# Dérivabilité

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \left( \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) = \lim_{h \to 0} \left( \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right) \text{ avec } x = a + h$$

- Si $f$ dérivable en $a$, alors $f$ continue en $a$.
- $f$ dérivable en $a \Leftrightarrow$ elle admet une développement limité à l'ordre $1$ en $a$ : $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$
- Tangente à la courbe en $a$ : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
- Si $f$ dérivable en $f^{-1}(x)$ et si $f'(f(x)) \neq 0$, alors $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

# Propriétés des fonctions dérivables

## Théorème de Rolle

Soit $f$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ (avec $a < b$)

- Si $f(a) = f(b)$ alors $\exists c \in ]a, b[; f'(c) = 0$

## Accroissement finis

### Egalité

Soit $f$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Alors $\exists c \in ]a, b[; f(b) - f(a) = f'(c)(b - c)$

### Inégalité

Soit $f$ dérivable sur $I$, on suppose que $\exists K \geq 0; |f'(t)| \leq K$. Alors $\forall (x, y) \in I^2, |f(y) - f(x)| \leq K|y - x|$

## Fonctions de classe $C^1, C^p, C^\infty$

- Une fonction est de classe $C^1$ sur $I$ si $f$ est dérivable et $f'$ est continue sur $I$.

- Une fonction est de classe $C^p$ sur $I$ si $f$ est $p$ fois dérivable et $f^{(p)}$ continue sur $I$.

## Formule de Leibniz

Soit $f$ et $g$ définies et dérivables jusqu'à l'ordre $n$. $\forall n \in \mathbb{N}$ :
$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$

- Similaire à la Formules du binôme de Newton.

# Théorème de la limite de la dérive

- Si $f$ continue en $I$ et si $f'$ admet une limite finie en $a$, alors $f$ est dérivable en $a$ et $f'(a) = l = \lim_{x \to a} f'(x)$. $f'$ est alors continue en $a$.
- Si $f'$ admet un limite infinie en $a$, alors $f$ n'est pas dérivable en $a$