

# Mouvement dans un champ de force centrale conservatif

#chapitre26

#dynamique

#mecanique

## Champ de force central conservatif

### Force centrale

Une force  $\vec{f}$  appliquée à un point matériel  $M$  est centrale si sa droite d'action passe toujours par un point  $O$  fixe dans le référentielle d'étude  $\mathcal{R}$ .

### Conservative

$$\vec{f} = f_r(r)\vec{e}_r = -\frac{dE_p}{dr}\vec{e}_r \text{ avec } E_p = E_p(r)$$

### Rappel élastique

$$\vec{f} = -k(r - l_0)\vec{e}_r \quad E_p = \frac{1}{2}k(r - l_0)^2 + C$$

### Gravitation

$$\vec{f} = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{e}_r \quad E_p = -G\frac{Mm}{r} + C$$

### Electrostatique

$$\vec{f} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{r^2}\vec{e}_r \quad E_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{r} + C$$

### Conséquences

$$\frac{d\vec{\mathcal{L}}(O)}{dt} = 0 \quad \vec{\mathcal{L}}(O) = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z$$

- $\dot{\theta} > 0$  : trajectoire conique

## 1ère Loi de Kepler

Les planètes du système solaire orbitent autour du soleil selon des trajectoires elliptiques dont le soleil est un des foyers.

## 2ème Loi de Kepler

Loi des aires, l'aire balayée par le vecteur position d'un corps pendant une durée  $\Delta t$  est constante sur toute la trajectoire.

- $\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{C}{2}$  avec  $C = r^2\dot{\theta}$

## Etude énergétique

- Energie mécanique conservée :  $\vec{v}(r) = \sqrt{\frac{2(E_m - E_p(r))}{m}}$
- Energie potentielle effective :  $E_{p,eff} = E_p(r) + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2}$ 
  - $E_m \geq E_{p,eff}$

## Champ Newtonien

(Force gravitationnelle, de Coulomb)

$$\vec{f}(r) = \frac{k}{r^2} \vec{e}_r \quad E_p(r) = \frac{k}{r} \quad \dot{\theta} = cst \text{ mouvement uniforme}$$

## Mouvement circulaire

Système solaire par exemple

- $v = \sqrt{-\frac{k}{mr_0}} \quad \omega = \sqrt{\frac{GM}{r_0^3}}$

## 3ème Loi de Kepler

$$\frac{T^2}{r_0^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

- On remplace  $r_0$  par  $a$  pour une ellipse

- $E_c = -\frac{1}{2} \frac{k}{r_0} \quad E_p = \frac{k}{r_0} = -2E_c \quad E_m = \frac{k}{2r_0}$

## Mouvement elliptique

- Non uniforme  $E_c$  et  $E_p$  pas constantes

- $r = \frac{k \pm \sqrt{k^2 + 2mC^2 E_m}}{2E_m} \quad E_m = \frac{k}{2a}$

## Satellite géostationnaire

Un satellite ne peut pas être géostationnaire si son orbite n'est pas comprise dans le plan de l'équateur.