# Espaces de dimension finie

#espace_vectoriel

Un espace vectoriel $E$ est de dimension finie / infinie s'il admet une famille génératrice finie / infinie.

### Théorème de la base extraite

De tout famille génératrice de $E$, on peut extraire une base.

### Théorème de la base incomplète

Soit $G$ une famille génératrice, il existé $G' \in G$ tel que $G'$ est une base de $E$.

## Dimension d'une espace de dimension finie

- Si une famille génératrice de $n$ vecteurs engendre une de $n+1$, la 2èm est lié.
- Soit $E$ une $\mathbb{K}.e.v$ et $\dim(E) = n$. Soit $F = (u_1, \ldots, u_p)$ :
  - $F$ est une base $\Rightarrow n = p$
  - Si $n = p$ : $F$ base $\Leftrightarrow F$ libre $\Leftrightarrow F$ génératrice.

## Rang d'une famille

$rg(u_1, u_2, \ldots, u_p) = \dim(vect(u_1, \ldots, u_p))$

- $rg(u_1, u_2, \ldots, u_p) = p \Leftrightarrow (u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est libre
- $rg(u_1, u_2, \ldots, u_p) = n \Leftrightarrow (u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est génératrice de $E$ $(\dim(E) = n)$

## $s.e.v$ de dimension finis

Soit $E$ une $\mathbb{K}.e.v$ et $F$ et $G$ $s.e.v$ de $E$ avec $\dim(E) = n$

- Si $\dim(F) = p$ alors $\dim(F) \leq \dim(E)$
- Soit $B_F$ une base de $F$. Si $p = n$. $B_F$ base de $E \Leftrightarrow vect(B_F) = E = F$

- $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$
- $E = F \oplus G \Leftrightarrow \begin{cases} \dim(F) + \dim(G) = \dim(E) \\ F \cap G = \{0\} \end{cases}$
- $E = F \oplus G \Leftrightarrow \exists$ une base $B$ de $E$ ; $B = B_F + B_G$

# Application linéaire de dimension finie

- Soit une $\mathbb{K}.e.v$ de $E$ de base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_p})$, soit $(y_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille de $p$ vecteurs d'un $\mathbb{K}, e, v$ $F$. $\exists! f : E \longrightarrow E$ tel que $\forall i, f(e_i) = y_i$.
- Une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ est entièrement déterminé par l'image des vecteurs d'une base $\mathcal{B}$ de $E$. $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F)$
- Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, soit $\mathcal{B} = (e_i)$ base de $E$, soit $E$ et $F$ de dimension finie. Si $Im(u)$ est de dimension finie :
  - $rg(u) = \dim(Im(u)) = rg(u(e_1), \ldots, u(e_p))$
  - $rg(u \circ v) \leq \min(rg(u), rg(v))$
  - $u$ injective $\Leftrightarrow u(\mathcal{B})$ est libre.
  - $u$ surjective $\Leftrightarrow u(\mathcal{B})$ génératrice de $F$.
  - $u$ bijective $\Leftrightarrow u(\mathcal{B})$ base de $F$.
  - $E$ et $F$ isomorphismes s'il existe une isomorphisme $u : E \longrightarrow F$
  - $E$ et $F$ isomorphismes $\Leftrightarrow \dim(F) = \dim(E)$
  - Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et si $\dim(E) = \dim(F)$
    - Alors $u$ injective $\Leftrightarrow$ $u$ surjective $\Leftrightarrow$ $u$ bijective.

## Formule du rang

$\dim(E) = \dim(\ker(u)) + \dim(Im(u))$