Géométrie de l'espace

#geometrie

- Un plan $\mathcal{P}$ dans l'espace n'a aucune orientation, il suffit de choisir un vecteur $\overrightarrow{k} \perp \mathcal{P}$
- Coordonnées cylindriques : (r, θ, z) : $\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \\ z = z \end{cases}$

Produit vectoriel

$\mathcal{P}$ plan contenant $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{k}$ unitaire et normal à $\mathcal{P}$.

- $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] \cdot \overrightarrow{k} = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\| \sin(\theta) \cdot \overrightarrow{k}$
- $\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\||\sin(\theta)|$ aire du parallélogramme.
- $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.
- $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ -(xz' - zx') \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = 0 \text{ et } \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = 0$

Produit mixte

$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w}$

- $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \text{ et } \overrightarrow{w}$ sont coplanaires.
- $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$ mesure le volume du parallélépipède.
- $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \lambda\overrightarrow{w_1} + \mu\overrightarrow{w_2}] = \lambda[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w_1}] + \mu[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w_2}]$

Plans

$$\begin{cases} x = x_A + s\alpha + t\alpha' \\ y = y_A + s\beta + t\beta' \\ z = z_A + s\gamma + t\gamma' \end{cases} \overrightarrow{AM} = s\overrightarrow{u} + t\overrightarrow{v}$$

- $ax + by + cz + d = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$
- $M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = 0$

Droites

$$\begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \\ z = z_A + t\gamma \end{cases}$$

- On a besoin de deux équations cartésiennes pour décrire une droite.

Projeté orthogonal

- $d(M, \mathcal{P}) = \dfrac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$
- $d(M, \mathcal{P}) = \dfrac{|\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n}|}{||\overrightarrow{n}||}$
- $d(M, \mathcal{P}) = \dfrac{|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u}|}{||\overrightarrow{u}||}$

Sphère

$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$

Cercle

Il faut une équation de sphère et une équation de plan.