# Limites et continuité

## Continuité et prolongement par continuité

### 1èr cas :

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe et $a \in D_f$.
Alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, $f$ est continue en $a$.

### 2èm cas :

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ existe et $a \notin D_f$.
Dans ce cas on peut prolonger $f$ par continuité.

### Prolongement par continuité

$\tilde{f} : D_f \cup \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}; x \longmapsto \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in D_f \\ l = \tilde{f}(a) \text{ si } x = a \end{cases}$

- $f$ continue en $a \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$
- Toute somme, combinaison linéaire, produit, quotient (avec dénominateur non nul), de fonctions continues est une fonction continue.

### Tableau de limites

#### Addition

| $\lim(f) =$ | $l$ | $l$ | $l$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim(g) =$ | $l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim(f+g) =$ | $l + l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | F.I |

#### Produit

| $\lim(f) =$ | $l$ | $l \neq 0$ | $+\infty$ ou $-\infty$ | $0$ |
|---|---|---|---|---|
| $\lim(g) =$ | $l'$ | $+\infty$ ou $-\infty$ | $+\infty$ ou $-\infty$ | $+\infty$ ou $-\infty$ |
| $\lim(f \times g) =$ | $l \times l'$ | $+\infty$ ou $-\infty$ reglè de signes | $+\infty$ ou $-\infty$ reglè de signes | F.I |

### Quotient

| $\lim(f) =$ | $l$ | $l$ | $+\infty$ ou $-\infty$ | $l' \neq 0$ ou $+\infty$ ou $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ ou |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim(g) =$ | $l' \neq 0$ | $+\infty$ ou $-\infty$ | $l' \neq 0$ | $0$ | $0$ | $+\infty$ ou |
| $\lim(\frac{f}{g}) =$ | $\frac{l}{l'}$ | $0$ | $+\infty$ ou $-\infty$ reglè de signes | $+\infty$ ou $-\infty$ reglè de signes | F.I | F.I |

# Fonctions continues sur un intervalle

## Théorème des valeurs intermédiaires

Soit $f$ une fonction continue et $f(a) < f(b)$
$\forall y \in ]f(a), f(b)[, \exists c \in ]a, b[ \text{ tel que } y = f(c).$

## Corollaire du TVI

Soit $f$, une fonction continue strictement monotone sur un intervalle $I$. Alors $f$ est bijective de $I$ sur $J = f(I)$.

## Théorème des bornes atteintes

Une fonction continue sur un segment $[a, b]$ est bornée et atteint ses bornes.
$f([a, b]) = [m, M]$ où $m = \inf_{[a,b]} f$ et $M = \sup_{[a,b]} f$

## Bijection des fonctions continues strictement monotones sur $I$

Soit f une application continue sur $I$ :

- $f$ réalise une bijection sur $I$.

- $f^{-1}$ est continue, strictement monotone et de même sens sur $f(I) = J$.