



**Trabajo Practico Final: Análisis Numérico y Cálculo Avanzado**

**Profesor:** Prof. Dr. Omar Faure  
Ing. Bruno Bignotti

**Alumno:** Gabriel, Murguía  
Malcolm, Broxup Toledo

**Carrera:** Ingeniería Eléctrica

**Año 2025**

# Índice

Planteo Analítico .....	3
Diferencias Finitas .....	5
Elementos Finitos .....	13
Bibliografía .....	27

Aclaración: Todos los códigos usados en este proyecto están registrados y guardados para su revisión en GitHub.

<https://github.com/GabooArevlo/tp-calculo-numerico>

ignorar el archivo con nombre "1-10puntos.py" error de la pagina.

# Planteo Analítico

Se pedía verificar si la función  $U_a$  satisface las condiciones de borde, para ello elegimos las siguientes coordenadas  $(x,y)$ .  $(0, 0.5)$ ,  $(1, 0.5)$ ,  $(0.5, 0)$ ,  $(0.5, 1)$

Primero veamos que son las condiciones de borde, son restricciones impuesta a la solución en los límites del dominio de estudio, esto es importante para que el problema tenga una solución única. Estas restricciones que mencionamos son las condición de Dirichlet y condición de Neumann. la primer condición especifica el valor de la función en el dominio en este caso tendría que ser cero, la segunda condición se mira la derivada direccional en la dirección del vector normal esto representa como se mueve la función a la frontera.

El valor de  $U_a$  es:

$$\text{Función analítica } u_a(x,y) = x \cdot y \cdot (x - 1) \cdot (y - 1) \cdot \left( (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2 - 0.0277777777777778 \right)^2$$

Ahora vamos a verificar si cumplen las condiciones:

Verificación de Dirichlet ( $u_a=0$ ) en  $\Gamma_d$ :

```
u_a(0,0.5) = 0.0
u_a(1,0.5) = 0.0
u_a(0.5,0) = 0.0
u_a(0.5,1) = 0.0
```

Por lo cual verifica la condición de Dirichlet, gracias a la función  $U_d$ .

Ahora vamos a verificar la siguiente condición:

Verificación de Neumann ( $\partial u_a / \partial n = 0$ ) en  $\Gamma_n$ :

Derivada normal en el círculo ( $\partial u / \partial n$ ):

$$2.85779606767261e-5 \sin(\theta) - 0.00027863511659808 \sin(\theta) + 0.000664437585733882 \sin(\theta) - 0.00060728166438043 \sin(\theta) + 0.000192901234567901 \cos(\theta) - 2.85779606767261e-5 \cos(\theta) - 0.000164323273891175 \cos(\theta) + 0.000192901234567901 \cos(\theta)$$

Por lo cual cumple la condición de Neumann.

Como  $U_a$  satisface las condiciones de borde,  $U_a$  es una posible solución del problema así que vamos a hallar  $f_a(x,y)$  que hace que  $U_a$  sea una solución.

Para ello vamos a aplicar el Laplaciano a  $U_a$ .

$$\Delta U_a = f_a(x, y) \quad \Delta \text{ Es el laplaciano}$$

Por lo cual nos da la siguiente función que hace que eso se cumpla:

```

Función fuente  $f_a(x,y) = \Delta u_a =$ 

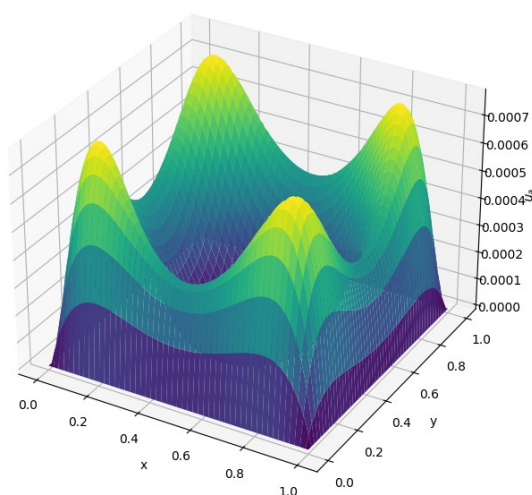
$$2.0 \cdot x^6 - 6.0 \cdot x^5 + 54.0 \cdot x^4 \cdot y - 54.0 \cdot x^3 \cdot y^2 + 11.8888888888889 \cdot x^4 - 108.0 \cdot x^3 \cdot y + 108.0 \cdot x^2 \cdot y^2 - 13.7777777777778 \cdot x^3 + 54.0 \cdot x^2 \cdot y - 108.0 \cdot x \cdot y^2 + 142.666666666667 \cdot x^2 - 88.6666666666667 \cdot x \cdot y + 8.22376543209877 \cdot x^2 - 54.0 \cdot x \cdot y + 108.0 \cdot y^4$$


$$- 88.6666666666667 \cdot x \cdot y^2 + 34.6666666666667 \cdot x \cdot y^3 - 2.33487654320988 \cdot x^6 + 2.0 \cdot y^6 - 6.0 \cdot y^5 + 11.8888888888889 \cdot y^4 - 13.7777777777778 \cdot y^3 + 8.22376543209877 \cdot y^2 - 2.33487654320988 \cdot y$$

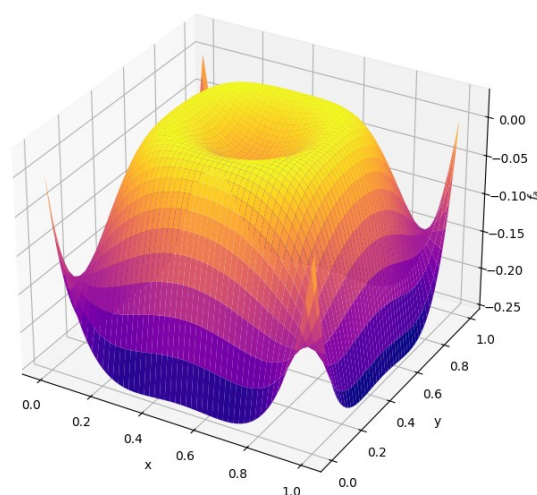

```

Representación gráfica de la función dada:

Solución analítica  $u_a(x,y)$



Función fuente  $f_a(x,y) = \Delta u_a$



Como podemos observar la función satisface la solución.

# Diferencias Finitas (DF)

Los 49 puntos igualmente espaciados que cubren todo el dominio, el punto central queda fuera del dominio por lo cual son 48 puntos efectivos.

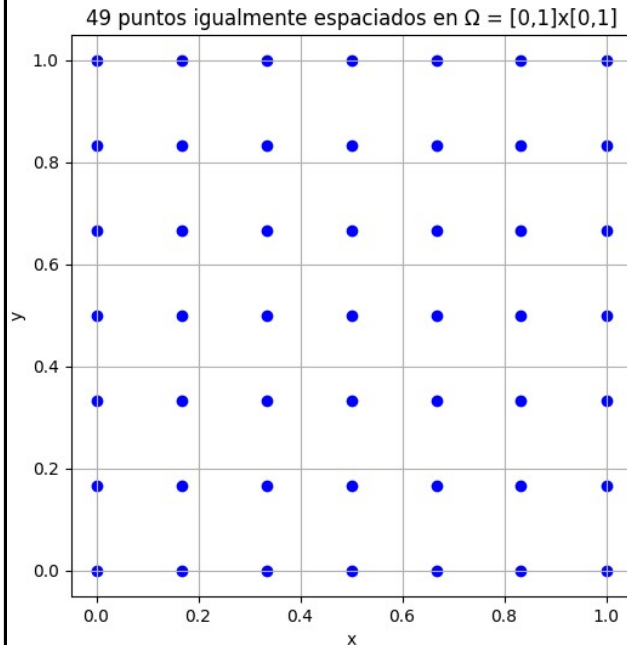
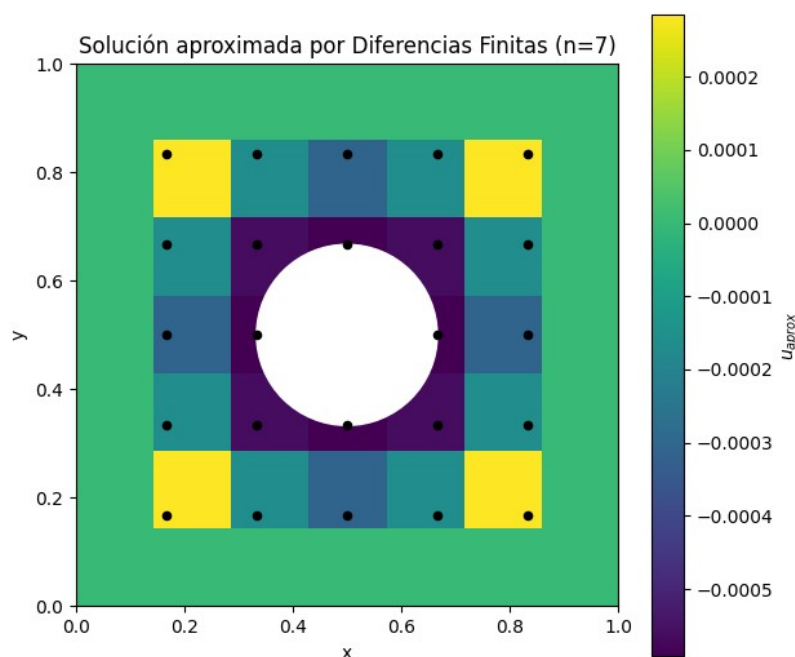


Grafico de los puntos espaciados uniformemente.

Ahora vamos a ver que sucede cuando los nodos caen afuera del dominio para plantear la matriz A. En estos casos lo que se hace es analizar, los que estan completamente fuera del dominio no forman parte del sistema lineal, entonces estos nodos se excluyen de la matriz A en este caso como el único nodo que cae fuera del dominio es el central que esta en el agujero se lo ignora.



Clasificación de los nodos:

	Nº nodo	x	y	Tipo	Índice incógnita
0	0	0.000	0.000	Dirichlet	-1
1	1	0.167	0.000	Dirichlet	-1
2	2	0.333	0.000	Dirichlet	-1
3	3	0.500	0.000	Dirichlet	-1
4	4	0.667	0.000	Dirichlet	-1
5	5	0.833	0.000	Dirichlet	-1
6	6	1.000	0.000	Dirichlet	-1
7	7	0.000	0.167	Dirichlet	-1
8	13	1.000	0.167	Dirichlet	-1
9	14	0.000	0.333	Dirichlet	-1
10	20	1.000	0.333	Dirichlet	-1
11	21	0.000	0.500	Dirichlet	-1
12	27	1.000	0.500	Dirichlet	-1
13	28	0.000	0.667	Dirichlet	-1
14	34	1.000	0.667	Dirichlet	-1
15	35	0.000	0.833	Dirichlet	-1
16	41	1.000	0.833	Dirichlet	-1
17	42	0.000	1.000	Dirichlet	-1
18	43	0.167	1.000	Dirichlet	-1
19	44	0.333	1.000	Dirichlet	-1
20	45	0.500	1.000	Dirichlet	-1
21	46	0.667	1.000	Dirichlet	-1
22	47	0.833	1.000	Dirichlet	-1
23	48	1.000	1.000	Dirichlet	-1
24	24	0.500	0.500	Externo	-1
25	8	0.167	0.167	Interno	0
26	9	0.333	0.167	Interno	1
27	10	0.500	0.167	Interno	2
28	11	0.667	0.167	Interno	3
29	12	0.833	0.167	Interno	4
30	15	0.167	0.333	Interno	5
31	16	0.333	0.333	Interno	6
32	18	0.667	0.333	Interno	8
33	19	0.833	0.333	Interno	9
34	22	0.167	0.500	Interno	10
35	26	0.833	0.500	Interno	13
36	29	0.167	0.667	Interno	14
37	30	0.333	0.667	Interno	15
38	32	0.667	0.667	Interno	17
39	33	0.833	0.667	Interno	18
40	36	0.167	0.833	Interno	19
41	37	0.333	0.833	Interno	20
42	38	0.500	0.833	Interno	21
43	39	0.667	0.833	Interno	22
44	40	0.833	0.833	Interno	23
45	17	0.500	0.333	Neumann	7
46	23	0.333	0.500	Neumann	11
47	25	0.667	0.500	Neumann	12
48	31	0.500	0.667	Neumann	16

Podemos observar en la siguiente tabla datos muy importantes sobre cada uno de los nodos: sus coordenadas, numero de nodo, tipo de nodo.

Los métodos de **Diferencias Finitas (DF)** se basan en aproximar las derivadas de una función utilizando los valores de la función en puntos discretos, o nodos. Los tipos de aproximación de la derivada de primer y segundo orden (hacia adelante, hacia atrás y centrales) se derivan del desarrollo en Serie de Taylor.

Aproximación de Derivada de Primer Orden:  $u'(x)$  se puede aproximar utilizando el valor de la función  $u(x)$  y los valores en nodos adyacentes, separados por una distancia  $h = \Delta x$

- Hacia Adelante (Forward Difference): Esta aproximación utiliza el valor del nodo actual ( $X_i$ ) y el valor del nodo inmediatamente posterior ( $X_{i+1}$ ).

formula 
$$\frac{du}{dx} = u'(x_i) = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h}$$

- Hacia Atras( Backward Difference) Esta aproximacion utiliza el valor de l nodo actual ( $X_i$ ) y el valor del nodo inmediatamente anterior ( $X_{i-1}$ ).

Formula: 
$$\frac{du}{dx} = u'(x_i) = \frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{h}$$

- Central (Centered Difference): Esta aproximación utiliza los valores de los nodos adyacentes al punto de interés: el posterior ( $X_{i+1}$ ) y el anterior ( $X_{i-1}$ ), omitiendo el valor en  $X_i$  en el numerador.

Formula: 
$$\frac{du}{dx} = u'(x_i) = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}))}{2 h}$$

Aproximación de la derivada de segundo orden:  $u''(x)$  se puede aproximar también de forma hacia adelante, hacia atras y central.

- Hacia adelante (Forward Difference): utiliza el nodo actual y los dos nodos posteriores ( $X_{i+1}$  y  $X_{i+2}$ )

Formula: 
$$\frac{d^2}{dx^2} u = u''(x_i) = \frac{u(x_{i+2}) - 2 u(x_{i+1}) + u(x_i)}{h^2}$$

- Hacia atras (Backward Difference): Utiliza el nodo actual y los dos nodos anteriores ( $X_{i-1}$  y  $X_{i-2}$ )

Formula: 
$$\frac{d^2}{dx^2} u = u''(x_i) = \frac{u(x_i) - 2 u(x_{i-1}) + u(x_{i-2}))}{h^2}$$

- Central (Centered Difference): Esta es la aproximacion mas comun para la segunda derivada. utiliza los nodos adyacentes: anterior ( $X_{i-1}$ ) y posterior ( $X_{i+1}$ ), junto al nodo actual ( $X_i$ )

formula: 
$$\frac{d^2}{dx^2} u = u''(x_i) = \frac{u(x_{i+1}) - 2 u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2}$$

Cuando los nodos Dirichlet y Neumann son modificados de su fila en el sistema sucede una principal consecuencia que es la reducción del sistema, se reducen el numero de incógnitas, ya que los nodos de Dirichlet su valor es conocido (0) estos mismos se excluyen del vector incógnitas mientras que para los vecinos de la frontera se tiene en cuenta la condición de Dirichlet y esto causa que pierda un vecino en la matriz, mientras que la condición de Neumann tambien excluye del vector  $u$  a los nodos fuera del dominio y lo que sucede con las filas adyacentes es que como la fronte es curva lo que sucede es la no alineacion de la direcciones de la malla con la direccion del vector normal  $n$ , para eso utilizamos la aproximación simplicada que es la mas sencilla de implementar, consiste en asumir que la derivada normal nula se traduce en que el valor del nodo interior  $u_P$  es aproximadamente igual al valor del nodo adyacente  $u_{fuera}$  que está en el hueco  $u_{fuera}$  es casi  $u_P$ . El efecto en la matriz  $A$ : Al sustituir  $u_{fuera}$  por  $u_P$  en la ecuación de diferencias finitas del nodo  $P$ , el coeficiente asociado a  $u_P$  en la diagonal de  $A$  se incrementa en 1.

Resolvemos el sistema  $A \cdot u = b$  con  $f_a(x, y)$

Resolviendo el sistema lineal...

Solución  $u$  en nodos (24 incógnitas):

```
[ [ 0.      0.      0.      0.      0.      0.
  0.      ]
 [ 0.      0.00028599 -0.00016034 -0.00030845 -0.00016034 0.00028599
  0.      ]
 [ 0.     -0.00016034 -0.00056174 -0.00059162 -0.00056174 -0.00016034
  0.      ]
 [ 0.     -0.00030845 -0.00059162      nan -0.00059162 -0.00030845
  0.      ]
 [ 0.     -0.00016034 -0.00056174 -0.00059162 -0.00056174 -0.00016034
  0.      ]
 [ 0.      0.00028599 -0.00016034 -0.00030845 -0.00016034 0.00028599
  0.      ]
 [ 0.      0.      0.      0.      0.      0.
  0.      ] ]
```

Calculamos el error absoluto de cada uno de los 49 nodos y también el error promedio y máximo.

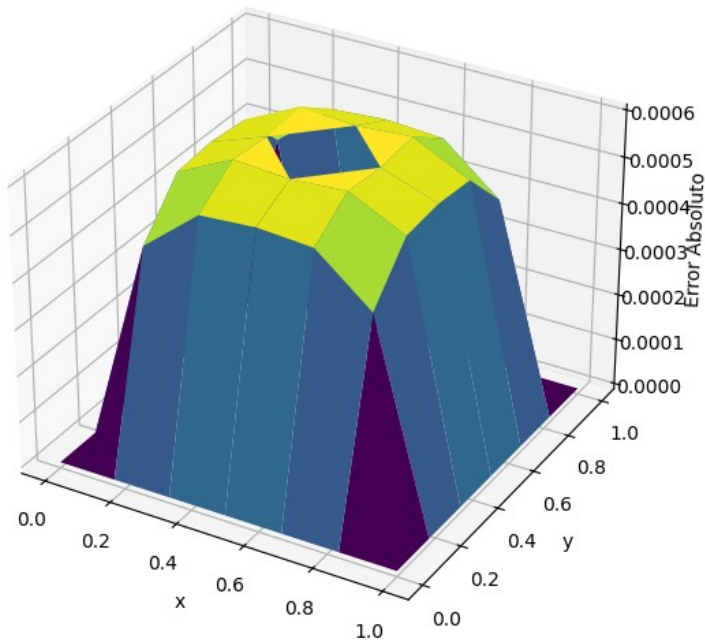
MÉTRICAS DE ERROR (Malla 7x7)

Error Absoluto Máximo (E\_MAX): 5.998439e-04

Error Absoluto Promedio: 2.722619e-04



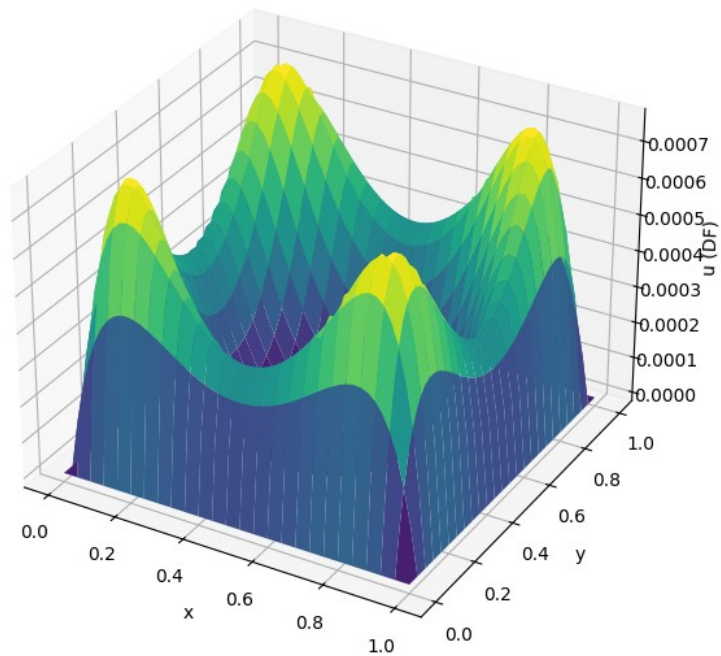
Error Absoluto  $|u_a - u_{aprox}|$  (Malla 7x7)  
E\_MAX: 6.00e-04



Como se puede observar el agujero del medio, tiene forma de cuadrado esto se debe a que los nodos son muy pocos.

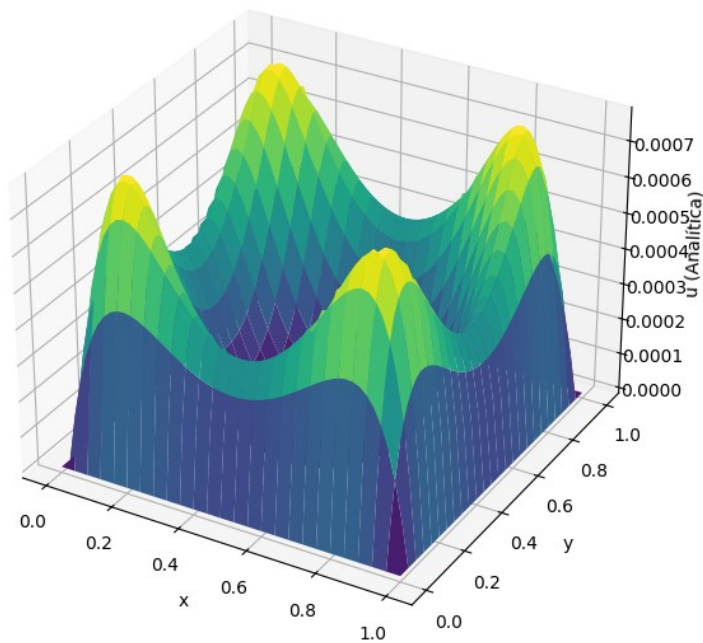
Solucion para 2601 nodos:

Solución DF Aproximada (N=2601 nodos)



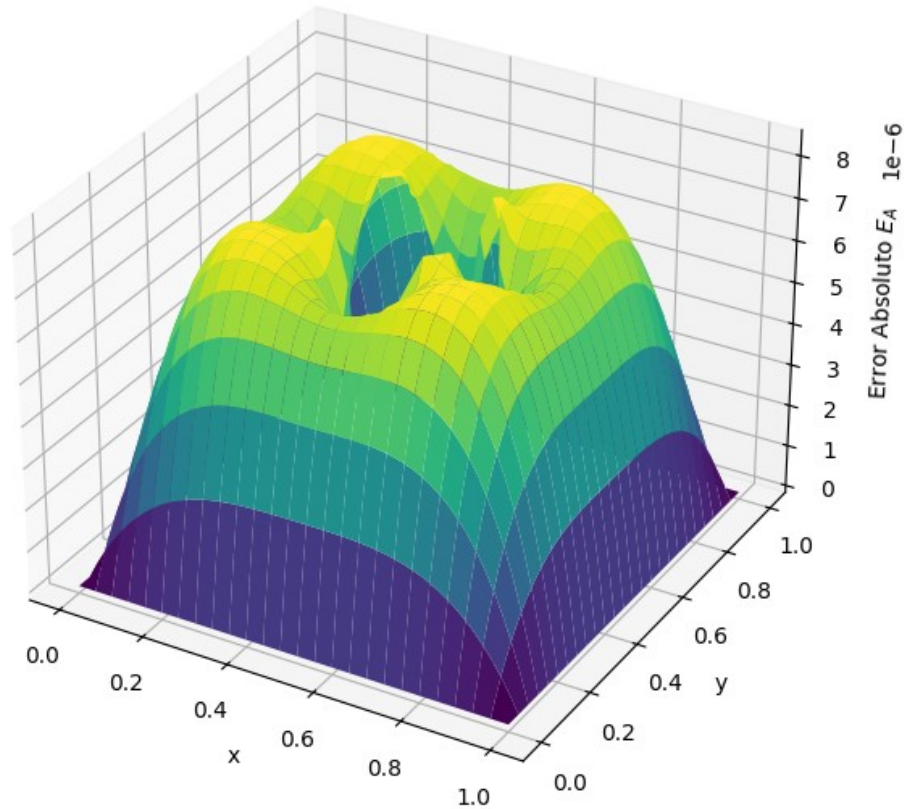
Solucion para  $U_a$ :

Solución Analítica  $u_a$  (N=2601 nodos)



Error absoluto:

Error Absoluto  $|u_a - u_{DF}|$  (N=2601 nodos)  
E\_MAX: 8.43e-06



Para resumir todos los gráficos que se pueden generar en el código modificando la malla, hicimos una tabla para utilizar luego en el punto 10

**Resultados de las métricas (Para usar en el Punto 10):**

N Total	N x N	E_MAX	E_Promedio
81	9	3.424068e-04	1.668551e-04
121	11	2.166409e-04	1.139879e-04
441	21	5.086169e-05	2.991737e-05
961	31	4.715030e-05	2.184036e-05
1681	41	1.845730e-05	9.924253e-06
2601	51	8.430377e-06	4.975999e-06

Tabla pedida en el punto 9:

**PUNTO 9: TABLA DE CONVERGENCIA (Método de Diferencias Finitas)**

=====

Nodos Total	Separación h	E_A Máximo	E_A Promedio
81	1.250000e-01	3.424068e-04	1.668551e-04
121	1.000000e-01	2.166409e-04	1.139879e-04
441	5.000000e-02	5.086169e-05	2.991737e-05
961	3.333333e-02	4.715030e-05	2.184036e-05
1681	2.500000e-02	1.845730e-05	9.924253e-06
2601	2.000000e-02	8.430377e-06	4.975999e-06

=====

Gráficos 2D del error absoluto maximo en comparacion de la cantidad de nodos

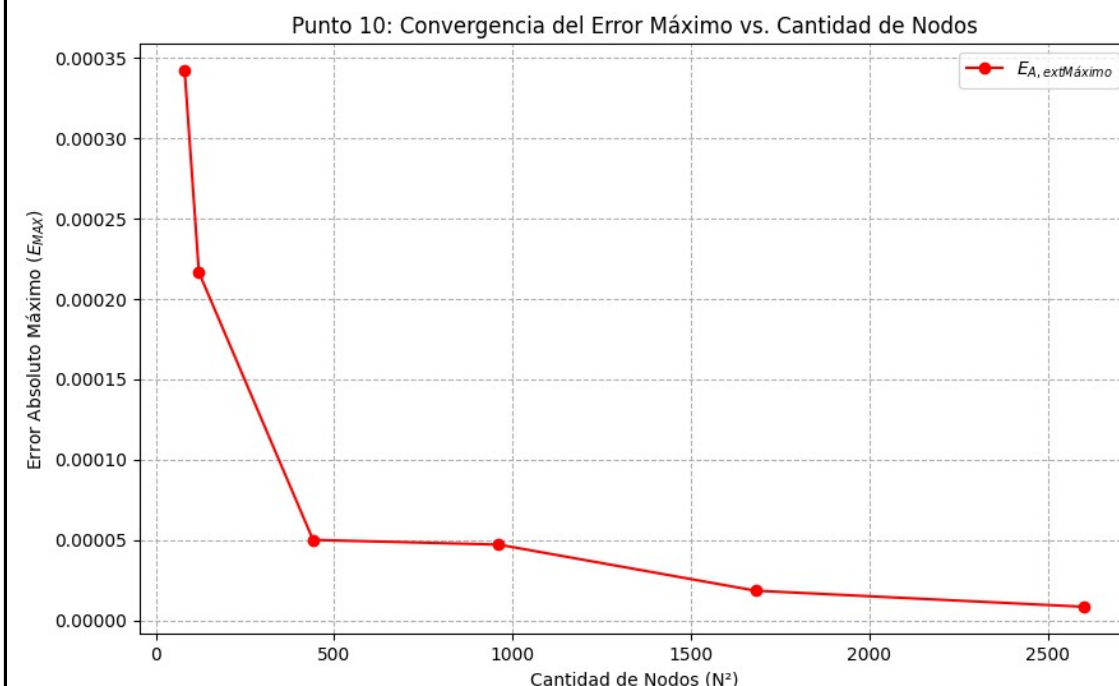
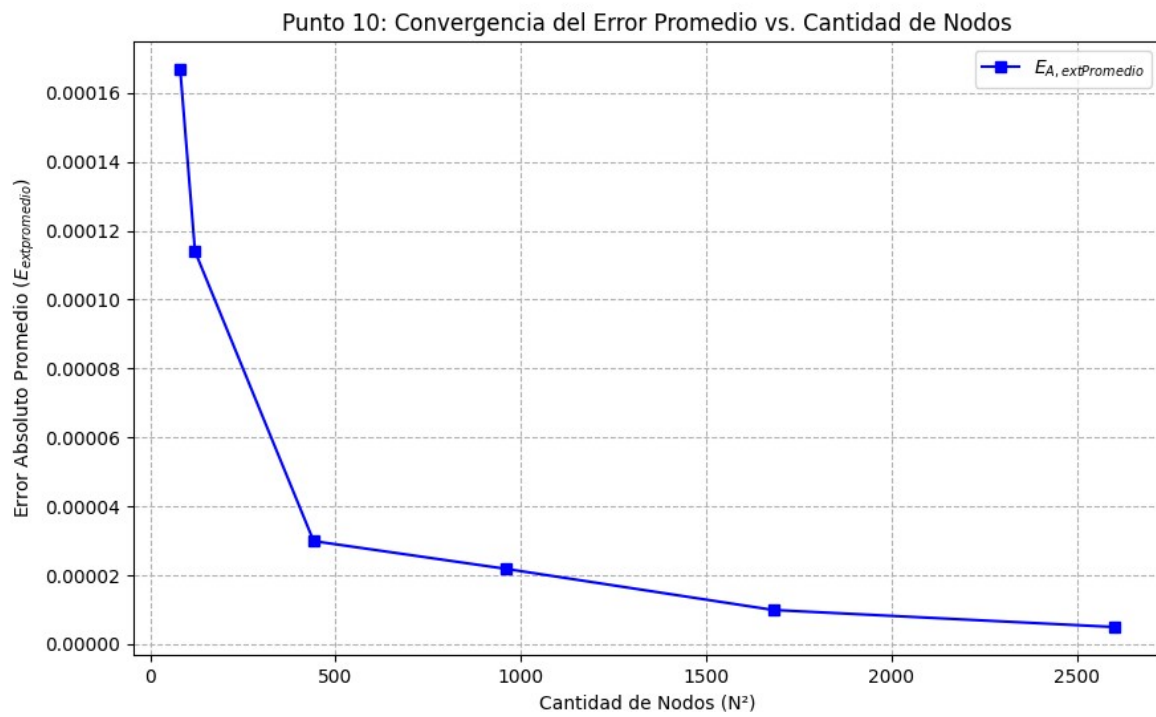


Grafico 2D del Error Promedio en comparación a la cantidad de nodos:



# Elementos Finitos (EF)

Elegimos una cantidad de 28 nodos, cubriendo todas las fronteras y suficientes nodos internos.

TABLA DE NODOS (Punto 1)				
Nº nodo	x	y	Tipo	
0	0	0.00000	0.00000	Dirichlet
1	1	0.25000	0.00000	Dirichlet
2	2	0.50000	0.00000	Dirichlet
3	3	0.75000	0.00000	Dirichlet
4	4	1.00000	0.00000	Dirichlet
5	5	1.00000	0.25000	Dirichlet
6	6	1.00000	0.50000	Dirichlet
7	7	1.00000	0.75000	Dirichlet
8	8	1.00000	1.00000	Dirichlet
9	9	0.75000	1.00000	Dirichlet
10	10	0.50000	1.00000	Dirichlet
11	11	0.25000	1.00000	Dirichlet
12	12	0.00000	1.00000	Dirichlet
13	13	0.00000	0.75000	Dirichlet
14	14	0.00000	0.50000	Dirichlet
15	15	0.00000	0.25000	Dirichlet
16	16	0.25000	0.25000	Interno
17	17	0.75000	0.25000	Interno
18	18	0.25000	0.75000	Interno
19	19	0.75000	0.75000	Interno
20	20	0.50000	0.25000	Interno
21	21	0.50000	0.75000	Interno
22	22	0.25000	0.50000	Interno
23	23	0.66665	0.50000	Neumann
24	24	0.33335	0.50000	Neumann
25	25	0.50000	0.66665	Neumann
26	26	0.50000	0.33335	Neumann
27	27	0.50000	0.50000	Externo

Conteo de Nodos:

Dirichlet: 16

Internos: 7

Neumann: 4

Externo: 1

Total nodos: 28 (27 efectivos)

Tabla luego de armar el mallado de elementos finitos:

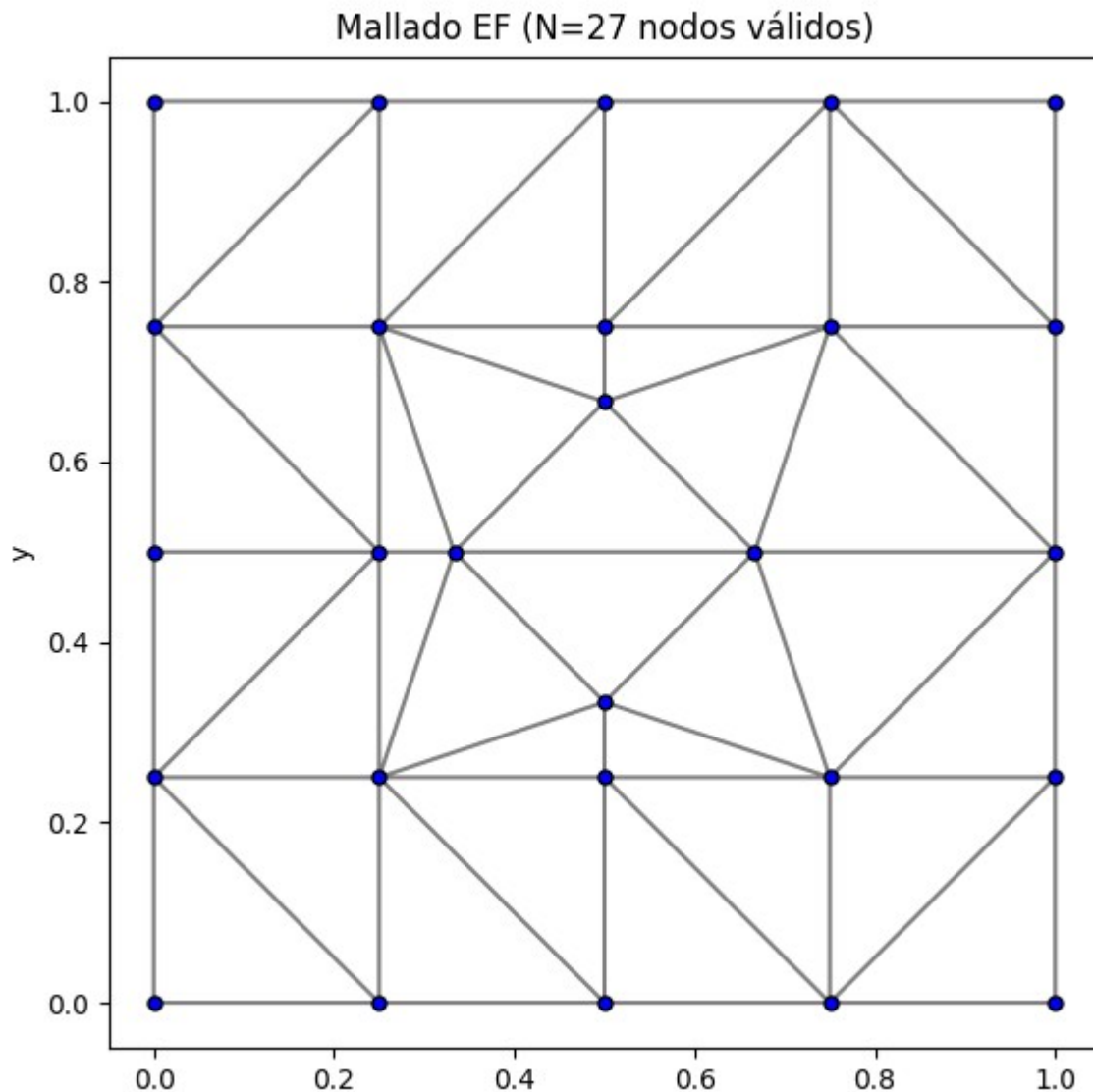
TABLA DE ELEMENTOS (Punto 2)			
Nº elemento	Nodo 1	Nodo 2	Nodo 3
0	17	5	6
1	7	19	6
2	18	25	21
3	25	18	24
4	21	25	19
5	18	22	24
6	22	16	24
7	26	20	17
8	26	16	20
9	16	26	24
10	25	23	19
11	23	26	17
12	23	17	6
13	19	23	6
14	16	1	2
15	20	16	2
16	3	20	2
17	20	3	17
18	5	3	4
19	3	5	17
20	11	18	10

21	18	21	10
22	9	21	19
23	21	9	10
24	9	7	8
25	7	9	19
26	1	15	0
27	16	15	1
28	15	22	14
29	22	15	16
30	13	11	12
31	13	18	11
32	22	13	14
33	13	22	18
34	26	23	24
35	23	25	24

con un total de 36 elementos generados.



Grafico con mallado de 27 nodos efectivos



El elemento de la figura es un Elemento Triangular Lineal con nodos en los vértices a, b, c, al ser un triángulo rectángulo, su matriz de rigidez ( $K^e$ ) es mas simple que la de un triángulo general, esto se deriva de la forma general. Para el problema de la Ecuación de Poisson/Laplace ( $\Delta u = f$ ), la contribución del elemento a la matriz de rigidez global (A) se obtiene a partir de la integral de las derivadas del producto de las Funciones de Forma ( $N_i$ ):

Donde N es el vector de las funciones de forma  $N = [N_a, N_b, N_c]^T$ .

$$K^e = \iint_{\Omega_e} \left( \frac{dN}{dx} \cdot \frac{dN^T}{dx} + \frac{dN}{dy} \cdot \frac{dN^T}{dy} \right) dA$$

Matriz de Rigidez ( $K^e$ ) para un Elemento Triangular Lineal La matriz de rigidez del elemento  $K^e$  es una matriz de  $3 \times 3$  (un grado de libertad por nodo, a, b, c). Sus componentes se expresan en función del área del elemento ( $A_e$ ) y de las constantes que definen las funciones de forma (que a su vez dependen de las coordenadas de los nodos a, b, c). Para un elemento triangular lineal, las derivadas de las funciones de forma  $dN_i/dx$  y  $dN_i/dy$  son constantes dentro del elemento. La matriz  $K^e$  se calcula como:

$$K^e = \frac{1}{4 A_e} \cdot \begin{bmatrix} (b_a^2 + c_a^2) & (b_a \cdot b_b + c_a \cdot c_b) & (b_a \cdot b_c + c_a \cdot c_c) \\ (b_b \cdot b_a + c_b \cdot c_a) & (b_b^2 + c_b^2) & (b_b \cdot b_c + c_b \cdot c_c) \\ (b_c \cdot b_a + c_c \cdot c_a) & (b_c \cdot b_b + c_c \cdot c_b) & (b_c^2 + c_c^2) \end{bmatrix}$$

Donde los coeficientes se calculan a partir de las coordenadas nodales ( $x_i, y_i$ ):

- $b_a = y_b - y_c$
- $b_b = y_c - y_a$
- $b_c = y_a - y_b$
- $c_a = x_c - x_b$
- $c_b = x_a - x_c$
- $c_c = x_b - x_a$

$$A_e = \frac{1}{2} \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & x_a & y_a \\ 1 & x_b & y_b \\ 1 & x_c & y_c \end{bmatrix} \quad \text{Área del elemento}$$

Para el triángulo rectángulo específico (con el ángulo recto en b): Si el triángulo está alineado con los ejes (como en la figura), por ejemplo,  $b=(x_b, y_b)$ ,  $a=(x_b, y_a)$ ,  $c=(x_c, y_b)$ , muchos de los coeficientes  $b_i$  o  $c_i$  se simplifican a 0, y la matriz  $K^e$  resultante será más sencilla.

Ejemplo de una matriz con coordenadas:

$x_1=(0,0)$ ;  $x_2=(1,0)$ ;  $x_3=(0,1)$

```

Área del triángulo = 0.5

Matriz de rigidez del elemento (K):

[[ 1.  -0.5 -0.5]
 [-0.5  0.5  0.]
 [-0.5  0.   0.5]]
    
```

El cálculo anterior ya representa la generalización para un elemento triangular lineal con cualquier tamaño, orientación, y ubicación de los nodos.

Esta generalización son las Coordenadas de Área (o Coordenadas Baricéntricas) y la Formulación

### Isoparamétrica

1. Coordenadas de Área / Funciones de Forma (Ni) En la formulación de Elementos Finitos para el problema de Poisson/Laplace, la variable  $u(x, y)$  se interpola dentro de un elemento  $e$  usando las funciones de forma ( $N_i$ ) y los valores nodales ( $u_i$ ):

$$u(u, y) = u^e(x, y) = \sum_{i=a,b,c} N_i(x, y) u_i$$

Para los elementos triangulares lineales, las funciones de forma  $N_i$  son polinómicas de primer orden y se relacionan directamente con las coordenadas de área ( $\lambda_i$ ):

$$N_a(x, y) = \lambda_a(x, y) = \frac{\text{Area}(Pbc)}{\text{Area}(abc)}$$

donde  $P$  es un punto genérico  $(x, y)$  dentro del triángulo.

2. Formulación Isoparamétrica (para elementos de orden superior) Para elementos más complejos o cuando se utiliza una transformación a un elemento de referencia (un triángulo unitario canónico), se utiliza la Formulación Isoparamétrica.

Este método utiliza un Jacobiano ( $J$ ) para mapear la integral de la matriz de rigidez de las coordenadas cartesianas  $(x, y)$  a las coordenadas naturales  $(\xi, \eta)$  del elemento de referencia.

$$K^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B^T DB \cdot \det(J) d\xi d\eta$$

Ejemplo para el primer triángulo con coordenadas:

$x_1=(0,0)$ ;  $x_2=(2,0.5)$ ;  $x_3=(0.5,1.5)$

```
Area del triángulo: 1.375

Matriz de rigidez K_e:
[[ 0.59090909 -0.13636364 -0.45454545]
 [-0.13636364 0.45454545 -0.31818182]
 [-0.45454545 -0.31818182 0.77272727]]
```

La Forma Débil es una reformulación de una Ecuación Diferencial Parcial (EDP) que se obtiene multiplicando la EDP por una función de ponderación o función de prueba ( $v$ ) y luego integrando sobre todo el dominio  $(\Omega)$

Conceptos Clave: Reducción de la Continuidad (Diferenciabilidad):

La solución original o "fuerte" ( $u$ ) de la ecuación de Poisson (como  $\Delta u = f$ ) debe ser dos veces diferenciable ( $u \in C^2(\Omega)$ ) para que sus derivadas de segundo orden existan puntualmente.

Al aplicar la integración por partes (o el Teorema de la Divergencia), se traslada una de las derivadas de la solución  $u$  a la función de prueba  $v$ . Esto reduce la exigencia de diferenciabilidad sobre  $u$ . La solución  $u$  ahora solo necesita ser una vez diferenciable ( $u \in H^1(\Omega)$ ), lo que es más fácil de satisfacer por funciones de aproximación polinómicas (como las usadas en MEF).

Método de Galerkin / Residuos Ponderados: La idea central es que el error o residuo ( $R = \Delta u - f$ ) debe ser ortogonal a un espacio de funciones de prueba. Es decir, el residuo promedio ponderado debe ser cero en todo el dominio:



$$\int_{\Omega} R \cdot v \, dA = 0 \quad \text{para toda función de prueba } v$$

bases del MEF: Esta formulación transforma el problema de EDP en un problema de minimización o variación, que, al ser discretizado, se reduce a un sistema de ecuaciones algebraicas lineales ( $A \cdot u = b$ ).

El problema original que se busca resolver es la Ecuación de Poisson en 2D:

$$\left[ \begin{array}{l} \Delta u = \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} = f(x, y) \\ u = 0 \\ \frac{du}{dn} = 0 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} \text{Condicion de Dirichlet} \\ \text{Condicion de Neumann} \end{array}$$

Paso 1: Planteamiento de Residuos Ponderados Se reescribe la ecuación diferencial de forma que el residuo sea cero y se multiplica por la función de prueba  $v$ :

$$\int_{\Omega} \left( \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} - f \right) v \, dA = 0$$

Paso 2: Aplicación del Teorema de la Divergencia (Integración por Partes)

Aplicamos la identidad de integración por partes en 2D (que es una aplicación del Teorema de Green o Teorema de la Divergencia):

$$\iint_{\Omega} (\nabla^2 u) v \, dA = - \iint_{\Omega} (\nabla u) \cdot (\nabla v) \, dA + \oint_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} \, dS$$

Sustituyendo esto en la ecuación del Paso 1, y reordenando, obtenemos la Forma Débil:

$$\begin{aligned} - \iint_{\Omega} (\nabla u) \cdot (\nabla v) \, dA + \oint_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} \, dS - \iint_{\Omega} f v \, dA &= 0 \\ \iint_{\Omega} (\nabla u) \cdot (\nabla v) \, dA &= \iint_{\Omega} f v \, dA + \oint_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} \, dS \end{aligned}$$

Paso 3: Aplicación de las condiciones de borde

El termino de contorno, integral cerrada ( $\int_{\Gamma} v^* (du/dn) dS$ ), se divide sobre los contornos  $\Gamma_d$  (Dirichlet) y  $\Gamma_n$  (Neumann).

- Condicion de Dirichlet ( $u=0$  en  $\Gamma_d$ ):

En el método de Galerkin, la función de prueba  $v$  debe pertenecer al mismo espacio de funciones que  $u$  y debe satisfacer las condiciones de borde homogéneas de Dirichlet.

Como  $u=0$  en  $\Gamma_d$ , se exige que  $v=0$  en  $\Gamma_d$ .

Esto anula la integral de contorno sobre  $\Gamma_d$ .

- Condicion de Neumann ( $du/dn=0$  en  $\Gamma_n$ ):

la condición de Neumann es una condición de borde natural en esta formulación.

Como  $(du/dn)=0$  en  $\Gamma_n$ , esto anula la integral de contorno sobre  $\Gamma_n$ .

Dado que ambas integrales de contorno se anulan, la forma débil final simplificada es:

$$\int_{\Omega} f v \, dA \, d\Omega = \int_{\Omega} \int \left( \frac{du}{dx} \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy} \cdot \frac{dv}{dy} \right) dA \, d\Omega$$

El problema ahora es que para encontrar  $u$  tal que para toda función de prueba  $v$  satisfaga las condiciones de Dirichlet homogéneas, se cumpla:

$$B(u, v) = L(v)$$

Donde: la forma Bilineal  $B(u, v) = \text{Matriz de Rigidez}(A)$

$$B(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dA \, d\Omega$$

Función Lineal  $L(v)$ :

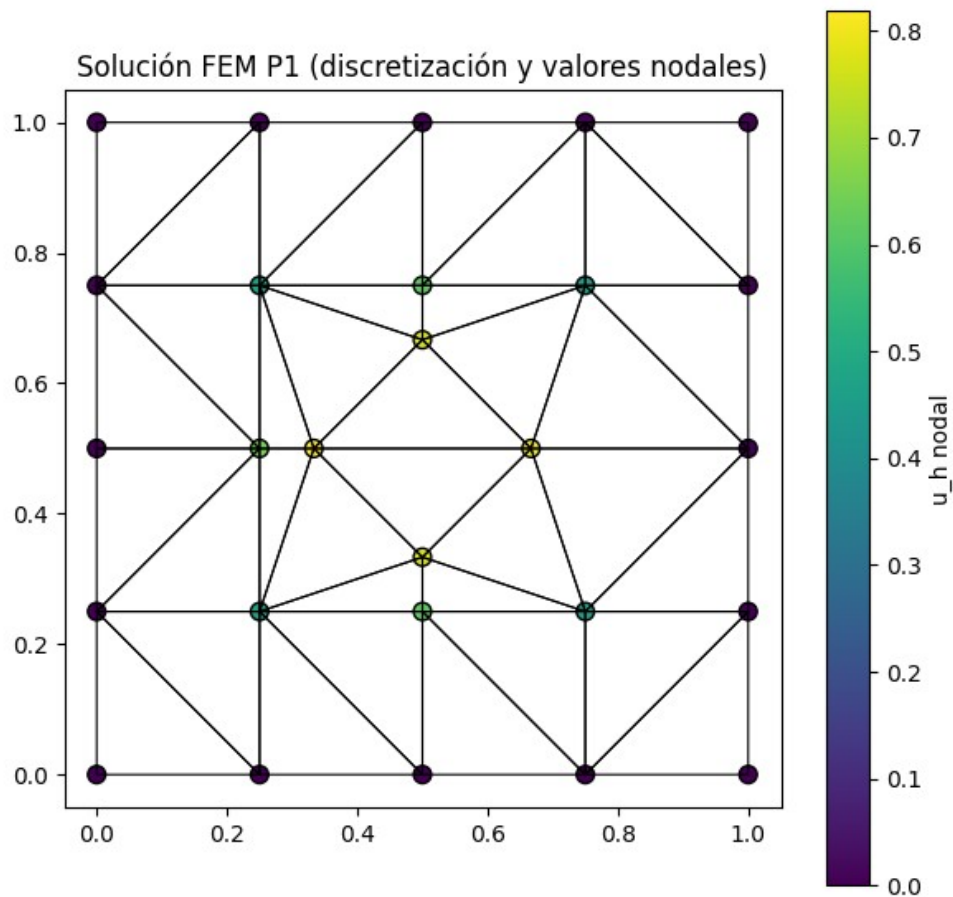
$$L(v) = \int_{\Omega} f v \, dA \, d\Omega$$

Esta es la forma canónica que se discretiza en el MEF para generar el sistema

$$A \cdot u = b$$

Forma Nodal:

```
Solución nodal (u) por nodo global index:
[0. 0. 0. 0. 0. 0.
 0. 0. 0. 0. 0. 0.
 0. 0. 0. 0. 0.46387367 0.45510343
 0.46387367 0.45510343 0.80133211 0.81820748 0.77616825 0.77616825
 nan 0.61542092 0.61542092 0.64787538]
```



Se plantea con la forma debil un sistema de ecuaciones

$$A \cdot u = b$$

```
Número de nodos totales: 28
Número de incógnitas (nodos no 'Externo'): 27
Número de elementos (triángulos): 36
Matriz A: shape = (27, 27)
Vector b: shape = (27,)
```

Resolución del sistema

Porción top-left de A (5x5):

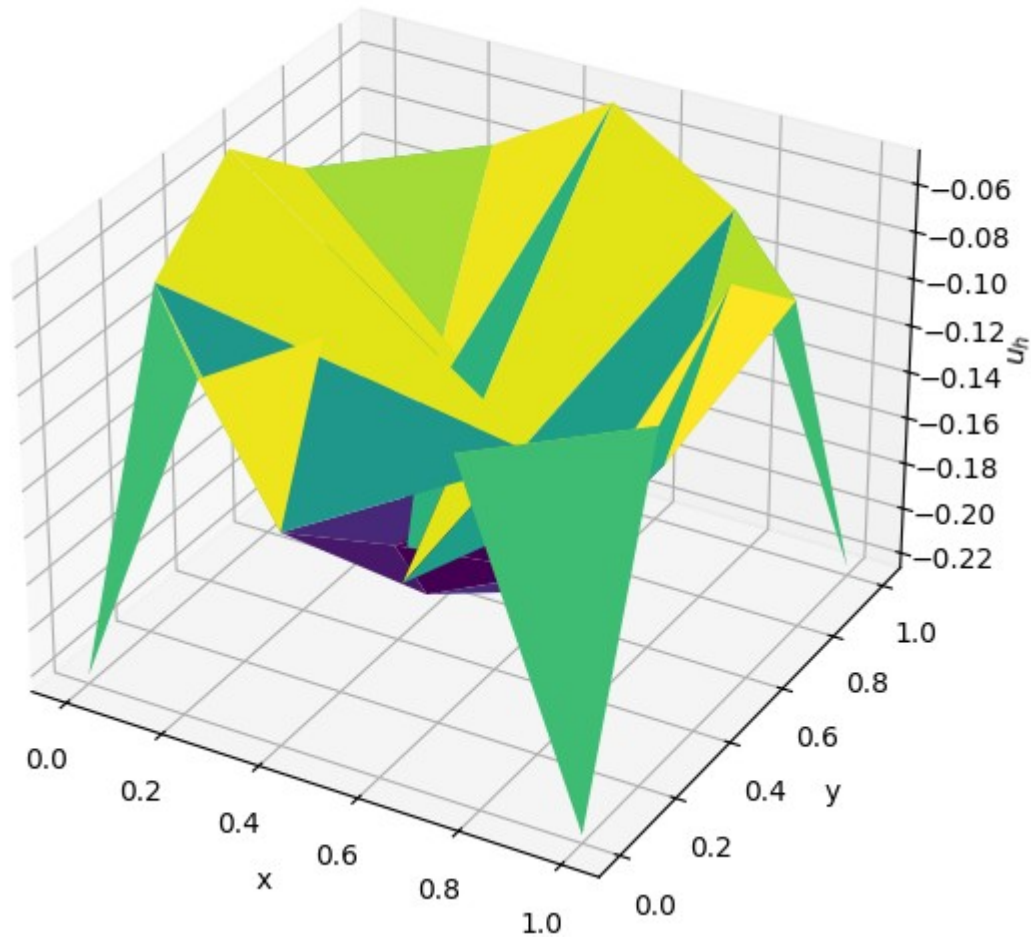
```
[[1. 0. 0. 0. 0.]
 [0. 1. 0. 0. 0.]
 [0. 0. 1. 0. 0.]
 [0. 0. 0. 1. 0.]
 [0. 0. 0. 0. 1.]]
```

Porción de b (primeros 10):

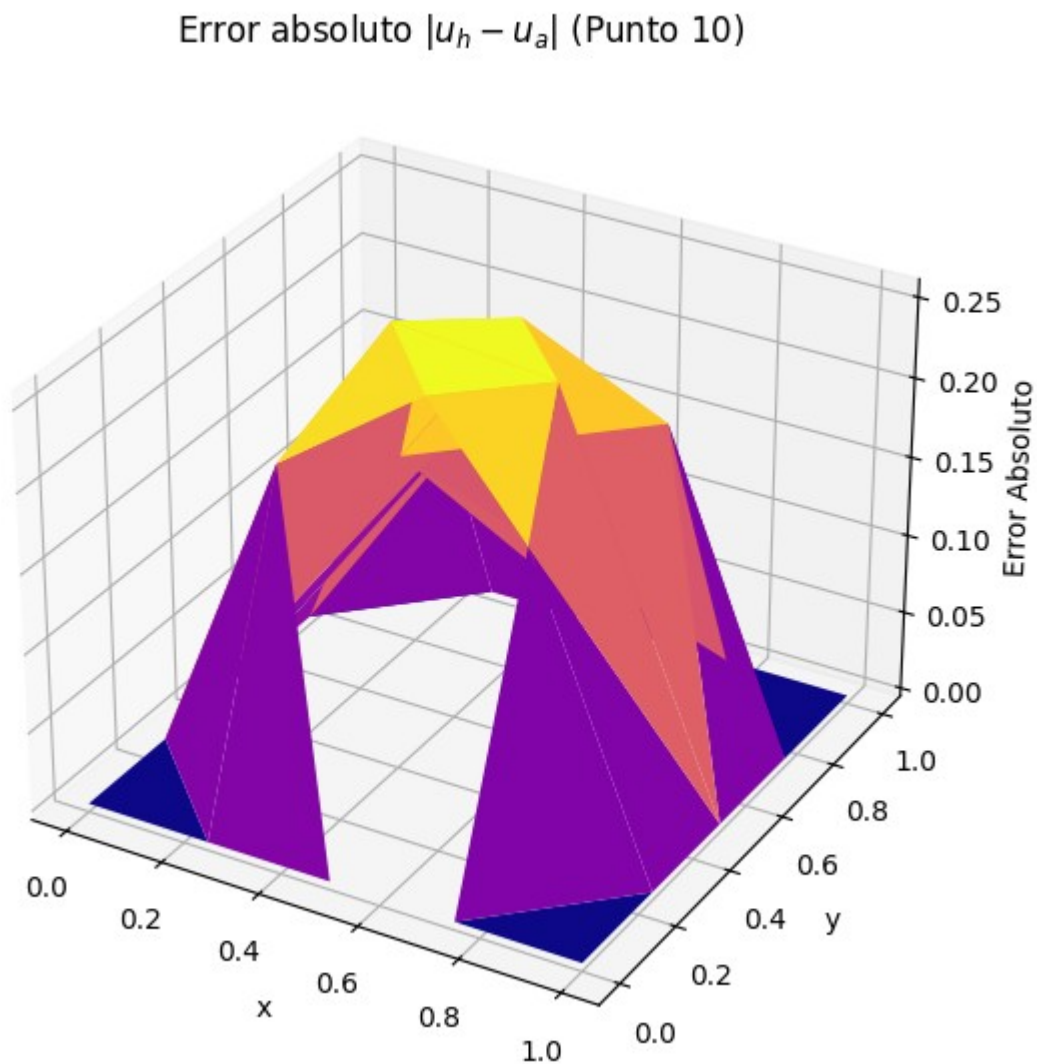
```
[0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0.]
```

Grafico tridimensional de la solucion

Solución Numérica FEM P1 (Punto 9)



Error absoluto en cada nodo, error absoluto maximo y promedio con su grafico tridimensional:



===== ERRORES FEM P1 (Malla manual) =====

Error absoluto máximo = 0.25586861

Error absoluto promedio = 0.09119590

=====

Una vez creada las mallas en GMSH se resolvieron los mallados, ahora vamos a mostrar los graficos con sus calculo de error absoluto máximo y promedio de cada uno.

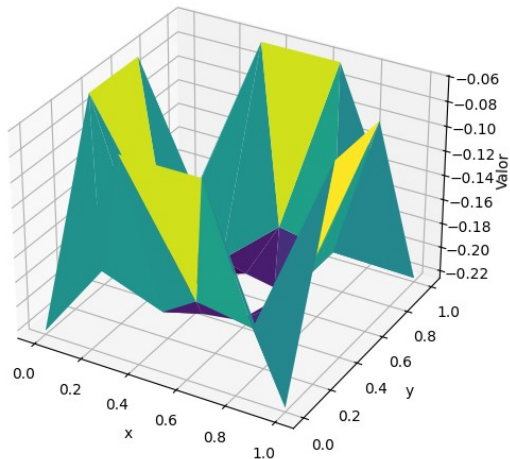
=== MALLA OBJETIVO 49 NODOS ===

Nodos reales = 31

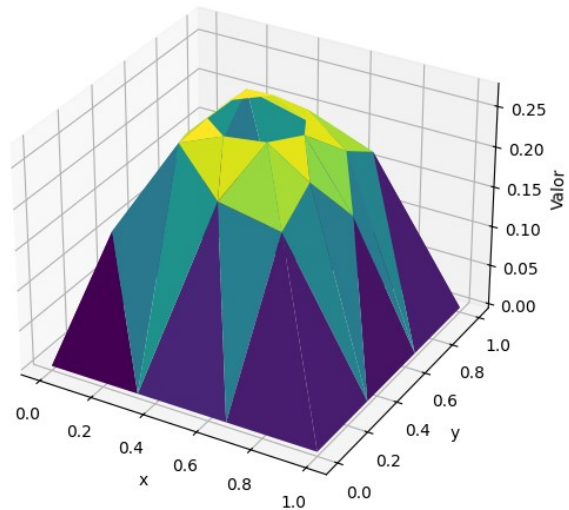
Error máximo = 0.27242974

Error promedio = 0.14437585

Solución FEM - 31 nodos



Error absoluto - 31 nodos



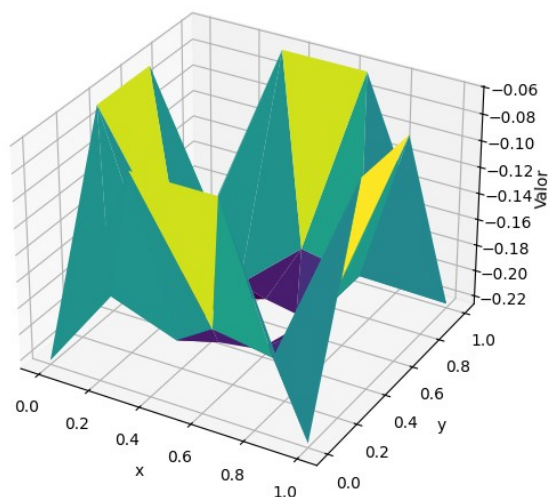
=== MALLA OBJETIVO 81 NODOS ===

Nodos reales = 31

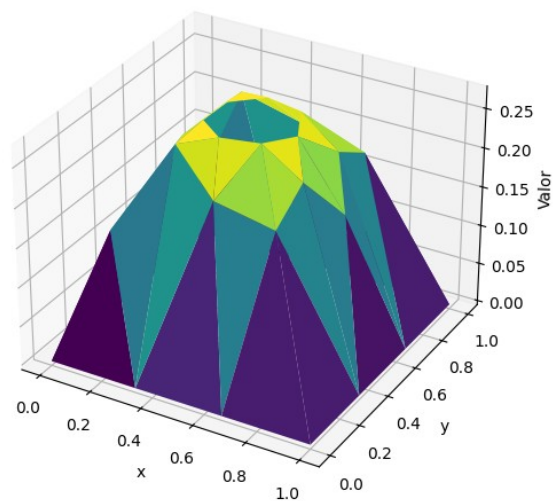
Error máximo = 0.27242974

Error promedio = 0.14437585

Solución FEM - 31 nodos



Error absoluto - 31 nodos





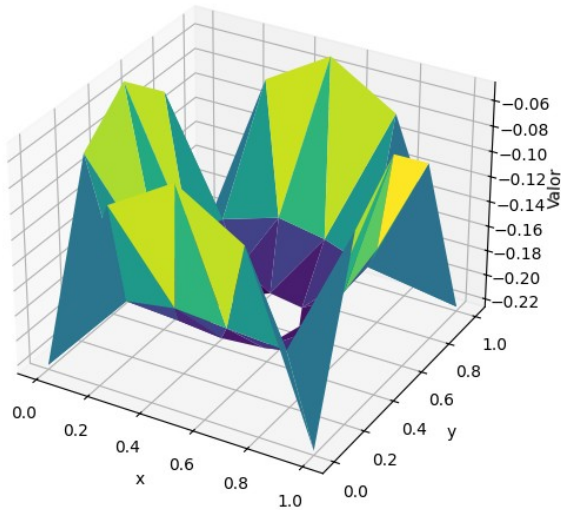
=== MALLA OBJETIVO 121 NODOS ===

Nodos reales = 39

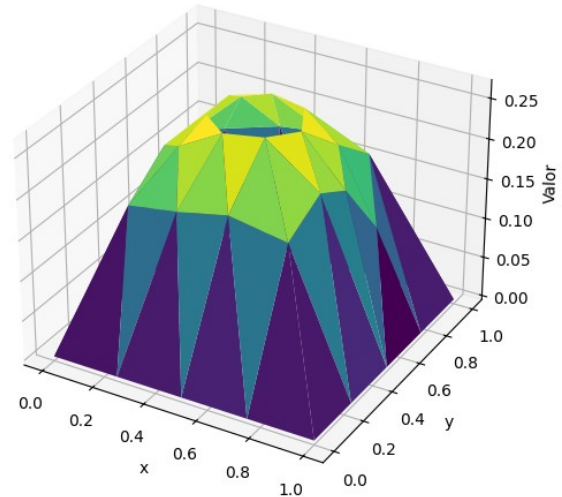
Error máximo = 0.26714398

Error promedio = 0.12997538

Solución FEM - 39 nodos



Error absoluto - 39 nodos



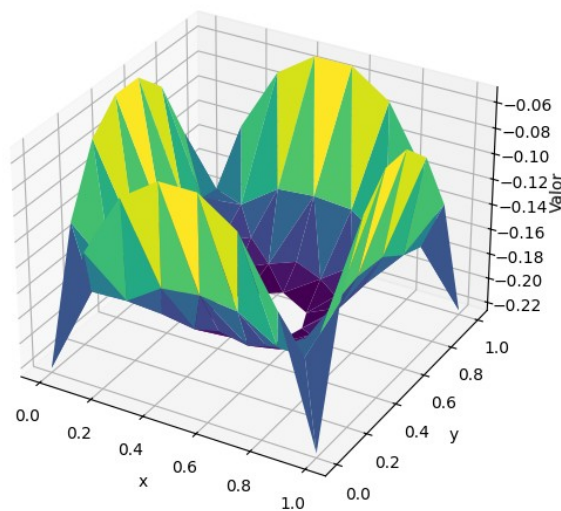
=== MALLA OBJETIVO 441 NODOS ===

Nodos reales = 84

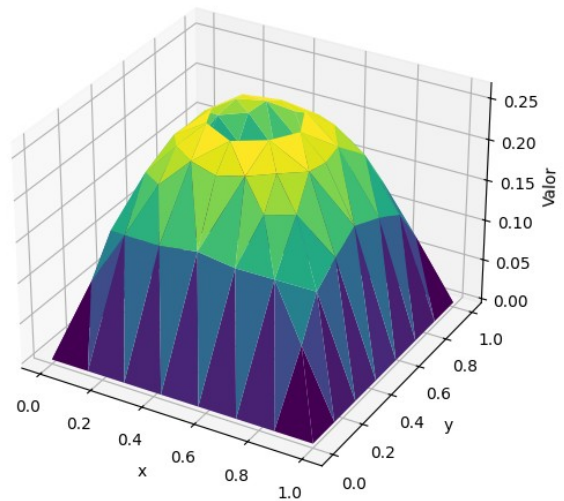
Error máximo = 0.26313493

Error promedio = 0.13033484

Solución FEM - 84 nodos



Error absoluto - 84 nodos



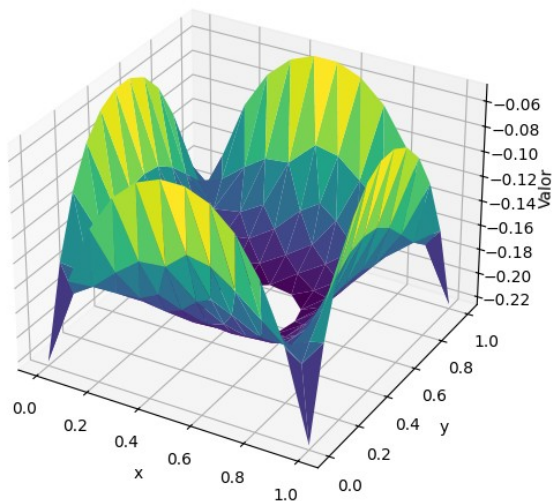
=== MALLA OBJETIVO 961 NODOS ===

Nodos reales = 164

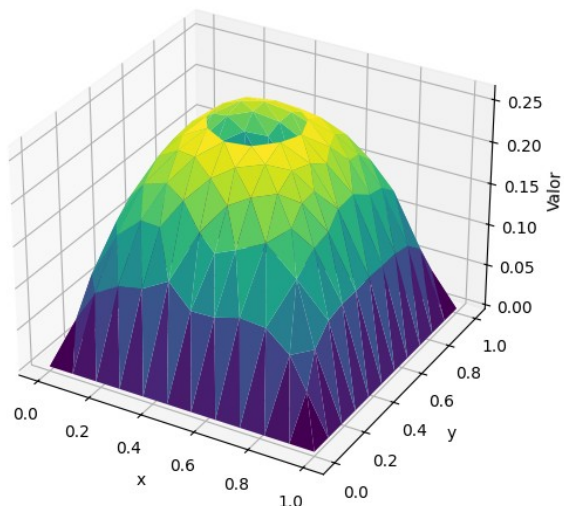
Error máximo = 0.26129082

Error promedio = 0.12902979

Solución FEM - 164 nodos



Error absoluto - 164 nodos



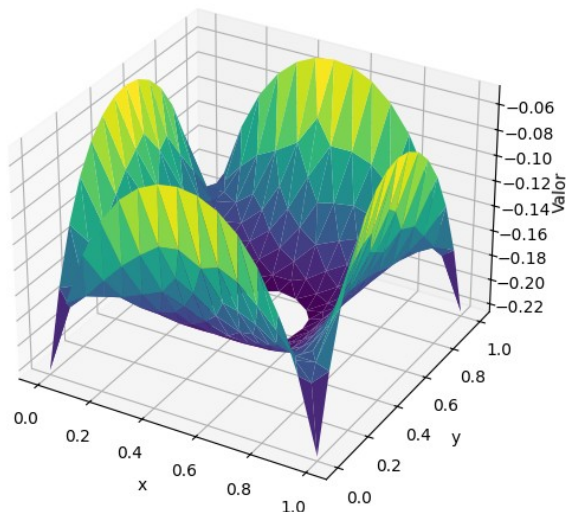
=== MALLA OBJETIVO 1681 NODOS ===

Nodos reales = 266

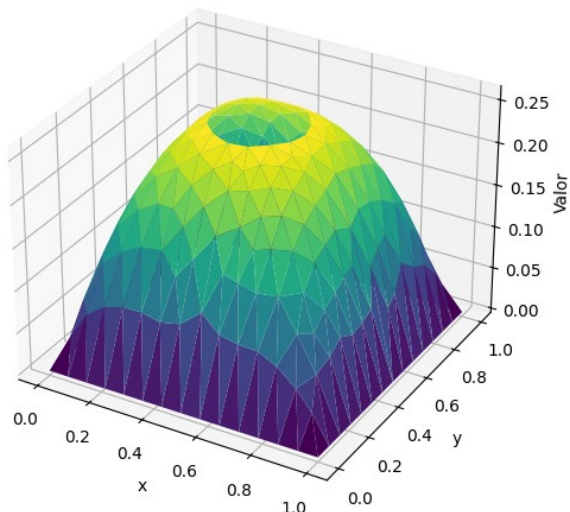
Error máximo = 0.26077297

Error promedio = 0.13272560

Solución FEM - 266 nodos



Error absoluto - 266 nodos





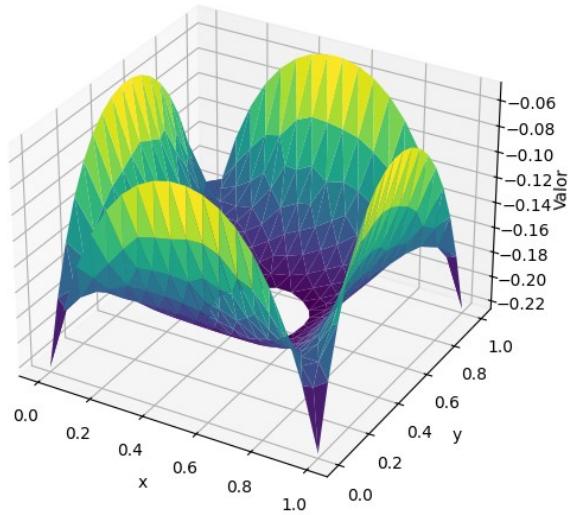
=== MALLA OBJETIVO 2601 NODOS ===

Nodos reales = 366

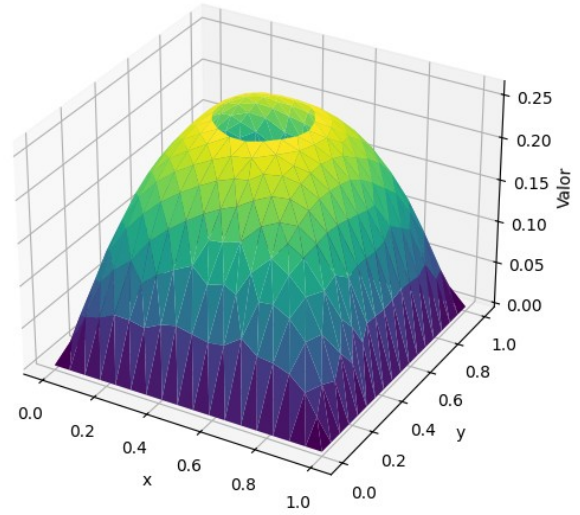
Error máximo = 0.26067163

Error promedio = 0.13425133

Solución FEM - 366 nodos



Error absoluto - 366 nodos



Grafica 2D de la relación de Error absoluto máximo con la cantidad de nodos.

Convergencia FEM (error máximo)

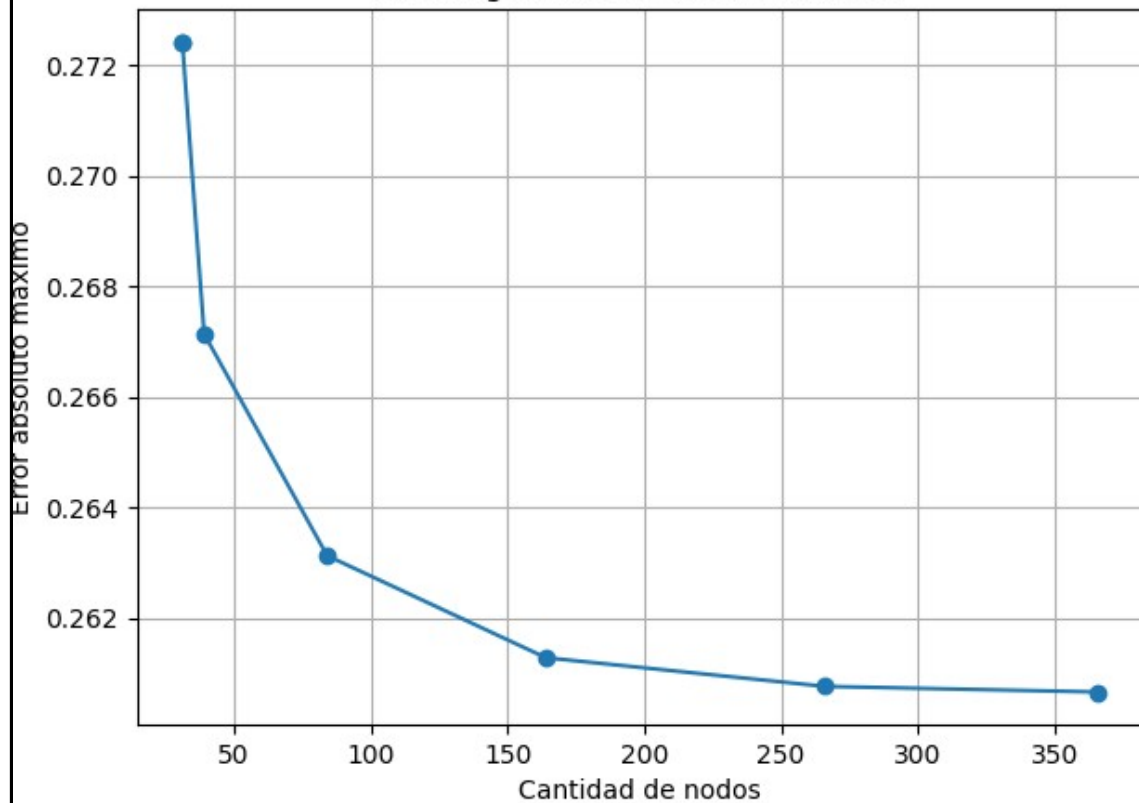
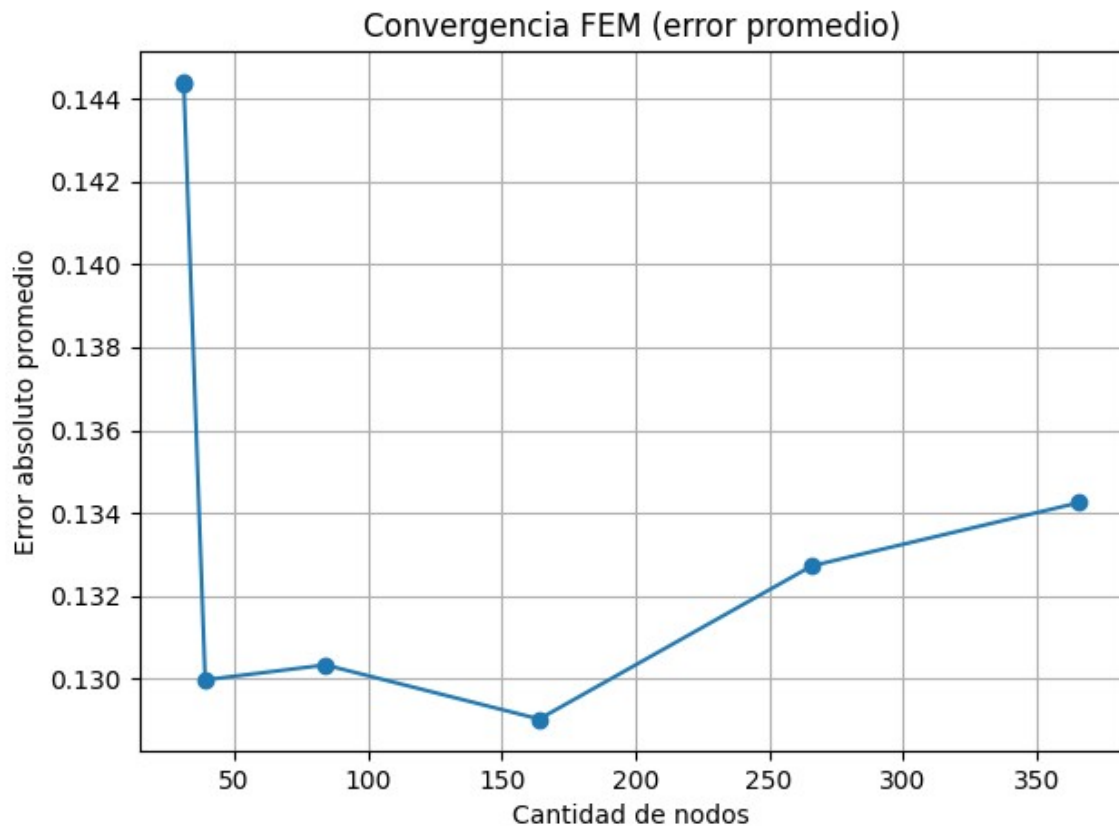


Grafico 2D de la relación de Error absoluto promedio con la cantidad de nodos.



# Bibliografía

Chapra-Canale: Metodos Numericos para ingenieros, 5a Edicion VL.  
Jhonson - Numerical Solutions