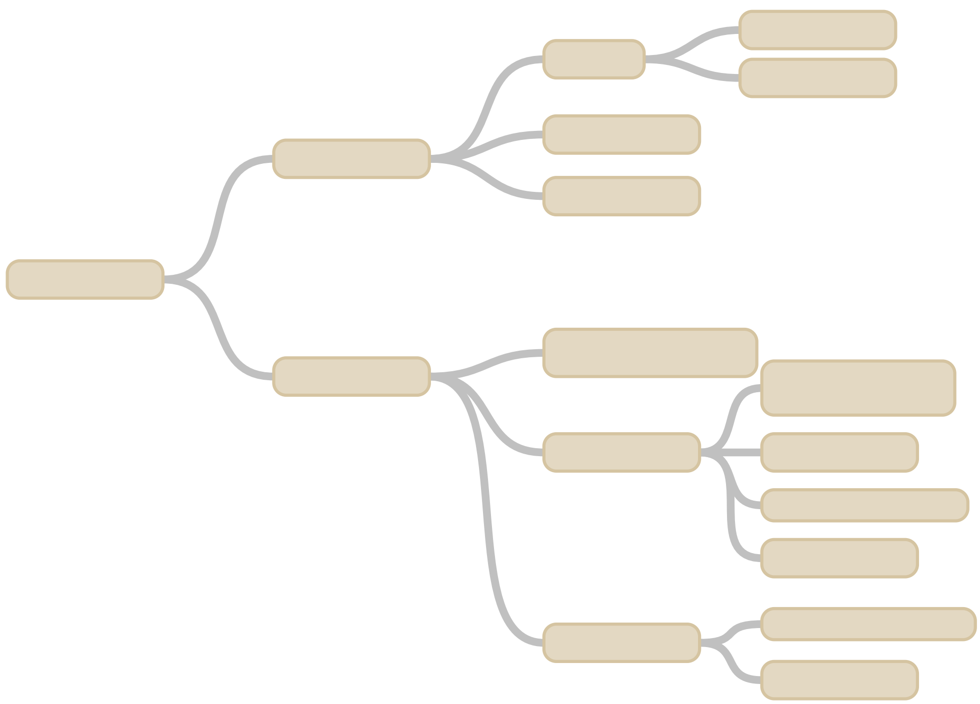
Séries numériques

#suites

Graph Séries numériques



Séries à termes réels ou complexes

Définition

- Série de terme général u_n : $(\sum u_n)$
- Somme partielle d'ordre n de la série : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

Repasser de S_n à u_n

$$\begin{cases} u_0 = S_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, S_n - S_{n-1} = u_n \end{cases}$$

Convergence

- $(\sum u_n)$ convergente si (S_n) converge.
- $\forall z \in \mathbb{C} \quad \left(\sum \frac{z^n}{n!}\right)$ converge et : $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$

Somme de la série

$$l = \lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$$

Propriétés

- $\forall \lambda, \quad (\sum u_n)$ et $(\sum \lambda u_n)$ sont de la même nature (convergent ou divergent).
- Si convergentes :
  - $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$
  - $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n + v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$
- Si $(\sum u_n)$ converge alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$ (réciproque fausse)
- Si $\lim_{n \to +\infty} u_n \neq 0$ alors $(\sum u_n)$ est grossièrement divergente.
- (u_n) converge $\Leftrightarrow \sum (u_{n+1} - u_n)$ converge.

Théorème des séries alternes

Soit (u_n) une suite réelle, décroissante, convergente vers 0.

- Alors la série $\sum (-1)^n u_n$ converge.

Séries à termes positifs $(\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0)$

- Soit $(\sum u_n)$ une série à termes positifs, il converge $\Leftrightarrow$ (S_n) est majorée.

Théorème de comparaison des séries à terme positifs

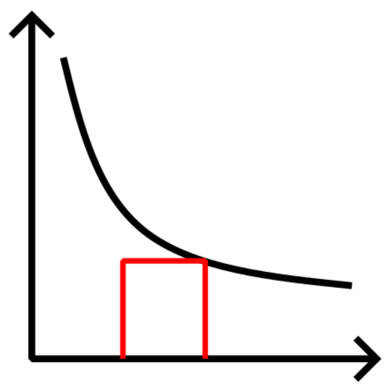
- Si $u_n \sim v_n$, les deux positives : la convergence de $(\sum v_n)$ est de même nature que la de $(\sum u_n)$.

- Si a partir d'un rang n_0 $u_n \leq v_n$ et si $(\sum v_n)$ converge alors $(\sum u_n)$ converge.
- Si $u_n \underset{+\infty}{=} O(v_n)$ ou $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

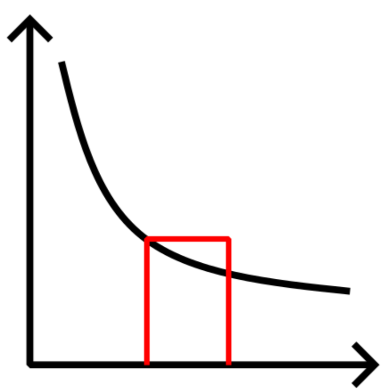
Comparaison série-intégral

Soit f continue, positive et décroissante :

- $\displaystyle\int_{n_0}^{n+1} f(t)dt \leq \sum_{k=n_0}^{n} f(k) \leq f(n_0) + \int_{n_0}^{n} f(t)dt$
- Majoration pour convergence :



- Minoration pour divergence :



Série de Riemann

$\left(\sum \frac{1}{n^\alpha}\right)$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$

Séries absolument convergentes

$(\sum u_n)$ est absolument convergente (est donc convergente) si $(\sum |u_n|)$ converge.

- $(\sum |u_n|)$ est une série a terme positive.
- Si $(\sum u_n)$ est une série absolument convergente alors $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$

Théorème de comparaison

- Si $u_n \underset{+\infty}{=} O(v_n)$ alors la converge absolue de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$.
- Si a partir d'un rang n_0 $|u_n| \leq |v_n|$ et si $(\sum v_n)$ converge absolument alors $(\sum u_n)$ converge absolument.
- Si $u_n \sim v_n$ la convergence absolue de $(\sum v_n)$ implique celle de $(\sum u_n)$.

Règle de d'Alembert

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe qui ne s'annule pas. On suppose que la suite $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ tend vers $l \in \mathbb{R} \cup +\infty$

- Si $l < 1$ alors $\sum u_n$ converge absolument.
- Si $l > 1$ alors $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes

Produit de Cauchy

Le produit de Cauchy des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ est la série $\sum w_n$ où $\forall n \in \mathbb{N}$

- $w_n = \sum_{n\geq 2} u_p v_p = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$

Théorème

Si les séries à termes réels ou complexes $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent absolument, alors la série produit de Cauchy $\sum w_n$ converge absolument et :

- $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$