Polynômes

Opérations

- $\lambda A + \mu B = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) X^n$
- $\deg(A+B) \leq \max(\deg(A), \deg(B))$
- $AB = \sum_{n=0}^{+\infty} a_k b_{n-k} X^n$
- $\deg(AB) = \deg(A) + \deg(B)$

Divisibilité

P de $\mathbb{K}[X]$ irréductible si :

- $\deg(P) \leq 1$
- Seulement divisible par 1 et P.

Division euclidienne :

- $\exists (Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2; A = BQ + R$
- $\deg(R) < \deg(B)$

Racines

- a de $\mathbb{K}$ racine de P si $\tilde{P}(a) = 0$
- $P = Q(X-a) - \tilde{P}(a)$ avec $\tilde{P}(a) = 0$

Ordre de multiplicité

Le plus grand $m; (x-a)^m / P$

Polynôme scindé

Si il peut se mètre sur la forme de produits de polynômes de degré 1.

Relation entre coefficients et racines

- $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$
- $x_1 x_2 \ldots x_n = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n}$

Dérivation

$P = (X-a)^m$
Si $0 \leq k \leq m$ $P^{(k)} = \frac{m!}{(m-k)!}(X-a)^{m-k}$

Formule de Taylor

$$P = \sum_{k \in \mathbb{N}} \tilde{P}(\alpha) \frac{(X-\alpha)^k}{k!}$$

Formule de Mac-Laurin

$$P = \sum \tilde{P}(0) \frac{X^k}{k!}$$
a racine de $P \Leftrightarrow \tilde{P}(a) = \tilde{P}'(a) = \tilde{P}^{(m-1)}(a) = 0$ et $\tilde{P}^{(m)}(a) = 0$

Factorisation en $\mathbb{C}[X]$

- Tout polynôme non-constante de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins 1 racine.
- Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé.
- Tout polynôme de degré $n \geq 0$ admet exactement n racines.
- Les polynômes irréductibles sont de degré 1.

Factorisation en $\mathbb{R}[X]$

- Scindé dans $\mathbb{R}[X] \Leftrightarrow$ toutes ses racines sont réels
- Polynômes irréductibles : $\begin{cases} \text{dégré } 1 \\ \text{dégré } 2 \text{ discriminant négatif} \end{cases}$

Décomposition en éléments simples

- $F(X) = \frac{A(X)}{B(X)} = \frac{B(X)Q(X) + R(X)}{B(X)} = Q(X) + \frac{R(X)}{B(X)}$
- $\alpha_k = \frac{A(p_k)}{B'(p_k)}$