Déterminants

Déterminant d'une matrice carrée de taille n

Définition

$\exists!\, f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ qui vérifie

- $f(mat(C_1, \ldots, C_i + \lambda C_j, \ldots, C_n)) = f(mat(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_n)) + \lambda f(mat(C_1, \ldots$
- $f(mat(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_j, \ldots, C_n)) = -f(mat(C_1, \ldots, C_j, \ldots, C_i, \ldots, C_n))$
- $f(I_n) = 1$
  L'application f s'appelle déterminant et il est noté : det
- $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$

Propriétés

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

- Si A possède deux colonnes égales, $\det(A) = 0$.
- Si A possède deux colonnes proportionnelles, $\det(A) = 0$.
- Si les colonnes de A forment une famille liée, $\det(A) = 0$
- A inversible $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$
- Si A inversible, alors $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.
  Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
  Soit le système linéaire $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^n$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathbb{K}^n$:
- $\exists!$ solution $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$, dans ce cas, on parle d'un système de Cramer.
- $AX = O_{\mathbb{K}^n}$ admet une infinité de solutions $\Leftrightarrow \det(A) = 0$.

Calculs de déterminants

- Le déterminant est invariant par transvection : $C_i \leftarrow \lambda C_i + C_j$ ou $L_i \leftarrow \lambda L_i + L_j$.
- Le déterminant change de signe à chaque transposition : $C_i \leftrightarrow C_j$ ou $L_i \leftrightarrow L_j$.
- $\det(mat(C_1, \ldots, \alpha C_i, \ldots, C_n)) = \alpha \det(mat(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_n))$
- Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des coefficients sur la diagonale.
- Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Développement suivant une ligne ou une colonne en dimension 3

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

- On peut développer un déterminant suivant n'importe quelle ligne ou colonne si on respecte la règle des signes : $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$

Déterminant d'une famille de n vecteurs

Soit E une $\mathbb{K}.e.v$ de dimension n

- Déterminant d'une famille $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ dans la base B :
  $\det_B(u_1, u_2, \ldots, u_n)$
  Soit B une base de E
- Une famille B' de n vecteurs est base de $E \Leftrightarrow \det_B(B') \neq 0$

Déterminant d'un endomorphisme

C'est le déterminant de la matrice associe (le det ne dépend de la base)
Soit f et g deux éléments de $\mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

- $\det(f \circ g) = \det(f)\det(g)$
- $\det(id_E) = 1$
- $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$
- f automorphisme de $E \Leftrightarrow \det(f) \neq 0$ alors $\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}$