UTN

Facultad Regional Concordia

Trabajo Práctico Final versión 2024

Cálculo Numérico

Cálculo Avanzado

Análisis Numérico y Cálculo Avanzado

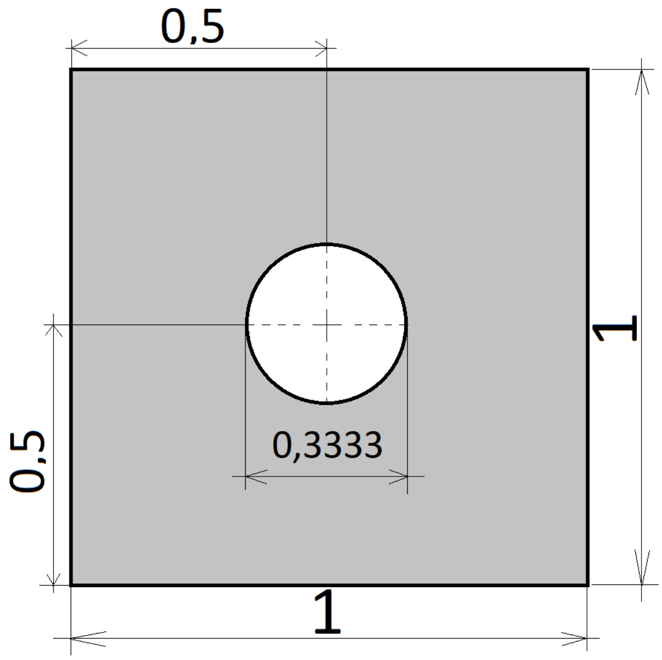
Consignas y guía de resolución

Prof.Dr. Omar Faure

Ing. Bruno Bignotti

Problema

Considere la siguiente geometría



Llamaremos Γd (gamma d) al perímetro del cuadrado exterior y Γn (gamma n) al círculo interior. Llamaremos Ω (omega) a la región geométrica comprendida entre (pero sin incluir) Γd y Γn.

Considere el siguiente problema de ecuaciones diferenciales con condiciones de borde

1. $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$ para todo punto de Ω
2. $u = 0$ para todo punto de Γd
3. $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ para todo punto de Γn
4. La función f(x,y) es una función a definir luego

Consignas

- Resolver el problema utilizando los métodos de diferencias finitas y elementos finitos para alguna función f(x,y) distinta de cero.
- Hallar una expresión analítica que resuelva el problema para alguna f(x,y) conveniente que también se debe hallar.
- Probar de forma empírica que los métodos usados convergen a una misma solución
- Analizar la evolución de la convergencia y disminución del error a medida que aumenta la cantidad de nodos.
- Hallar una función que anticipe el error que tendrían los métodos para más nodos.
- Explicar los fundamentos teóricos de los métodos.

Guía de resolución

Esta guía da indicaciones generales para estudiar, investigar y para resolver las consignas. La resolución del trabajo práctico final siguiendo los pasos de esta guía al pié de la letra no garantiza una nota sobresaliente ni ninguna calificación específica. Tanto las consignas como la guía dejan muchos huecos sin especificar a propósito para dar al alumno espacio de expresión propia. La calificación es proporcional al desempeño mostrado por el alumno tanto en el trabajo escrito como en el coloquio oral.

Consejos generales para el programa

Divida el programa en partes, cada una con los siguientes objetivos a completar

1. Definición de nodos y elementos (coordenadas y otras propiedades)
2. Definición de matriz A y vector b.
3. Aplicación de condiciones de borde correspondientes.
4. Resolución del sistema lineal Ax=b.
5. Reordenamiento del vector solución para graficar y analizar resultados.

Si no está familiarizado con los lenguajes de programación, no intente escribir un programa de alcance general en su primer intento. Enfóquese en resolver primero ejemplos sencillos específicos que pueda resolver manualmente para verificar paso a paso el correcto funcionamiento. Por ejemplo, se puede considerar un problema que no tenga condiciones de Neumann y que tenga solo 16 nodos en total.
Una imagen vale más que mil palabras. Tómese un tiempo para entender cómo producir buenos gráficos con los títulos, etiquetas en los ejes y leyendas correspondientes en caso de graficar diferentes conjuntos de datos. En MATLAB usaremos generalmente las funciones plot, surf, trisurf y patch para graficar.

Planteo analítico

El trabajo práctico pide evaluar la convergencia y el error. Para ello es necesario contar con una solución analítica que será la solución que usaremos de referencia.
Considere las funciones

- $ud(x,y) = x\cdot(1-x)\cdot y\cdot(1-y)$
- $un(x,y) = ((x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2 - (1/6)^2)^2$

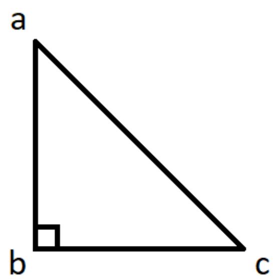
1. Verifique que una función $u_a(x,y) = u_d(x,y)\cdot u_n(x,y)$ satisface las condiciones de borde. Para esto, reemplace (x,y) por coordenadas de un punto sobre cada tipo de frontera. En el caso de la condición de neumann primero calcule la derivada direccional de u_a en una dirección normal a la frontera Γn y luego reemplace (x,y) por las coordenadas.
2. Dado que $\mathbf{u_a}$ satisface las condiciones de borde, $\mathbf{u_a}$ es una posible solución al problema. ¿Qué función f(x,y) debería tener el problema a la derecha del signo igual para que la solución sea u_a?.De ahora en más llamaremos a esta f(x,y) como $\mathbf{f_a(x,y)}$.
3. Grafique las funciones $\mathbf{u_a}$ y $\mathbf{f_a}$ en un gráfico tridimensional.

Diferencias finitas (DF)

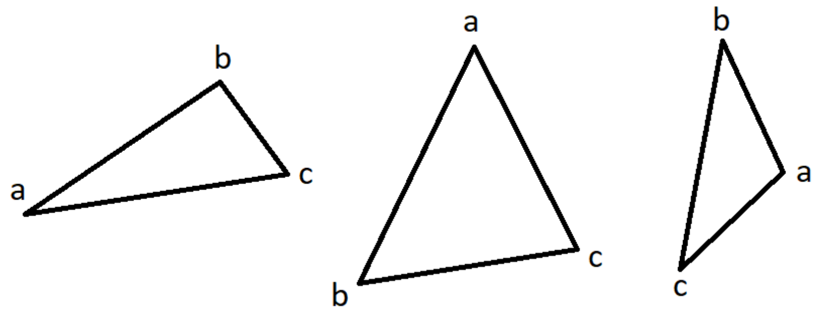
1. Plantear 49 puntos igualmente espaciados de tal manera que cubran de forma uniforme el dominio omega.
2. Serán 48 nodos efectivos ya que uno cae fuera del dominio justo en el centro del círculo. Lo mismo va a pasar con mallados más finos, siempre va a haber nodos que caigan fuera del dominio. ¿Cómo afecta esto a la hora de plantear la matriz A de diferencias finitas y graficar?
3. Existen 4 tipos de nodos en este problema: Interno, Dirichlet, Neumann y Externo. Para cada uno de los 49 puntos anteriores complete una tabla con la siguiente información: Número de nodo; coordenada x; coordenada y; tipo de nodo. Puede incluir más columnas con otra información nodal que considere relevante.
4. Explique los diferentes tipos de aproximación de la derivada de primer y de segundo orden hacia adelante, hacia atrás y centrales.
5. Para los nodos Dirichlet y Neumann hay que modificar su fila correspondiente en el sistema. Explique estas modificaciones, en especial aquellos nodos con condición de Neumann cuya dirección normal a la circunferencia no es un múltiplo de 90 grados. ¿Cómo luce el sistema $\boldsymbol{A \cdot u = b}$ luego de aplicarle las condiciones de borde?
6. Resuelva el sistema $\boldsymbol{A \cdot u = b}$ utilizando como función $\boldsymbol{f(x,y)}$ la función obtenida previamente $\boldsymbol{f_a(x,y)}$.
7. Calcule en cada uno de los 49 nodos el error absoluto (EA) entre la solución por DF y la solución analítica $\boldsymbol{u_a}$. Grafique el error en un gráfico tridimensional. También calcule el EA promedio y máximo del caso anterior, se usará en el punto 10.
8. Para mallados de 81, 121, 441, 961,1681 y 2601 nodos con una separación entre nodos uniforme halle la solución del sistema lineal $\boldsymbol{A \cdot u = b}$ y haga gráficos 3D de la solución como también del EA. Repita también para $\mathbf{u_a}$ con esos mallados.
9. Para todos los casos ya resueltos complete una tabla con la siguiente información: Cantidad de nodos, separación entre nodos, EA máximo, EA promedio.
10. Grafique en un gráfico 2D el EA máximo en el eje Y y la cantidad de nodos en el eje X. Repita pero para el EA promedio.

Elementos finitos (EF)

1. Elija manualmente las coordenadas para una cantidad de nodos entre 24 y 30. Asegúrese de cubrir las fronteras y de tener suficientes nodos internos. Ponga los datos en una tabla indicando el número de nodo, sus coordenadas y tipo de nodo (dirichlet, neumann o interno).
2. Con los anteriores nodos arme un mallado de elementos finitos. Ponga los datos en una tabla indicando el número de cada elemento y los nodos que lo componen.
3. ¿Cómo luce la matriz de un solo elemento triangular como el de la figura?



4. ¿Cómo se puede generalizar el cálculo de la matriz de un elemento si el elemento tiene cualquier tamaño y ubicación de los nodos como los de la figura?



5. Explique qué es la forma débil de una ecuación diferencial.
6. Obtenga una forma débil para el problema original usando el método de residuos ponderados o un método variacional.
7. Usando la forma débil plantee un sistema de ecuaciones $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}$ para el mallado planteado a mano anteriormente.
8. ¿Cómo se aplican las condiciones de borde? ¿Es igual que en Diferencias Finitas?
9. Resuelva el sistema y haga un gráfico tridimensional de la solución
10. Calcule el error absoluto en cada nodo y haga un gráfico tridimensional del mismo, también calcule el error absoluto máximo y promedio de esta solución.
11. Utilice un software de mallado como GMSH para construir mallas de aproximadamente 49, 81, 121, 441, 961,1681 y 2601 nodos.
12. Resuelva los mallados anteriores, grafique las soluciones, calcule los errores absolutos en cada nodo, grafique los errores, calcule el error absoluto máximo y promedio para cada mallado.
13. Grafique en un gráfico 2D la cantidad de nodos en el eje x y el error absoluto máximo de cada resolución en el eje y. Además en un gráfico diferente grafique el error absoluto promedio.