Trabajo Práctico: Método de Jacobi y el Teorema de Gershgorin

B. BIGNOTTI & O.R. FAURE

2025

Objetivos

- Aplicar el método de Jacobi para resolver sistemas lineales.
- Observar experimentalmente la convergencia o no convergencia del método.
- Analizar el papel de la diagonal dominante.
- Introducir y aplicar el Teorema de Gershgorin para justificar la convergencia del método.

1. Sistema inicial

Consideren el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 \\ -2x_1 + 11x_2 - x_3 = 25 \\ x_1 - x_2 + 10x_3 = -11 \end{cases}$$

1.1 Verificación de la diagonal dominante

Escriban la matriz del sistema A y verifiquen si es diagonalmente dominante por filas, es decir, si se cumple:

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \quad \text{para cada fila } i$$

¿Se cumple la desigualdad estricta? ¿Para todas las filas?

2. Aplicación del método de Jacobi

2.1 Despejes

Reescriban cada ecuación despejando la incógnita correspondiente al coeficiente diagonal:

- x_1 de la primera ecuación
- x_2 de la segunda
- x_3 de la tercera

Obtendrán así la forma iterativa del método de Jacobi:

$$x_1^{(k+1)} = \dots \quad x_2^{(k+1)} = \dots \quad x_3^{(k+1)} = \dots$$

2.2 Iteraciones

Partiendo del vector inicial:

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Calculen a mano las iteraciones $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}$ y $\mathbf{x}^{(3)}$. Redondeen los resultados a 4 cifras decimales si es necesario.

¿Parece que el método se está acercando a la solución? ¿Qué observan?

3. Sistema modificado

Intercambien la primera y la tercera ecuación del sistema original. Es decir, consideren el nuevo sistema:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 10x_3 = -11 \\ -2x_1 + 11x_2 - x_3 = 25 \\ 10x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

3.1 Análisis estructural

- Escriban la nueva matriz del sistema.
- ¿Es diagonalmente dominante por filas? ¿En todas las filas?

3.2 Método de Jacobi

- Reescriban el sistema con los nuevos despejes correspondientes.
- Apliquen nuevamente el método de Jacobi desde $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ y hagan tres iteraciones.

¿El método converge en este caso? ¿Qué comportamiento observan?

4. Análisis con el Teorema de Gershgorin

El método de Jacobi se puede escribir en la forma iterativa:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = B\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}$$

donde $B = -D^{-1}(A - D)$, con D la matriz diagonal de A.

4.1 Cálculo de la matriz de iteración

Para ambos sistemas (el original y el modificado), calculen:

- D
- $A - D$
- $B = -D^{-1}(A - D)$

4.2 Discos de Gershgorin

Apliquen el Teorema de Gershgorin a la matriz B de cada sistema. Para cada fila i, calculen:

- Centro del disco: b_{ii}
- Radio del disco: $\sum_{j \neq i} |b_{ij}|$

Representen los discos en el plano complejo si lo desean. ¿Dónde se ubican los autovalores?

4.3 Interpretación

- ¿Qué relación encuentran entre la posición de los discos y la convergencia del método?
- ¿En qué caso los discos garantizan que todos los autovalores están dentro del círculo unidad? ¿Qué significa eso para la convergencia?

5. Conclusiones

- ¿Por qué el método converge en un caso y no en el otro?
- ¿Qué papel juega el orden de las ecuaciones?
- ¿Qué condiciones sobre la matriz A aseguran la convergencia del método de Jacobi?

Extras (opcional)

- Implementar el método de Jacobi en una planilla de cálculo o programa (Python, MATLAB, etc.).
- Probar con otros sistemas lineales, modificando la diagonal dominante.