Régime sinusoïdal

#chapitre13

Etude spectral d'une signal

Principe de Fourier

$$s(t) = \sum_i s_i(t) = \sum_i A_i \cos(2\pi f_i t + \varphi_i)$$

- s_i composante spectrale
- ensemble de f_i : spectre

Signal périodique

$$s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_s t + \varphi_n)$$

- A_0 est égal a la moyenne.
- à $n = 1$: même fréquence que $s(t)$, fréquence fondamental
- à $n \geq 2$: harmonique de rang n.
- Si le signal est symétrique en monté et en descente, les termes n pair sont nulles.
- Plus la fonction périodique a des domaines de variation rapides et plus les termes d'ordre élevés sont présents.

Moyenne

$$< s(t) >= \frac{1}{T_s} \int_{1 \text{ période}} s(t) dt$$

Valeur efficace

Grandeur continue donnant le même effet Joule moyen que la grandeur.

$< s(t) >= \dfrac{1}{T}$

Signal périodique :

$S_{eff} = \sqrt{< s^2(t) >}$

Signal harmonique :

$S_{eff} = \frac{S}{\sqrt{2}}$

Théorème de Parceval

L'énergie transportée par un signal périodique est égal à l'énergie transportées par ses harmoniques.

$S_{eff}^2 = S_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} s_{n,eff}^2$

Régime sinusoïdal forcé

Système excité par une entrée sinusoïdal

$\dot{s}(t) + \frac{1}{\tau} s(t) = k\cos(\omega t + \varphi_e)$
$\ddot{s}(t) + 2\xi\omega_0\dot{s}(t) + \omega_0^2 s(t) = k\cos(\omega t + \varphi_e)$

Réponse

$s(t) = S\cos(\omega t + \varphi)$

Notation complexe

$Re(\underline{x}(t)) = x(t)$

- $\underline{x}(t) = Xe^{j(\omega t + \varphi)}$ et $\underline{X} = Xe^{j\varphi}$
- $\underline{x}(t) = \underline{X}e^{j\omega t}$
- $X = |\underline{x}(t)| = |\underline{X}|$ $\varphi = \arg(\underline{X})$

Dérivation

$\dot{\underline{x}}(t) = j\omega\underline{x}$

Intégration

$$\int \underline{x}(t) = \frac{1}{j\omega}\underline{x}$$

Déphasage

$$\varphi_{y/x} = \varphi_y - \varphi_x$$

- $\varphi_{y/x} = \arg\left(\frac{\underline{Y}}{\underline{X}}\right)$ $\varphi_{y/x} = \arg\left(\frac{\underline{y}(t)}{\underline{x}(t)}\right)$

Impédance complexe

- $i(t) = I\cos(\omega t + \varphi_i)$ $\underline{i}(t) = Ie^{j(\omega t+\varphi_i)}$
- $u(t) = U\cos(\omega t + \phi_u)$ $\underline{u}(t) = Ue^{j(\omega t+\phi_u)}$
- $\underline{u}(t) = \underline{Z} \times i(t)$
- $\underline{Z_R} = R$ $\underline{Z_C} = \frac{1}{jC\omega}$ $\underline{Z_L} = jL\omega$

En série

$$\underline{Z_{eq}} = \sum_{k=1}^{N} \underline{Z_k} \quad \underline{Z_{eq}} = \underline{Z_1} + \underline{Z_2}$$

Parallèle

$$\frac{1}{\underline{Z_{eq}}} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\underline{Z_k}} \quad \frac{1}{\underline{Z_{eq}}} = \frac{1}{\underline{Z_1}} + \frac{1}{\underline{Z_2}}$$

Ponts diviseurs

- En série : $\underline{u_1} = \underline{U} \times \frac{\underline{Z_1}}{\underline{Z_{eq}}}$
- En parallèle : $\underline{i_1} = \underline{i} \times \frac{\underline{Z_1}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}}$