Gráficas de funciones

EJEMPLO: Dibuje la gráfica de la función $f(x) = 3x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 18x + 15$. Encuentre los intervalos donde crece, decrece, concavidad, puntos extremos y de inflexión.

- *Intervalos donde crece, decrece y puntos extremos: se hace análisis de* $f'(x)$
- *Intervalos de concavidad y puntos de inflexión: se hace análisis de* $f''(x)$

$$f'(x) = 12x^3 - 6x^2 - 24x + 18 = (2x+3)(x-1)^2$$

	$-\infty$	$-3/2$		1	$+\infty$
$(2x+3)$	$-$	0	$+$		$+$
siempre es $+$ → $(x-1)^2$	$+$		$+$	0	$+$
$f'(x)$	$-$		$+$		$+$
$f(x)$	↘	mínimo	↗		↗

$$f \text{ crece en } \left]-\frac{3}{2}, +\infty\right[\text{ y decrece en } \left]-\infty, -\frac{3}{2}\right[$$
$$\text{Punto mínimo: } \left(-\frac{3}{2}, -\frac{273}{16}\right) \approx (-1.5, -17)$$

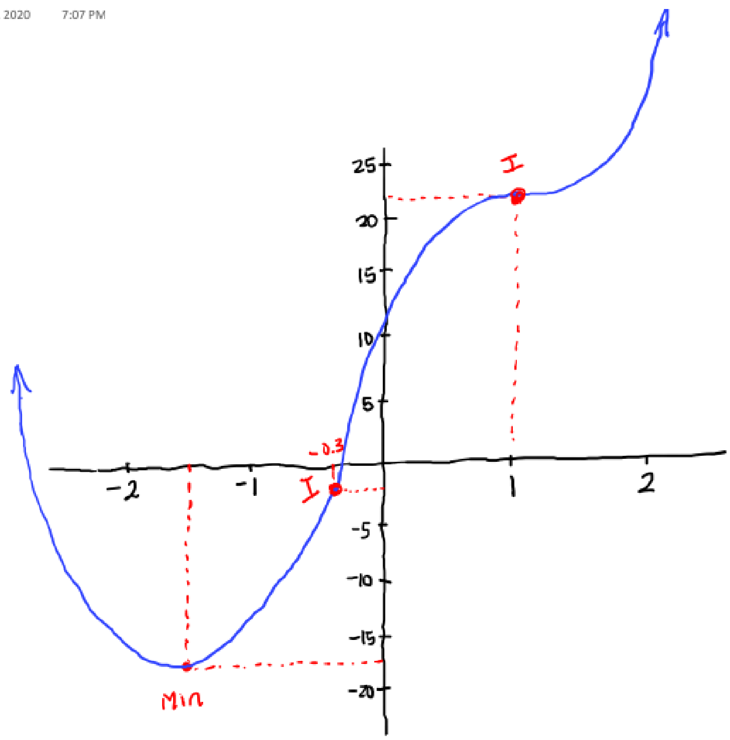
$$f''(x) = 36x^2 - 12x - 24 = 12(3x^2 - x - 2) = 12(3x+2)(x-1)$$

	$-\infty$	$-2/3$		1	$+\infty$
$(3x+2)$	$-$	0	$+$		$+$
$(x-1)$	$-$		$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$		$-$		$+$
$f(x)$	∪	P.I	∩	P.I	∪

$$f \text{ es cóncava hacia arriba en } \left]-\infty, -\frac{2}{3}\right[\text{ y }]1, +\infty[; \text{ cóncava hacia abajo en } \left]-\frac{2}{3}, 1\right[$$

$\text{Puntos inflexión: } \left(-\frac{2}{3}, -\frac{31}{27}\right) \approx (-0.3, -1.15) \text{ y } (1, 22)$

ıber 13, 2020 7:07 PM



EJEMPLO: Encuentre los intervalos de crecimiento y decrecimiento para la función $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$

** Funciones fraccionarias tienen asíntotas

$Asintota\ vertical$: $denominador = 0$; en $x = 2$

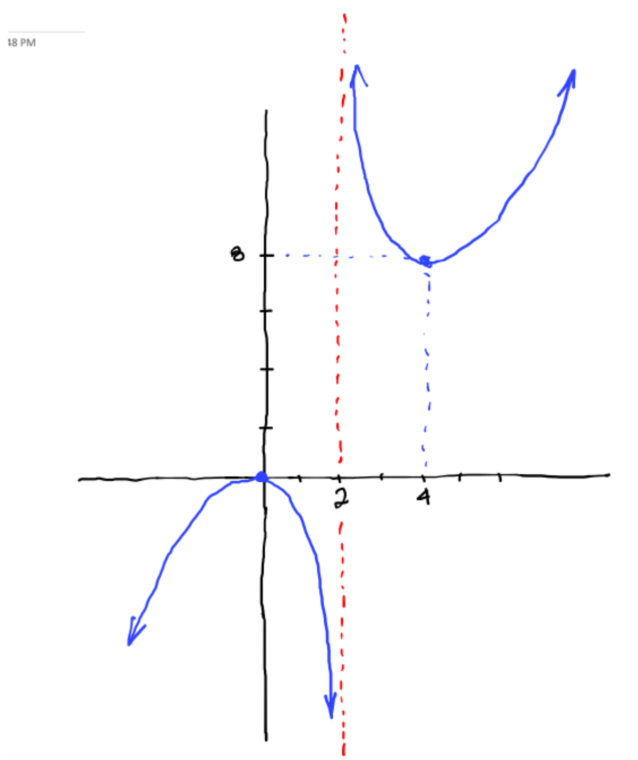
Analisis de la primera derivada

> ***Asíntota Vertical***: La línea $x = c$ es una asíntota vertical de una función $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ si $q(c) = 0$, pero $p(c) \neq 0$

$$f'(x) = \frac{2x(x-2) - x^2}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$$

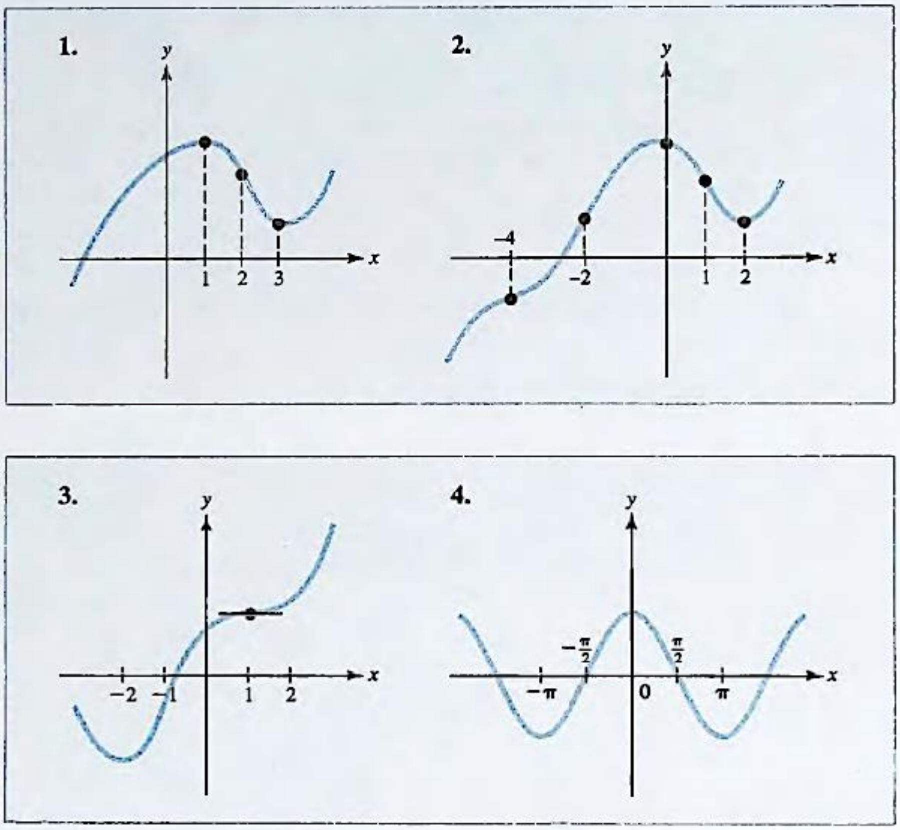
	$-\infty$ – 0	0	0 – 2	2	2 – 4	4	4 – $+\infty$
x	−	0	+		+		+
$x-4$	−		−		−	0	+
$(x-2)^2$	+		+		+		+
$f'(x)$	+		−		−		+
$f(x)$	↗	max	↘	A.V	↘	min	↗

$$Punto\ maximo:\ (0,0);\quad Punto\ minimo: (4,8)$$



EJEMPLO: en las siguientes gráficas determine dónde es positiva y dónde es negativa la primera derivada.

En los problemas 1 a 4 determine dónde es positiva y dónde es negativa la segunda derivada de la función.



1) $f'es + donde\ f\ crece$: $]-\infty, 1[\ y\ ]3, +\infty[$ $f'es - donde\ f\ decrece$: $]1,3[$ $f''es + donde\ f\ es\ concava\ arriba$: $]2, +\infty[$ $f''es - donde\ f\ es\ concava\ abajo$: $]-\infty, 2[$	2) $f'es + donde\ f\ crece$: $]-\infty, 0[\ y\ ]2, +\infty[$ $f'es - donde\ f\ decrece$: $]0,2[$ $f''es + donde\ f\ es\ concava\ arriba$: $]-4, -2[\ y\ ]1, +\infty[$ $f''es - donde\ f\ es\ concava\ abajo$: $]-\infty, -4[\ y\ ]-2, 1[$

EJEMPLO: Trazar la gráfica de $f(x) = \frac{x^2-4x}{x^2-4x+3}$ determinando la siguiente información

a) Intersecciones con los ejes coordenados *

b) Asíntotas verticales y asíntota horizontal

c) Análisis de la primera derivada para determinar puntos extremos e intervalos donde crece o decrece

$$f'(x) = -\frac{6\,(x-2)}{(x-3)^2(x-1)^2}$$

> ***Asíntota Horizontal***: La línea $y = b$ es una asíntota horizontal de una función $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ si al dividir $p(x) \div q(x)$ da un entero b

> Ejemplo de asintotas horizontales:
>
> $$f(x) = \frac{2x-1}{x+3}\ ;\ A.H:\ y = 2$$
>
> $$f(x) = \frac{1-x^2}{2x^2-3};\ \ A.H:\ y = -\frac{1}{2}$$

a) Eje X: $f(x) = 0$

$$\frac{x^2-4x}{x^2-4x+3} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 4x = 0 \ \Longrightarrow x(x-4) = 0 \ \Longrightarrow x = 0; x = 4$$

$Eje\ Y$: $f(0) = 0$

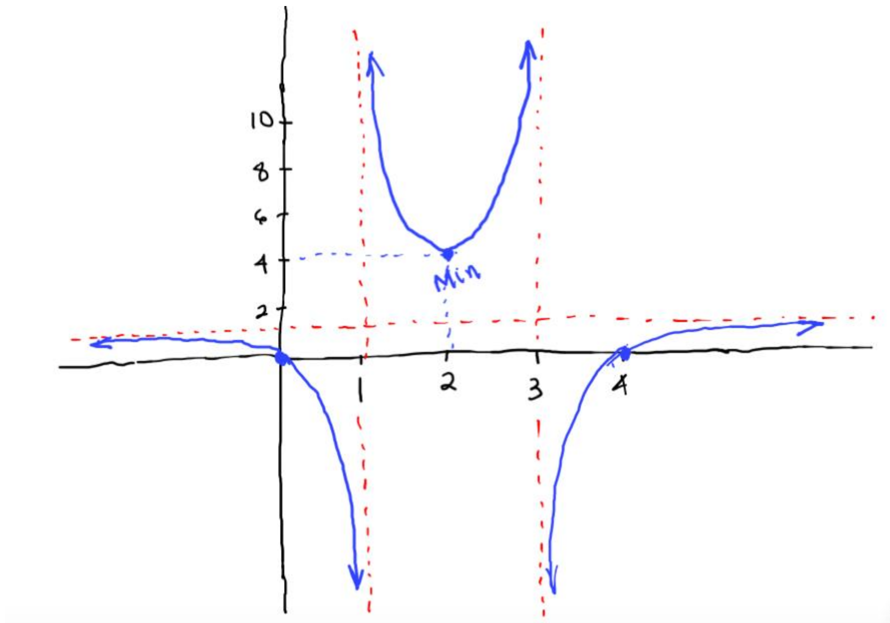
b) Asintotas
Vertical: $x^2 - 4x + 3 = 0 \Longrightarrow (x-3)(x-1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 3; x = 1$
Horizontal: $y = 1$

c) Analisis de la Primera Derivada

$$f'(x) = -\frac{6\,(x-2)}{(x-3)^2(x-1)^2}$$

	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$x-2$		−		−	0	+		+	
$(x-3)^2$		+		+		+		+	
$(x-1)^2$		+		+		+		+	
$f'(x)$		−		−		+		+	
$f(x)$		↘		↘		↗		↗	
			A.V		Mín.		A.V		

$$Punto\ minimo:\ (2, 4)$$


10
8
6
4
2
Min
1
2
3
4

EJEMPLO: Dibuje la grafica de la función $f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$

1. Análisis de primera derivada
2. Análisis de segunda derivada
3. Asíntotas
4. Intersecciones con los ejes