Fonctions d'une variable réelle

#analyse

Généralités

Applications

Une application est la donnée d'une ensemble de départ E, d'un ensemble d'arrive F, et d'une relation qui associe tout x de E à une élément de F :
$f : E \longrightarrow F; \quad x \longmapsto f(x)$

Application identique :

$Id_E : E \longrightarrow E; \quad x \longmapsto x$

Domaine de définition

Plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}$ ou on peut définir f.

Parité

Soit f définie sur D

Pair

Si $\forall x \in D,\ f(-x) = f(x)$

impaire

$f(-x) = -f(x)$

Périodicité

Soit f définie sur D, f de période T si :
$\forall x \in D,\ x + T \in D$ et $f(x+T) = f(x)$

Composition des applications

> **image composition des applications.jpg**

Plan d'etude d'une fonction

- Recherche du domaine de définition
- Réduction du domaine d'étude (parité, périodicité, symétries)
- Calcul de la dérivée, recherche de son signe. Tableau de variation (y compris limites aux bords)
- Mise en évidence d'éventuelles asymptotes

Asymptote horizontale

$\lim_{t \to \pm\infty} f(x) = b$ la droite d'équation $y = b$ est asymptote.

Asymptote vertical

$\lim_{t \to a} f(x) = \pm\infty$ la droite d'équation $x = a$ est asymptote.

Asymptote oblique

$\lim_{t \to \pm\infty} f(x) - ax - b = 0$ la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote.

Fonctions bijectives

Bijections

Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite bijective si:

$$\forall y \in F,\ \exists! x \in E \text{ tel que } y = f(x)$$

Dans ce cas $f^{-1} : F \longrightarrow E$ s'appelle la bijection réciproque de f.

$$\forall x \in E,\ \forall y \in F,\ y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

Bijection des fonctions continues strictement monotones sur un intervalle

Dérivation d'une fonction réciproque

On suppose que f est continue, strictement monotone sur I et réalise ainsi une bijection de I sur $J = f(I)$. Soit $x \in J$.
Si f est dérivable en $f^{-1}(x)$ et si $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en x et

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$