Matrices

#matrice

On note une matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ avec n lignes et p colonnes

Opérations sur les matrices

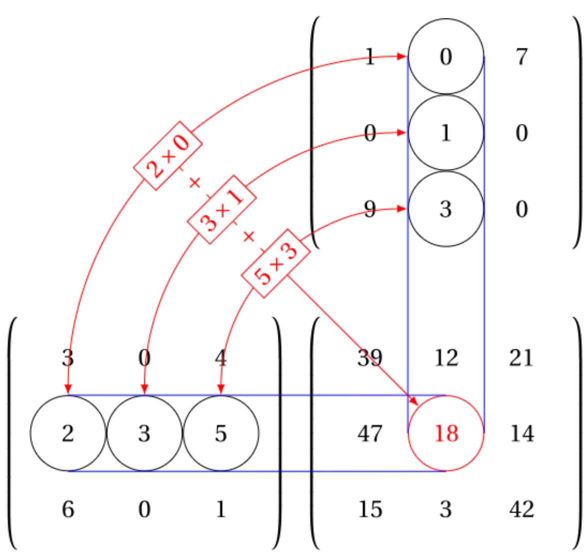
Addition de deux matrices

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$$

Multiplication par un scalaire

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$$

Multiplication matricielle



Soit $A = (a_{ik})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq k\leq p}}$ et $B = (b_{kj})_{\substack{1\leq k\leq p \\ 1\leq j\leq q}}$

- Le nombre de colonnes de A doit être égal au nombre de lignes de B.
- $C = AB = (c_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq q}}$

- $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$
- Les matrices sont distributives et associatives.
- $AB \neq BA$ en général.

Transposition

Si $A = (a_{ij})$ alors $A^T = (a'_{ij}) = (a_{ji})$

- $(A+B)^T = A^T + B^T$, $(\lambda A)^T = \lambda A^T$, $(\lambda A + \mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T$, $(AB)^T = B^T A^T$

Opérations élémentaires

Chaque opération élémentaire correspond à la multiplication par une matrice particulière. A Gauche pour les lignes, à droite pour les colonnes.

La transposition

Echange de 2 lignes : $L_i \leftrightarrow L_j$; de 2 colonnes $C_i \leftrightarrow C_j$

La transvection

Pour $\lambda \in \mathbb{K}$: $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ ou $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$

La dilatation

Pour $\lambda \in \mathbb{K}^*$: $L_i \leftarrow \lambda L_i$ ou $C_i \leftarrow \lambda C_i$

Systèmes linéaires

Soit le système $(S) \Leftrightarrow AX = B$

- Si on trouve le même nombre de rang et de pivot, alors A^{-1} existe.

Matrices Carrée

D'ordre n

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ Est l'ensemble des matrices carrées

- Diagonal si $\forall i \neq j,\ a_{ij} = 0$
- Triangulaires supérieurs si $\forall i > j, a_{ij} = 0$
- Triangulaires inferieurs si $\forall i < j, a_{ij} = 0$
- Symétriques si $A^T = A, a_{ij} = a_{ji}$
- Antisymétriques si $A^T = -A$
- Si $AB = BA$ Alors on peut appliquer le binôme de Newton.

Matrices carres inversibles

A est inversible si il existe B ; $A \times B = B \times A = I_n$

- Chacune des matrices des opérations élémentaires est inversible.
- A est inversible $\Leftrightarrow$ $AX = B$ a une unique solution.