Cálculo Empresarial
TAREA – Problemas de Optimización

1. La función de costo en miles de dólares es $C(x) = 2 + x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{24}x^3$ en donde el nivel de producción x está en miles de unidades por semana. La planta productiva disponible limita x al rango $0 \leq x \leq 8$. Si cada artículo producido puede venderse en \$2.50, determine el nivel de producción que maximiza la utilidad y cuánto es esa utilidad?
   $(U = Ingresos - Costos)$

$$U = 2.5x - \left(2 + x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{24}x^3\right) = -2 + 1.5x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{24}x^3$$

$$U' = 1.5 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$$

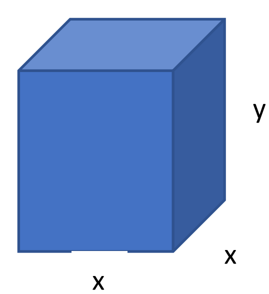
$$1.5 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 = 0$$

$$x = -2; \;\; x = 6$$

$$Prueba:\; U'' = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x \;\rightarrow\; U''(6) = -1 < 0 \;\rightarrow concava\ abajo: punto\ maximo\ en\ x = 6$$

La utilidad se maximiza cuando la produccion es $x = 6000$ unidades y la utilidad maxima es $U = -2 + 1.5(6) + \frac{1}{4}(6)^2 - \frac{1}{24}(6)^3 = 7\ miles\ de\ dolares$

2. Una compañía se dedica a la fabricación de pequeñas cajas con base cuadrada y sin tapa. Si el material utilizado tiene un costo de \$2 por m^2, determine las dimensiones de la caja que minimizan el costo de material, si la capacidad de las cajas debe ser igual a 108 $pulg^3$.



Funcion Costo del material: asociado al area

$$C = 2(x^2 + 4xy)$$

Dato: $V = 108$

$$x^2y = 108 \;\rightarrow\; y = \frac{108}{x^2}$$

Reemplaza:

$$C = 2\left(x^2 + 4x \cdot \frac{108}{x^2}\right) = 2x^2 + \frac{864}{x} = 2x^2 + 864x^{-1}$$

$$Resolver\;\; C' = 0$$

$$4x - 864x^{-2} = 0$$

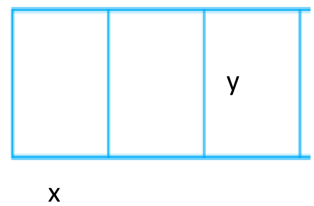
$$4x = \frac{864}{x^2}$$
$$4x^3 = 864$$
$$x^3 = 216$$
$$x = 6$$

Prueba: $C'' = 4 + 1728x^{-3}$

$$C''(6) = 12 > 0 \; concava\ arriba, hay\ minimo$$

Las dimensiones de la caja de costo minimo son $6 \times 6 \times 3pulg$

3. Un terreno rectangular de $600m^2$ debe ser dividido en tres partes rectangulares de igual tamaño. Se construirán muros cuyo costo es de \$60 por metro cuadrado para dividir y cercar la zona. ¿Qué dimensiones deben tener las separaciones para minimizar el costo de los muros?



Funcion Costo Muros: Perimetro

$$C = 60(6x + 4y) = 360x + 240y$$

Dato: $Area = 600$

$$3x \cdot y = 600 \;\; \rightarrow \;\; y = \frac{600}{3x} = \frac{200}{x}$$

Reemplaza:

$$C = 360x + 240 \cdot \frac{200}{x} = 360x + \frac{48000}{x}$$

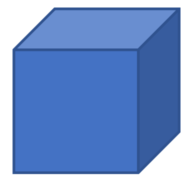
$$Resolver \;\; C' = 0$$
$$360 - 48000x^{-2} = 0$$
$$360 = \frac{48000}{x^2}$$
$$360x^2 = 48000$$
$$x^2 = \frac{400}{3}$$
$$x = \frac{20}{\sqrt{3}} \approx 11.55$$

Prueba de la segunda derivada:

$$C'' = 96000x^{-3}$$
$$C''(11.55) = 62.3 > 0 \;\; \rightarrow hay\ minimo$$

Las dimensiones del terreno que minimizan el costo de poner los muros son $ancho = 3(11.55) = 34.65$ y $largo = y = \frac{200}{11.55} = 17.32$

4. COSTO DE CONSTRUCCIÓN Se le pide a un carpintero construir una caja abierta con base cuadrada. Los lados de la caja costarán \$3 por metro cuadrado, y la base costará \$4 por metro cuadrado. ¿Cuáles son las dimensiones de la caja de máximo volumen que se puede construir con \$48?



Funcion a minimizar: Costo

$$C = \$2 \underbrace{(2x^2)}_{\substack{base\ y \\ tapa}} + \$1(4xy)$$

$$C = 4x^2 + 4xy$$

Dato: $V = 250$

$$x^2y = 250$$

$$y = \frac{250}{x^2}$$

$$C = 4x^2 + 4x\frac{250}{x^2}$$

$$C = 4x^2 + 1000x^{-1}$$

$$Resuelve\ C' = 0$$

$$8x - 1000x^{-2} = 0$$

$$8x = \frac{1000}{x^2}$$

$$8x^3 = 1000$$

$$x^3 = 125$$

$$x = 5$$