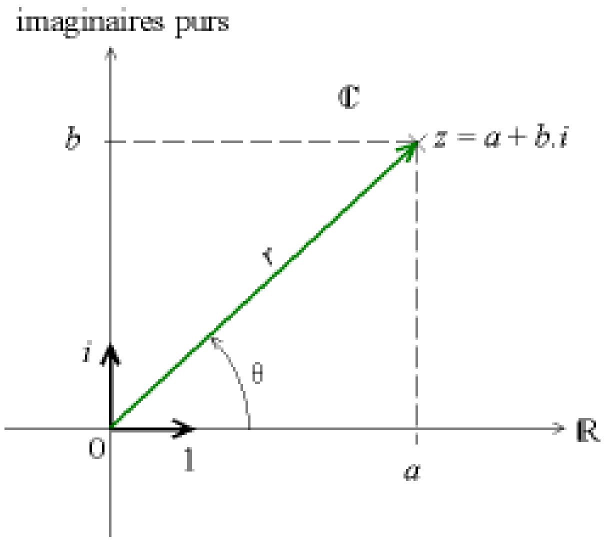
Nombres complexes



Ecriture algébrique

Conjugué

$\overline{z} = a - ib$

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
- $= \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$
- $Re(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$
- $Im(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$

Module

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$

- $|z \cdot z'| = |z||z'|$
- $|z|^2 = \overline{z}z$

- $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$
- $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2} = \dfrac{a - ib}{a^2 + b^2}$
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$
- $|z - z''| \leq |z - z'| + |z' - z''|$

Nombres complexes de module 1

Ensemble $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \setminus |z| = 1\}$

- Dans le plan, $\mathbb{U}$ est représenté par le cercle trigonométrique

Forme trigonométrique

$\cos(\theta) + i\sin(\theta) = e^{i\theta}$

- $|e^{i\theta}| = 1$
- $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Leftrightarrow \theta = \theta' + 2k\pi$

$e^{i\pi} = -1$	$e^{i2\pi} = 1$	$e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

Relations d'Euler

$\forall \theta \in \mathbb{R}$

- $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$
- $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

L'angle moitie

$1 + e^{i\theta} = 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$	$1 - e^{i\theta} = -2i\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$
$e^{ip} + e^{iq} = 2\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)e^{i\frac{p+q}{2}}$	$e^{ip} - e^{iq} = 2i\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)e^{i\frac{p+q}{2}}$

Formule de Moivre

$\forall\theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}$
$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n$

Forme trigonométrique

$z = |z|e^{i\theta} = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$

Argument

$\theta = \arg(z)$

$\cos(\theta) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$	$\sin(\theta) = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$	$\tan(\theta) = \dfrac{b}{a}$
$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$	$\arg(z^n) = n\arg(z)$	$\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$

Module

$\rho = |z|$

- $\overline{z} = |z|e^{-i\theta}$
- $z^{-1} = \dfrac{1}{|z|}e^{i\theta}$
- $zz' = |z||z'|e^{i(\theta+\theta')}$
- $a\cos(t) + b\sin(t) = A\cos(t-\varphi)$

Equations

Racine carre de un polynôme complexe

Soit $X = \alpha + \beta i$ on pose $\delta = r + si$
et $\delta^2 = X \Leftrightarrow \begin{cases} r^2 + s^2 = |X| \\ r^2 - s^2 = Re(x) \\ 2rs = Im(x) \end{cases}$

Equations de 2èm dégrée

si $\Delta \neq 0$: $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$

- si Δ réel positif : $z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- si Δ réel négatif : $z_1 = \frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$
  si $\Delta = 0$: $z = \frac{-b}{2a}$

Racines n° de l'unité et d'un nombre complexe a

Solutions de l'equation $z^n = 1$:

$\mathbb{U}_n = \{\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \setminus k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\}$

Resolution de $z^n = a$

$z_k = \sqrt[n]{\beta} e^{i(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n})} = \sqrt[n]{\beta} e^{i\frac{\alpha}{n}} \omega_k$

Exponentielle complexe

Soit $z = a + ib$

- $e^z = e^{a+ib} = e^a \cdot e^{ib} = e^a(\cos(b) + i\sin(b))$
- $|e^z| = e^a$
- $\arg(e^z) = b$

Nombres complexes et géométrie plane

Distance entre deux points

$d(M, M') = |z' - z|$

Mesure d'un angle

$(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}) = \arg(\dfrac{z_2}{z_1})$
$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg(\dfrac{c-a}{b-a})$

Alignement

M, M' et O sont alignés $\Leftrightarrow \arg(z) = \arg(z')[\pi] \Leftrightarrow \dfrac{z'}{z} \in \mathbb{R}$

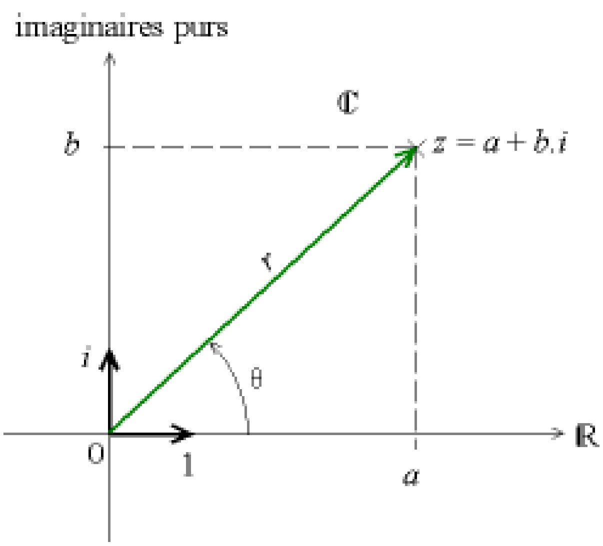
A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow Z = \dfrac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Z = \overline{Z}$

Orthogonalité

$OM \perp OM' \Leftrightarrow \arg(z) = \dfrac{\pi}{2} + \arg(z')[\pi] \Leftrightarrow \dfrac{z'}{z} \in i \cdot \mathbb{R}$

$AB \perp CD \Leftrightarrow Z = \dfrac{d-c}{b-a} \in i \cdot \mathbb{R} \Leftrightarrow Z = -\overline{Z}$

Nombres complexes



Ecriture algébrique

Conjugué

$\overline{z} = a - ib$

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
- $= \overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

- $Re(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$
- $Im(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$

Module

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$

- $|z \cdot z'| = |z||z'|$
- $|z|^2 = \overline{z}z$
- $\left| \dfrac{z}{z'} \right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$
- $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2} = \dfrac{a - ib}{a^2 + b^2}$
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$
- $|z - z''| \leq |z - z'| + |z' - z''|$

Nombres complexes de module 1

Ensemble $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \setminus |z| = 1\}$

- Dans le plan, $\mathbb{U}$ est représenté par le cercle trigonométrique

Forme trigonométrique

$\cos(\theta) + i\sin(\theta) = e^{i\theta}$

- $|e^{i\theta}| = 1$
- $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Leftrightarrow \theta = \theta' + 2k\pi$

$e^{i\pi} = -1$	$e^{i2\pi} = 1$	$e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

Relations d'Euler

$\forall \theta \in \mathbb{R}$

- $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

- $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

L'angle moitie

$1 + e^{i\theta} = 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$	$1 - e^{i\theta} = -2i\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$
$e^{ip} + e^{iq} = 2\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)e^{i\frac{p+q}{2}}$	$e^{ip} - e^{iq} = 2i\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)e^{i\frac{p+q}{2}}$

Formule de Moivre

$\forall\theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}$
$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n$

Forme trigonométrique

$z = |z|e^{i\theta} = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$

Argument

$\theta = \arg(z)$

$\cos(\theta) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$	$\sin(\theta) = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$	$\tan(\theta) = \dfrac{b}{a}$
$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$	$\arg(z^n) = n\arg(z)$	$\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$

Module

$\rho = |z|$

- $\overline{z} = |z|e^{-i\theta}$
- $z^{-1} = \dfrac{1}{|z|}e^{i\theta}$
- $zz' = |z||z'|e^{i(\theta+\theta')}$
- $a\cos(t) + b\sin(t) = A\cos(t - \varphi)$

Equations

Racine carre de un polynôme complexe

Soit $X = \alpha + \beta i$ on pose $\delta = r + si$

et $\delta^2 = X \Leftrightarrow \begin{cases} r^2 + s^2 = |X| \\ r^2 - s^2 = Re(x) \\ 2rs = Im(x) \end{cases}$

Equations de 2èm dégrée

si $\Delta \neq 0$: $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$

- si Δ réel positif : $z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- si Δ réel négatif : $z_1 = \frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$
  si $\Delta = 0$: $z = \frac{-b}{2a}$

Racines n° de l'unité et d'un nombre complexe a

Solutions de l'equation $z^n = 1$:

$\mathbb{U}_n = \{\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \setminus k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\}$

Resolution de $z^n = a$

$z_k = \sqrt[n]{\beta} e^{i(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n})} = \sqrt[n]{\beta} e^{i\frac{\alpha}{n}} \omega_k$

Exponentielle complexe

Soit $z = a + ib$

- $e^z = e^{a+ib} = e^a \cdot e^{ib} = e^a(\cos(b) + i\sin(b))$
- $|e^z| = e^a$
- $\arg(e^z) = b$

Nombres complexes et géométrie plane

Distance entre deux points

$d(M, M') = |z' - z|$

Mesure d'un angle

$(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}) = \arg(\frac{z_2}{z_1})$

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg(\frac{c-a}{b-a})$

Alignement

M, M' et O sont alignés $\Leftrightarrow \arg(z) = \arg(z')[\pi] \Leftrightarrow \frac{z'}{z} \in \mathbb{R}$

A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow Z = \frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Z = \overline{Z}$

Orthogonalité

$OM \perp OM' \Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2} + \arg(z')[\pi] \Leftrightarrow \frac{z'}{z} \in i \cdot \mathbb{R}$

$AB \perp CD \Leftrightarrow Z = \frac{d-c}{b-a} \in i \cdot \mathbb{R} \Leftrightarrow Z = -\overline{Z}$