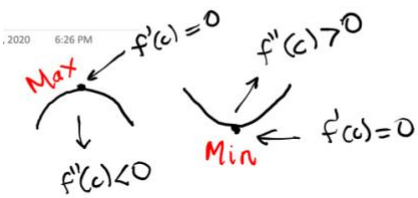
APLICACIÓN DE MAXIMOS Y MINIMOS

TEOREMA 1 (PRUEBA DE LA SEGUNDA DERIVADA) Sea $f(x)$ dos veces diferenciable en el punto crítico $x = c$. Entonces,

a) $x = c$ es un máximo local de f siempre que $f'(c) = 0$ y $f''(x) < 0$

b) $x = c$ es un mínimo local de f siempre que $f'(c) = 0$ y $f''(x) > 0$



EJEMPLO 5 Determine los valores máximo y mínimo locales de

$$x^3 + 2x^2 - 4x - 8$$

$$f'(x) = 3x^2 + 4x - 4 = 0$$
$$x = \frac{2}{3};\ \ x = -2\ \ (puntos\ criticos)$$

$$f''(x) = 6x + 4$$
$$f''\left(\frac{2}{3}\right) = 8 > 0\ concava\ hacia\ arriba$$
$$hay\ un\ punto\ minimo\ en\ x = \frac{2}{3}$$

$$f''(-2) = -8 < 0\ concava\ hacia\ abajo$$
$$hay\ un\ punto\ maximo\ en\ x = -2$$

Problemas de Optimización

Guía para la resolución de problemas de aplicación de máximos y mínimos

Paso 1. Cuando sea apropiado, dibuje un diagrama que muestre la información dada en el problema.

Paso 2. Formule una función para la cantidad que se quiera maximizar o minimizar.

Paso 3. Exprese la función del paso 2 como función de una sola variable y señale el dominio de esta función. El dominio puede determinarse por la naturaleza del problema.

Paso 4. Encuentre los valores críticos de la función. Después de probar cada valor crítico, determine cuál proporciona el valor extremo absoluto que se busca. Si el dominio de la función incluye puntos extremos, examine también los valores de la función en esos puntos.

Paso 5. Con base en los resultados del paso 4, responda las preguntas que se formularon en el enunciado del problema.

EJEMPLO 4 *(Maximización de utilidades)* Una pequeña empresa manufacturera puede vender todos los artículos que produce a un precio de \$6 cada uno. El costo de producir x artículos a la semana (en dólares) es

$$C(x) = 1000 + 6x - 0.003x^2 + 10^{-6}x^3$$

¿Qué valor de x debemos seleccionar con objeto de maximizar las utilidades?

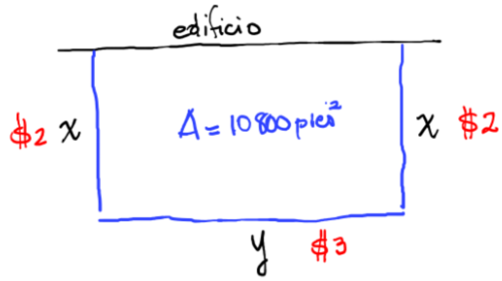
$$Funcion\ a\ maximizar: Utilidades$$
$$U = Ingreso - Costo$$
$$U = 6x - (1000 + 6x - 0.003x^2 + 10^{-6}x^3)$$
$$U = -1000 + 0.003x^2 - 10^{-6}x^3$$

$$Derivada: U' = 0.006x - 0.000003x^2$$
$$Resolver\ 0.006x - 0.000003x^2 = 0$$
$$x\,(0.006 - 0.000003x) = 0$$
$$x = 0;\ \ x = 2000$$

$$Test\ de\ la\ segunda\ Derivada:$$
$$U'' = 0.006 - 0.000006x$$
$$U''(2000) = -0.006 < 0\ \ concavidad\ hacia\ abajo$$
$$entonces\ el\ maximo\ de\ la\ utilidad\ es\ cuando\ x = 2000\ articulos$$

EJEMPLO 1 Minimizar el costo de una cerca

Con el propósito de tener mayor seguridad, un fabricante planea cercar un área de almacenamiento rectangular de 10,800 pies², que es adyacente a un edificio, el cual se utilizará como uno de los lados del área cercada. La cerca paralela al edificio da a una carretera y costará \$3 por pie instalado, mientras que la cerca de los otros dos lados costará \$2 por pie instalado. Encontrar la cantidad de cada tipo de cerca, de manera que el costo total sea mínimo. ¿Cuál es el costo mínimo?



Dato: Area

$$xy = 10800$$

$$y = \frac{10800}{x}$$

$$Funcion\ a\ minimizar:\ Costo$$
$$C = 2x + 3y + 2x = 4x + 3y$$

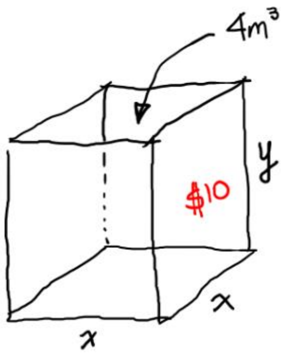
$$C = 4x + 3\left(\frac{10800}{x}\right)$$
$$C = 4x + 32400x^{-1}$$

$$Derivada:\ C' = 4 - 32400x^{-2}$$
$$4 - 32400x^{-2} = 0$$
$$4 = \frac{32400}{x^2}$$
$$4x^2 = 32400$$
$$x^2 = 8100$$
$$x = 90$$

$$Test\ f'':\ C'' = 64800x^{-3}$$
$$C''(90) > 0\ \ concavidad\ hacia\ arriba$$
$$El\ costo\ es\ minimo\ cuando\ x = 90$$

$$Las\ dimensiones\ para\ que\ el\ costo\ sea\ minimo\ son\ x = 90, y = 120\ pies$$
$$El\ costo\ minimo\ es\ de\ \$720$$

EJEMPLO 3 *(Costo mínimo)* Se debe construir un tanque con una base cuadrada horizontal y lados rectangulares verticales. No tendrá tapa. El tanque necesita una capacidad de 4 metros cúbicos de agua. El material con que se construirá el tanque tiene un costo de $10 por metro cuadrado. ¿Qué dimensiones del tanque minimizan el costo del material?



$$\mathit{Funcion\ a\ minimizar}: \mathit{Costo}$$
$$C = 10x^2 + (4xy)10$$
$$C = 10x^2 + 40xy$$

$$C = 10x^2 + 40x\left(\frac{4}{x^2}\right)$$
$$C = 10x^2 + \frac{160}{x}$$

Dato: Volumen

$$V = 4m^3$$
$$x \cdot x \cdot y = 4$$
$$y = \frac{4}{x^2}$$

$$\mathit{Derivada}: \quad C' = 20x - 160x^{-2}$$
$$20x - \frac{160}{x^2} = 0$$
$$20x = \frac{160}{x^2}$$
$$20x^3 = 160$$
$$x^3 = 8$$
$$x = 2$$

$$\mathit{Test}\ f'': \ C'' = 20 + 320x^{-3}$$
$$C''(2) > 0 \ \ \mathit{concavidad\ hacia\ arriba}$$
$$\mathit{El\ minimo\ ocurre\ en}\ x = 2$$

$$\mathit{Dimensiones\ del\ tanque\ con\ costo\ minimo\ base\ de\ lado}\ 2m\ \mathit{y\ altura}\ 1m$$

4. Cercado El propietario del Vivero Laurel quiere cercar un terreno de forma rectangular de 1000 pies cuadrados de área, para usarlo para diferentes tipos de arbustos. El terreno será dividido en cuatro lotes iguales, con tres cercas paralelas a uno de los lados, como se muestra en la figura 13.5. ¿Cuál es el número mínimo de pies de cerca necesarios?

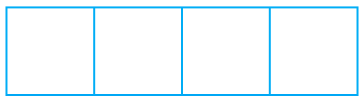
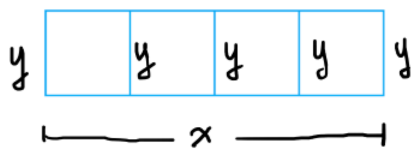


FIGURA 13.5 Diagrama para el problema 4.



Dato: A=1000

$$x \cdot y = 1000$$
$$y = \frac{1000}{x}$$

$$Funcion\ a\ minimizar:\ Cantidad\ de\ cerca$$

$$P = 2x + 5y$$
$$P = 2x + 5\left(\frac{1000}{x}\right)$$
$$P = 2x + 5000x^{-1}$$

$$P' = 2 - 5000x^{-2}$$
$$2 - \frac{5000}{x^2} = 0$$
$$2 = \frac{5000}{x^2}$$
$$x^2 = 2500$$
$$x = 50$$

$$Test\ f'':\ P'' = 10000x^{-3}$$
$$P''(50) > 0\ \ hay\ un\ minimo$$

La cantidad de cerca mínima es 200 pies

21. Diseño de un recipiente Un fabricante de recipientes está diseñando una caja sin tapa y con base cuadrada, que debe tener un volumen de 32 pies^3. ¿Qué dimensiones debe tener la caja, si se requiere que se utilice la menor cantidad de material? (Véase la fig. 13.6.)

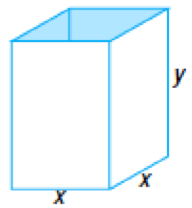


FIGURA 13.6 Caja sin tapa para los problemas 21 y 22.

22. Diseño de un recipiente Una caja sin tapa de base cuadrada va a construirse con 192 pies^2 de material. ¿Qué dimensiones debe tener para que su volumen sea máximo? ¿Cuál es el volumen máximo? (Véase la fig. 13.6.)

Dato: $Material = 192\ pies^2$

$$x^2 + 4xy = 192$$
$$4xy = 192 - x^2$$
$$y = \frac{192 - x^2}{4x}$$

$$Funcion\ a\ maximizar: Volumen$$
$$V = x \cdot x \cdot y = x^2 y$$
$$V = x^2 \cdot \frac{192 - x^2}{4x} = \frac{192x - x^3}{4}$$
$$V = 48x - \frac{x^3}{4}$$
$$V' = 48 - \frac{3x^2}{4}$$
$$48 - \frac{3x^2}{4} = 0$$
$$48 = \frac{3x^2}{4}$$
$$192 = 3x^2$$
$$64 = x^2$$
$$8 = x$$
$$Test\ f'':\ V'' = -\frac{6x}{4}$$
$$V''(8) < 0\ \ concavidad\ hacia\ abajo$$
$$en\ x = 8\ hay\ maximo$$

Las dimensiones de la caja con volumen máximo son $x = 8\ pies, y = 4\ pies$
El volumen máximo es $V = 8 \cdot 8 \cdot 4 = 256\ pies^3$

23. Diseño de un recipiente Una caja sin tapa va a fabricarse cortando cuadrados iguales de cada esquina de una lámina cuadrada de 12 pulgadas de lado, doblando luego hacia arriba los lados. Encuentre la longitud del lado del cuadrado que debe recortarse para que el volumen de la caja sea máximo. ¿Cuál es el volumen máximo? (Véase la fig. 13.7.)

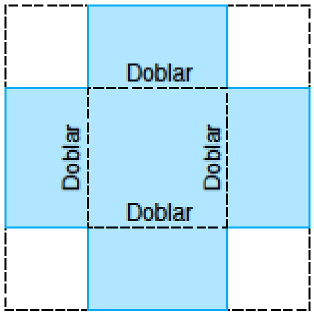
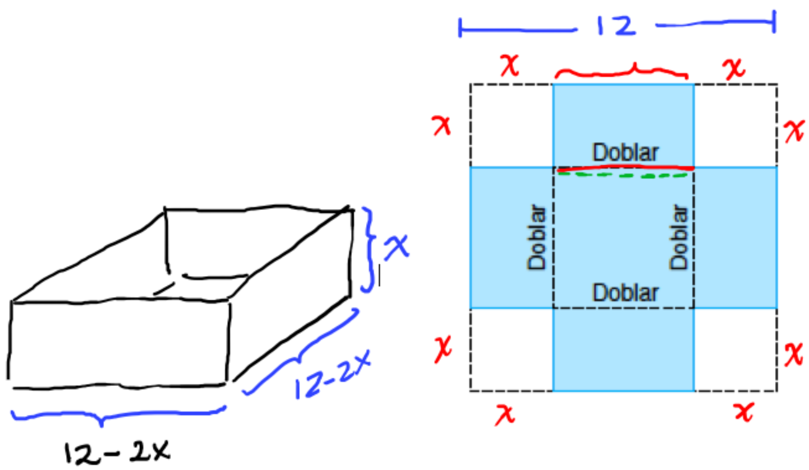


FIGURA 13.7 Caja para el problema 23.



$$Funcion\ a\ maximizar:\ V = (12-2x)(12-2x)x$$
$$V = (144 - 24x - 24x + 4x^2)x$$
$$V = 144x - 48x^2 + 4x^3$$

$$V' = 144 - 96x + 12x^2$$
$$144 - 96x + 12x^2 = 0$$
$$x = 6; x = 2$$

$$Test\ f'':\ V'' = -96 + 24x$$
$$V''(6) = 48 > 0\ minimo$$
$$V''(2) = -48 < 0\ maximo$$

Los cuadrado que se cortan deben ser de tamaño 2pulg y el volumen máximo es de $V = 8 \cdot 8 \cdot 2 = 128 pulg^3$

24. Diseño de un cartel Un cartel rectangular de cartón debe tener 150 pulgadas^2 para material impreso, márgenes de 3 pulgadas arriba y abajo y de 2 pulgadas a cada lado. Encuentre las dimensiones del cartel de manera que la cantidad de cartón que se use sea mínima (véase la fig. 13.8). [*Sugerencia:* encuentre primero los valores

de x y y en la figura 13.8 que minimizan la cantidad de cartón.]

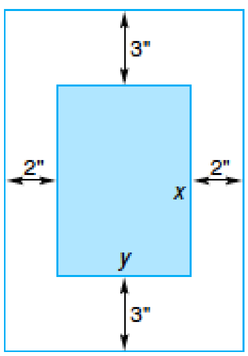


FIGURA 13.8 Cartel para el problema 24.