Intégration

#calcul

- $\int_a^b f(t)dt = 0$ si $a = 0$
- $\int_{[a,b]} f \geq 0$
- Soit $f(t) \leq g(t)$ alors $\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g$ si et seulement si les bornes sont dans le bon sens.

Valeur moyenne

$$\exists c \in [a,b]; \quad \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt = f(c)$$

Approximation d'une intégral

Sommes de Riemann

- $G_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$
- $D_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$
- $x_i = (a + i\frac{b-a}{n})$
- normalement $a = 0$ et $b = 1$

Calcule intégral

$\phi : x \longmapsto \int_a^x f(t)dt$ unique primitive de f qui s'annule en a.
$\phi'(x) = f(x)$

Intégration par partie

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_b^a - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Changement de variable

On pose le changement, bornes, élément différentielle.

Périodicité et symétrie

Si f est paire : $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$

Si f est impaire : $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$

Si f de période T : $\begin{cases} \int_a^b f(t)dt = \int_{a+T}^{b+T} f(t)dt \\ \text{et} \\ \int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt \end{cases}$

Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit $P \in \mathbb{N}$, f de classe C^{p+1} sur I, $\forall (x,a) \in I^2$

$M_{p+1} = \sup |f^{(p+1)}(t)|$

- $|f(x) - \sum_{k=0}^{p} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)| \leq \frac{M_{p+1}|x-a|^{p+1}}{(p+1)!}$

Extension au valeurs complexes

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} Re(f) + i\int_{[a,b]} Im(f)$$