Medición de la altura del Campanil

Gabriel Hernández Bello[1]

[1] *Universidad de Concepción, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Ciencias Físicas.*

Abstract

A partir de las mediciones de distancias y ángulos calculadas con una herramienta de propia fabricación se obtendrá una estimación de la altura del Campanil de la Universidad de Concepción.

Palabras Claves — Campanil, Trigonometría, Aproximación Lineal.

1. Introducción

El Campanil de la Universidad de Concepción es un campanario icónico de la universidad y la ciudad chilena de Concepción [1]. Fue construido hacia 1943 gracias a la iniciativa de Enrique Molina Garmendia, quien apasionado por la Universidad de California, en Berkeley, esgrimía la idea de una *ciudad universitaria* abierta para todos los visitantes y en la que se levantara un imponente campanil. El proyecto del campanil fue elegido del arquitecto Enrique San Martín y posteriormente construido bajo la supervisión del Constructor Civil Juan Villa Luco. Se hizo de concreto armado, con 42 metros y 50 centímetros de altura, con escaleras en su interior y un balcón en la parte superior [2].
En el presente laboratorio, usaremos herramientas matemáticas y computacionales para calcular la altura del Campanil de la Universidad de Concepción.

2. Marco Teórico

2.1. Trigonometría

Etimológicamente la palabra trigonometría significa *medida de los triángulos*. En efecto, es la ciencia que estudia las relaciones que ligan los lados de un triángulo y aplican esas realciones al cálculo de los elementos desconocidos. En particular, la trigonometría se basa en el conocimiento de los ángulos de un triángulo que establecen conexiones llamadas *relaciones trigonométricas*. Las principales son el *seno, coseno* y la *tangente* [3].

3. Procedimiento Experimental y Resultados

Para calcular la altura del Campanil, diseñamos un instrumento sencillo para medir ángulos, compuesto por un transportador, una regla, un hilo y un objeto pesado 2. De esta forma, apuntamos el instrumento hacia la cima del Campanil, lo que provoca que el hilo (tensado por el peso) se desplace de su posición de equilibrio, formando un ángulo que medimos con el transportador. Además, usamos una hunicha para medir la separación entre el Campanil y la posción donde se mide el ángulo. Luego, estimamos la altura del Campanil para distintas distancias usando la siguiente fórmula:

$$D = d + L\tan(\alpha). \tag{1}$$

Donde D representa la altura del campanil, L la distancia entre campanil y el punto de medición del ángulo, d la distancia entre la base del campanil y el punto de observación del ángulo y α el ángulo obtenido con el instrumento de medición 1.

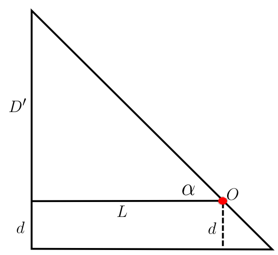

Figura 1: Diagrama de la medición de la altura del campanil. Se respresenta $D' = L\tan(\alpha)$, d la altura desde la base hasta el punto de observación O y L la distancia entre el campanil y el punto de medición del ángulo.

Figura 2: Herramienta de medición del ángulo α.

En el cuadro 1 se recogen los datos obtenidos para siete distancias y ángulos diferentes, donde se estimó el error de la altura del Campanil para cada medición de forma analítica con la siguiente fórmula:

$$\sigma^2 = \sigma_x^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \sigma_y^2 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \sigma_z^2 \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 + ... \quad (2)$$

α (rad)	L (m)	d (m)	D (m)
0.9250 ± 0.0087	30.0000 ± 0.0005	1.6000 ± 0.0005	41.41 ± 0.72
0.8550 ± 0.0087	35.0000 ± 0.0005	1.6000 ± 0.0005	41.86 ± 0.70
0.7850 ± 0.0087	40.0000 ± 0.0005	1.6000 ± 0.0005	41.57 ± 0.69
0.7330 ± 0.0087	45.0000 ± 0.0005	1.6000 ± 0.0005	42.11 ± 0.70
0.6810 ± 0.0087	50.0000 ± 0.0005	1.6000 ± 0.0005	42.08 ± 0.72
0.6280 ± 0.0087	55.0000 ± 0.0005	1.6000 ± 0.0005	41.56 ± 0.73
0.6100 ± 0.0087	57.0000 ± 0.0005	1.6000 ± 0.0005	41.44 ± 0.74

Cuadro 1: Ángulos y Distancias Medidas

4. Análisis

Los gráficos 3 y 4 presentan los datos obtenidos durante el proceso experimental junto a su ajuste lineal, representado por la línea punteada. Del gráfico 3 notamos que los datos se encuentran muy próximos entre si, con una desviación estándar de solo 0.3. Además, el ajuste lineal de los datos da como resultado una línea recta con una pendiente, aproximadamente nula, de 0.001 [m/rad]. Debido a esto, decidimos visualizar los datos en una escala más apropiada. Así, en el gráfico 4 la aproximación lineal muestra una notoria linea recta que estabiliza el valor de la altura del Campanil a 41.64 [m]. Lo anterior es de esperar, pues estamos comparando la altura del campanil para distintos valores del ángulo α. Cabe destacar que se seleccionaron solo siete datos, pues son suficientes para ajustar una recta que pase por todos los puntos y sus respectivos errores.

Paralelamente, observamos que según la ecuación 1 el valor $D - d = L\tan(\alpha)$ debe ser una constante, pues la altura del Campanil D es una constante (teóricamente) y no variamos d durante el proceso experimental. Esto nos permite validar el comportamiento de los datos verificando que las variables L y $\tan(\alpha)$ exhiben una relación inversamente proporcional. En efecto, en el gráfico 5 evidenciamos una relación lineal inversamente proporcional. Luego, concluimos que los datos obtenidos son coherentes.

En definitiva, considerando el valor al que converge la altura del Campanil según la aproximación lineal de los datos y el error asociado a este parámetro, estimamos la altura del Campanil D en este experimento como:

$$D = 41{,}64 \pm 1{,}31 [m].$$

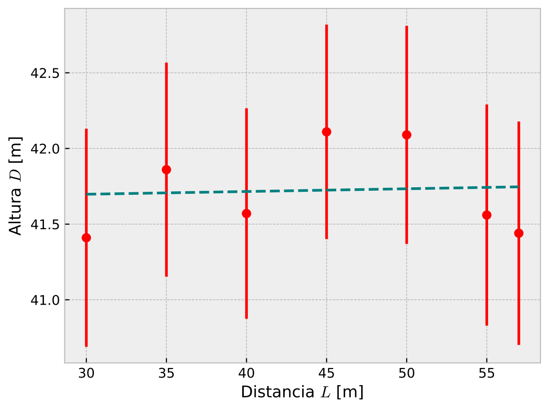

Figura 3: Gráfico de la altura del campanil para distintos valores del ángulo α.

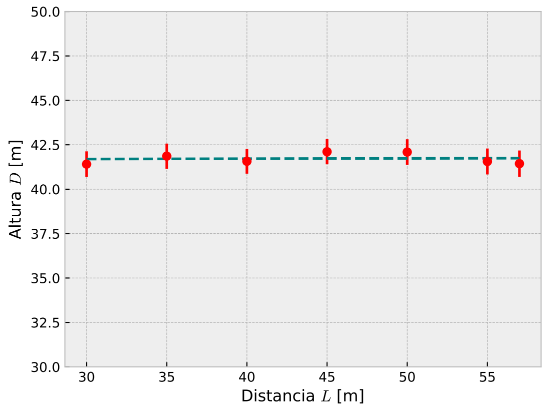

Figura 4: Gráfico de la altura del campanil para distintos valores del ángulo α con los límites en el eje vertical adecuados.

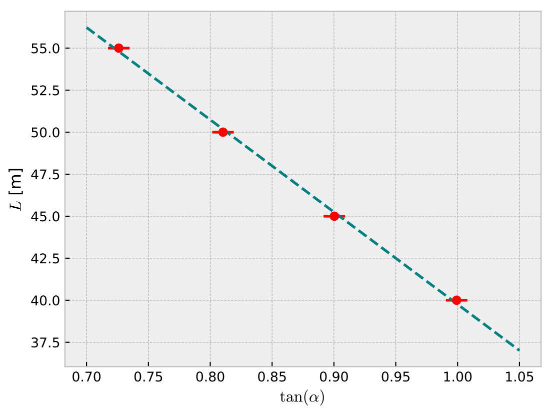

Figura 5: Gráfico de la distancia entre el Campanil y el punto de observación L respecto a la tangente del ángulo de elevación α.

Ahora bien, la altura del Campanil es un dato conocido. Con ello, es posible calcular el error absoluto y porcentual de nuestra estimación, de esta forma:

$$\epsilon_{abs} = |42{,}5[m] - 41{,}64[m]| = 0{,}86[m]$$
$$\epsilon_{rel} = \frac{0{,}86[m]}{41{,}64[m]} \cdot 100 = 2{,}06\,\%$$

Mostrando así la validez de la estimación realizada en este experimento.

5. Conlusión

En el análisis, demostramos la efectividad del método empleado para estimar la altura del campanil, viéndose reflejado en el bajo error absoluto y relativo de la medición. Sin embargo, observamos que el error asociado a la estimación de la altura del Campanil tiene un valor relevante de $\pm$ 1.31 [m], lo cual atribuimos a la falta de precisión en la medición durante el proceso experimental. A pesar de ello, los resultados obtenidos se acercan considerablemente al valor esperado, lo que destaca el tratamiento eficaz en el análisis de los datos junto a la gran capacidad y utilidad de las herramientas matemáticas utilizadas en la estimación de la altura del Campanil.

Referencias

[1] Colaboradores de Wikipedia. *Campanil (Universidad de Concepción)*. wikipedia. https://es.wikipedia.org/wiki/Campanil_(Universidad_de_Concepci%C3%B3n), 2024.

[2] Universidad de Concepción. *Campanil*. http://www2.udec.cl/plazaestudiante/breve_historia_Campanil.htm.

[3] Agustín Anfossi and Marco A Flores Meyer. *Trigonometría rectilínea*. Editorial Progreso, 1989.