Géométrie du plan

#geometrie

- $\mathcal{P}$: ensemble des points du plan de repère cartésienne$\mathcal{R} = (O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$
- $\mathcal{V}$: ensemble des vecteurs du plan de base$\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$
- Repère orthonormal $\mathcal{R}$ direct si pour passer de $\vec{e_1}$ à $\vec{e_2}$ on fait $+\frac{\pi}{2}$ dans le sens trigo.

Changement de repère

On part de l'égalité $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$

- $\overrightarrow{OO'} = a\vec{e_1} + b\vec{e_2}$
- $\vec{e'_1} = \alpha\vec{e_1} + \beta\vec{e_2}$
- $\vec{e'_2} = \gamma\vec{e_1} + \delta\vec{e_2}$

Coordonnées polaires

- $x = r\cos(\theta)$
- $y = r\sin(\theta)$

Produit scalaire

- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\| \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overline{OA} \cdot \overline{OH}$
- $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\|\overrightarrow{u}\|^2 = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}$

Produit mixte

- $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\| \sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = \overline{OA} \cdot \overline{HB}$
- Aire du triangle OAB : $\frac{1}{2}[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}]$
- $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ colinéaires $\Leftrightarrow$ $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = 0$

- A, B et C alignes $\Leftrightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = 0$
- $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = -[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}]$
- $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = xy' - yx' = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$

Droites du plan

Soit la droite D passant par $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et dirigé par $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

- $M \in D \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ colinéaire à $\overrightarrow{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \end{cases}$

Equation de la droite

- $M \in D \Leftrightarrow [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}] = 0 \Leftrightarrow \beta x - \alpha y + \alpha y_A - \beta x_A = 0.\ ax + by + c = 0$
  $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$
- $M \in D \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$

Projeté orthogonal d'un point sur une droite

$d(M, D) = MH$

- $HM = \dfrac{|\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AM}|}{||\overrightarrow{n}||} = d(M, D)$
- $HM = \dfrac{|[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM}]|}{||\overrightarrow{u}||} = d(M, D)$
- $HM = \dfrac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Cercles dans le plan

Cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon $R > 0$.

- $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

- $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$