Analyse asymptotique

Relation de comparaison

Le rapport $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ lorsque $x \longrightarrow a$

- f dominé par g : Si le rapport est borné $f(x) \underset{a}{=} O(g(x))$
- f négligeable devant g : $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0, \quad f(x) \underset{a}{=} o(g(x))$
- f équivalente à g : $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1, \quad f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$

Propriétés

- Si $f \sim g$ les limites de f et g en a sont identiques.
- Si $f \sim g$ alors ils sont de même signe près de a.
- Si$f \sim g$ et $h \sim \phi$ au voisinage de a.

$$\begin{cases} f \times h \underset{a}{\sim} g \times \phi \quad \text{et} \quad \dfrac{f}{h} \underset{a}{\sim} \dfrac{g}{\phi} \\ (f(x))^\alpha \underset{a}{\sim} (g(x))^\alpha \quad \alpha \in \mathbb{R} \text{ fixé} \\ \text{Il es faut : } f + h \sim g + \phi, \quad \psi(f(x)) \underset{a}{\sim} \psi(g(x)) \end{cases}$$

Développement limité

On approche une fonction f "au mieux possible" par un polynôme au voisinage de x_0.

- Si f admet une $DL_n(a)$, les coefficients sont uniques.
- Un $DL_n(a)$ donne par troncature $DL_p(a)$ où $p < n$.
- f admet un $DL_0(a) \Leftrightarrow f$ admet un limite en a.
- f admet un $DL_1(a) \Leftrightarrow f$ dérivable en a.

$$\bullet f(a+h) = \underbrace{f(a) + hf'(a) + h}_{\text{éq tangente}}\epsilon(h)$$

Formule de Taylor-Young

Soit f de classe C^p

- $f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!} + \ldots + \frac{f^{(p)}(x_0)}{p!} + h^p\epsilon(h)$
- $f(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o(x^p)$

Applications des Développements limités

- Calculs de limites, prolongement par continuité, calculs de dérivé.
- Position d'une courbe par rapport à sa tangente
- Asymptote
- Extremum local d'une fonction

Comparaison des suites