Applications linéaires

#espace_vectoriel

Applications linéaires, endomorphismes

Soit E et F deux $k.e.v$ et $f : E \longrightarrow F$
f est linéaire si : $\begin{cases} \forall (u,v) \in E^2, f(u+v) = f(u) + f(v) \\ \forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, f(\lambda u) = \lambda f(u) \end{cases}$

- On appelle l'ensemble $\mathcal{L}(E,F)$

Vocabulaire

Endomorphisme

$f : E \longrightarrow E$

Isomorphisme

$f : E \longrightarrow F$ avec f bijective

Automorphisme

$f : E \longrightarrow E$ avec f bijective

Noyau et image d'une application linéaire

Noyau

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$:
$\ker(f) = \{u \in E / f(u) = 0_F\} = f^{-1}(\{0_E\})$

- $u \in \ker(f) \Leftrightarrow f(u) = 0_F$
- f injective $\Leftrightarrow \ker(f) = \{0_F\}$

Image

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$:
$Im(f) = \{v \in F / \exists u \in E ; v = f(u)\}$

- $v \in Im(f) \Leftrightarrow \exists u \in E ; v = f(u)$
- f surjective $\Leftrightarrow \forall v \in F, v \in Im(f)$
- Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice finie de E, alors $Im(f) = vect(f(x_i)_{i \in I})$

Operations sur les applications linéaires

Soit f et g linéaires :
$f + g$ linéaire λf linéaire $f \circ g$ linéaire
f^{-1} linéaire

Endomorphismes

On peut utiliser le binôme pour $(f+g)^n$ si $f \circ g = g \circ f$

- Si f est une isomorphisme, f^{-1} est un isomorphisme.
- Si $f, g \in GL(E)^2$: $\begin{cases} f \circ g \in GL(E) \\ f^{-1} \in GL(E) \end{cases}$

Projecteurs

Si $E = F \oplus G \Rightarrow u = u_F + u_G$

- $p(u) = u_F$ projection de E sur F selon la direction de G
- p est une endomorphisme
- $u = u_F + u_G \Rightarrow u = p(u) + u - p(u)$
- Caractéristiques : $\ker(p) = G$ $Im(p) = F = \ker(p - Id)$
- $u \in F \Leftrightarrow p(u) = u$
- p projecteur $\Leftrightarrow \begin{cases} p \text{ endomorphisme} \\ p \circ p = p \end{cases}$

Symétries

Si $E = F \oplus G \Rightarrow u = u_F + u_G$
$s : u \longmapsto u_F - u_G$ symétrie par rapport à F selon la direction de G.

- $s = 2p - Id_E$
- $\ker(s) = \{O_E\}$ $Im(s) = E$
- Caractéristiques : $F = \ker(s - Id_E)$ $G = \ker(s + Id_E)$
- s symétrie $\Leftrightarrow \begin{cases} s \text{ endomorphisme} \\ s \circ s = Id \end{cases}$