PRIMERA DERIVADA Y GRAFICA DE UNA FUNCION

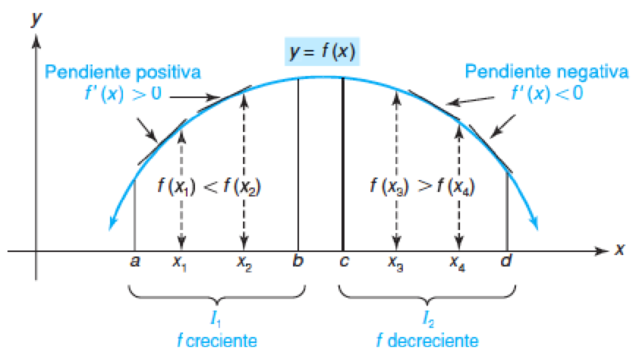


FIGURA 12.2 Formas creciente y decreciente de una función.

Teorema Sea f una función derivable en el intervalo $]a, b[$.
(a) Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in]a, b[$, entonces f es creciente en $]a, b[$.
(b) Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in]a, b[$, entonces f es decreciente en $]a, b[$.
(c) Si $f'(x) = 0$ para todo $x \in]a, b[$, entonces f es constante en $]a, b[$.

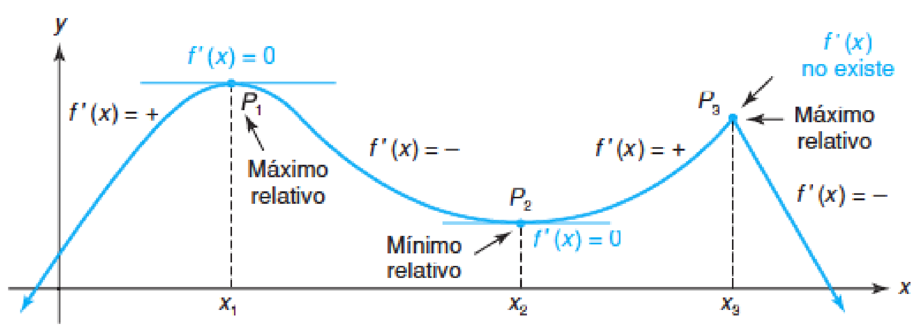
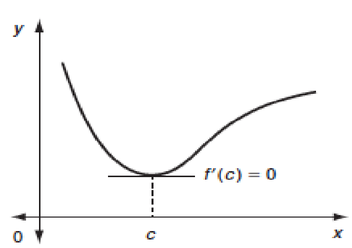
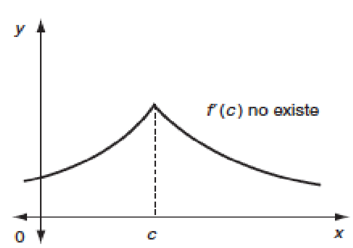


FIGURA 12.5 Máximos y mínimos relativos.

DEFINICIÓN El valor $x = c$ se denomina **punto crítico** para una función continua f si $f(c)$ está bien definida y si o $f'(c) = 0$ o $f'(x)$ no existe en $x = c$.





TEOREMA 1 (PRUEBA DE LA PRIMERA DERIVADA) Sea $x = c$ un punto crítico de la función f. Entonces:

a) Si $f'(x) > 0$ para x justo antes de c y $f'(x) < 0$ justo después de c, entonces c es un máximo local de f. (Véase la parte *a*) de la figura 12. Los símbolos $(+)$, $(-)$ o (0) junto a cada parte de la gráfica indica el signo de f').

b) Si $f'(x) < 0$ para x justo antes de c y $f'(x) > 0$ justo después de c, entonces c es un mínimo local de f. (Véase la parte *b*) de la figura 12).

c) Si $f'(x)$ tiene el mismo signo para x justo antes de c y para x justo después de c, entonces c no es un extremo local de f. (Véase la parte *c*) de la figura 12).

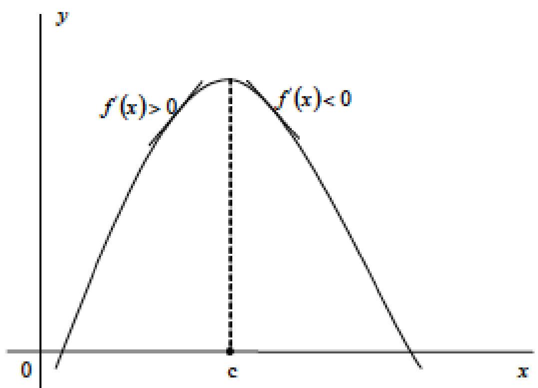


Figura 9: Máximo local

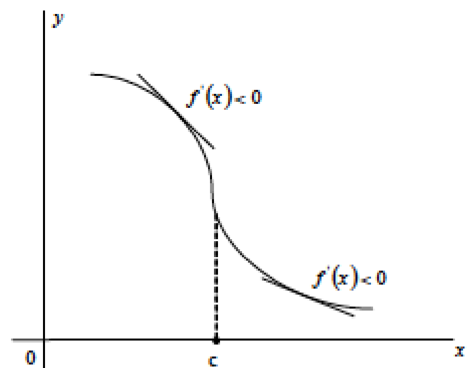


Figura 10: No hay extremo

EJEMPLO 2 Determine los valores de x en los cuales la función

$$f(x) = x^3 - 3x$$

crece o decrece. y también los puntos extremos.

Se hace un análisis de signos de la primera derivada (tabla de signos)

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$
$$f'(x) = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$$

	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$(x-1)$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+1)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	

$$f \text{ es creciente en }]-\infty, -1[\text{ y }]1, +\infty[$$

$$f \text{ es decreciente en }]-1, 1[$$

Puntos extremos: Máximo en $(-1,2)$; Mínimo en $(1,-2)$

EJEMPLO:

Si $y = f(x) = x + \dfrac{4}{x+1}$, *utilizar la prueba de la primera derivada para encontrar dónde se presentan los extremos relativos.*

Se hace análisis de signos de la derivada

$$f(x) = x + 4(x+1)^{-1}$$

$$f'(x) = 1 - 4(x+1)^{-2} = 1 - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 4}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 1 - 4}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2} = \frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$$

Puntos extremos:

Máximo en $(-3, f(-3)) = (-3, -5)$

Mínimo en $(1, f(1)) = (1, 3)$

restricción

siempre es + → $(x+1)^2$

	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$(x+3)$		−	0	+		+		+	
$(x-1)$		−		−		−	0	+	
$(x+1)^2$		+		+	0	+		+	
$f'(x)$		+		−		−		+	
$f(x)$		↗	max	↘		↘	min	↗	

EJEMPLO: (TAREA)

Trazar la gráfica de $y = f(x) = 2x^2 - x^4$ *con la ayuda de intersecciones, simetría y prueba de la primera derivada.*

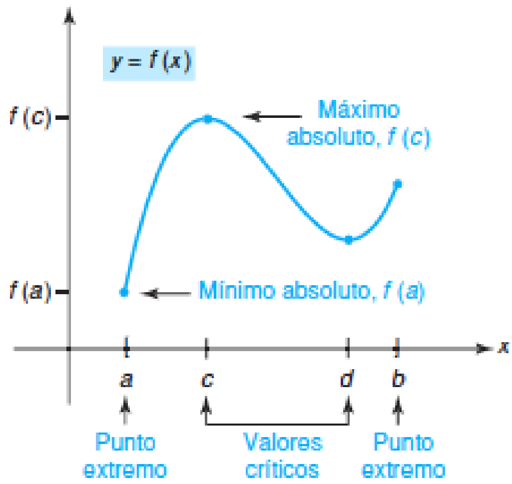


FIGURA 12.27 Extremos absolutos.

Procedimiento para encontrar los extremos absolutos de una función f continua en $[a, b]$

Paso 1. Encontrar los valores críticos de f.
Paso 2. Evaluar $f(x)$ en los puntos extremos a y b, y en los valores críticos sobre (a, b).
Paso 3. El valor máximo de f es el mayor de los valores encontrados en el paso 2. El valor mínimo de f es el menor de los valores encontrados en el paso 2.

EJEMPLO 1 Localización de los valores extremos en un intervalo cerrado

Encontrar los extremos absolutos para $f(x) = x^2 - 4x + 5$ en el intervalo cerrado $[1, 4]$.

1) Se encuentran los valores de x donde $f'(x) = 0$ (puntos críticos)

$$f'(x) = 2x - 4 = 0$$
$$x = 2$$

2) Evaluar la función original en los valores críticos y en los extremos del intervalo

$$f(2) = 1$$
$$f(1) = 2$$
$$f(4) = 5$$

3) Se identifica el resultado más grande y el más pequeño

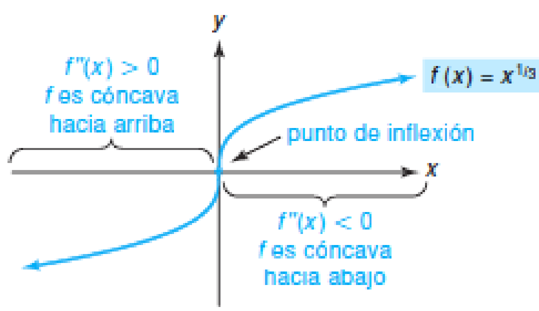
Máximo absoluto $(4,5)$
Mínimo absoluto $(2,1)$

LA SEGUNDA DERIVADA Y LA CONCAVIDAD

Regla 4 Criterios de concavidad

Sea f' diferenciable en el intervalo (a, b). Si $f''(x) > 0$ para toda x en (a, b), entonces f es cóncava hacia arriba en (a, b). Si $f''(x) < 0$, para toda x en (a, b), entonces f es cóncava hacia abajo en (a, b).

DEFINICIÓN Un **punto de inflexión** de una curva es un punto en donde la curva cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo o viceversa.



(TAREA)

EJEMPLO 1 Encuentre los valores de x en los cuales la gráfica de

$$y = \frac{1}{6}x^4 - x^3 + 2x^2$$

es cóncava hacia abajo o cóncava hacia arriba.

EJEMPLO 2 Concavidad y puntos de inflexión

Investigar la concavidad y los puntos de inflexión de $y = 6x^4 - 8x^3 + 1$.

Se hace un análisis de signos para la segunda derivada

$$y' = 24x^3 - 24x^2$$

$$y'' = 72x^2 - 48x = 24x(3x-2)$$

$$f \text{ es cóncava hacia arriba en }]-\infty, 0[\text{ y } \left]\frac{2}{3}, +\infty\right[$$

$$f \text{ es cóncava hacia abajo en } \left]0, \frac{2}{3}\right[$$

$$\text{Puntos de inflexión: } (0,1) \text{ y } \left(\frac{2}{3}, \frac{-5}{27}\right)$$

	$-\infty$		0		$2/3$		$+\infty$
$24x$		$-$	0	$+$		$+$	
$(3x-2)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$		$\cup$	P.I.	$\cap$	P.I.	$\cup$	

EJEMPLO 4 Trazado de una curva

Trazar la gráfica de $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$.

Pasos

1. Determinar las intersecciones con los ejes
2. Análisis de la primera derivada: crece, decrece y puntos extremos (max, min)
3. Análisis de la segunda derivada: concavidad y puntos de inflexión.
4. Hacer la gráfica, ubicando primero los puntos encontrados y luego trazando las curvas

Intersección con Eje X: resolver $f(x) = 0$	Intersección con Eje Y: $f(0)$
$2x^3 - 9x^2 + 12x = 0$ $x(2x^2 - 9x + 12) = 0$ $x = 0$ $(0,0)$	$f(0) = 0$ $(0,0)$

Análisis de Primera derivada

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2) = 6(x-2)(x-1)$$

Punto máximo en $(1, 5)$

Punto mínimo en $(2, 4)$

	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$(x-2)$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-1)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	

Análisis de Segunda derivada

$$f''(x) = 12x - 18 = 6(2x-3)$$

Punto de inflexión $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)$

	$-\infty$		$3/2$		$+\infty$
$(2x-3)$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$		$\cap$	PI	$\cup$	

Gráfica: