Matrices et applications linéaires

#espace_vectoriel

Matrices d'une application linéaire dans des bases

Soit E de base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$, soit la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ vecteurs de E

- $M_B(u_1, \ldots, u_p)$ matrices dont la j-èm colonne est les coordonnées de u_j dans $\mathcal{B}$.
  Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, E de base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$, F de base $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_p)$
- $M_{BB'}(f)$ matrice dont la j-èm colonne est les coordonnées de $f(e_j)$ dans $\mathcal{B}'$

Coordonnées de l'image

$f \in \mathcal{L}(E, F)$, $A = mat_{BB'}(f)$

- $x \in E$ de $coord_B(x) = X_B$
- $y \in F$ de $coord_{B'}(y) = Y_{B'}$
- $y = f(x) \Leftrightarrow Y_{B'} = A\,X_B$
- Réciproquement : soit $f : E \longrightarrow F$, si $\exists A; f(x)$ de coord $Y_{B'} = A\,X_B$ alors f est linéaire et $A = mat_B B'(f)$

Matrices de combinaisons linéaires

$(f, g) \in \mathcal{L}(E, F)^2$

- $mat_{BB'}(f + g) = mat_{BB'}(f) + mat_{BB'}(g)$
- $mat_{BB'}(\lambda f) = \lambda mat_{BB'}(f)$
- L'application $mat_{BB'}$ est une isomorphisme.

Matrices de la composé

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "g"] & F \arrow[r, "f"] & G \\ B = \{e_i\} \arrow[rr, bend right, "f \circ g = f(g(x))"'] & B' = \{e'_i\} & B'' = \{e''_i\} \end{tikzcd}$$

- $mat_{BB''}(f \circ g) = mat_{B'B''}(f) \times mat_{BB'}(g)$

Matrice inversible et isomorphisme

$f \in \mathcal{L}(E, F)$

- f isomorphisme $\Leftrightarrow A$ inversible $\Rightarrow mat_{B'B}(f^{-1}) = (mat_{BB'}(f))^2$
- Si f endomorphisme de E, f automorphisme $\Leftrightarrow mat_B(f)$ inversible $\Rightarrow mat_B(f^{-1}) = (mat_B(f))^{-1}$

Application linéaire canoniquement associe à une matrice, rang d'une matrice

Tout matrice A peut être associe a une application linéaire. Cette application s'appelle application linéaire canonique associe à A.

Noyau, image et rang

Ces trois caractéristiques sont la même pour la matrice et pour l'application.

- Les colonnes de A engendrent l'image
- A inversible $\Leftrightarrow \ker(A) = 0 \Leftrightarrow$ les colonnes de A engendre l'espace.

Changement de bases

Soit E de base $B = (e_1, \dots, e_n)$, soit $B' = (u_1, \dots, u_p)$

- B' base de $E \Leftrightarrow \dim(E) = \dim(B')$ et $mat_B(B')$ inversible.

- $mat_B(u_1, \ldots, u_n) = P_{BB'}$: matrice de passage de B à B'.
- $P_{BB''} = P_{BB'} \times P_{B'B''}$
- $(P_{B'B})^{-1} = P_{BB'}$

Changement sur les coordonnées

- $X_B = P_{BB'} X_{B'}$
- $X_{B'} = P_{B'B} X_B$

Changement sur les matrices d'une application

- $f \in \mathcal{L}(E, F) \begin{cases} E \text{ de bases } B_1 \text{ et } B'_1 & P = P_{B_1 B'_1} \\ F \text{ de bases } B_2 \text{ et } B'_2 & Q = P_{B_2 B'_2} \end{cases}$
- $A = mat_{B_1 B_2}(f)$ alors $A' = Q^{-1} A P$
- Cas d'endomorphisme : $A' = P^{-1} A P$
- A et A' équivalentes : $A' = Q^{-1} A P$ P et Q inversibles.
- A et A' semblables : $A' = P^{-1} A P$ P inversible.