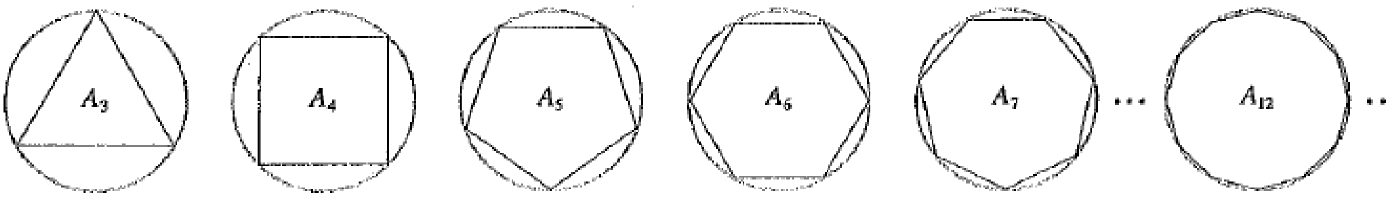
LIMITES

Una forma de apreciar el concepto de límite es con el siguiente ejemplo.

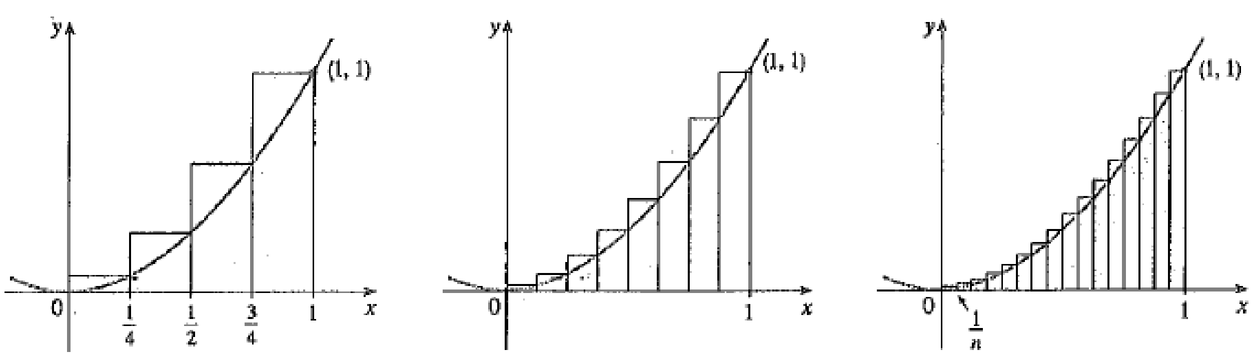
El área de un círculo se puede aproximar calculando el área de un polígono. Observe que entre más lados tenga el polígono, mejor será la aproximación del área del círculo,



Así que podemos afirmar que: **Área del círculo** $= \lim_{n\to\infty} A_n$

$A_n =$ área del polígono con n lados

Otro ejemplo es aproximar el área bajo una curva mediante la suma de áreas de rectángulos:



Observe que entre más rectángulos, mejor es la aproximación, así que podemos deducir:

Área del área bajo la curva $= \lim_{n\to\infty} A_n$

$A_n =$ área de n rectángulos

EJEMPLO: Usando tablas de aproximación calcule $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}$; $f(x)=\frac{x-1}{x^2-1}$

Valores de x cercanos al 1 por la izquierda	$f(x)$	Valores de x cercanos al 1 por la derecha	$f(x)$
0.9	0.526315	**1.1**	0.476190
0.99	0.502512	**1.01**	0.497512
0.999	0.50025	**1.001**	0.4997

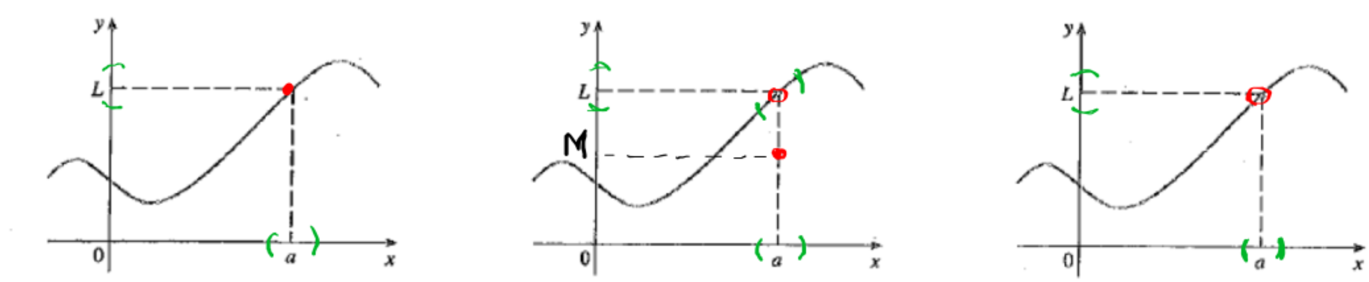
Se concluye que: $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=0.5$

NOTA: Calcular el límite es determinar el valor al que se aproxima la función. No importa que la función no esté definida en el punto, lo que importa es que conforme los valores de x se aproximan más y más a ese valor, los resultados en la función se aproximan más y más a un resultado específico.

DEFINICION: La expresión : $\lim_{x\to a} f(x)=L$, se lee

"el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es igual a L", y significa que los valores de f se aproximan más y más a L cuando los valores de x están lo bastante cerca de a, pero no igual a a.

Ejemplos de tres gráficas que muestran la existencia del límite cuando x tiende a a, sin depender de $f(a)$.



(a) $\lim_{x\to a} f(x)=L$ ✓ $f(a)=L$

(b) $\lim_{x\to a} f(x)=L$ ✓ $f(a)=M$ ✓

(c) $\lim_{x\to a} f(x)=L$ $f(a)$ *no existe*

EJEMPLO: Usando tablas calcule el $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$; $f(x) = \frac{|x|}{x}$

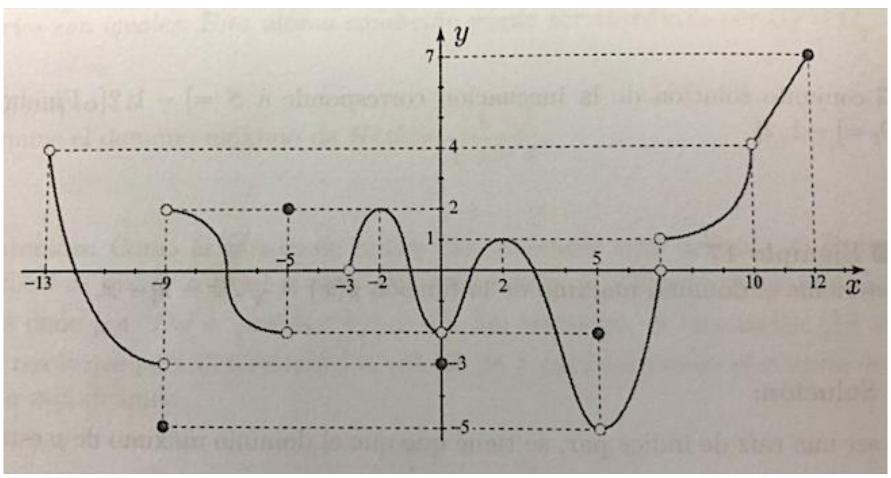
x	$f(x)$	x	$f(x)$
-0.01	-1	0.01	1
-0.001	-1	0.001	1
-0.0001	-1	0.0001	1

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$ $\qquad$ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$

Se dice que límite de $f(x)$ **no existe** porque **los límites laterales** son diferentes.
Por lo tanto el límite de una función existe cuando los límites laterales son iguales.

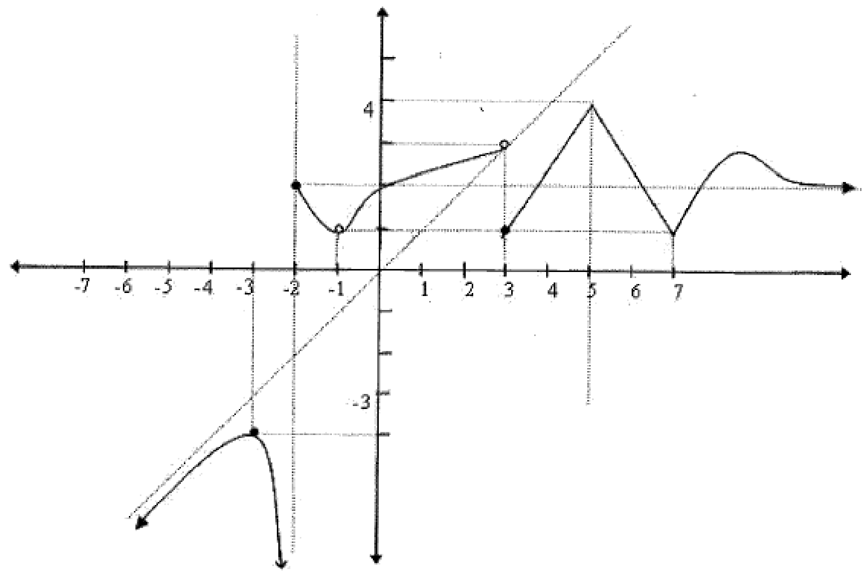
$$Si \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)\ existe\ y\ es\ L$$

EJEMPLO: Considere la gráfica para hallar los límites indicados. En caso de que no existan, deben justificar su respuesta.



a) $\lim_{x\to -9^+} f(x) = 2$	e) $\lim_{x\to 5^-} f(x) = -5$	i) $\lim_{x\to 10} f(x) = 4$
b) $\lim_{x\to -9^-} f(x) = -3$	f) $\lim_{x\to 5^+} f(x) = -5$	j) $\lim_{x\to -13^+} f(x) = 4$
c) $\lim_{x\to -9} f(x) = no\ existe$	g) $\lim_{x\to 5} f(x) = -5$	k) $\lim_{x\to 7} f(x) = no\ existe$
d) $f(-9) = -5$	h) $f(5) = -2$	l) $\lim_{x\to 0} f(x) = -2$

EJEMPLO: Cálculo de límites por gráfica



a) $\lim_{x\to 7} f(x) = 1$

b) $\lim_{x\to -1} f(x) = 1$

c) $f(-1) = indefinido$

d) $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 3$

e) $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 1$

f) $\lim_{x\to 3} f(x) =$

$no\ existe$

g) $f(3) = 1$

h) $\lim_{x\to -2^+} f(x) = 2$

i) $\lim_{x\to -2^-} f(x) = -\infty$

j) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 2$

Cálculo de límites utilizando las propiedades

Propiedades de los límites:

1. Si $p(x)$ es un polinomio entonces $\lim_{x\to a} p(x) = p(a)$
2. Si $q(x)$ es una función racional y a está en el dominio de q, entonces $\lim_{x\to a} q(x) = q(a)$
3. $\lim_{x\to a} [f(x)]^m = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^m$
4. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$

Cálculo de límites de formas indeterminadas

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ tiende a una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, se pueden usar procesos de simplificación como factorización y racionalización para calcular el límite.

Los **métodos de factorización** aplicados pueden ser***:*** *factor común, agrupación, diferencia de cuadrados, diferencia o suma de cubos, trinomios por inspección o polinomios.*

Ejemplo 1: Calcular $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2-7x+2}{x^2-4}\to\frac{0}{0}$ $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(3x-1)(x-2)}{(x-2)(x+2)}$ $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(3x-1)}{(x+2)}=\frac{5}{4}$	***Ejemplo 2:*** Calcule $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-1}{h}\to\frac{0}{0}$ $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1+2h+h^2-1}{h}$ $\lim\limits_{h\to 0}\frac{2h+h^2}{h}$ $\lim\limits_{h\to 0}\frac{h(2+h)}{h}$ $\lim\limits_{h\to 0}(2+h)=2$
Ejemplo 3: Calcule $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-9x}{x^2-4x+3}\to\frac{0}{0}$ $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x(x^2-9)}{(x-3)(x-1)}$ $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-1)}$ $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x(x+3)}{(x-1)}=\frac{18}{2}=9$	***Ejemplo 4:*** Calcule $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3-7x-6}{x^2+x-2}\to\frac{0}{0}$ x^3-7x-6 $\to factorizar\ usando\ calculadora$ $\lim\limits_{x\to -2}\frac{(x-3)(x+1)(x+2)}{(x+2)(x-1)}$ $\lim\limits_{x\to -2}\frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)}=\frac{(-5)(-1)}{(-3)}=-\frac{5}{3}$

Ejemplo 5: Calcular $\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-18}{x^2-x-6}$

$$\lim_{x\to 3}\frac{2(x^2-9)}{(x-3)(x+2)}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{2(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+2)}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{2(x+3)}{(x+2)}=\frac{12}{5}$$

Ejemplo 6: Calcule $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^3+2x^2-8x}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x+1)(x-2)(x-1)}{x(x^2+2x-8)}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x+1)(x-2)(x-1)}{x(x+4)(x-2)}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x+1)(x-1)}{x(x+4)}$$

$$=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$$

Ejemplo 7: Calcule $\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)$

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{(x-2)(x+2)}\right)$$

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x+2-4}{(x-2)(x+2)}\right)$$

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-2}{(x-2)(x+2)}\right)$$

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{(x+2)}\right)=\frac{1}{4}$$

Ejemplo 8: Calcule $\lim_{x\to 1} f(x)$ si

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x+2 & si\ x<1 \\ 3-x & si\ x\geq 1 \end{cases}$$

Se calcula lo limites laterales

$$\lim_{x\to 1^-}(x^2-2x+2)=1$$
$$\lim_{x\to 1^+}(3-x)=2$$

Entonces el límite no existe porque los laterales son diferentes

Límites que se calculan por Racionalización

Ejemplo 1: Calcule $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

$$\lim_{x\to 3} \frac{\overbrace{\sqrt{x+1}-2}^{a-b}}{x-3} \cdot \frac{\overbrace{\sqrt{x+1}+2}^{a+b}}{\sqrt{x+1}+2}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{\overbrace{\left(\sqrt{x+1}\right)^2 - 2^2}^{a^2-b^2}}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x+1-4}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{1}{\left(\sqrt{x+1}+2\right)} = \frac{1}{4}$$

Ejemplo 2: Calcule $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{\sqrt{x+2}-2}$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{\sqrt{x+2}-2} \cdot \frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}+2}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x^2+x-6)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{\left(\sqrt{x+2}\right)^2 - 2^2}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+3)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{x+2-4}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+3)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 2} (x+3)\left(\sqrt{x+2}+2\right) = (5)(4) = 20$$

Ejemplo 2: Calcule $\lim_{x \to 2} \frac{x-\sqrt{3x-2}}{x^2-4}$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x-\sqrt{3x-2}}{x^2-4} \cdot \frac{x+\sqrt{3x-2}}{x+\sqrt{3x-2}}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-\left(\sqrt{3x-2}\right)^2}{(x^2-4)\ (x+\sqrt{3x-2})}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-(3x-2)}{(x-2)(x+2)(x+\sqrt{3x-2})}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-3x+2}{(x-2)(x+2)(x+\sqrt{3x-2})}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)(x+\sqrt{3x-2})}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x-1)}{(x+2)(x+\sqrt{3x-2})} = \frac{1}{16}$$

PRÁCTICA. Calcule los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$ (no se hace)

2. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(h+5)^2-25}{h}$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^2+10h+25-25}{h}$ $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^2+10h}{h}$ $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h(h+10)}{h}$ $\lim\limits_{h\to 0}(h+10)=10$	$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{[(h+5)-5]\,[(h+5)+5]}{h}$ $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{[h]\,[h+10]}{h}$ $\lim\limits_{h\to 0}(h+10)=10$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right]$

4. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{x^3-x}$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{x(x^2-1)}=\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{x(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{1}{x(x-1)}=\frac{1}{(-1)(-2)}=\frac{1}{2}$$

5. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x^2+3}\rightarrow tiene\ 3\ factores$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)(x-1)(x-1)}{(x^2-3)(x^2-1)}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)(x-1)(x-1)}{(x^2-3)(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)(x-1)}{(x^2-3)(x+1)}=\frac{(3)(0)}{(-2)(2)}=0$$

6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3-x^2-1}{x^2+x-2}$ (no se hace)

7. $\lim_{x \to 2} \frac{x^4-3x^2-4}{3x^3-14x^2+13x+6}$

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x^2-4)(x^2+1)}{(3x+1)(x-2)(x-3)}$$
$$\lim_{x \to 2} \frac{(x+2)(x^2+1)}{(3x+1)(x-3)} = \frac{20}{-7}$$

8. $\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{1+h}-1}{h^2+h}$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{1+h}-1}{h^2+h} \cdot \frac{\sqrt{1+h}+1}{\sqrt{1+h}+1}$$
$$\lim_{h \to 0} \frac{\left(\sqrt{1+h}\right)^2 - 1^2}{(h^2+h)\left(\sqrt{1+h}+1\right)}$$
$$\lim_{h \to 0} \frac{1+h-1}{h(h+1)\left(\sqrt{1+h}+1\right)}$$
$$\lim_{h \to 0} \frac{h}{h\,(h+1)\left(\sqrt{1+h}+1\right)}$$
$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{(h+1)\left(\sqrt{1+h}+1\right)} = \frac{1}{2}$$

9. $\lim_{y \to 4} \frac{5y^2-20y}{y-2\sqrt{y}}$