Variable aléatoire discrète finis

#probabilite

- Une variable aléatoire est une application qui, à une résultat ω, associe une nombre $X(\omega)$ $\begin{aligned} X : &\Omega \longrightarrow E \\ &\omega \longmapsto X(\omega) \end{aligned}$
- $X(\omega)$ ensemble de valeurs prises par X.

Loi de probabilité d'une variable aléatoire

- $P_x : P(X(\Omega)) \longrightarrow [0,1]; A \longmapsto P(X \in A)$

Méthode

Trouver $X(\Omega)$ et après trouver $P(X = x_i)$

Image par une fonction

$Y = g(x)$ est l'application $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; \omega \longmapsto g(X(\omega))$

Trouver la distribution de Y

- Déterminer $Y(\Omega) = \{y_j\} = \{g(x_i)\}$.
- Déterminer $P(Y = y_j) = \sum_{i \text{ tq } g(x_i) = y_j} P(X = x_i)$

Indépendance des variables

$X \text{ indépendant de } Y \Leftrightarrow P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$

Esperance

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$$

Théorème de transfert

$$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X=x)$$

- $E(aX+b) = aE(X)+b$ (linéaire)
- Si $X \leq Y$, alors $E(X) \leq E(Y)$ (croissante)
- $X \leq Y$ veut dire $\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \leq Y(\omega)$

Variance et écart-type

$$V(X) = E((X-E(X))^2)$$

- $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
- $V(aX+b) = a^2V(X)$

Lois discrètes usuelles

Variables uniformes

$$X \text{ VAR} \,; \begin{cases} X(\Omega) = E = \{x_i\}_{1 \leq i \leq n} \\ \text{et} \\ P(X = x_i) = \frac{1}{n} \end{cases}$$

- On le note $X \sim u(E)$

Loi de Bernoulli

$$X \text{ VAR} \,; \begin{cases} X(\Omega) = \{0,1\} \\ P(X=1) = p \in]0,1[\\ P(X=0) = q = 1-p \end{cases}$$

- $E(X) = p \; V(X) = pq$
- $X \sim B(p)$

Loi binomiale

Si on a n expériences indépendantes à 2 issues (Soit "succès " avec $P(\text{"succès"}) = p \in]0,1[$, soit "échec"). Si X est la VAR qui compte le nombre de succès, On a alors :

$$\begin{cases} X(\Omega) = [[0, n]] \\ P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \end{cases}$$

- $E(X) = np \; V(X) = npq$
- $X \sim \mathcal{B}(n, p)$

Inégalités probabilistes

inégalité de Markov

Soit X une VAR positive et $a > 0$

- $P(X \geq a) \leq \dfrac{E(X)}{a}$

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$\forall \varepsilon > 0$

- $P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{V(X)}{\varepsilon^2}$