

TRABAJO PRÁCTICO

Método de Jacobi y Teorema de Gershgorin

Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional Concordia

Cálculo Numérico

Profesores: Faure Omar, Bignotti Bruno
Alumno: Martínez Navá Tomas / Broxup Toledo Malcolm
Comisión: Turno Tarde
Carrera: Ingeniería Eléctrica
Año: 2025

1. Sistema inicial

Sistema de ecuaciones:

$$10x_1 - x_2 + 2x_3 = 6$$

$$-2x_1 + 11x_2 - x_3 = 25$$

$$x_1 - x_2 + 10x_3 = -11$$

1.1 Verificación de la diagonal dominante

Se verifica que la matriz A es estrictamente diagonalmente dominante en todas sus filas:

$$\text{Fila 1: } |10| > |-1| + |2| \rightarrow 10 > 3$$

$$\text{Fila 2: } |11| > |-2| + |-1| \rightarrow 11 > 3$$

$$\text{Fila 3: } |10| > |1| + |-1| \rightarrow 10 > 2$$

2. Aplicación del método de Jacobi

2.1 Despejes

$$x_1 = (6 + x_2 - 2x_3)/10$$

$$x_2 = (25 + 2x_1 + x_3)/11$$

$$x_3 = (-11 - x_1 + x_2)/10$$

2.2 Iteraciones

Partiendo de $x^{(0)} = [0, 0, 0]$:

Iteración 1:

$$x_1 = 0.6, x_2 = 2.2727, x_3 = -1.1$$

Iteración 2:

$$x_1 = 1.0473, x_2 = 2.2818, x_3 = -0.9327$$

Iteración 3:

$$x_1 = 1.0147, x_2 = 2.3783, x_3 = -0.9765$$

Se observa que el método se aproxima a la solución.

3. Sistema modificado

Ecuaciones con la primera y tercera intercambiadas:

$$x_1 - x_2 + 10x_3 = -11$$

$$-2x_1 + 11x_2 - x_3 = 25$$

$$10x_1 - x_2 + 2x_3 = 6$$

3.1 Análisis estructural

Matriz modificada:

$$[[1, -1, 10], [-2, 11, -1], [10, -1, 2]]$$

Verificación de diagonal dominante:

Fila 1: $|1| < |-1| + |10| \rightarrow$ No cumple

Fila 2: $|11| > |-2| + |-1| \rightarrow$ Cumple

Fila 3: $|2| < |10| + |-1| \rightarrow$ No cumple

La matriz no es diagonalmente dominante en todas las filas.

3.2 Método de Jacobi

Despejes:

$$x_1 = (-11 + x_2 - 10x_3)$$

$$x_2 = (25 + 2x_1 + x_3)/11$$

$$x_3 = (6 - 10x_1 + x_2)/2$$

Iteraciones desde $x^{(0)} = [0, 0, 0]$:

Iteración 1: $x_1 = -11, x_2 = 2.2727, x_3 = 3$

Iteración 2: $x_1 = -38.7273, x_2 = 0.5455, x_3 = 59.1364$

Iteración 3: $x_1 = -601.8182, x_2 = 0.6074, x_3 = 196.9091$

El método diverge.

4. Análisis con el Teorema de Gershgorin

Para el sistema original:

$$D = \text{diag}(10, 11, 10)$$

$$A-D = [[0, -1, 2], [-2, 0, -1], [1, -1, 0]]$$

$$B = -D^{-1}(A-D):$$

$$[[0, 0.1, -0.2], [0.1818, 0, 0.0909], [-0.1, 0.1, 0]]$$

Discos de Gershgorin:

Centros: 0

Radios: 0.3, 0.2727, 0.2 — Todos dentro de $|z| < 1$

→ Asegura convergencia.

Para el sistema modificado:

$$D_{\text{mod}} = \text{diag}(1, 11, 2)$$

$$B_{\text{mod}} = [[0, 1, -10], [0.1818, 0, 0.0909], [-5, 0.5, 0]]$$

Discos de Gershgorin:

Centros: 0

Radios: 12, 0.2727, 5.5 — Algunos discos fuera de $|z| < 1$
→ No asegura convergencia.

5. Conclusiones

- El método de Jacobi converge cuando la matriz es estrictamente diagonalmente dominante y el radio espectral de B es menor que 1.
- El orden de las ecuaciones afecta la estructura de la matriz, alterando la diagonal dominante.
- En el sistema original se verifica la condición de Gershgorin, por lo que el método converge; en el modificado, no.