La integral definida

- La expresión $\int f(x)\,dx$ se conoce como la integral indefinida y su resultado se llama la antiderivada de $f(x)$.
- La expresión $\int_a^b f(x)dx$ se conoce como la integral definida. Los números a y b se llaman los límites de integración.
- Para calcular una integral definida, primero se encuentra la antiderivada y luego ese resultado se evalúa en los números b y a, en ese orden, primero el de arriba y luego el de abajo, y se restan los resultados.

Teorema fundamental del cálculo integral

Si f es continua en el intervalo $[a, b]$ y F es cualquier antiderivada de f en el intervalo, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Explicación de los ejemplos

<table>
<tr>
<td>

Ejemplo 1

$$\int_0^1 (4 - x^2)\,dx$$

1. Se calcula la antiderivada con las reglas de integración

$$\int_0^1 (4 - x^2)\,dx = \underbrace{\left(4x - \frac{x^3}{3}\right)}_{F(x)}\Big|_0^1$$

2. El resultado debe ser evaluado en los límites de la integral, primero el de arriba y luego el de abajo, y restarlos. Observe la notación a usar:

$$= \underbrace{\left(4 - \frac{1}{3}\right)}_{F(1)} - \underbrace{0}_{F(0)} = \frac{11}{3}$$

</td>
<td>

Ejemplo 2:

$$\int_{-1}^3 (3x^2 - x + 6)\ dx$$

1. Primero se calcula la antiderivada y se indica que se va a evaluar en los limites de la integral, como se indicó en el ejemplo anterior

$$\int_{-1}^3 (3x^2 - x + 6)\ dx = \underbrace{\left(\frac{3x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 6x\right)}_{F(x)}\Big|_{-1}^3$$

2. Primero se evalúa el límite de arriba y luego el de abajo, se restan los resultados

$$\underbrace{\left(27 - \frac{9}{2} + 18\right)}_{F(3)} - \underbrace{\left(-1 - \frac{1}{2} - 6\right)}_{F(-1)} = 48$$

</td>
</tr>
</table>

Ejemplo 3:

$$\int_4^9 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 2\right)\, dx$$

$$\int_4^9 \left(x^{-\frac{1}{2}} - 2\right)\, dx = \left(2x^{\frac{1}{2}} - 2x\right)\Big|_4^9$$

$$\left(2\sqrt{x} - 2x\right)\Big|_4^9$$

$$= (6 - 18) - (4 - 8) = -8$$

Ejemplo 4:

$$\int_1^e \overbrace{\left(2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}^{a^2-2ab+b^2} dx$$

$$\int_1^e \left(4x - 4 + \frac{1}{x}\right) dx$$

$$= \left(\frac{4x^2}{2} - 4x + \ln x\right)\Big|_1^e$$

$$= \left(2e^2 - 4e + \underbrace{\ln e}_{1}\right) - \left(2 - 4 + \underbrace{\ln 1}_{0}\right)$$

$$= 2e^2 - 4e + 3$$

Ejemplo de integral definida por sustitución:

$$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1 + x^4}}\, dx$$

$$u = 1 + x^4$$

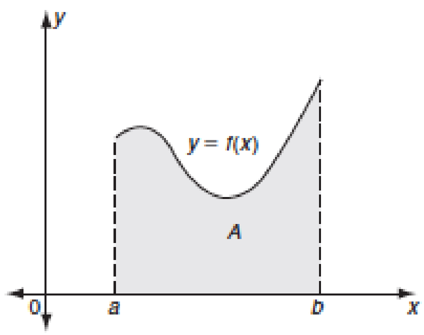
$$du = 4x^3 dx$$

$$\frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{\sqrt{1 + x^4}}\, dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\sqrt{u}} du = \frac{1}{4}\int u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{1}{4} \cdot 2u^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{1 + x^4}\,\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}$$

La Integral Definida y Áreas

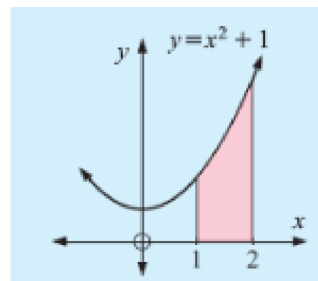
Con la integral definida se puede encontrar el área limitada por el gráfico de una función $f(x)$ y el eje x, en un intervalo dado $[a, b]$



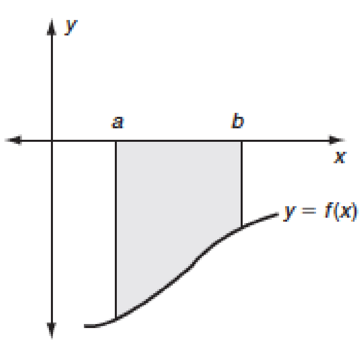
Si f es una función continua y positiva en el intervalo $[a, b]$ entonces el área bordeada por la función $f(x)$, el eje x y las líneas verticales $x = a$ y $x = b$, está dada por

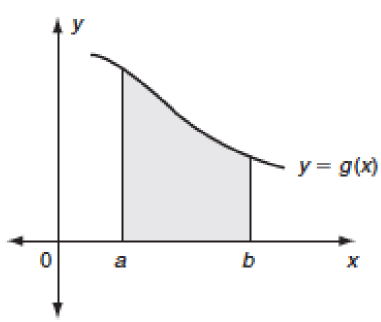
$$A = \int_a^b f(x)dx$$

Ejemplo: Encuentre el área de la región encerrada por $y = x^2 + 1$, el eje x y las líneas $x = 1$ y $x = 2$.



Área positiva y negativa



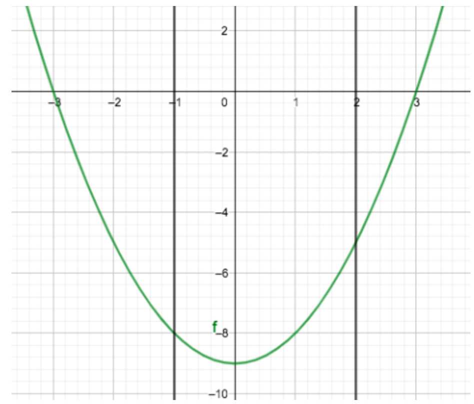


Si la gráfica de la función está sobre el eje x la integral definida tiene resultado positivo.

Si la gráfica de función está por debajo del eje x, la integral definida tiene resultado negativo. En ese caso el área es

$$A = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Ejemplo: Determine el área limitada por $y = x^2 - 9,\ x = -1,\ x = 2$ y el eje x.



Ejemplo: Encontrar el área de la región limitada por la curva $y = x^2 + 2x + 2$, ej eje x y las líneas $x = -2$ y $x = 1$.

Ejemplo: Encuentre el área total de la región entre $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$ y el eje x.