

Notación 22. *Por la frecuencia de la notación, en esta sección dado $F \in (\mathbb{R}^n)^*$ y $v \in \mathbb{R}^n$, denotamos por $\langle F, v\rangle$ al par dual canónico. El producto interior usual de $\mathbb{R}^n$ se denotará por $(\cdot,\cdot)$. Denotamos por πF a su representación. Esto representa una identificación entre el espacio de Hilbert y su dual.*

De esta manera
$$\langle F, v\rangle = (\pi F, v)\,.$$

Problema 23. *Dado K cerrado y convexo en $\mathbb{R}^n$,y*
$$F : K \to (\mathbb{R}^n)^*$$
continuo, halla $x \in K$ tal que
$$\langle F(x), y - x\rangle \geq 0 \quad \forall y \in K. \tag{1}$$

Si K es acotado, obtenemos el siguiente teorema de existencia de soluciones

Teorema 24. *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto y convexo. Sea $F : K \to (\mathbb{R}^n)^*$ continuo. Entonces existe $x \in K$ tal que*
$$\langle F(x), y - x\rangle \geq 0 \quad \forall y \in K$$

Demostración. La condición es equivalente a verificar que para algun $x \in K$,
$$0 \geq (-\pi F(x), y - x) \quad \forall y \in K.$$

El mapeo
$$\Pr_K \circ (I - \pi F) : K \to K$$
es continuo. Por el teorema de punto fijo de Brouwer este admite un punto fijo, de manera que
$$x = \Pr_K (x - \pi F(x))$$
y por la caracterización de la proyección,
$$\begin{aligned}(x - \pi F(x) - x, y - x) &= (-\pi F(x), y - x)\\ &\leq 0 \quad \forall y \in K.\end{aligned}$$
□

Observación 25. *Podemos encontrar contraejemplos para el caso no acotado. Si $n = 1$ y $K = \mathbb{R}$, notemos que*
$$\langle f(x), y - x\rangle \geq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

no tiene solución para la forma $f(x) = e^x$: no existe x_0 tal que

$$ye^{x_0} \geq x_0 e^{x_0} \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto buscamos condiciones suficientes:

Para $K \in \mathbb{R}$, denotamos por $K_R := K \cap B_R$ donde B_R es la bola de radio $R > 0$ en 0.

Por el teorema anterior, para $F : K \to (\mathbb{R}^n)^*$, existe $x_R \in K_R$ tal que

$$\langle F(x_R), y - x_R \rangle \geq 0 \quad \forall y \in K_R$$

siempre que $K_R \neq \emptyset$.

Teorema 26. *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ cerrado y convexo, y*

$$F : K \to (\mathbb{R}^n)^*$$

continuo. Una condición necesaria y suficiente de existencia de soluciones para el problema (1) es que exista $R > 0$ tal que una solución $x_R \in K_R$ de

$$x_R \in K : \ \langle F(x_R), y - x_R \rangle \geq 0 \quad \forall y \in K_R \tag{2}$$

cumpla que

$$\|x_R\| < R.$$

Demostración. Si x es solución de (1), entonces

$$\langle F(x), y - x \rangle \geq 0 \quad \forall y \in K_R, \forall R > 0$$

por lo que basta elegir $R > |x|$.

Ahora supongamos que existe $R > 0$ tal que x_R es solución de (2) y $\|x_R\| < R$. Dado que existe una vecindad abierta de x_R contenida en B_R, dado $y \in K \setminus \{x_R\}$,

$$w = x_R + t(y - x_R) \in K_R$$

para $t_y > 0$ suficientemente pequeño, de manera que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle F(x_R), w - x_R \rangle \\ &= t_y \langle F(x_R), y - x_R \rangle \quad \forall y \in K \end{aligned}$$

lo que implica que

$$\langle F(x_R), y - x_R \rangle \quad \forall y \in K.$$

□

Corolario 27. *Sea $F : K \to (\mathbb{R}^n)^*$ continua tal que si $x \in K$, $\|x\| \to \infty$ tenemos que*

$$\frac{\langle F(x) - F(x_0), x - x_0\rangle}{\|x - x_0\|} \to +\infty$$

para algún x_0. Entonces existe una solución al problema (1). Con esta condicion a F se le llama ***coercivo.***

Demostración. Sea $M > \|F(x_0)\|$ y $R > \|x_0\|$ tal que

$$\frac{\langle F(x) - F(x_0), x - x_0\rangle}{\|x - x_0\|} \geq H \quad \forall x \in K, \|x\| \geq R,$$

luego, si $\|x\| \geq R$

$$\begin{aligned}\langle F(x), x - x_0\rangle &\geq H\|x - x_0\| + \langle F(x_0), x - x_0\rangle \\ &\geq H\|x - x_0\| - \|F(x_0)\|\,\|x - x_0\| \\ &\geq (H - \|F(x_0)\|)(\|x\| - \|x_0\|) \\ &= (H - \|F(x_0)\|)(R - \|x_0\|).\end{aligned}$$

Ahora, si $x_R \in K_R$ es solución de (2), entonces

$$\langle F(x_R), x_R - x_0\rangle \leq 0$$

de manera que $\|x_R\| < R$, y por el teorema anterior tenemos una solución. □

Proposición 28. *Si para todo $x, x' \in K$ tal que $x \neq x'$ se cumple que*

$$\left\langle F(x) - F\left(x'\right), x - x'\right\rangle > 0$$

entonces la solución de (1) es única. Con esta condición a F se le llama ***estrictamente monótono.***

Demostración. Procedemos por contrapositiva. Supongamos que $x \neq x'$ y ambas son soluciones. Entonces

$$\langle F(x), y - x\rangle \geq 0 \quad \forall y \in K,$$

$$\left\langle F\left(x'\right), y - x'\right\rangle \geq 0 \quad \forall y \in K.$$

Esto implica que

$$\left\langle F(x) - F\left(x'\right), x - x'\right\rangle \leq 0.$$

□

Hemos hallado condiciones de existencia y de unicidad para este problema.

4. Teorema de Lax-Milgram

4.1. El teorema

Teorema 29. *Teorema de Stampacchia*

Sea a una forma bilineal continua y coerciva en H y $K \subseteq H$ no vacío, cerrado y convexo. Dado $\varphi \in H^*$ existe un único $u \in K$ tal que

$$a(u, v-u) \geq \langle \varphi, v-u \rangle_{H^*,H} \quad \forall v \in K.$$

Más aún, si a es simétrico, entonces u tiene la caracterización de que $u \in K$ y

$$\frac{1}{2}a(u,u) - \langle \varphi, u \rangle_{H^*,H} = \min_{v \in K}\left[\frac{1}{2}a(v,v), \langle \varphi, v \rangle_{H^*,H}\right]$$

Demostración. Sea f_φ la representación de Riesz de φ. Sea $u \in H$ fijo. El mapeo

$$v \underset{\gamma_u}{\longmapsto} a(u,v)$$

es claramente continuo, denotemosle por γ_u y sea Au su representación de Riesz.

Notemos que A el operador que manda γ_u a su representación de Riesz cumple lo siguiente

Para todo $u \in H$,

1)

$$\begin{aligned}
\|Au\|_H &= \|\gamma_u\|_{H^*} \\
&= \sup_{\|v\| \leq 1} |a(u,v)| \\
&\leq \sup_{\|v\| \leq 1} |C\|v\|\|u\|| \\
&\leq C\|u\|.
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
\langle Au, u \rangle_H &= \langle \gamma_u, u \rangle_{H^*,H} \\
&= \gamma_u(u) \\
&= a(u,u) \\
&\geq \alpha\|u\|^2.
\end{aligned}$$

Sea $\rho > 0$, notemos que para $v \in K$

$$\begin{aligned} & \langle Au, v-u\rangle \geq \langle f_\varphi, v-u\rangle \\ \iff & \langle f_\varphi - Au, v-u\rangle \leq 0 \\ \iff & \langle \rho f_\varphi - \rho Au + u - u, v-u\rangle \leq 0 \end{aligned}$$

Esto es,

$$\langle Au, v-u\rangle \geq \langle f_\varphi, v-u\rangle \iff u = P_K\left(\rho f_\varphi - \rho Au + u\right).$$

Sea pues $Sv = P_K\left(\rho f_\varphi - \rho Av + v\right)$, luego por la proposición de la sección anterior,

$$\begin{aligned} \|Sv_1 - Sv_2\| &\leq \|\rho f_\varphi - \rho Av_1 + v_1 - \rho f_\varphi + \rho Av_2 - v_2\| \\ &= \|v_1 - v_2 - \rho\left(Av_1 - Av_2\right)\|. \end{aligned}$$

Se sigue por las propiedades de A

$$\begin{aligned} \|Sv_1 - Sv_2\|^2 &\leq \|v_1 - v_2\|^2 - 2\rho\left\langle Av_1 - Av_2, v_1 - v_2\right\rangle + \rho^2\left\|Av_1 - Av_2\right\|^2 \\ &\leq \|v_1 - v_2\|^2 - 2\rho\alpha\left\|v_1 - v_2\right\|^2 + \rho^2 C^2\left\|v_1 - v_2\right\|^2 \\ &= \|v_1 - v_2\|^2\left(1 - 2\rho\alpha + \rho^2 C^2\right) \end{aligned}$$

□

Sea $0 < \rho < \frac{2\alpha}{C^2}$, entones

$$\rho^2 C^2 < \frac{4\alpha^2}{C^2},\ 2\rho\alpha < \frac{4\alpha^2}{C^2}$$

Se sigue que $1 + \rho^2 C^2 - 2\rho\alpha < 1$. Por lo tanto hemos verificado que S es una contracción. Por el teo. de punto fijo de Banach tiene un punto fijo único u.

Por todo lo anterior, hemos visto que existe un único u tal que para todo $v \in K$

$$\langle Au, v-u\rangle \geq \langle f_\varphi, v-u\rangle$$

y recordemos que Au es la representación del operador $a\left(u,\cdot\right)$, por lo que lo anterior es equivalente a que

$$\begin{aligned} a\left(u, v-u\right) &\geq \varphi\left(v-u\right) \\ &= \langle \varphi, v-u\rangle_{H^*,H}. \end{aligned}$$

Ahora, supongamos que a también es simétrico, entonces a es un producto interior, puesto que al ser coercivo también es positivo definido.

Notemos que

$$C^{1/2}\left\|u\right\| \geq \left[a\left(u,u\right)\right]^{1/2} \geq \alpha^{1/2}\left\|u\right\|$$

por lo que la norma de a es fuertemente equivalente a la norma del producto interior de H y por tanto (H, a) es espacio de Hilbert.

Por el teorema de representación de Riesz, existe un único $g_\varphi \in H$ tal que

$$\langle \varphi, v \rangle_{V^*,V} = a(g_\varphi, v) \quad \forall v \in H$$

por lo que la condición

$$\varphi(v-u) \leq a(u, v-u)$$

es equivalente a que

$$a(g_\varphi - u, v-u) \leq 0 \quad \forall v \in K.$$

Entonces $u = \operatorname{Pr}_K^a g_\varphi$ es la proyección sobre K respecto a a. Por la definición, tenemos que u es tal que

$$\begin{aligned}
&\min_{v\in K} a(g_\varphi - v, g_\varphi - v)^{1/2} \\
&= \min_{v\in K} [a(g_\varphi, g_\varphi) - 2a(g_\varphi, v) + a(v,v)] \\
&= \min_{v\in K} \left[a(g_\varphi, g_\varphi) - 2\langle \varphi, v\rangle_{H^*,H} + a(v,v)\right] \\
&= \min_{v\in K} \left[\frac{1}{2} a(v,v) - \langle \varphi, v\rangle_{H^*,H}\right] \\
&= a(g_\varphi - u, g_\varphi - u)^{1/2} \\
&= \frac{1}{2} a(u,u) - \langle \varphi, u\rangle_{H^*,H}
\end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar.

Corolario 30. *Teorema de Lax-Milgram*

Sea a una forma bilineal continua y coerciva en H. Dado $\varphi \in H^*$ existe un único $u \in H$ tal que

$$a(u,v) = \langle \varphi, v\rangle_{H^*,H} \quad \forall v \in H.$$

Si a es simétrica, entonces u se caracteriza por $u \in H$ y

$$\frac{1}{2} a(u,u) - \langle \varphi, u\rangle_{H^*,H} = \min_{v\in H} \left[\frac{1}{2} a(v,v) - \langle \varphi, v\rangle_{H^*,H}\right].$$

Demostración. Por el teorema de Stampacchia tomando $K = H$, u es tal que

$$a(u, v-u) \geq \langle \varphi, v-u\rangle_{H^*,H} \quad \forall v \in H$$

lo que implica que

$$a(u, tv-u) \geq \langle \varphi, tv-u\rangle_{H^*,H} \quad \forall v, \forall t$$

y por tanto

$$ta\,(u, v) - a\,(u, u) \geq t\,\langle \varphi, v \rangle_{H^*,H} - \langle \varphi, u \rangle_{H^*,H} \quad \forall v, \forall t$$

que necesariamente requiere que

$$a\,(u, v) = \langle \varphi, v \rangle_{H^*,H}\,.$$

Luego, si suponemos que u es tal que

$$a\,(u, v) = \langle \varphi, v \rangle_{H^*,H} \quad \forall v \in H$$

entonces

$$\begin{aligned} a\,(u, v - u) &= a\,(u, v) + a\,(u, u) \\ &= \langle \varphi, v \rangle_{H^*,H} + \langle \varphi, u \rangle_{H^*,H} \\ &= \langle \varphi, v - u \rangle_{H^*,H} \end{aligned}$$

por lo que son caracterizaciones equivalentes. $\square$

4.2. Aplicación a EDP

En la presente sección se introduce informalmente los espacios de Sobolev y las formulaciones débiles de problemas.

Definición 31. *Sea $I = (a, b)$ un dominio, y $C_C^1(I)$ el conjunto de funciones continuamente diferenciables con soporte compacto. Definimos*

$$H^1(I) = \left\{ u \in L^2(I) : \exists Du \in L^2(I) \ \ \text{tal que} \ \int_I u\varphi' = -\int_I Du\varphi \ \ \forall \varphi \int C_C^1(I) \right\}$$

Definición 32. *A Du en el contexto de la definición anterior se le llama derivada débil, es aquella función que cumple la fórmula de cambio de variable. Se puede demostrar que esta derivada es única casi en todos lados.*

Definición 33. *Definimos*

$$H_0^1(I) = \left\{ u \in H^1(I) : u(x) = 0 \ \ \forall x \in \partial I \right\}.$$

Lema 34. *$H_0^1(I)$ es espacio de Hilbert.*

Problema 35. *Consideremos el problema elíptico en $I = (a, b)$:*

$$\begin{cases} -u'' + u = f & x \in I \\ u = 0 & x \in \partial I \end{cases}$$

$$\int u''v = [u'v] - \int u'v'$$

En el contexto de este problema, diremos que una solución débil es una función $u \in H_0^1(I)$ tal que para todo $v \in H_0^1(I)$

$$\begin{aligned} \int_I u''v + \int_I uv &= \int_I u'v' + \int_I uv \\ &= \int_I fv \end{aligned}$$

Teorema 36. *Dado $f \in L^2(I)$ existe una unica solucion débil $u \in H_0^1$. Más aún, u es el elemento que minimiza*

$$\min_{v \in H_0^1} \left[\frac{1}{2} \int_I \left[(v')^2 + v^2 \right] - \int_I fv \right].$$

Demostración. Sabemos que $H_0^1(I)$ es espacio de Hilbert. Sea

$$a(u, v) = \int_I u'v' + \int_I uv.$$

Consideremos la funcional lineal $\varphi(v) = \int_I fv$.

Por el teorema de Lax-Milgram, existe un único u tal que

$$\begin{aligned}\int_I u'v' + \int_I uv &= a(u,v)\\ &= \varphi(v)\\ &= \int_I fv\end{aligned}$$

y además, dado que a claramente es simétrica, u es tal que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}a(u,u) - \varphi(u) &= \frac{1}{2}\int_I \left[\left(u'\right)^2 + u^2\right] - \int_I fu\\ &= \min_{v\in H_0^1}\left[\frac{1}{2}\int_I \left[\left(v'\right)^2 + v^2\right] - \int_I fv\right]\\ &= \min_{v\in H_0^1}\left[\frac{1}{2}a(v,v) - \varphi(v)\right]\end{aligned}$$

□