Equations différentielles linéaires

#calcul

Première ordre : $u(t)y'(t) + v(t)y(t) + w(t) = 0$

1èr étape :

On normalise l'équation.

$$\bullet \quad y'(t) + a(t)y(t) = b(t) \tag{E}$$

$$\bullet \quad y'(t) + a(t)y(t) = 0 \tag{H}$$

Solutions : $\boxed{y_h : t \longmapsto Ce^{-A(t)}}$ Avec A une primitive de a

Problème de Cauchy

$\begin{cases} y'(t) + a(t)y(t) = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

Solution unique : $\boxed{y_c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} : t \longmapsto y_0 e^{-A(t)+A(t_0)}}$

2èm étape :

- Si $b(t)$ est un polynôme : $y_p(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$
- Si $b(t) = e^{mt}$: $y_p(t) = \alpha e^{mt}$
- Si $b(t) = P(t)e^{mt}$: $y_p(t) = Q(t)e^{mt}$ avec $P(t)$ et $Q(t)$ polynômes
- Si $b(t) = \alpha_1 \cos(\beta t) + \alpha_2 \sin(\beta t)$: $y_p(t) = A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)$

Principe de superposition

Si $b(t) = b_1(t) + b_2(t)$:
On pose $y_1' + a(t)y_1 = b_1$ et $y_2' + a(t)y_2 = b_2$
On a donc $y_p(t) = y_1(t) + y_2(t)$

Equations a valeur complexe

On a $b(t) = b_1(t) + ib_2(t)$: $y(t) = y_1(t) + iy_2(t)$

Variation de la constante

$y(t) = C(t)e^{-A(t)}$

Equation complète

$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

Second Ordre : $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d(t)$

Solution homogène

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0 \tag{H}$$

- Equation caractéristique :
$$ar^2 + br + c = 0 \tag{K}$$
- Si $\Delta > 0$: $y_h(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$
- Si $\Delta < 0$, $r_1 = \alpha + i\beta$: $y_h(t) = e^{\alpha t}(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t))$
- Si $\Delta = 0$: $y_h(t) = (C_1 t + C_2)e^{r_1 t}$

Solution particulière

De la forme $d(t) = Ae^{\lambda t}$

- Si λ pas de racine : $y_p(t) = \gamma e^{\lambda t}$
- Si λ racine simple : $y_p(t) = \gamma t e^{\lambda t}$
- Si λ racine double : $y_p(t) = \gamma t^2 e^{\lambda t}$

De la forme $d(t) = B\cos(\omega t)$ ou $B\sin(\omega t)$

- Si $i\omega$ pas de racine : $y_p(t) = \gamma \cos(\omega t) + \delta \sin(\omega t)$
- Si $i\omega$ est racine : $y_p(t) = \gamma t \cos(\omega t) + \delta t \sin(\omega t)$