Fonctions de deux variables réelles

L'espace $\mathbb{R}^2$

$\forall u = (x, y), \quad \forall u' = (x', y')$

Produit scalaire

$u \cdot v = xx' + yy'$

Norme :

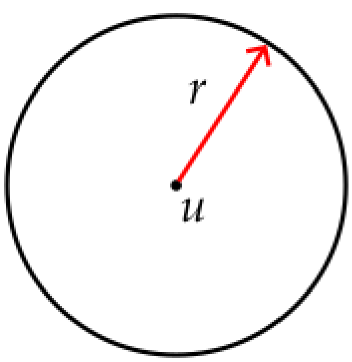
$\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Distance

$d(u, v) = \|v - u\| = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$

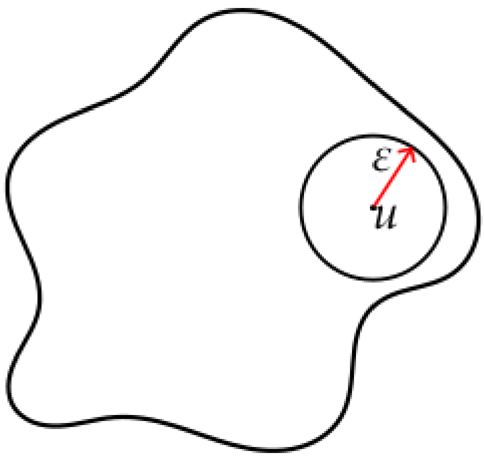
Boule ouverte

Soit u un vecteur et r un réel positif.
Boule ouverte de centre u et rayon r : $\mathcal{B}(u, r) = \{v \in \mathbb{R}^2 \frac{}{d(u,v)} < r\}$



Ouverte

Une partie de A est un ouverte de $\mathbb{R}^2$ si $\exists\varepsilon > 0$; $\mathcal{B}(u,\varepsilon) < A$

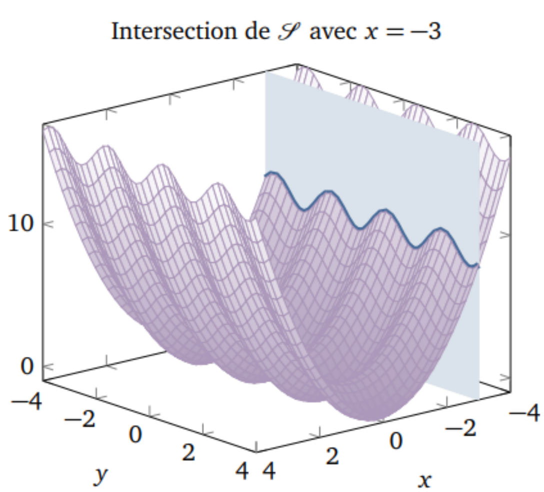


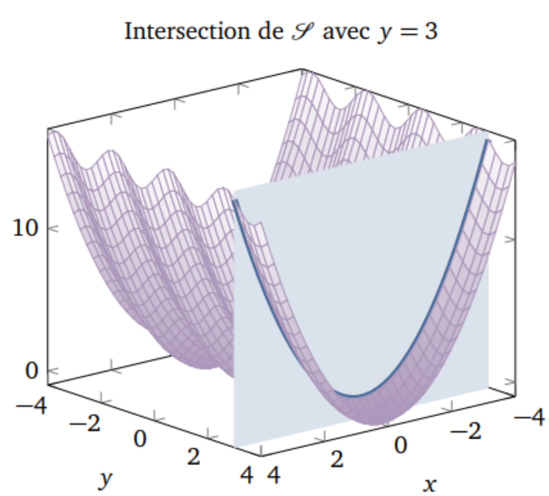
Fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}^2$, limite, continuité

Applications partielles

Fonction f de $\mathbb{R}^2, A \subset \mathbb{R}^2, a = (x_0, y_0)$
Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$

- $\varphi_{1,a} : x \longmapsto f(x, y_0)$
- $\varphi_{2,a} : x \longmapsto f(x_0, y)$
- Les courbes de $\varphi_{1,a}$ et $\varphi_{2,a}$ sont les sections de la surface $z = f(x,y)$ par les plans $y = y_0$ et $x = x_0$.





Continuité

f continue en a si : $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0$; $\forall u \in A,\ \|u - a\| \leq \alpha \Rightarrow (f(u) - f(a)) \leq \varepsilon$

- f continue en A si f continue en tout point de A.
- La somme, produit quotient, composé de deux fonctions continues est continue.
- f continue en $a = (x_0, y_0) \Rightarrow \begin{cases} \varphi_{1,a} \text{ continue en } x_0 \\ \varphi_{2,a} \text{ continue en } y_0 \end{cases}$
    - La réciproque est fausse.

Calcul différentiel

Applications définies sur un ouverte U de $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

Dérivées partielles premières

(sous réserve d'existence)

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t}$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t}$
- L'existence des dérivées partielles 1èrs n'implique continuité en ce point.

Fonctions de Clase C^1

f de classe C^1 en a, si $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues en a.

- La somme, produit, quotient des fonctions de classe C^1 est une fonction de classe C^1.
- Soit f de classe C^1 sur U et $a = (x_0, y_0) \in U$. f admet un $DL_1(a)$:

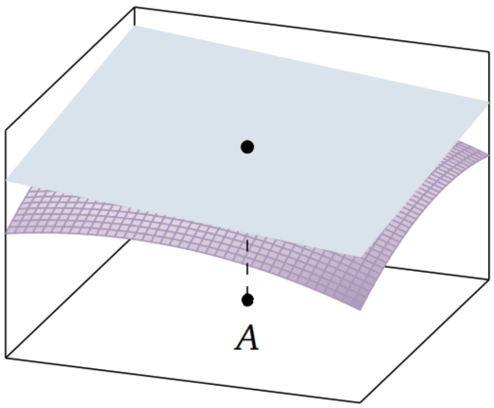
$$f(x_0 + h, y_0 + k) = \underbrace{f(x_0, y_0)}_{\text{Partie constante}} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k}_{\text{Partie linéaire}} + \underbrace{o(\|(h, k)\|)}_{\text{reste}}$$

Approximation linéaire - différentielle

L'application $(h, k) \longmapsto f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ peut être approximée par l'application linéaire : $(h, k) \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k$. C'est la différentielle de f au point a.

Interprétation géométrique

Plan tangente : $z = f(x_0, y_0) + (x - x_0)\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$



Gradient

Le gradient de f (classe C^1) en a est le vecteur : $\nabla f(x_0, y_0) = (\dfrac{\partial f}{\partial x}(a), \dfrac{\partial f}{\partial y}(a))$

- Définie la direction dans laquelle f croît le plus vite.

Dérivées partielles et composée

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur, on appelle dérivé de f en a (s'il existe) : $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(a + t \cdot \overrightarrow{u}) - f(a)}{t}$

- Si f de classe C^1 sa dérivée en a selon $\overrightarrow{u}$ est :
  $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(a + t \cdot \overrightarrow{u}) - f(a)}{t} = \boxed{\nabla f(a) \cdot \overrightarrow{u}}$

Règle de la chaîne

Soit U un ouverte de $\mathbb{R}^2$ et $I \subset \mathbb{R}$
$f : U \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ (x, y) \longmapsto f(x, y)$ de classe C^1
$\gamma : I \longrightarrow U\ ;\ t \longmapsto (x(t), y(t))$

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\gamma"'] \arrow[rr, bend right, "f \circ \gamma = F"'] & U \arrow[r, "f"'] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$$F'(t) = (f(x(t), y(t)))' = x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y't\frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))$$

Soit U et V deux ouvertes de $\mathbb{R}^2$

$f : U \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ (x, y) \longmapsto f(x, y)$ de classe C^1

$g : V \longrightarrow U\ ;\ (u, v) \longmapsto (\varphi(u, v), \psi(u, v))$ classe C^1

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "g"'] \arrow[rr, bend right, "F"'] & U \arrow[r, "f"'] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Alors $F = f \circ g$ de classe C^1

En posant $(\varphi(u, v), \psi(u, v)) = (x(u, v), y(u, v))$

$F(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial F}{\partial v} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v} \end{cases}$$

Extremum local

Point critique

Soit f de classe C^1 sur U

Un point $a \in U$ tel que $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a) = 0 \end{cases}$ s'appelle point critique de f.

Présence de extremum

Si f présente un extremum local en $a \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a) = 0 \end{cases}$

- La réciproque est fausse