Espaces vectoriels

#espace_vectoriel

Loi de composition interne

$+ : E \longrightarrow E; (u, v) \longmapsto u + v$

Loi de composition externe

$\cdot : \mathbb{K} \times E \longrightarrow E; (\lambda, u) \longmapsto \lambda u$

Définition

On appelle $\mathbb{K}.e.v$ un ensemble E muni de la loi interne et externe.

Sous-ensemble vectoriel

H de E est un $s.e.v$ si $(H, +, \cdot)$ est une $\mathbb{K}.e.v$.

$$H\ s.e.v \text{ de } E \Leftrightarrow \begin{cases} H \subset E \\ H \neq \varnothing \quad (\text{on vérifie que } 0_E \in H) \\ H \text{ stable par combinaison linéaire} \end{cases}$$

Sous-ensemble engendré

Par la famille finis $\{u_i\}_{i \in I}$ l'ensemble de combinaisons linéaires de vecteurs u_i.
Ce $s.e.v$ sera noté $vect(u_1, \ldots, u_n)$.

- Vérification : Soit $H = \{\text{Combinaison linéaire de } u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ H est un $s.e.v$ de E.

Intersection

Soit A et B $s.e.v$ alors $A \cap B$ $s.e.v$ de E

Familles finies de vecteurs

Famille génératrice

$(u_1, \ldots, u_n)$ est dit famille génératrice d'un $s.e.v$ F si $F = vect(u_1, \ldots, u_n)$.

- Tout famille contenant une famille génératrice d'un espace F est, elle même, famille génératrice.

Famille libre

La famille $(x_1, \ldots, x_2)$ est libre si $\forall(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p, \quad \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_p x_p = 0$
$\Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$

Famille lié

$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_p x_p = 0$ mais $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \neq (0, \ldots, 0)$

- Tout famille de polynômes non nuls de degrés distincts 2 à 2 (échelonnes) est libre.

Base, coordonnées

Une base est une famille libre et génératrice.
$B = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base d'une $\mathbb{K}.e.v$ de $E \Leftrightarrow$ pour tout vecteur x de E
$\exists!(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$.

Somme de deux $s.e.v$

Soit F et G deux $s.e.v$ de E.
$F + G = \{u \in E \;/\; \exists(u_F, u_G) \in F \times G \;;\; u = u_F + u_G\}$

- Si le couple est unique, alors on dit que la somme est directe :
  $F \oplus G \Leftrightarrow F \cap G = \{0_E\}$

Sous espaces supplémentaires

F et G de E supplémentaires $\Leftrightarrow E = F \oplus G$.