SEMANA #4. Aplicaciones de Derivada

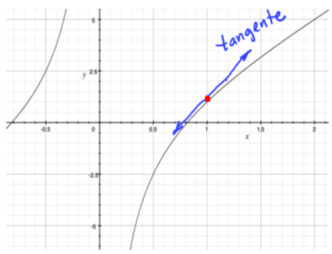
Problemas de tangente (Concepto base: $m_{tan} = f'(a)$)

Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva

$$y = \frac{3x^2 - 2}{x}$$

cuando $x = 1$.

Ecuación de la recta
$y = mx + b$



Punto de tangencia:
$(1, f(1)) = (1,1)$

$m = f'(1)$

$$y = \frac{3x^2 - 2}{x} = 3x - 2x^{-1}$$
$$y' = 3 + 2x^{-2} = 3 + \frac{2}{x^2}$$
$$m = f'(1) = 5$$

Ecuación de la tangente:

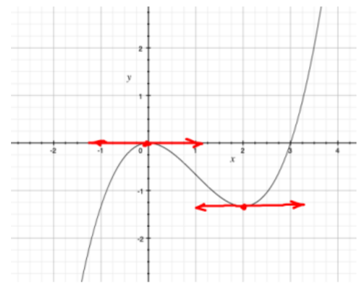
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 1 = 5(x - 1)$$
$$y = 5x - 5 + 1$$
$$y = 5x - 4$$

Encuentre todos los puntos sobre la curva

$$y = \tfrac{1}{3}x^3 - x^2$$

en los que la recta tangente es horizontal.

Hay que encontrar los puntos x donde la $m_{tan} = 0$



Resolver: $f'(x) = 0$

$$y = \frac{1}{3}x^3 - x^2$$
$$y' = x^2 - 2x$$
$$x^2 - 2x = 0$$
$$x(x - 2) = 0$$
$$x = 0; \quad x = 2$$

Las coordenadas de los puntos donde hay tangente horizontal son $(0, 0)$ y $\left(2, -\frac{4}{3}\right)$

Encontrar la pendiente de la gráfica de
$f(x) = (7x^3 - 5x + 2)(2x^4 + 7)$ cuando $x = 1$

$$Pendiente\ de\ la\ grafica = m_{tan}$$

$$f'(x) = (21x^2 - 5)(2x^4 + 7) + (7x^3 - 5x + 2)(8x^3)$$
$$pendiente = f'(1)$$
$$pendiente = (16 \cdot 9) + (4 \cdot 8) = 176$$

Determine los puntos sobre la curva $y = \dfrac{x - 3}{x + 3}$ en donde las rectas tangentes tengan una pendiente de $\frac{1}{6}$.

Hay que encontrar las x donde $f'(x) = \frac{1}{6}$

$$f'(x) = \frac{(x + 3) - (x - 3)}{(x + 3)^2} = \frac{6}{(x + 3)^2}$$

$$\frac{6}{(x + 3)^2} = \frac{1}{6}$$
$$36 = (x + 3)^2$$
$$36 = x^2 + 6x + 9$$
$$0 = x^2 + 6x - 27$$
$$x = -9; \; x = 3$$

Los puntos son $(-9, 2)$ y $(3, 0)$

Ejemplo: Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \frac{\sqrt{7x+2}}{x+1}$ en el punto $\left(1, \frac{3}{2}\right)$.

Ecuación de la recta: $y = mx + b$

$$m = f'(1)$$

$$y' = \frac{\left[\frac{1}{2}(7x+2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 7\right](x+1) - \sqrt{7x+2}}{(x+1)^2}$$

$$m = f'(1) = \frac{\frac{7}{6} \cdot 2 - 3}{4} = -\frac{1}{6}$$

Ecuacion de la tangente:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - \frac{3}{2} = -\frac{1}{6}(x - 1)$$

$$y = -\frac{1}{6}x + \frac{1}{6} + \frac{3}{2}$$

$$y = -\frac{1}{6}x + \frac{5}{3}$$

Ejemplo: Determine la derivada de $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x}$ y luego determine la ecuación de la tangente en el punto $(3, 3\sqrt{2})$

NOTA: La derivada se interpreta como una **razón de cambio** y se puede denotar de la siguiente forma:

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} \leftarrow cambio\ de\ y\ con\ respecto\ a\ x$$

Aplicaciones de la razón de cambio a la economía

La **función de costo total** de un fabricante, $c = f(q)$, nos da el costo total c de producir y comerciar q unidades de un producto. La razón de cambio de c con respecto a q se llama **costo marginal.** Así,

$$\text{costo marginal} = \frac{dc}{dq}.$$

El costo marginal mide la tasa con que el costo se incrementa con respecto al incremento de la cantidad producida.

Supongamos que $r = f(q)$ es la **función de ingreso total** para un fabricante. La ecuación $r = f(q)$ establece que el valor total de un dólar recibido al vender q unidades de un producto es r. El **ingreso marginal** se define como la razón de cambio del valor total recibido, con respecto al número total de unidades vendidas. Por consiguiente, el ingreso marginal es solamente la derivada de r con respecto a q:

$$\text{ingreso marginal} = \frac{dr}{dq}.$$

El ingreso marginal indica la rapidez a la que el ingreso cambia con respecto a las unidades vendidas. Lo interpretamos como el *ingreso aproximado recibido al vender una unidad adicional de producción.*

Problema (Costo Marginal)

Si la función de costo total para un fabricante está dada por

$$c = \frac{5q^2}{\sqrt{q^2+3}} + 5000,$$

donde c está en dólares, encuentre el costo marginal cuando se producen 10 unidades. Redondee su respuesta al centavo más cercano.

$$Costo\ marginal = C'(q) = \frac{dC}{dq}$$

$$razon\ de\ cambio\ del\ costo\ con\ respecto$$

$$a\ las\ unidades\ producidas$$

$$C = \frac{5q^2}{\sqrt{q^2+3}} + 5000$$

$$C' = \frac{10q\sqrt{q^2+3} - 5q^2 \cdot \frac{1}{2}(q^2+3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2q}{q^2+3} = \frac{10q\sqrt{q^2+3} - 5q^3(q^2+3)^{-\frac{1}{2}}}{q^2+3}$$

$$C'(10) \approx \$5$$

Significa que el costo sube en \$5 cuando se produce una unidad adicional a 10

EJEMPLO 7 (***Costo promedio marginal***) Calcule el costo promedio marginal para la función de costo

$$C(x) = 0.001x^3 - 0.3x^2 + 40x + 1000$$

cuando $x = 100$.

NOTA:

- Costo marginal= $C'(q)$
- Costo marginal promedio= $derivada\ del\ costo\ promedio$
- $Costo\ promedio = \overline{C} = \frac{C}{q}$

$$C = 0.001x^3 - 0.3x^2 + 40x + 1000$$

$$\overline{C} = \frac{0.001x^3 - 0.3x^2 + 40x + 1000}{x} = 0.001x^2 - 0.3x + 40 + 1000x^{-1}$$

$$costo\ promedio\ marginal = \overline{C}' = 0.002x - 0.3 - 1000x^{-2}$$

$$cuando\ x = 100:\ \ \overline{C}' = -\$0.2$$

El costo de cada unidad disminuye en \$0.2 cuando se produce adicional a 100 unidades

Problema: Costo Marginal *(tarea)

Si la ecuación del costo promedio de un fabricante es

$$\bar{c} = 0.0001q^2 - 0.02q + 5 + \frac{5000}{q},$$

encontrar la función de costo marginal. ¿Cuál es el costo marginal cuando se producen 50 unidades?

$$C = \bar{c} \cdot q$$

Problema (ingreso marginal)

Si la ecuación de la demanda del producto de un fabricante es

$$p = \frac{1000}{q+5},$$

donde p está en dólares, encontrar la función de ingreso marginal y evaluarla cuando $q = 45$.

$$Ingreso = (precio)(unidades)$$

$$I = \frac{1000}{q+5} \cdot q = \frac{1000q}{q+5}$$

$$Ingreso\ marginal = I' = \frac{dI}{dq}$$

$$I' = \frac{1000(q+5) - 1000q}{(q+5)^2} = \frac{5000}{(q+5)^2}$$

$$Cuando\ q = 45:\ I' = \$2$$

Significa que el ingreso aumenta en \$2 cuando se produce una unidad adicional a 45

Problema (ingreso marginal)

La función de ingresos de una empresa está dada por $I(x) = 50x + 0.1x^2 + 0.001x^3$, donde x es la cantidad de unidades producidas y vendidas y el ingreso está en dólares. Determine el ingreso marginal cuando existe una producción de 30 unidades y explique el significado.

$$ingreso\ marginal = I' = 50 + 0.2x + 0.003x^2$$

$$cuando\ x = 30:\ I' = \$56.27$$

Significa que los ingresos aumentan en \$56.27 cuando se vende una unidad adicional a 30

Problema

La población P de una ciudad dentro de t años está dada por

$$P = 20{,}000e^{0.03t}.$$

Encuentre la razón de cambio de la población con respecto al tiempo t dentro de cuatro años. Redondee su respuesta al entero más cercano.

La ecuación demanda de cierto artículo es $p = 80 - 0.1x$ y la función costo $C(x) = 5000 - 20x$. Calcule la utilidad marginal cuando se producen y venden 150 unidades, y también para el caso de 400 unidades. Interprete resultados. $(U = I - C)$.