INTEGRACION

1. Antiderivación e integración

Antiderivar *es el proceso inverso a derivar. A este proceso se la llama Integración.*

Función	Derivar	Antiderivar
$y = x^3$	$y = 3x^2$	$\frac{x^4}{4}$
$y = x^{10}$	$y = 10x^9$	$\frac{x^{11}}{11}$
$y = x^{-4}$	$y = -4x^{-5}$	$\frac{x^{-3}}{-3}$

- El símbolo $\int$ denota el proceso de antiderivación o integración
- El símbolo $\int$ es llamado el símbolo integral.
- La integral de una función es expresada con: $\int f(x)dx$
- La función $f(x)$ es el integrando y el símbolo dx indica que la variable x es la **variable de integración.**

Ejemplos:

$$\int (x^2 + 3x - 2)dx$$

$$\int \pi r^2\, dr$$

$$\int \left(\frac{y+3}{y^2}\right) dy$$

Función	Derivada	Antiderivada
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\int f(x)dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

Observe los siguientes resultados:

i. Si $f(x) = x^2$ entonces $f'(x) = 2x$

ii. SI $f(x) = x^2 + 3$ entonces $f'(x) = 2x$

ii. SI $f(x) = x^2 - 5$ entonces $f'(x) = 2x$

Hay infinitas funciones del tipo $f(x) = x^2 + c$, donde c es cualquier constante, para las cuales $f'(x) = 2x$. Entonces podemos decir que la antiderivada de $f(x) = 2x$ es la función $x^2 + c$.

$$\int (2x)\, dx = x^2 + C$$

Definición

El conjunto de todas las antiderivadas de una función $f(x)$ es llamado la **integral indefinida** de $f(x)$ y se escribe: $\int f(x)\,dx$.

En general, $\int f(x)\,dx = F(x)+c$ donde $F'(x)=f(x)$

Reglas básicas:

- $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}+c$; $\int k\,dx = kx+c$
- $\int k\,x^n\,dx = k\cdot\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+c$
- $\int [f(x)\pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Otras formulas importantes: (asociadas a las reglas de derivación)

- $(e^x)'=e^x \Rightarrow \int e^x\,dx = e^x + c$
- $(\ln x)'=\dfrac{1}{x} \Rightarrow \int \dfrac{1}{x}dx = \ln x + c$ ***OJO!*** $\boldsymbol{\int x^{-1}\,dx = \frac{x^0}{0}}$ ***no existe***

EJEMPLOS: Encuentre la integral indefinida en cada caso:

a) $\int (4x^3-2x^2+5)\,dx$ $= 4\cdot\dfrac{x^4}{4} - 2\cdot\dfrac{x^3}{3} + 5x + C$ $= x^4 - \dfrac{2}{3}x^3 + 5x + C$	b) $\int\left(\dfrac{1}{x^4}+3x\right)dx$ $\int (x^{-4}+3x)dx$ $= \dfrac{x^{-3}}{-3} + 3\dfrac{x^2}{2} + C$

c) $\int\left(\dfrac{2}{x^3}-\sqrt{x}\right)dx$ d) $\int\left(4+5\sqrt[3]{x^2}\right)dx$

$= \int \left(2x^{-3} - x^{\frac{1}{2}}\right)dx$ $= 2\cdot\dfrac{x^{-2}}{-2} - \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -x^{-2} - \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$	$\int \left(4+5x^{\frac{2}{3}}\right)dx$ $= 4x + 5\cdot\dfrac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + C$ $= 4x + 3x^{\frac{5}{3}} + C$

e) $\int (x-1)(3x^4+3x)\,dx$ =

$\int (3x^5+3x^2-3x^4-3x)dx$ $=\frac{3x^6}{6}+\frac{3x^3}{3}-\frac{3x^5}{5}-\frac{3x^2}{2}+C$ $=\frac{1}{2}x^6+x^3-\frac{3}{5}x^5-\frac{3}{2}x^2+C$	$\int \left(\frac{y^4}{y^2}-\frac{2y^2}{y^2}+\frac{3}{y^2}\right)dy$ $\int (y^2-2+3y^{-2})dy$ $=\frac{y^3}{3}-2y+\frac{3y^{-1}}{-1}+C$ $=\frac{y^3}{3}-2y-\frac{3}{y}+C$

f) $\int \frac{y^4-2y^2+3}{y^2}\,dy$ =

g) $\int \left(2x-\frac{2}{x}\right)^2 dx$ =

h) $\int \left(\frac{x^2-2}{\sqrt{x}}\right)dx$ =

$=\int \left(4x^2-2\cdot 2x\cdot\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)dx$ $=\int (4x^2-8+4x^{-2})dx$ $=\frac{4x^3}{3}-8x+\frac{4x^{-1}}{-1}+C$ $=\frac{4x^3}{3}-8x-\frac{4}{x}+C$	$\int x^{-\frac{1}{2}}(x^2-2)dx$ $\int \left(x^{\frac{3}{2}}-2x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$ $=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-2\cdot 2x^{\frac{1}{2}}+C$ $=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-4x^{\frac{1}{2}}+C$

i) $\int \left(\frac{-2}{x}+3e^x\right)dx$

j) $\int \frac{x^2-3x+1}{x}dx$

$\int \left(-2\cdot\frac{1}{x}+3e^x\right)dx$ $=-2\ln x+3e^x+C$	$\int \left(\frac{x^2}{x}-\frac{3x}{x}+\frac{1}{x}\right)dx$ $\int \left(x-3+\frac{1}{x}\right)dx$ $=\frac{x^2}{2}-3x+\ln x+C$

k) $\int \left(2\sqrt[5]{x^4}-\frac{7}{x^3}+10e^x-1\right)\,dx$

$$=\int \left(2x^{\frac{4}{5}}-7x^{-3}+10e^x-1\right)dx$$
$$=2\cdot\frac{5}{9}x^{\frac{9}{5}}-7\frac{x^{-2}}{-2}+10e^x-x+C$$
$$=\frac{10}{9}x^{\frac{9}{5}}+\frac{7}{2x^2}+10e^x-x+C$$

Derivar e integrar son procesos inversos
Propiedades: a) $\int f'(x)\,dx = f(x)+c$; b) $\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)$

2. *Encontrando el valor de "C".*

Ejemplo1: Encuentre $f(x)$ dado que $f'(x) = x^3 - 2x^2 + 3$ y $f(0) = 2$.	***Ejemplo 2:*** Encuentre $f(x)$ dado que $f''(x) = 12x^2 - 4$, $f'(0) = -1$ y $f(1) = 4$.
$f(x) = \int f'(x)\,dx$ $f(x) = \int (x^3 - 2x^2 + 3)\,dx$ $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + 3x + C$ $f(0) = 2 \rightarrow 0 - 0 + 0 + C = 2$ $C = 2$ $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + 3x + 2$	$\int f''(x)\,dx = f'(x)$ $f'(x) = \int (12x^2 - 4)\,dx = \frac{12x^3}{3} - 4x + C$ $f'(0) = -1 \rightarrow C = -1$ $f'(x) = 4x^3 - 4x - 1$ $f(x) = \int (4x^3 - 4x - 1)\,dx$ $f(x) = \frac{4x^4}{4} - \frac{4x^2}{2} - x + C$ $f(x) = x^4 - 2x^2 - x + C$ $Como\ f(1) = 4 \rightarrow 1 - 2 - 1 + C = 4$ $C = 6$ $f(x) = x^4 - 2x^2 - x + 6$

Example3: La tasa de crecimiento de la población de una ciudad está modelada por la ecuación $\frac{dN}{dt} = 400\,t^{1.05}$, $t \geq 0$, donde t es el tiempo en años a partir de 1995 y N es el tamaño de la población. En el año 2000 la población fue de $32\,000$. ¿Cuál será la población en el año 2010?

$$\frac{dN}{dt} \rightarrow significa\ el\ cambio\ en\ la\ población\ con\ respecto\ al\ tiempo$$

$$\frac{dN}{dt} = N'\ (deriva\ de\ la\ funcion\ poblacion)$$

$$Entonces\ si\ \frac{dN}{dt} = 400t^{1.05}\ entonces\ N = \int 400t^{1.05}\,dt$$

$$N = 400\frac{t^{2.05}}{2.05} + C$$

Informacion: año 2000 (t=5), N=32000

$$400\frac{(5)^{2.05}}{2.05}+C=32000$$
$$C=26713$$

$$Formula\ de\ la\ poblacion:\ \ N=400\frac{t^{2.05}}{2.05}+26713$$

$$En\ 2010, t=15$$
$$N=400\frac{(15)^{2.05}}{2.05}+26713\approx 76981$$

Problemas que involucran integración

EJEMPLO 2 **Problema con condiciones iniciales que implican a y''**

Dado que $y''=x^2-6$, $y'(0)=2$, *y* $y(1)=-1$, *encontrar* y.

$$y'=\int (x^2-6)\,dx=\frac{x^3}{3}-6x+C$$

$$Como\ y'(0)=2\ \rightarrow\ \ C=2$$

$$y'=\frac{x^3}{3}-6x+2$$

$$y=\int\left(\frac{x^3}{3}-6x+2\right)dx=\frac{x^4}{12}-\frac{6x^2}{2}+2x+C$$

$$se\ sabe\ que\ y(1)=-1\ \rightarrow\ \frac{1}{12}-3+2+C=-1$$

$$C=-\frac{1}{12}$$

$$Finalmente:\ y=\frac{x^4}{12}-3x^2+2x-\frac{1}{12}$$

EJEMPLO 3 **Ingreso y educación**

Para un grupo urbano particular, algunos sociólogos estudiaron el ingreso anual promedio actual y (en dólares) que una persona con x años de educación puede esperar recibir al buscar un empleo ordinario. Ellos estimaron que la razón a la que el ingreso cambia con respecto a la educación está dada por

$$\frac{dy}{dx} = 100x^{3/2}, \qquad 4 \leq x \leq 16,$$

donde $y = 28{,}720$ *cuando* $x = 9$. *Encontrar* y.

$$\frac{dy}{dx} \rightarrow razon\ de\ cambio\ del\ ingreso\ anual\ con\ respecto\ a\ los\ años\ de\ educacion$$

$$y = \int 100\, x^{\frac{3}{2}}\, dx$$

$$y = 100 \cdot \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + C = 40x^{\frac{5}{2}} + C$$

$$\rightarrow 40(9)^{\frac{5}{2}} + C = 28720$$

$$C = 19000$$

$$y = 40x^{\frac{5}{2}} + 19000$$

EJEMPLO 5 **Determinación del costo a partir del costo marginal**

En la manufactura de un producto, los costos fijos por semana son de \$4000. Los costos fijos son costos como la renta y el seguro, que permanecen constantes a todos los niveles de producción en un periodo dado. Si la función de costo marginal dc/dq es

$$\frac{dc}{dq} = 0.000001(0.002q^2 - 25q) + 0.2,$$

donde c es el costo total (en dólares) de producir q libras de producto por semana, encontrar el costo de producir 10,000 libras en una semana.

$$C = \int \frac{dC}{dq}\ (costo\ marginal)$$

$$C = \int (0.000001(0.002q^2 - 25q) + 0.2)\, dq$$

$$C = 0.000001\left(\frac{0.002q^3}{3} - \frac{25q^2}{2}\right) + 0.2q + C$$

$$C = 4000$$

$$C = 0.000001\left(\frac{0.002q^3}{3} - \frac{25q^2}{2}\right) + 0.2q + 4000$$

$$Para\ producir\ 10000\ libras, el\ costo\ es\ C(10000) = \$\, 5417$$

INTEGRACION POR SUSTITUCIÓN

Integrales de tipo

$$\int \boldsymbol{f(g(x))\, g'(x)\, dx}$$

Se usa la sustitución: $\boldsymbol{u = g(x)}$ ***y*** $\boldsymbol{du = g'(x)\, dx}$ ***para convertir en***

$$\int \boldsymbol{f(u)\, du}$$

Ejemplo 1:

$$\int 3x^2(x^3+7)^3\, dx$$

Ejemplo 2:

$$\int x\sqrt{x^2+5}\, dx$$

Ejemplo 3:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)^3}\, dx$$

Ejemplo 4:

$$\int 4x^3(x^4+1)^2\, dx$$

Ejemplo 5:

$$\frac{1}{3}\int 3(x^2+1)\, e^{x^3+3x}\, dx$$

Ejemplo 6:

$$\int \frac{2x}{x^2+5} dx$$

Ejemplo 7:

$$\int \frac{1}{(3-2x)^{10}}\, dx$$

Ejemplo 8: Encuentre $f(x)$ si $f'(x) = \sqrt{x+2}$ y se sabe que $f(2) = \frac{1}{3}$.

Práctica

$\int \frac{2x^3+3x}{(x^4+3x^2+7)^4}dx$	$\int x^2\sqrt[3]{2x^3+9}\ dx$	$\int (x^2+1)e^{-2x^3-6x}\,dx$	$\int \frac{16x-4}{3-2x+4x^2}dx$