MATEMÁTICA DISCRETA

Notas de Aula

Prof. George Ney

Sumário

I

Temas Introdutórios

1. Temas Introdutórios

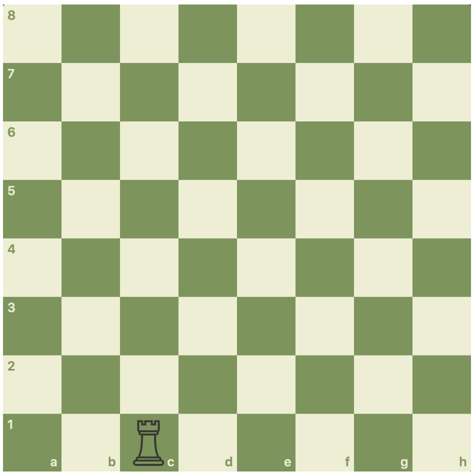
1.1 Jogos

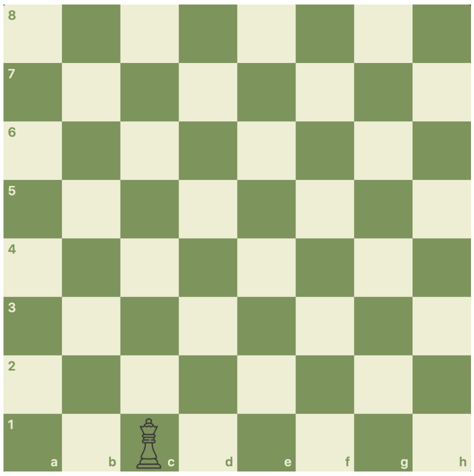
Problema 1.1 — Jogo da Soma. Dois jogadores encolhem alternadamente um número entre 1, 2 e 3. A cada rodada o jogador soma ao número escolhido a soma anterior. Ganha quem chegar em 21 primeiro.

Problema 1.2 — Jogo do 15. O professor Davidson escreve os números de 1 a 9 no quadro. Dois estudantes alternadamente escolhem números para si (sem repetição). Ganha o jogo quem primeiro completar 15 somando exatamente três de seus números. Quem possui uma estratégia vencedora?

Problema 1.3 Temos duas pilhas de pedras, uma com 7 e outra com 5 pedras. Dois jogadores se revezam retirando um número arbitrário de pedras de uma das pilhas. Ganha o jogador que retirar a última pedra. Quem possui a estratégia vencedora?

Problema 1.4 Em um tabuleiro de xadrez, uma torre está na posição c1. Dois jogadores se revezam movendo a torre de quantos quadrados quiserem para a direita ou para cima. Vence o jogador que colocar a torre na posição h8. Quem possui a estratégia vencedora?





Problema 1.5 Temos duas pilhas de pedras, uma com 7 e outra com 5 pedras. Dois jogadores se revezam retirando um número arbitrário de pedras de uma das pilhas ou o mesmo número de cada pilha. Ganha o jogador que retirar a última pedra. Quem possui a estratégia vencedora?

Problema 1.6 Em um tabuleiro de xadrez, uma dama está na posição c1. Dois jogadores se revezam movendo a dama de quantos quadrados quiserem para a direita ou para cima ou para a diagonal, direita e acima. Vence o jogador que colocar a dama na posição h8. Quem possui a estratégia vencedora?

Problema 1.7 Os números de 1 a 11 estão escritos em uma linha. Pode-se colocar os sinais de "+" e de "-" entre eles de modo que o valor da expressão resultante seja 0? E se os números fossem de 1 a 10?

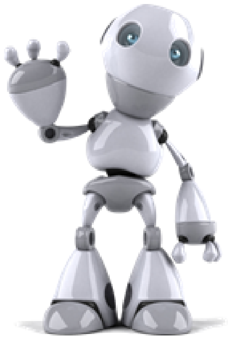
Problema 1.8 Tomam-se todos os números naturais de 1 a n. A cada rodada serão apagados dois números e substituídos pela sua diferença positiva. O jogo termina quanto chega-se no 0. Para quais números n isso será possível?

Problema 1.9 **Descanse**.

1.2 Lógica

Problema 1.10 Três amigas foram para uma festa com vestidos azul, preto e branco, respectivamente. Seus pares de sapato apresentavam essas mesmas três cores, mas somente Ana usava vestido e sapatos de mesma cor. Nem o vestido nem os sapatos de Júlia eram brancos. Marisa usava sapatos azuis. Descreva a cor do vestido de cada uma das moças.

Problema 1.11 Uma empresa produz andróides de dois tipos: os de tipo V, que sempre dizem a verdade, e os de tipo M, que sempre mentem. Dr. Turing, um especialista em Inteligência Artificial, está examinando um grupo de cinco andróides - rotulados de Alfa, Beta, Gama, Delta e Épsilon -, fabricados por essa empresa, para determinar quantos entre os cinco são do tipo V. Ele pergunta a Alfa: "Você é do tipo M?"Alfa responde, mas Dr. Turing, distraído, não ouve a resposta. Os andróides restantes fazem, então, as seguintes declarações:
Beta: "Alfa respondeu que sim".
Gama: "Beta está mentindo".
Delta: "Gama está mentindo".
Épsilon: "Alfa é do tipo M".
Mesmo sem ter prestado atenção à resposta de Alfa, Dr. Turing pôde, então, concluir corretamente o número de andróides do tipo V, naquele grupo. Qual esse número?

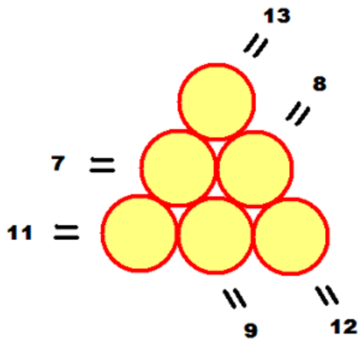


Problema 1.12 Cinco amigos, que estudaram juntos no colégio, estão reunidos num jantar. São eles Almir, Branco, Caio, Danilo e Edilson. Atualmente, eles moram nas cidades de Atibaia, Batatais, Catanduva, Dracena e Embu, onde exercem as seguintes profissões: advogado, bibliotecário, contabilista, dentista e engenheiro. Considere que:
(i) nenhum deles vive na cidade que tem a mesma letra inicial de seu nome, nem o nome de sua ocupação tem a mesma inicial de seu nome nem da cidade em que vive;
(ii) Almir não reside em Batatais e Edilson, que não é bibliotecário e nem dentista, tampouco aí vive;
(iii) Branco, que não é contabilista e nem dentista, não mora em Catanduva e nem em Dracena;
(iv) Danilo vive em Embu, não é bibliotecário e nem advogado;
(v) o bibliotecário não mora em Catanduva.
Qual a profissão e onde mora cada um deles?

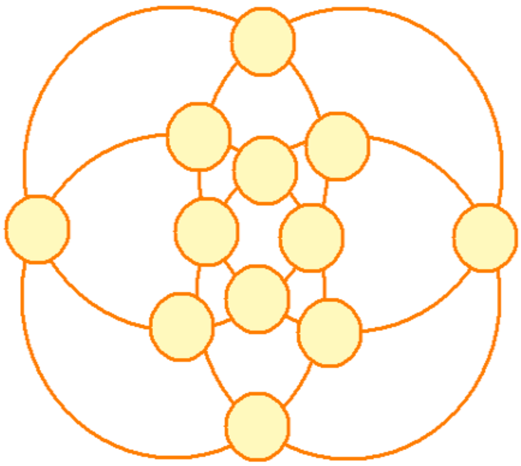
CIDADE	A	B	C	D	E
A					
B					
C					
D					
E					

PROFISSÃO	A	B	C	D	E
A					
B					
C					
D					
E					

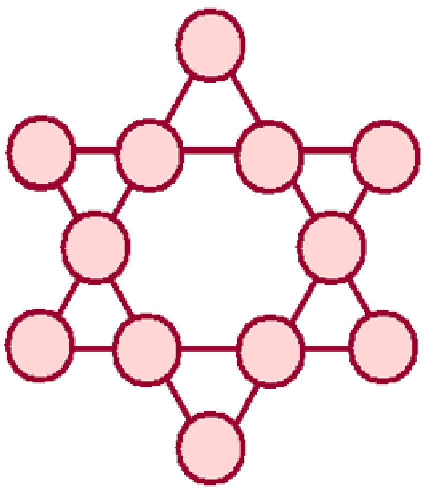
Problema 1.13 Coloque um número de 1 a 9 em cada um destes círculos, de modo que as somas dos círculos alinhados sejam as indicadas pelas respectivas igualdades.



Problema 1.14 Disponha os números de 1 a 12 sobre as interseções dos círculos abaixo, de maneira a conseguir a mesma soma, 39, em cada um deles.



Problema 1.15 Complete a estrela mágica com os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12 de modo que a soma de cada linha seja igual a 26.



Problema 1.16 Em um jogo de duas pessoas, os jogadores tiram, alternadamente, 1, 2, 3, 4 ou 5 palitos de uma pilha que inicialmente tem 1.000

palitos. Ganha o jogador que tirar o último palito da pilha. Quantos palitos o jogador que começa deve tirar na sua jogada inicial de modo a assegurar sua vitória?

Problema 1.17 Três técnicos, Amanda, Beatriz e Cássio, trabalham no banco - um deles no complexo computacional, outro na administração e outro na segurança do Sistema Financeiro, não respectivamente. A praça de lotação de cada um deles é São Paulo, Rio de Janeiro ou Porto Alegre. Sabe-se que:
(i) Cássio trabalha na segurança do Sistema Financeiro.
(ii) o que está lotado em São Paulo trabalha na administração.
(iii) Amanda não está lotada em Porto Alegre e não trabalha na administração.
É verdade que quem está lotado em São Paulo e quem trabalha no complexo computacional são, respectivamente:
a) Cássio e Beatriz.
b) Beatriz e Cássio.
c) Cássio e Amanda.
d) Beatriz e Amanda.
e) Amanda e Cássio.

Problema 1.18 Cinco amigas, Ana, Bia, Cati, Dida e Elisa, são tias ou irmãs de Zilda. As tias de Zilda sempre contam a verdade e as irmãs de Zilda sempre mentem. Ana diz que Bia é tia de Zilda. Bia diz que Cati é irmã de Zilda. Cati diz que Dida é irmã de Zilda. Dida diz que Bia e Elisa têm diferentes graus de parentesco com Zilda, isto é, se uma é tia, a outra é irmã. Elisa diz que Ana é tia de Zilda. Qual o número de irmãs de Zilda neste conjunto de cinco amigas?

Problema 1.19 1) Há 05 casas de 05 cores diferentes.
2) Em cada casa mora uma pessoa de diferente nacionalidade.
3) Esses 05 proprietários bebem diferentes bebidas, fumam diferentes tipos de cigarro e têm, cada um diferente dos demais, certo animal de estimação.
4) Nenhum deles tem o mesmo animal, fuma o mesmo cigarro ou bebe a mesma bebida.

A QUESTÃO É: *Quem tem um peixe?*

Dicas:
- o inglês vive na casa vermelha;
- o Sueco tem um cachorro;
- o Dinamarquês bebe chá;
- a casa verde fica à esquerda da casa branca;
- o dono da casa verde bebe café;
- a pessoa que fuma Pall Mall cria pássaros;
- o dono da casa amarela fuma Dunhill;
- o homem que vive na casa do centro bebe leite;
- o Norueguês vive na primeira casa;
- o homem que fuma Blends vive ao lado de quem tem gatos;
- o homem que cria cavalos vive ao lado de quem fuma Dunhill;
- o homem que fuma Bluemaster bebe cerveja;
- o alemão fuma Prince;
- o Norueguês vive ao lado da casa azul;
- o homem que fuma Blends é vizinho do que bebe água.

Problema 1.20 — OCM. No país da verdade, onde ninguém mente, reuniram-se os amigos Marcondes, Francisco e Fernando. Entre os três ocorreu a seguinte conversa:
Marcondes: estou escolhendo dois inteiros positivos e consecutivos e vou dar um deles ao Francisco e outro ao Fernando, sem que vocês saibam quem recebeu o maior.
Após receber cada um o seu número, Francisco e Fernando continuaram a conversação:
Francisco: não sei o número que Fernando recebeu;
Fernando: não sei o número que Francisco recebeu;
Francisco: não sei o número que Fernando recebeu;
Fernando: não sei o número que Francisco recebeu;
Francisco: não sei o número que Fernando recebeu;
Fernando: não sei o número que Francisco recebeu;
Francisco: agora eu sei o número que o Fernando recebeu;
Fernando: agora eu também sei o número que Francisco recebeu.
Quais os números recebidos por cada um deles?

Problema 1.21 **Descanse.**

1.3 Paridade

Todo número natural é par ou ímpar.

Malgrado a trivialidade da ideia acima, ela é também uma ferramenta de grande utilidade na resolução de muitos problemas. Há deles em graus diferentes de dificuldade, dos mais simples aos mais elegantes. Precisamos, neste sentido, recordar três importantes propriedades:

- a soma de dois números pares é par;
- a soma de dois números ímpares é par;
- a soma de um número par com um número ímpar é ímpar.

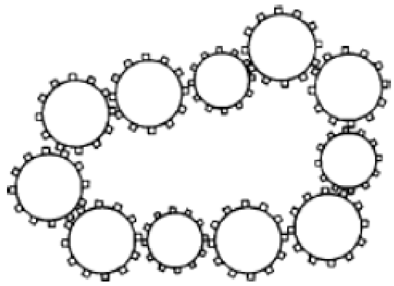
Dizemos que dois números inteiros têm mesma paridade, quando são ambos pares ou ambos ímpares. Assim, podemos dizer que a soma de dois números inteiros é par se, e somente se, eles têm mesma paridade. E agora, iremos aos problemas.

Problema 1.22 Sobre uma mesa coloque 5 moedas, três com a coroa para cima e duas com a cara para cima. Vire de costas para as moedas e peça para um colega virar uma moeda qualquer. Em seguida, peça para outros colegas virarem novamente uma moeda qualquer. Faça isso exatamente 100 vezes. Após as 100 viradas, você solicita que algum deles esconda uma moeda, observando antes a sua face superior. Escondida a moeda, você observa, então, as 4 moedas que ficaram sobre a mesa e adivinha a face superior da moeda escondida. Como você consegue adivinhar a face superior da moeda escondida?

Problema 1.23 a) Você pode encontrar cinco números ímpares cuja soma seja 100?
b) A soma de cem números inteiros é 1.000. A soma de seus quadrados pode ser 10.001?

Problema 1.24 É possível trocar uma nota de 25 rublos em dez notas com valores 1, 3 ou 5 rublos?

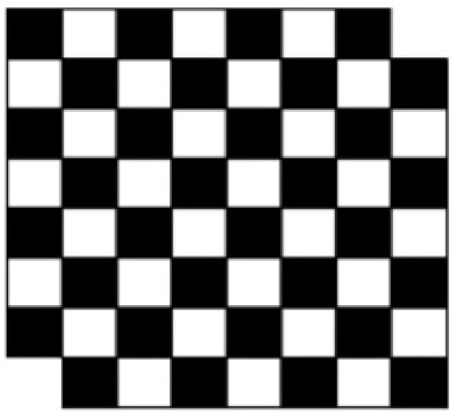
Problema 1.25 Onze engrenagens estão colocadas em um plano, arrumadas em uma cadeia como está ilustrado na figura a seguir. Todas as engrenagens podem rodar simultaneamente?



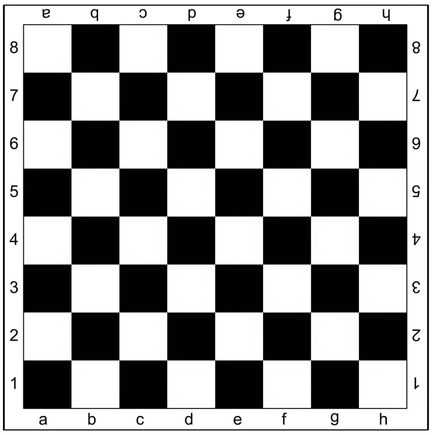
Problema 1.26 Pedro comprou um caderno com 96 folhas e numerou-as de 1 a 192. Vitor arrancou 25 folhas do caderno de Pedro e somou os 50 números que encontrou escritos nas folhas. Esta soma poderia ser igual a 1990?

Problema 1.27 Em uma ilha plana existem 11 cidades numeradas de 1 a 11. Estradas retas ligam 1 a 2, 2 a 3, 3 a 4, ..., 10 a 11 e 11 a 1. É possível que uma reta corte todas as estradas?

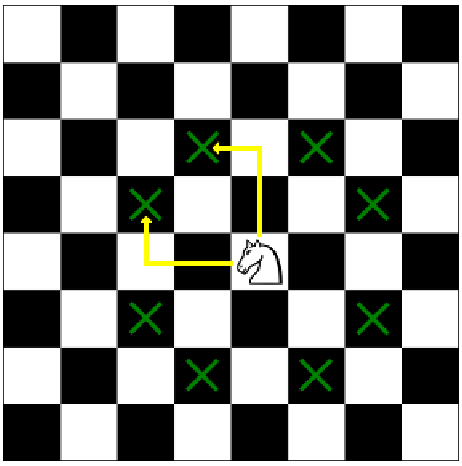
Problema 1.28 a) Um tabuleiro quadrado 5×5 pode ser coberto por dominós 1×2?
b) Um tabuleiro de xadrez usual 8×8 pode ser coberto por dominós 1×2 de modo que só permaneçam livres os quadrados $a1$ e $h8$?



Problema 1.29 Em um tabuleiro de xadrez, um cavalo sai do quadrado a1 e retorna para a mesma posição depois de vários movimentos. Mostre que o cavalo fez um número par de movimentos.



Nota: A figura abaixo indica os possíveis movimentos de um cavalo no tabuleiro de xadrez.



Problema 1.30 É possível um cavalo começar na posição a1 de um tabuleiro de xadrez e terminar em h8 visitando cada um dos quadrados restantes exatamente uma vez ao longo do caminho?

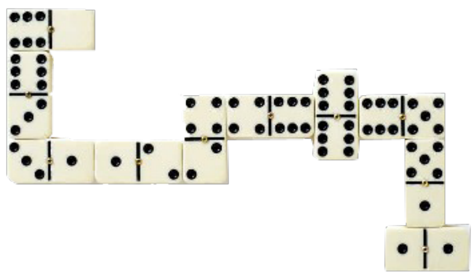
Problema 1.31 Três discos de borracha, A, B e C, utilizados no hóquei sobre o gelo, estão no campo. Um jogador bate em um deles de tal forma que ele passa entre dois outros discos. Ele faz isto 25 vezes. Ele pode retornar os três discos às posições iniciais?

Problema 1.32 Três gafanhotos estão brincando ao longo de uma linha. Na sua vez, cada gafanhoto pode pular sobre um outro gafanhoto, mas não sobre os outros dois. Eles podem retornar para suas posições iniciais após 2011 movimentos?

Problema 1.33 Kátia e seus amigos estão em um círculo. Os dois vizinhos de cada uma das crianças são do mesmo sexo. Se o círculo contém cinco meninos, quantas meninas estão neste círculo?

Problema 1.34 Dado um polígono convexo com 101 lados com um eixo de simetria, prove que o eixo de simetria contém um de seus vértices. O que você pode dizer sobre o polígono com 10 lados e as mesmas propriedades?

Problema 1.35 Todos os dominós em um conjunto estão colocados em uma cadeia (de modo que o número de bolinhas nas extremidades de dois dominós adjacentes são iguais). Se uma das extremidades da cadeia contém 5 bolinhas, qual o número de bolinhas na outra extremidade?



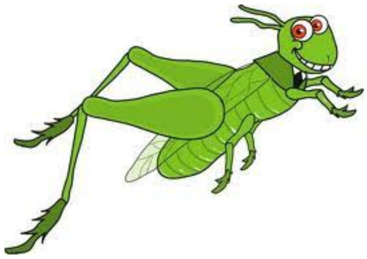
Problema 1.36 Em um conjunto de dominós, são destacados todos os que não têm bolinhas em uma das extremidades. Os dominós remanescentes podem ser arrumados em uma cadeia?

Problema 1.37 Um polígono convexo com 13 lados pode ser dividido em paralelogramos?

Problema 1.38 O produto de 22 números inteiros é igual a 1. Mostre que sua soma não pode ser zero.

Problema 1.39 É possível formar um "quadrado mágico" com os 36 primeiros números primos?

Problema 1.40 Um gafanhoto pula ao longo de uma linha poligonal. Seu primeiro pulo corresponde a uma distância de 1 cm, seu segundo a 2cm, e assim por diante. Cada pulo o leva para a direita ou para a esquerda. Mostre que, depois de 1985 pulos, o gafanhoto não pode voltar a sua posição inicial.

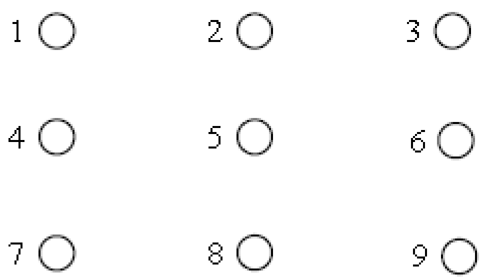


Problema 1.41 Os números 1, 2, 3, ..., 1984, 1985 estão inscritos em um quadro negro. Decidimos apagar dois desses números do quadro e substituí-los por sua diferença positiva. Depois de fazer isto diversas vezes, só restou um número escrito no quadro, este número pode ser 0?

Problema 1.42 Escolhe-se um número com 17 algarismos e inverte-se a ordem de seus algarismos, formando um novo número. Estes dois números são somados. Mostre que sua soma contém pelo menos um algarismo par.

Exemplo 1.1 Um destacamento contém 100 soldados e todas as noites três deles estão de serviço. Pode acontecer que, depois de um determinado período de tempo, cada soldado tenha servido junto com cada outro exatamente uma vez?
Solução: Não. Escolha um soldado. Em cada noite em que trabalha, ele está em companhia de dois outros. Como 99 é um número ímpar, não podemos formar pares de soldados sempre diferentes para trabalhar com o escolhido. ■

Problema 1.43 Um jogo consiste de 9 botões luminosos (de cor verde ou vermelha) dispostos da seguinte forma:

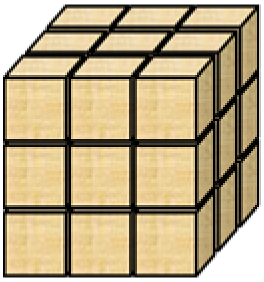


Apertando um botão do bordo do retângulo, trocam de cor ele e seus vizinhos (do lado ou em diagonal). Apertando o botão do centro, trocam de cor todos os seus 8 vizinhos porém ele não.
Exemplos:
Apertando 1, trocam de cor 1, 2, 4 e 5.
Apertando 2, trocam de cor 1, 2, 3, 4, 5 e 6.
Apertando 5, trocam de cor 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 e 9.
Inicialmente todos os botões estão verdes. É possível, apertando sucessivamente alguns botões, torná-los todos vermelhos?

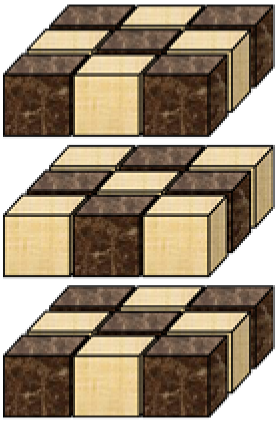
Exemplo 1.2 Um tabuleiro 6×6 está coberto com dominós 2×1. Mostre que existe uma reta que separa as peças do tabuleiro sem cortar nenhum dominó.
Solução: Cada dominó é formado por dois quadrados e portanto, se o tabuleiro está inteiramente coberto, 18 dominós foram utilizados. Imagine agora uma reta (horizontal, por exemplo) que separe o tabuleiro em duas partes. Se ela não corta nenhum dominó, está resolvido o problema. Suponha então que ela corte ao meio um dominó. Neste caso, acima desta reta teremos n dominós inteiros mais meio dominó, ou seja, teremos acima desta reta $2n+1$ quadrados, que é um número ímpar. Mas isto é impossível porque se o tabuleiro tem 6 unidades de largura, qualquer reta o dividirá em partes que contém números pares de quadrados acima e abaixo dela. Assim, se uma reta corta um dominó, deverá cortar um outro dominó. Para a divisão do tabuleiro, existem 10 retas possíveis e, se cada uma delas cortar dois dominós, deveríamos ter 20 dominós no tabuleiro. Como eles são apenas 18 então existe uma reta (pelo menos) que não corta nenhum dominó. ■

Problema 1.44 São colocados nove números em um círculo: quatro iguais a 1 e cinco iguais a 0. Efetua-se a seguinte operação nos números: entre cada par de números adjacentes coloca-se um 0 se os números forem diferentes e um 1 se forem iguais. Depois apaga-se os números “velhos”. Depois desta operação ser efetuada diversas vezes, é possível que todos os números sejam iguais?

Problema 1.45 Colam-se 27 pequenos cubos de madeira, todos iguais, para montar um cubo maior. Um cupim parte do centro de um cubo pequeno, colocado no centro de uma das faces do cubo grande. O cupim liga, sempre por linhas retas, o centro de um dos cubos pequenos ao centro de outro cubo peque-no com face adjacente ao primeiro. Desta forma, existe um caminho que passe exatamente uma vez por cada um dos pequenos cubos e termine no centro do cubo grande?



Dica: Pinte os cubinhos de cores alternadas como mostra a imagem. A PARIDADE resolve o resto...



Problema 1.46 Em um conjunto de 101 moedas, há 50 falsas e as demais são verdadeiras. Uma moeda falsa difere de uma verdadeira em 1 grama. Marcos tem uma balança que mostra a diferença de pesos entre os objetos colocados nos dois pratos. É possível, com uma pesagem, identificar se a moeda escolhida é falsa?

Problema 1.47 — OCM. Determine todos os pares de inteiros (x,y) que satisfazem a equação $x^2+x+1995=y^2+y$.

Problema 1.48 Prove que a igualdade

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\frac{1}{f}=1$$

não admite soluções com todos os números sendo ímpares.

Problema 1.49 **Descanse**.

1.4 Invariantes

Problema 1.50 Todo membro de uma sequência, iniciando do segundo, é igual a soma entre o termo precedente e a soma dos seus dígitos. O primeiro número é 1. É possível que 123.456 pertença a sequência?

Problema 1.51 Três cangurus estão alinhados em uma estrada. A cada segundo um dos cangurus salta. É permitido que um canguru salte por cima de um outro canguru, mas não de dois cangurus de uma só vez. Prove que depois de 1985 segundos, os cangurus não podem voltar a ocupar a posição relativa inicial.

Problema 1.52 Um tabuleiro 4×4 possui, inicialmente, todas as casas pintadas de branco. Uma operação permitida é escolher um retângulo consistindo de 3 casas e pintar cada uma das casas da seguinte forma:

- se a casa é branca então pinta-se de preto;
- se a casa é preta então pinta-se de branco.

Prove que, aplicando várias vezes a operação permitida, é impossível conseguirmos que todo o tabuleiro fique pintado de preto.

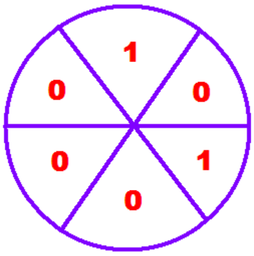
Problema 1.53 Temos um tabuleiro 1995×1995. A cada uma de suas 1995^2 casas associamos um dos números $+1$ ou -1. Em seguida, associamos a cada linha o produto dos números das casas desta linha, e a cada coluna o produto dos números das casas de cada coluna.

i) Se T é a soma dos números associados às linhas, colunas e casas, prove que T é diferente de 0.

ii) Se S é a soma dos números associados às linhas e às colunas, prove que S é diferente de 0.

Problema 1.54 Cinco números 1, 2, 3, 4, 5 estão escritos em um quadro negro. Um estudante pode apagar dois dos números a e b no quadro e escrever os números $a+b$ e $a\cdot b$ nos seus lugares. Se esta operação é repetida indefinidamente, podem os números 21, 27, 64, 180, 540 aparecer no quadro negro ao mesmo tempo?

Problema 1.55 Um círculo é dividido em seis setores. Os números 1, 0, 1, 0, 0, 0 são escritos em sentido horário. É permitido aumentar em 1 dois números vizinhos. É possível que em algum momento todos os números sejam iguais?



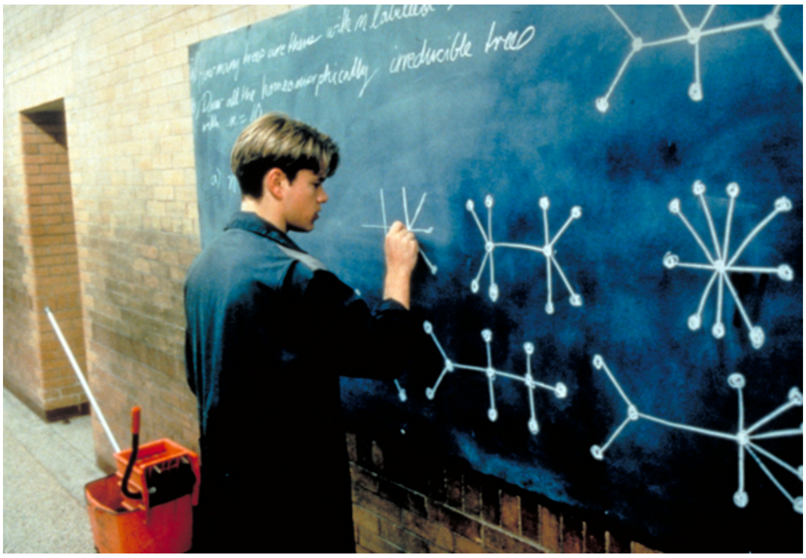
Problema 1.56 A professora desafia André e Thiago com o seguinte jogo, em que eles jogam alternadamente. Ela escreve no quadro-negro os inteiros de 1 a 50. Uma jogada consiste em escolher dois dos números escritos, e apagar esses números, substituindo-os pela soma (por exemplo, se André escolheu 8 e 23, apaga-os e escreve 31). Depois de algum tempo, vai restar no quadro negro um único número. Se esse número é par, o ganhador é André, caso contrário, o ganhador é Thiago. Quem vence o jogo: André ou Thiago?

Problema 1.57 Na ilha de Camelot vivem 13 camaleões roxos, 15 verdes e 17 amarelos. Quando dois de cores distintas se encontram, mudam simultaneamente para a terceira cor. Poderia dar-se a situação na qual todos tenham a mesma cor?

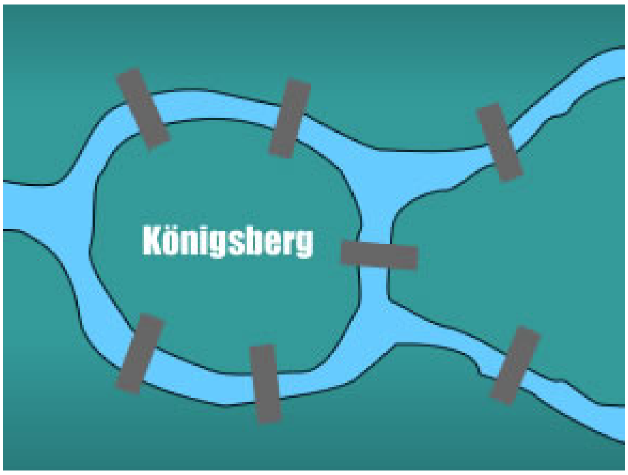
Problema 1.58 **Descanse**.

II Grafos

2. Grafos

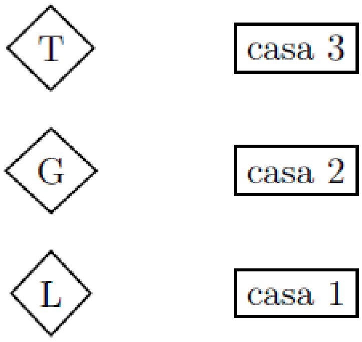


Problema 2.1 — Pontes de Köenigsberg. Os habitantes da cidade de Köenigsberg, cujo mapa está representado na figura abaixo, se perguntavam se seria possível atravessar as sete pontes do Rio Pregel, sem passar duas vezes na mesma ponte e finalizando no ponto de partida.



Uma das razões da importância do problema acima é que essa situação se assemelha sobremaneira ao aspecto prático de numa pequena cidade com um único caminhão para recolher o lixo e onde o prefeito deseja economizar, preferir que o caminhão passe uma única vez por todas as ruas e retorne ao ponto de partida.

Problema 2.2 Um outro problema bastante recorrente e desafiador é o seguinte: temos que ligar Luz, Gás e Telefone a três casas sem que as linhas se cruzem. Você já tentou?



Nesse caso, também cabe uma ponderação: esse problema é importante? Pensemos então numa fábrica de placas de circuito integrado. Encontrar esquemas de ligação que evitem cruzamento é crucial para baratear os custos de manufatura; quanto menos camadas, mais rápido e rentável se torna o serviço. Nos dois casos só nos interessou considerar um conjunto de pontos e um conjunto de ligações entre eles. É a essa estrutura que chamamos grafo.

Problema 2.3 Numa escola algumas turmas resolveram realizar um torneio de vôlei. Participam do torneio as turmas 6A, 6B, 7A, 7B, 8A e 8B. Alguns jogos foram realizados até agora:

6A jogou com 7A, 7B, 8B
6B jogou com 7A, 8A, 8B
7A jogou com 6A, 6B
7B jogou com 6A, 8A, 8B
8A jogou com 6B, 7B, 8B
8B jogou com 6A, 6B, 7B, 8A

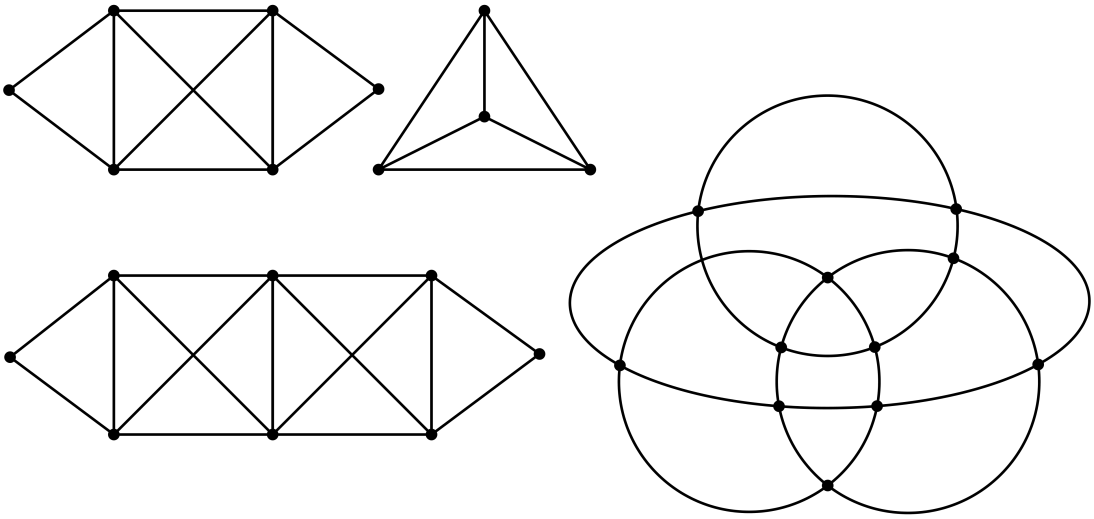
Mas será que isto está correto? Pode ter havido um erro na listagem. Uma maneira de representar a situação é através de uma figura. As turmas serão representadas por pontos e os jogos serão representados por linhas. Execute isso.

Problema 2.4 Usando o grafo do campeonato:

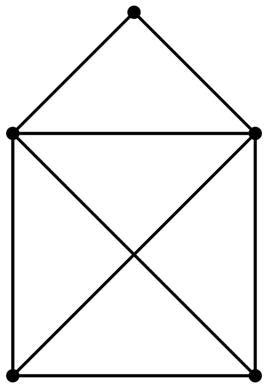
a) Dê o grau de cada um dos vértices;

b) Qual a soma de todos os graus?;

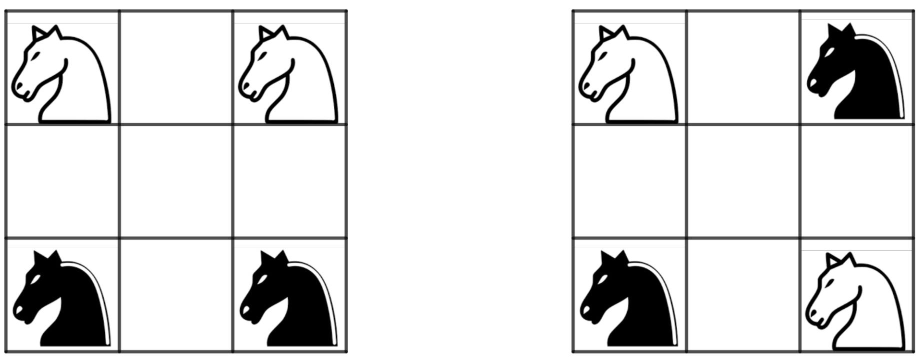
c) Qual o número de arestas?
d) O que você observou? Será coincidência?
Problema 2.5 Faça o mesmo exercício anterior usando os grafos abaixo:



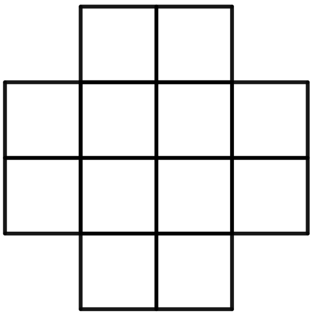
Problema 2.6 O leitor seria capaz de desenhar a figura abaixo sem tirar o lápis do papel? Tem que ir de ponto a ponto e não pode passar pela mesma linha duas vezes.



Problema 2.7 São estabelecidas ligações cósmicas entre os nove planetas do sistema solar. Foguetes viajam ao longo das seguintes rotas: Terra-Mercúrio, Plutão-Vênus, Terra-Plutão, Plutão-Mercúrio, Mercúrio-Vénus, Urânio -Netuno, Netuno-Saturno, Saturno-Júpiter, Júpiter-Marte e Marte-Urânio. Um viajante pode ir da Terra para Marte?
Problema 2.8 As figuras abaixo mostram diversos cavalos em um tabuleiro 3×3. Eles podem se movimentar, de acordo com os movimentos usuais de um cavalo no xadrez, a partir da configuração da figura da esquerda até ficarem na posição ilustrada pela figura da direita?



Problema 2.9 Um tabuleiro de xadrez tem a forma de uma cruz, obtido de um tabuleiro de xadrez 4×4 excluindo os quadrados dos cantos. Um cavaleiro pode viajar por esse tabuleiro, atravessando cada quadrado exatamente uma vez e terminar no mesmo quadrado em que começou?



Problema 2.10 No país Figurativo existem nove cidades, com os nomes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Um viajante descobre que duas cidades estão conectadas por uma rota de avião se e somente se o número de dois dígitos formado pela nomeação de uma cidade e depois da outra for divisível por 3. O viajante pode ir da Cidade 1 a Cidade 9?

Problema 2.11 Há 30 alunos em uma classe. Pode acontecer que 9 deles tenham 3 amigos cada (na classe), onze tenham 4 amigos cada e dez tenham 5 amigos cada?

Problema 2.12 Em Smallville existem 15 telefones. Eles podem ser conectados para que
(a) cada telefone está conectado com exatamente sete outros;
(b) existam 4 telefones, cada um conectado a 3 outros, 8 telefones, cada um conectado a 6 outros e 3 telefones, cada um conectado a 5 outros?

Problema 2.13 Um rei tem 19 vassalos. Pode acontecer que cada vassalo tenha ou 1, ou 5, ou 9 vassalos vizinhos?

Problema 2.14 Um reino em que três estradas saem de cada cidade pode ter exatamente 100 estradas?

Problema 2.15 John, voltando da Disneylândia para casa, disse que viu um lago encantado com sete ilhas, onde cada uma delas tinha 1, 3, ou 5 pontes. É verdade que pelo menos uma dessas pontes deve levar à terra firme?

Problema 2.16 Prove que o número de pessoas que já viveram na Terra e que apertaram as mãos um número ímpar de vezes em suas vidas é igual.

Problema 2.17 9 segmentos de reta podem ser desenhados no plano, cada um dos quais cruza exatamente 3 outros?

III

Aritmética

3. Sistema Posicional de Numeração

3.1 Nota Teórica

O modo, hoje, universalmente utilizado para escrever os números é a representação decimal posicional. Nesse sistema, todo número natural é representado por uma sequência formada pelos algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Por serem 10 esses algarismos, o sistema é chamado de decimal. O sistema é também dito posicional, pois cada algarismo, além de seu valor intrínseco, possui um peso que lhe é atribuído em função de sua posição dentro de um número. Esse peso é uma potência de 10 e varia do seguinte modo: o algarismo da extrema direita tem peso $10^0 = 1$; o seguinte, sempre da direita para a esquerda, tem peso $10^1 = 10$; o seguinte tem peso $10^2 = 100$; o seguinte tem peso $10^3 = 1000$ etc.

Assim,

$$1458 = 1 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 8.$$

Todo número inteiro possui uma única representação decimal, ou seja, um número inteiro n admite uma única representação da forma:

$$\boxed{n = a_m \cdot 10^m + a_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0},$$

onde os a_i são tais que $0 \leq a_i \leq 9$, $i = 0, 1, 2, 3, \ldots, m$.

Os termos a_i são chamados de dígitos ou algarismos. Cada algarismo de um número possui uma ordem, contada da direita para a esquerda. Assim, no exemplo acima, o 8 é de primeira ordem, o 5 de segunda ordem, o 4 de terceira ordem e o 1 de quarta ordem. Cada três ordens, também contadas da direita para a esquerda, constituem uma classe. As classes são usualmente separadas por um ponto.

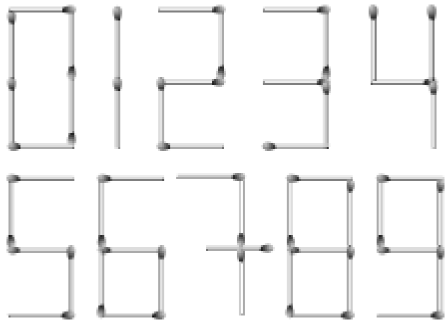
3.2 Problemas

Problema 3.1 Considere dois números naturais, cada um deles com três algarismos diferentes. O maior deles só tem algarismos pares e o menor só tem algarismos ímpares. Se a diferença entre eles é a maior possível, qual é esta diferença?

Problema 3.2 Um número de 6 algarismos começa por 1. Se deslocamos este algarismo 1 da primeira posição para a última à direita, obtemos um novo número de 6 algarismos que é o triplo do número inicial. Qual é este número?

Problema 3.3 Determine o menor número com 10 algarismos tal que a soma dos seus algarismos seja igual a 40.

Problema 3.4 Com palitos de fósforo formamos algarismos, conforme a figura. Deste modo, para escrever o número 188, usamos 16 palitos.



César escreveu o maior número que é possível escrever com exatamente 13 palitos. Qual é a soma dos algarismos do número que César escreveu?

Problema 3.5 Joãozinho coleciona números naturais cujo algarismo das unidades é a soma dos outros algarismos. Por exemplo, ele colecionou 10023, pois $1+0+0+2=3$.

(a) Na coleção de Joãozinho há um número que tem 4 algarismos e cujo algarismo das unidades é 1. Que número é este?

(b) Qual é o maior número sem o algarismo 0 que pode aparecer na coleção?

(c) Qual é o maior número sem algarismos repetidos que pode aparecer na coleção?

Problema 3.6 Fixe três algarismos distintos e diferentes de zero. Forme os seis números com dois algarismos distintos tomados entre os algarismos fixados. Mostre que a soma destes números é igual a 22 vezes a soma dos três algarismos fixados.

Problema 3.7 Qual é o menor número de dois algarismos? E qual é o maior? Quantos são os números de dois algarismos? Quantos algarismos precisa-se para escrevê-los?

Problema 3.8 Qual é a quantidade de elementos do conjunto $\{30;31;32;\ldots;75\}$?

Problema 3.9 Uma urna contém 145 bolinhas numeradas sequêncialmente. Se a primeira bolinha é a de número 347, qual é o número da última bolinha?

Problema 3.10 Quantos algarismos são usados para numerar um livro de 300 páginas?

Problema 3.11 Domingos usou 1002 algarismos para numerar as páginas do livro que acabou de escrever. Quantas páginas tem o livro do Domingos?

Problema 3.12 Pedro distribuiu 127 moedas de 1 real em sete caixas e colocou em cada uma delas uma etiqueta dizendo o número de moedas da caixa. Essa distribuição foi feita de forma que qualquer quantia de R$1,00 a R$ 127,00 pudesse ser paga entregando-se apenas caixas fechadas. De que maneira Pedro fez essa distribuição?

Problema 3.13 — OCM, 2017. Um inteiro positivo q é dito quadrado perfeito quando existe um inteiro positivo k tal que $q = k \cdot k$. Por exemplo, 9 e 64 são quadrados perfeitos, pois $9 = 3 \cdot 3$ e $64 = 8 \cdot 8$. Mostre que não existe quadrado perfeito de oito algarismos cujos quatro algarismos de mais alta ordem (os quatro primeiros da esquerda pra direita) são todos iguais a 9.

Problema 3.14 Determinar o número n de 3 algarismos, tal que se for colocado o dígito 8 à direita de n e o dígito 1 à esquerda de n, temos como resultado o número $28 \cdot n$.

Problema 3.15 Seja $abcdef$ um número de 6 dígitos que satisfaz

$$abcdef = 6 \cdot defabc.$$

Ache o valor de $a+b+c+d+e+f$.

Problema 3.16 (UFMG) A soma de dois números inteiros positivos, com 2 algarismos cada um, é 58. Os quatro algarismos são distintos entre si. A soma desses quatro algarismos é um número:
a) menor que 9.
b) múltiplo de 3.
c) primo.
d) maior que 30.

Problema 3.17 (UFPE) Seja S a soma dos dígitos de $10^{111} - 111$. Calcule a soma dos dígitos de S.

Problema 3.18 (UFPI) Um número é formado por dois algarismos cuja soma é 9. Se invertermos a ordem dos algarismos iremos obter um novo número igual a $\frac{5}{6}$ do original. Qual é esse número?

Problema 3.19 Sejam A e B dois números de dois algarismos cada um e $A < B$. Sabendo-se que cada um desses números é igual ao triplo do produto de seus algarismos, qual a razão $\frac{A}{B}$?
a) 3/8.
b) 1/2.
c) 3/4.
d) 5/8.
e) 5/7.

Problema 3.20 Achar um inteiro positivo de dois algarismos que seja igual ao quádruplo da soma dos seus algarismos.

Problema 3.21 Consideremos os números inteiros de 1 a 1000 inclusive. Somemos entre si todos os que tem todos os seus dígitos pares e somemos entre si todos os que tem todos seus dígitos ímpares. Qual soma é maior?

Problema 3.22 Determine todos os números A de dois algarismos, sendo este um número de dois algarismos que quando somado a outro número de dois algarismos possuindo os mesmos dígitos em ordem inversa, a soma é um quadrado perfeito.

Problema 3.23 A soma de um número de dois dígitos com outro que possui os mesmos dígitos, porém na ordem inversa, é 55. Achar o número sabendo que a diferença entre os algarismos das dezenas e das unidades é igual a 3.

Problema 3.24 Nos tempos de seus avós não existiam as calculadoras eletrônicas e por isso eram ensinadas várias regras de cálculo mental. Uma delas era a seguinte:
Seja a um número natural cujo algarismo da unidade é 5, ou seja, $a = 10q + 5$, com q um número natural. Mostre que $a^2 = 100q(q+1) + 25$. Com isto, ache uma regra para calcular mentalmente o quadrado de a. Aplique a sua regra para calcular os quadrados dos números: 15, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85, 95, 105 e 205.

Problema 3.25 Um número A é formado por 3 algarismos, abc; o algarismos das dezenas é a metade do das unidades, o das centenas é o triplo do das unidades. Invertendo-se a ordem dos algarismos daquele número, obtém-se um número B, cba, igual ao número A diminuído de 396. A soma $A + B - 800$ é igual a:
a) 22.
b) 24.
c) 26.

d) 28.
e) 30.

Problema 3.26 — Goiás. Determine a soma dos algarismos do número $(9999...99995)^2$ onde o número $9999\ldots99995$ tem 99 dígitos iguais a 9.

Problema 3.27 — OBM. O número N tem 3 algarismos. O produto dos algarismos de N é 126 e a soma dos dois últimos algarismos de N é 11. O algarismo das centenas de N é:
a) 2.
b) 3.
c) 6.
d) 7.
e) 9.

Problema 3.28 — OBM. Um certo número N de dois algarismos é o quadrado de um número natural. Invertendo-se a ordem dos algarismos desse número, obtém-se um número ímpar. A diferença entre os dois números é o cubo de um número natural. Podemos afirmar que a soma dos algarismos de N é:
a) 7.
b) 10.
c) 13.
d) 9.
e) 11.

Problema 3.29 Um número inteiro de seis dígitos inicia com 1. Se este dígito é movido do extremo esquerdo para o extremo direito sem mudar a ordem dos outros dígitos, o novo número é 3 vezes o original. Calcule a soma dos dígitos dos números.

Problema 3.30 Prove que o número $111\ldots1-222\ldots2$ (2n 1's e 2n 2's) é um quadrado perfeito.

Problema 3.31 (Índia) Existe algum inteiro positivo N tal que o número formado pelos dois últimos dígitos da soma $1+2+3+\ldots+N$ é 98?

Problema 3.32 Mostre que 1 é o único inteiro positivo que é igual a soma dos quadrados dos seus dígitos.

Problema 3.33 (Teste Cone Sul) Prove que toda progressão aritmética de números naturais contém dois termos cuja soma dos algarismos são iguais.

Problema 3.34 — Maio. Inês escolheu quatro dígitos distintos do conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Formou com eles todos os possíveis números de quatro dígitos distintos e somou todos esses números de quatro dígitos. O resultado foi 193.314. Encontre os quatro dígitos que Inês escolheu.

Problema 3.35 Achar um inteiro positivo de dois algarismos que seja igual ao quádruplo da soma dos seus algarismos.

Problema 3.36 Consideramos os números inteiros de 1 a 1000 inclusive. Somemos entre si todos os que tem todos os seus dígitos pares e somemos entre si todos os que tem todos os seus dígitos ímpares. Qual soma é maior?

Problema 3.37 O inteiro A consiste de 666 números 3, e o inteiro B possui 666 números 6. Quantos dígitos aparecem no produto $A\cdot B$?

Problema 3.38 Quando um número de dois dígitos é somado a outro número de dois dígitos possuindo os mesmos dígitos em ordem inversa, a soma é um quadrado perfeito. Determine todos estes números de dois dígitos.

Problema 3.39 A subtração de um número de dois algarismos com outro que possui os mesmos dígitos, porém na ordem inversa, é 36. Achar o número sabendo que a soma dos quadrados dos seus algarismos é igual a 40.

Problema 3.40 A soma de um número de dois algarismos com outro que possui os mesmos dígitos, porém na ordem inversa, é 55. Achar o número sabendo que a diferença entre os algarismos das dezenas e das unidades é igual a 3.

Problema 3.41 Um número de três algarismos $(xyz)_{10}$ é igual a cinco vezes o número formado apenas pelos algarismos das unidades e dezenas $(yz)_{10}$. Determine esse número sabendo que a soma dos seus algarismos é 8 $(x+y+z=8)$ e que a subtração entre os algarismos das unidades e das dezenas é 3 $(z-y=3)$.

Problema 3.42 Um número a de três algarismos $(xyz)_{10}$ é somado com outros dois números formados pelos mesmos algarismos, porém em outra ordem $b=(zxy)_{10}$ e $c=(yzx)_{10}$, e o resultado é 999. Sabendo que o algarismos das unidades é igual ao das centenas em a $(x=z)$ e que $y+z=7$, determine a.

Problema 3.43 Determine a soma de todos os números pares de 4 dígitos que podem ser escritos usando 0, 1, 2, 3, 4, 5 (e onde os dígitos podem ser repetidos).

Problema 3.44 — OCM. Os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 são colocados, não necessariamente nessa ordem, ao redor de um círculo. Lendo, no sentido horário, três algarismos consecutivos, forma-se um número de três algarismos. Nove números de três algarismos podem ser formados dessa forma. Encontre os possíveis valores da soma desses 9 números. Justifique sua resposta.

Problema 3.45 Sejam os inteiros $a=1111\ldots111$ (m 1's) e $b=1000\ldots0005$ ($m-1$ 0's). Prove que $a\cdot b+1$ é um quadrado perfeito. Expresse a raiz quadrada de $a\cdot b+1$ da mesma forma como a e b foram expressos.

Problema 3.46 Mostrar que o produto $12345679\cdot 9\cdot k$, sendo $k\neq 0$ um algarismo, é $kkk.kkk.kkk$.

Problema 3.47 O produto de um inteiro positivo de três algarismos por 7 termina à direita por 638. Determinar esse inteiro.

Problema 3.48 Se

$$a=3.643.712.546.890.623.517$$

$$\text{e } b=179.563.128,$$

determine o número de algarismos de $a\cdot b$.

Problema 3.49 Achar o menor inteiro cujo produto por 21 é um inteiro formado apenas com algarismos 4.

Problema 3.50 Achar o menor inteiro positivo que multiplicado por 33 dá um produto cujos algarismos são todos 7.

Problema 3.51 O número de 4 dígitos $2pqr$ é multiplicado por 4 e o resultado é um número de 4 dígitos $rqp2$. Pode-se afirmar que $p+q$ é:
a) 8.
b) 7.
c) 6.
d) 5.
e) n.d.a.

Problema 3.52 Seja $S(n)$ a soma dos dígitos de n. Por exemplo

$$S(197)=1+9+7=17.$$

Seja

$$S^2(n)=S(S(n)),\ S^3(n)=S(S(S(n))),$$

e assim por diante.
Qual o valor de $S^{1999}(1999)$?
a) 28.
b) 10.
c) 1.
d) 9.
e) n.d.a.

Problema 3.53 É possível encontrar um número inteiro cujo produto dos dígitos seja igual a 66?

Problema 3.54 Mostrar que o produto de dois fatores entre 10 e 20 é o décuplo da soma do primeiro com as unidades do segundo, mais o produto das unidades dos dois.

Problema 3.55 Determinar o último dígito da seguinte soma:

$$S=1!+2!+3!+...+2016!+2017!+2018!$$

Problema 3.56 (UNIFOR) Seja n a diferença entre o maior número inteiro com 6 algarismos distintos e o maior número inteiro com 5 algarismos distintos. A soma dos algarismos de n é um número:
a) primo.
b) par.
c) divisível por 11.
d) quadrado perfeito.
e) múltiplo de 5.

Problema 3.57 — Mackenzie. O número de algarismos do produto $4^9 \cdot 5^{13}$ é:
a) 20.
b) 22.
c) 18.
d) 15.
e) 17.

Problema 3.58 (UERJ) Analise a expressão abaixo na qual n é um número natural:

$$N = 10^n - n.$$

Determine o valor da soma dos algarismos de N quando $n = 92$.

Problema 3.59 (UFU) Desenvolvendo o número $10^{65} - 92$ iremos encontrar todos os algarismos que o compõe. Assim, podemos afirmar que a soma desses algarismos é igual a:
a) 575.
b) 573.
c) 566.
d) 585.

Problema 3.60 (Covest) Abaixo temos a ilustração de uma operação correta de adição, onde as parcelas e a soma estão expressas no sistema de numeração decimal e x, y e z são dígitos entre 0 e 9. Quanto vale $x+y+z$?

$$(8x3)_{10} + (y87)_{10} + (57z)_{10} = 2.296$$

a) 17.
b) 18.
c) 19.
d) 20.
e) 21.

Problema 3.61 (Fuvest)

$$(1abc)_{10} \cdot 3 = (abc4)_{10}$$

Acima está representada uma multiplicação, onde os algarismos a, b e c são desconhecidos. Qual o valor da soma $a+b+c$?
a) 5.
b) 8.
c) 11.
d) 14.
e) 17.

Problema 3.62 (Fuvest) Um número inteiro positivo n de 4 algarismos decimais satisfaz às seguintes condições:
i) A soma dos quadrados dos 1º e 4º algarismos é 58;

ii) A soma dos quadrados dos 2º e 3º algarismos é 52;
iii) Se deste número n subtraímos o número 3816, obteremos um número formado pelos mesmos algarismos do número n, mas na ordem contrária.
Qual é esse número?

Problema 3.63 (Fuvest) O menor número inteiro positivo que devemos adicionar a 987 para que a soma seja o quadrado de um número inteiro positivo é:
a) 37.
b) 36.
c) 35.
d) 34.
e) 33.

Problema 3.64 (Unicamp) Um determinado ano da última década do século XX é representado, na base 10, pelo número $abba$, e um outro, da primeira década do século XXI, é representado, também na base 10, pelo número $cddc$?
a) Escreva esses dois números.
b) A que século pertencerá o ano representado pela soma $abba + cddc$?

Problema 3.65 (ESA) Um número é formado por três algarismos, cuja soma é 15. O algarismo das dezenas é o triplo do algarismo das unidades e o algarismos das centenas é o sucessor do algarismo das dezenas. Esse número é:
a) 276.
b) 267.
c) 726.
d) 762.
e) 627.

Problema 3.66 — CN. Um número natural de 6 algarismos começa, à esquerda, pelo algarismo 1. Levando-se este algarismo 1, para o último lugar, à direita, conservando a sequência dos demais algarismos, o novo número é o triplo do número primitivo. O número primitivo é:
a) 100.006.
b) múltiplo de 11.
c) múltiplo de 4.
d) maior que 180.000.
e) divisível por 5.

Problema 3.67 — CN. Os números naturais M e N são formados por dois algarismos não nulos. Se o algarismo de M são os mesmos algarismos de N, na ordem inversa, então $M+N$, é necessariamente múltiplo de:
a) 2.
b) 3.
c) 5.
d) 7.
e) 11.

Problema 3.68 — CN. Se a, b e c são algarismos distintos, no sistema de numeração decimal existe um único número de dois algarismos (ab) tal que $(ab)^2 - (ba)^2 = (cc)^2$. O valor de $(a+b+c)$ é igual a:
a) 11.
b) 12.
c) 13.
d) 14.
e) 15.

Problema 3.69 — Brasília. Determine um número de 4 dígitos, sabendo que seus dois primeiros dígitos, são iguais, que seus dois últimos dígitos também são iguais e que o número é um quadrado perfeito.

Problema 3.70 — Minas Gerais. Suponhamos que você pedisse a alguém escrever dois números quaisquer, um embaixo do outro e, em seguida, escrever abaixo a soma destes dois números, e continuar assim escrevendo a soma dos dois números imediatamente superiores, até completar 10 linhas. Você poderia então "adivinhar" a soma dos dez números, olhando rapidamente a coluna e multiplicando o sétimo número por 11. Explique por que isso sempre acontece.
Problema 3.71 — Goiás. Determine a soma dos algarismos do número $(999.....995)^2$, onde o número $999\ldots995$ tem 99 dígitos iguais a 9.
Problema 3.72 — Campina Grande. Na subtração a seguir, A, B e C são algarismos. Quais são os valores de A, B e C?

$$8A31 - C40A = B1C6$$

Problema 3.73 — Campina Grande. Encontre um número de 3 dígitos tal que a soma dele com o produto de seus dígitos dê 586.

Exemplo 3.1 — AHSME 1973. Na equação a seguir, cada uma das letras representa exclusivamente um dígito diferente na base dez:

$$(YE)\cdot(ME) = TTT.$$

Determine a soma $E+M+T+Y$.
Solução: Como $TTT = T\cdot 111 = T\cdot 3\cdot 37$, ou YE ou ME é 37, o que acarreta $E = 7$. Além disso, T é um dígito e $T\cdot 3$ é um número de dois dígitos que termina com 7. Portanto, segue-se que $T = 9$ e $TTT = 999 = 27\cdot 37$ e, finalmente, $E+M+T+Y = 2+3+7+9 = 21$. ■

Problema 3.74 — Rio Grande do Norte. A soma dos algarismos de um número natural N, de três dígitos, é 21. Formamos um novo número mudando a posição do algarismo das unidades com o das dezenas. O novo número é 45 unidades maiores que N. Então, o produto dos algarismos de N é:
Problema 3.75 — Rio Grande do Sul. Um número inteiro positivo é dito tetra-legal se a soma dos seus algarismos for múltipla de quatro (4). A quantidade de números tetra-legais maiores que zero (0) e menores que cem (100) é igual a:
a) 24.
b) 21.
c) 20.
d) 22.
e) 25.
Problema 3.76 — Rio Grande do Norte. Existem quatro inteiros positivos de dois algarismos tais que a diferença entre o inteiro e o produto de seus algarismos seja 12?
Problema 3.77 — Rio Grande do Sul. Determine todos os número naturais que possuem três algarismos não nulos e distintos e que são iguais a soma de todos os números de dois dígitos que podem ser formados a partir de seus algarismos resulta no próprio número.
Problema 3.78 — São Paulo. Prove que se o quadrado de um número de dois algarismos, escrito na base 10 é subtraído do quadrado do número formado pelos mesmos algarismos em ordem inversa, então o resultado é um número divisível por 11.
Problema 3.79 — Brasil, Preparação Cone Sul. Prove que o número $111\ldots11222\ldots225$ ($111\ldots = 1997$; $222\ldots = 1998$) é um quadrado perfeito.
Problema 3.80 — Brasil, Preparação Cone Sul. Ache todos os naturais p para os quais $p+S(p)+S(S(p)) = 1995$, onde $S(p)$ é a soma dos dígitos de p, na base 10.
Problema 3.81 — OBM. Quantos números de 3 algarismos existem cuja soma dos algarismos é 25?
a) 2.
b) 4.
c) 6.
d) 8.

e) 10.

Problema 3.82 — OBM. O número N de três algarismos multiplicado por 7 deu como resultado um número que termina em 171. A soma dos algarismos de N é:

a) 10.
b) 11.
c) 12.
d) 13.
e) 14.

Problema 3.83 — Uruguai. Se subtrairmos de um número positivo N de dois dígitos o número que se obtém ao inverter seus dígitos, obtemos um cubo perfeito. Achar os possíveis valores de N.

Problema 3.84 — Uruguai. Sejam x, y e z três dígitos diferentes, nenhum igual a zero. Deduzir valores de $(xyz)_{10}$ sabendo que sabendo que $(xx)_{10}+(yy)_{10}+(zz)_{10}=(xyz)_{10}$.

Problema 3.85 — Argentina. $N=9+99+999+\ldots+9999\ldots9$ onde cada parcela tem um dígito 9 mais que o anterior e a última parcela é o número formado por 1998 dígitos iguais a 9. Quantas vezes aparecerá o dígito 1 no número N?

Problema 3.86 — Argentina. Se for escrito o número 1997 e na continuação o ano em que nasceu Fernando, obtém-se um número de oito cifras que é um quadrado perfeito. Determine esse número.

Problema 3.87 — Argentina. Em um quadro negro está escrito um número de três dígitos, todos distintos. Ana troca de lugar o primeiro dígito com o último. A soma do número escrito no quadro negro mais o número de Ana é igual a 92 vezes a soma dos dígitos do número escrito no quadro negro. Determinar todos os possíveis valores do número escrito no quadro negro.

Problema 3.88 Encontre todos os números $N=abc$ de três dígitos tais que ao somarmos 9 obtém-se o número cab.

Problema 3.89 — Manhattan. É possível encontrar um número inteiro cujo produto dos dígitos seja igual a 66?

Problema 3.90 — New Brunswick. Sejam $A=6a3$ e $B=2b5$ dois números de 3 dígitos. Se 9 divide $A+B$, então um valor correto de $a+b$ é:

a) 2.
b) 9.
c) 12.
d) 18.
e) n.d.a.

Problema 3.91 — Noruega. Quantos números naturais são iguais a três vezes a soma dos seus algarismos?

Problema 3.92 — Bélgica. O dígito das unidades de um número natural é 7. Quando este dígito é removido para a frente do número, um novo número $5n$ é formado. Quantos dígitos, pelo menos, possui este número n?

a) 4.
b) 5.
c) 6.
d) 7.
e) 10.

Problema 3.93 — Bélgica. Quantos números naturais consistindo de dois dígitos são iguais a soma dos seus dígitos mais o produto de seus dígitos?

a) 5.
b) 6.
c) 7.
d) 8.
e) 9.

Problema 3.94 — Hong Kong. Seja $N=99\ldots99$, onde o dígito 9 ocorre 1990 vezes. Calcule a soma dos dígitos do número N^2.

Problema 3.95 — Moldávia. Determine todos os números de quatro dígitos n tais que a soma dos dígitos de n é igual a $2027-n$.
Problema 3.96 — Maio. Considerando os números naturais de três dígitos, em quantos deles ao somar dois dos dígitos de obtém o dobro do terceiro? Justifique sua resposta.
Problema 3.97 — Maio. Inês escolheu quatro dígitos distintos dos conjuntos $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Formou com eles todos os possíveis números de quatro cifras. O resultado é 193314. Encontre os quatro dígitos que Inês escolheu.
Problema 3.98 — Cone Sul. A cada número inteiro positivo n, $n \leq 99$, subtrai-se a soma dos quadrados de seus dígitos. Para quais valores de n, esta diferença é a maior possível?
Problema 3.99 — OBM. Sendo $d_k d_{k-1} \ldots d_1 d_0$ a representação decimal de um número natural n com $k+1$ algarismos, diremos que n é um "superquadrado" se, e somente se:

$$\begin{gathered} d_0 \\ d_1 d_0 \\ d_2 d_1 d_0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ d_{k-1} \ldots d_1 d_0 \text{ e} \\ d_k d_{k-1} \ldots d_1 d_0 = n \end{gathered}$$

são quadrados de números inteiros positivos.
Exemplos:
64 é superquadrado, pois $4 = 2^2$ e $64 = 8^2$.
4225 não é superquadrado, pois, apesar de

$$25 = 5^2,\ 225 = 15^2 \text{ e } 4225 = 65^2,$$

5 não é o quadrado de um inteiro.
a) Determine todos os superquadrados menores do que 1000.
b) Determine todos os números que são superquadrados.
Problema 3.100 — OBM. Dizemos que um conjunto A formado por quatro algarismos distintos e não nulos é intercambiável se podemos formar dois pares de números, cada um com 2 algarismos de A, de modo que o produto dos números de cada par seja o mesmo e que, em cada par, todos os dígitos de A sejam utilizados. Por exemplo, o conjunto $\{1;2;3;6\}$ é intercambiável pois $21 \cdot 36 = 12 \cdot 63$. Determine todos os conjuntos intercambiáveis.
Problema 3.101 — OBM. Dizemos que um número N de quatro algarismos é biquadrado quando é igual à soma dos quadrados de dois números: um é formado pelos dois primeiros algarismos de N, na ordem em que aparecem em N e o outro pelos outros dois algarismos na ordem em que aparecem em N.
Por exemplo, 1233 é biquadrado, pois $1233 = 12^2 + 33^2$. Encontre um outro número biquadrado.
Problema 3.102 — Argentina. Determinar um número natural n tal que seu quadrado tenha 202 dígitos: os primeiros 100 (desde a esquerda) todos iguais a 1, os seguintes 100 todos iguais a 2 e os dois últimos, desconhecidos, ou seja, $n^2 = 111\ldots 11222\ldots 22??$.
Determine os outros dois algarismos desconhecidos sabendo que eles são diferentes.
Problema 3.103 — Argentina. Usando os dígitos 1,2,3,4,5,6 e sem repetir, formam-se 3 números de 2 dígitos cada um. Soma-se os 3 números de 2 dígitos formados. Quantos resultados diferentes podem ser obtidos mediante este procedimento?
Problema 3.104 — Argentina. Determinar todos os números naturais de quatro dígitos $abcd$ tais que $ab + cd = bc$ e $b\breve{\ } c = d$.
Observação: ab é um número de dois dígitos, o primeiro é a e o segundo b.
Problema 3.105 — Argentina. Com três dígitos distintos formam-se os seis números de três dígitos distintos. A soma destes seis números é 4218. A soma dos três números maiores menos a soma dos três menores é igual a 792. Achar os três dígitos.
Problema 3.106 — Argentina. O número de dois dígitos $x7$ multiplicado pelo número de dois dígitos $y9$, é igual ao número de quatro dígitos $zz33$. Dar os possíveis dos dígitos x, y, z.

Problema 3.107 (Manhattam) Prove que o produto dos dígitos de inteiro positivo é sempre menor ou igual que o respectivo número.
Problema 3.108 — Portugal. Encontre os algarismos A, B, C, D que tornam a operação seguinte correta:

$$ABCD \cdot 9 = DCBA$$

Problema 3.109 — Rússia. Os dígitos de um número de 17 dígitos são rearranjados na ordem inversa. Prove que ao menos um dígito no inteiro que a soma do novo número com o inicial é par.
Problema 3.110 — Estônia. Em um inteiro positivo M, de três algarismos, o algarismo das centenas é menor do que o algarismo das dezenas e o algarismo das dezenas é menor que o algarismo das unidades simples. A média aritmética de M com todos os números de três algarismos obtidos pela reordenação dos algarismos de M termina em 5. Determine tais números M.
Problema 3.111 (Macedônia) Determine um número de 3 dígitos distintos que é 5 vezes menor que a soma de todos os outros números que podem ser formados com os mesmos dígitos.
Problema 3.112 — Maio. Considera-se inicialmente um número de três algarismos distintos, nenhum dos quais igual a zero. Trocando de lugar dois de seus algarismos, encontra-se um segundo número menor do que o primeiro. Se a diferença entre o primeiro e o segundo número é um número de dois algarismos e a soma do primeiro e do segundo é um número palíndromo menor que 500, quais são os palíndromos que podem sem obtidos?
Observação: Um número palíndromo é um número que pode ser lido indiferentemente da frente para trás ou de trás para frente, como por exemplo: 191.
Problema 3.113 — Maio. Um número natural de três algarismos é chamado de tricúbico se é igual a soma dos cubos de seus dígitos. Encontre todos os pares de números consecutivos tais que ambos sejam tricúbicos.
Problema 3.114 — Torneio das Cidades. Uma estudante esqueceu de escrever um sinal de multiplicação entre dois números naturais de 3 algarismos e escreveu esses dois números juntos, como se fosse um número de 6 algarismos. Esse número de 6 algarismos é 3 vezes maior do que o produto obtido pela multiplicação dos dois números originais. Ache esses números.
Problema 3.115 — Cone Sul. Achar um número de três dígitos, sabendo que a soma de seus dígitos é 9, o produto das mesmas é 24 e também o número lido da direita para a esquerda é 27/38 do número primitivo.
Problema 3.116 — Cone Sul. Seja n um número natural, $n > 3$. Demonstrar que entre os múltiplos de 9 menores que $10 \cdot n$ há mais números com a soma de seus dígitos igual a $9(n-2)$ que números com a soma de seus dígitos igual a $9(n-1)$.
Problema 3.117 — Cone Sul. Achar um número inteiro positivo n de maneira tal que se à sua expressão é colocado um 2 à esquerda e um 1 à sua direita, o número resultante seja igual a $33 \cdot n$.
Problema 3.118 (Irlanda) Pra cada inteiro positivo n, seja $S(n)$ a soma dos dígitos de n (quando n é escrito em base 10). Prove que para todo inteiro positivo n,

$$S(2n) \leq 2S(n) \leq 10S(2n).$$

Prove também que existe um número positivo n com $S(n) = 1996S(3n)$.
Problema 3.119 (Hungria) Seja n um inteiro positivo dado e

$$A = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n}.$$

Prove que ao menos um dos termos da sequência

$$A, 2A, 4A, 8A, \ldots, 2^k A, \ldots$$

é um inteiro.
Problema 3.120 — IMO. Encontre o menor número natural com 6 como o último dígito, tal que se o dígito final 6 é movido para o início do número, ele é multiplicado por 4.

Problema 3.121 — Iberoamericana. Encontrar um número N de cinco dígitos diferentes e não nulos, que seja igual a soma de todos os números de três dígitos distintos que se podem formar com cinco dígitos de N.
Problema 3.122 — Iberoamericana. Os algarismos de um inteiro positivo n, seja a_n o último dígito do número $1+2+3+\ldots+n$. Calcular $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{1992}$.
Problema 3.123 — Rússia. Os algarismos de um inteiro positivo A em sua representação no sistema de numeração decimal crescem da esquerda para a direita. Determine a soma dos algarismos do número $9A$.
Problema 3.124 — Torneio das Cidades. Pode a soma do número de dígitos de n com o número de dígitos de n^3 valer 2001?
Problema 3.125 — Inglaterra. N é um número inteiro de 4 dígitos, não terminando em zero, e $R(N)$ é o número inteiro de 4 dígitos obtido pela reversão dos dígitos de N; por exemplo $R(3275) = 5723$. Determine todos os inteiro N para os quais $R(N) = 4N + 3$.

3.3 Base Binária e Balanças

3.3.1 Nota Teórica

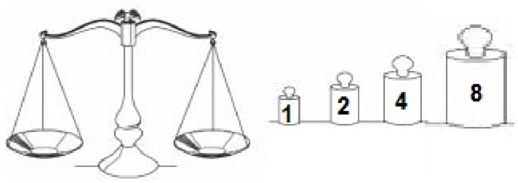
Comparar o sistema decimal de numeração com outras bases numéricas é uma boa ideia para garantir uma melhor compreenção dos sistemas posicionais de numeração.
Na base 10, todo número natural pode ser escrito como uma soma de múltiplos (de 0 a 9) de potências de 10.

$$(7348)_{10} = 8\cdot 10^0 + 4\cdot 10^1 + 3\cdot 10^2 + 7\cdot 10^3$$

De modo análogo, na base 2, todo número natural pode ser escrito como uma soma de potências de 2. Nesta seção vamos explorar este fato e vamos utilizá-lo na resolução de alguns problemas com balanças.

3.3.2 Problemas

Problema 3.126 Em uma balança de dois pratos você pode utilizar pesinhos de 1 kg, 2 kg, 4 kg e 8 kg. Utilizando no máximo uma unidade de cada um destes pesinhos de um lado da balança, quais pesos podem ser equilibrados na balança?



Problema 3.127 Escrever os números 62, 125 e 347 como somas de potências de 2. Representar estas somas de modo análogo ao que é feito na base 10.
Problema 3.128 O número $(101101)_2$ é par ou ímpar? E o número $(10110010)_2$ é par ou ímpar? Determine um critério para saber quando um número escrito na base 2 é par.
Problema 3.129 Distribua 127 moedas de um real entre 7 porta-moedas de modo que qualquer soma inteira de 1 até 127 reais possa ser paga sem abrir os porta-moedas.
Problema 3.130 Aladim tem 10 sacos de moedas, onde cada saco tem somente moedas verdadeiras ou moedas falsas. Cada moeda verdadeira pesa 10 g e cada moeda falsa pesa 9 g. Suponhamos que em cada saco existam exatamente 10 moedas e somente um dos sacos é de moedas falsas. Utilizando uma balança e efetuando apenas uma pesagem, como Aladim deve proceder para descobrir qual é o saco das moedas falsas?

Problema 3.131 Uma pessoa tem 10 sacos com muitas, muitas moedas cada. Alguns dos sacos, mas não se sabe quantos, estão cheios de moedas falsas, enquanto os outros sacos estão cheios de moedas verdadeiras. As moedas verdadeiras pesam dez gramas e as moedas falsas pesam nove gramas cada. Com uma só pesagem identificar todos os sacos que têm moedas falsas.

Problema 3.132 **Descanse**.

3.4 Critérios de Divisibilidade

3.4.1 Nota Teórica

GRUPO 1:
Por 2: Quando o **último** algarismo (o das unidades) é divisível por 2.
Por 4: Quando o número formado pelos seus **dois últimos** algarismos é divisível por 4.
Por 8: Quando o número formado pelos seus **três últimos** algarismos é divisível por 8.

GRUPO 2:
Por 3: Se a soma dos seus algarismo é divisível por 3.
Justificativa: Para entender este critério de divisibilidade, primeiramente precisamos observar que todas as potências de 10 deixam resto 1 quando divididas por 3:

$$10 = 3 \cdot 3 + 1$$
$$100 = 3 \cdot 33 + 1$$
$$1000 = 3 \cdot 333 + 1$$

Desta observação, vamos verificar, sem efetuar a divisão, se o número 457 é ou não é divisível por 3. O número 457 pode ser escrito como

$$457 = 4 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 7$$

ou ainda,

$$457 = 4(3 \cdot 33 + 1) + 5 \cdot (3 \cdot 3 + 1) + 7.$$

Colocando o fator 3 em evidência, vemos que

$$457 = 3 \cdot (4 \cdot 33 + 5 \cdot 3) + (4 + 5 + 7)$$

Como o número

$$3 \cdot (4 \cdot 33 + 5 \cdot 3)$$

é divisível por 3, precisamos somente verificar se $4 + 5 + 7 = 16$ é divisível por 3. Como este número não é divisível por 3, concluímos que 457 também não é divisível por 3. Mais ainda, como 16 deixa resto 1 quando dividido por 3, podemos até concluir que 457 também deixa resto 1 quando dividido por 3.

■

Por 9: Se a soma dos seus algarismos é divisível por 9.

GRUPO 3:
Por 5: Quando termina em 0 ou 5.
Por 10: Quando termina em **um** 0.
Por 100: Quando termina em **dois** 0's.
Por 1000: Quando termina em **três** 0's.

GRUPO 4:
Por 6: Quando é divisível por 3 e por 2.
Por 12: Quando é divisível por 3 e por 4.
Por 15: Quando é divisível por 3 e por 5.

GRUPO 5:
Por 7: Se o número que sobra subtraído pelo **dobro** de seu último algarismo também é, iteradamente.
Por 11: Se o número que sobra subtraído pelo **próprio** último algarismo também é, iteradamente.

3.4.2 Problemas

Problema 3.133 (i) Determine um número inteiro cujo produto por 9 seja um número natural composto apenas pelo algarismo 1.
(ii) Qual é o menor múltiplo positivo de 9 que é escrito apenas com os algarismos 0 e 1?
(iii) Qual é o menor múltiplo positivo de 9 que é escrito apenas com os algarismos 1 e 2?

Problema 3.134 Encontre o menor múltiplo de 9 que não possui algarismos ímpares.

Problema 3.135 No número $6a78b$, a denota o algarismo da unidade de milhar e b denota o algarismo da unidade. Se $x = 6a78b$ for divisível por 45, então quais são os possíveis valores de x?

Problema 3.136 Qual é o menor número de cinco algarismos divisível por 4 que se pode formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 9?

Problema 3.137 Os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 foram usados, cada um uma única vez, para escrever um certo número $abcde$ de cinco algarismos tal que abc é divisível por 4, bcd é divisível por 5 e cde é divisível por 3. Encontre este número.

Problema 3.138 O dobro de um número, quando dividido por 5, deixa resto 1. Qual é o resto da divisão deste número por 5?

Problema 3.139 Determinar todos os números de quatro dígitos $n = 1a7b$ que são múltiplos de 15. (a e b são dígitos necessariamente distintos).

Problema 3.140 Determinar os algarismos x e y de modo que o inteiro:

$67xy$ seja divisível por 5 e por 11.
$5x6y$ seja divisível por 3 e por 4.
$56x21y$ seja divisível por 9 e por 10.
$34xx58y$ seja divisível por 9 e por 11.
$231xy$ seja divisível por 5 e por 9.

Problema 3.141 Determinar os algarismos x e y de modo que o inteiro:

$x0y$ seja divisível por 12;
$5x2y$ seja divisível por 15;
$1234xy$ seja divisível por 72.

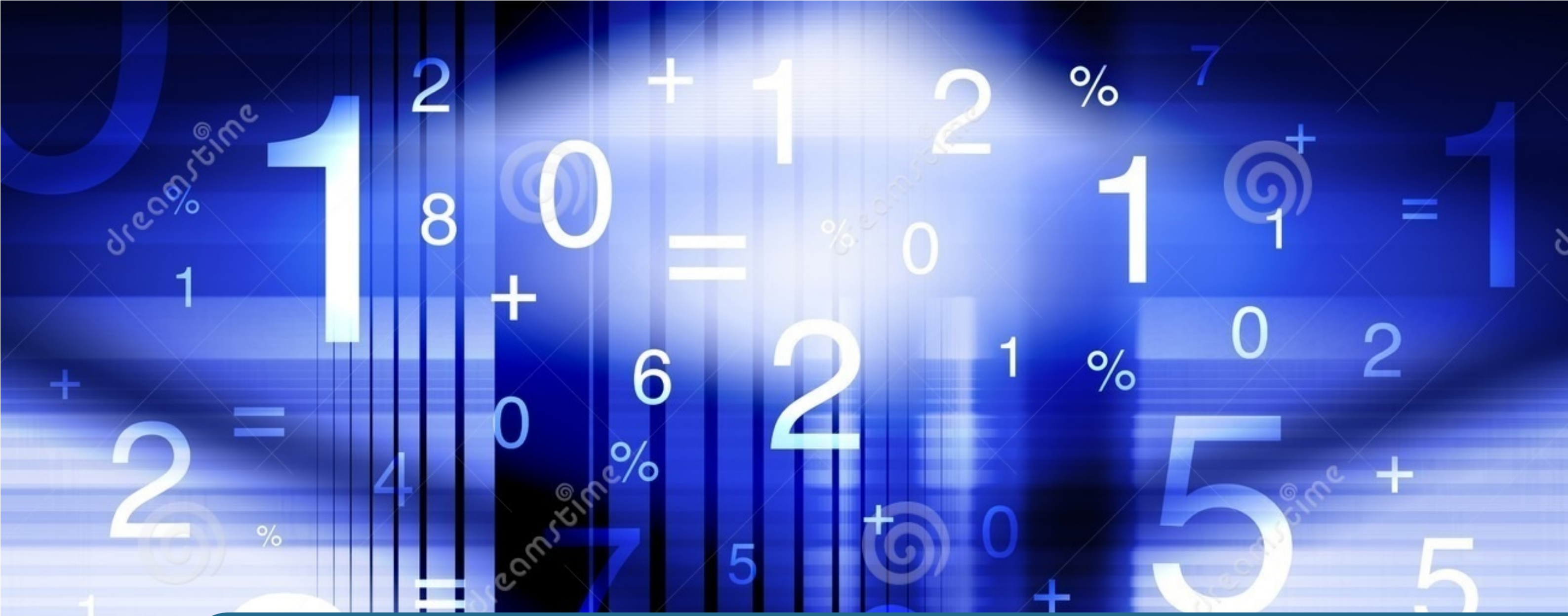
Problema 3.142 Seja um número $m = 488a9b$, onde b é o algarismo das unidades e a é o algarismo das centenas. Sabendo-se que m é divisível por 45, qual, então, é o valor de $a + b$?

Problema 3.143 O número $583ab$ é divisível por 9. Qual o valor máximo da soma dos algarismos a e b?

Problema 3.144 O número 1234 não é divisível por 11, mas um número formado por uma permutação de seus algarismos pode ser divisível por 11. Por exemplo, 1243 é divisível por 11. Qual é o número total de permutações do número 1234 que é divisível por 11?

Problema 3.145 — **Rússia.** Todos os números de dois dígitos de 19 à 80 são escritos em linha reta sem espaços. É obtido o número 192021...7980. Este número é divisível por 1980?

Problema 3.146 **Descanse**.



4. Divisibilidade e Congruência

4.1 Divisibilidade

Definição 4.1.1 Dados os inteiros a e b, diz-se que "a divide b"e escreve-se $a|b$, se existe um inteiro c tal que $b = a \cdot c$.

$$a|b \iff \exists\, c \in \mathbb{Z};\ b = a \cdot c$$

Alternativamente, $a|b$ pode ser lido como "a é divisor de b", "a é um fator de b"ou "b é múltiplo de a". Quando não se tem $a|b$, escreve-se $a \nmid b$.

Proposição 4.1.1 — Propriedades. Para a, b, c, x e y, todos números inteiros:

- **D1:** $a|a$ (**reflexiva**);
- **D2:** se $a|b$, então $b = 0$ ou $|a| \leq |b|$ (**limitação**);
- **D3:** se $a|b$ e $b|a$, então $|a| = |b|$ (**anti-simétrica**);
- **D4:** se $a|b$ e $b|c$, então $a|c$ (**transitiva**);
- **D5:** se $a|b$ e $a|c$, então $a|(bx+cy)$;
- **D6:** seja $a = b+c$ e suponha que $d|b$, então $d|a \Leftrightarrow d|c$.

4.1.1 Exemplos e Problemas

Problema 4.1 Quantos pares de números inteiros (x, y) satisfazem a relação $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5}{y} = 7$?

Problema 4.2 Encontre todos os pares de inteiros positivos a e b tais que $79 = ab + 2a + 3b$.

Exemplo 4.1 Mostre que se $7|3a+2b$, então $7|4a-2b$.
Solução: Desde que $7|7a$ e $7|3a+2b$, então $7|[7a-(3a+2b)] = 4a-2b$. ■

Problema 4.3 Mostre que se $3|a+7b$, então $3|a+b$.

Problema 4.4 Mostre que se $7|a+3b$, então $7|13a+11b$.

Problema 4.5 Mostre que se $19|3x+7y$, então $19|43x+75y$.

Problema 4.6 Mostre que se $17|3a+2b$, então $17|10a+b$.

Problema 4.7 Mostre que se para algum n, $m|(35n+26)$, $m|(7n+3)$ e $m > 1$, então $m = 11$.

Problema 4.8 Prove que para $a \neq 0$, d e n, todos números inteiros, $d|n \Leftrightarrow ad|an$.

Exemplo 4.2 Encontre todos os inteiros positivos n tais que $(2n^2+1)|(n^3+9n-17)$.
Solução: Dado que $(2n^2+1)|(n^3+9n-17)$ e $(2n^2+1)|(2n^2+1)$, tem-se

$$(2n^2+1)|[(n^3+9n-17)\cdot 2+(2n^2+1)\cdot(-n)].$$

Isto acarreta,

$$(2n^2+1)|(17n-34).$$

Há duas hipóteses:

$$17n-34=0 \Leftrightarrow n=2$$

ou, utilizando a propriedade da **limitação**,

$$|2n^2+1| \leq |17n-34| \Leftrightarrow n=1,\ n=4 \text{ ou } n=5.$$

Testando tais valores, $n=2$ e $n=5$ são soluções. ■

Problema 4.9 Encontre todos os números inteiros positivos n para os quais $n+1|n^2+1$.
Problema 4.10 Quantos números inteiros positivos n existem tais que $n+3$ divide n^2+7?
Problema 4.11 — Leningrado, 1991. Cada um dos naturais a, b, c e d é divisível por $ab-cd$, que também é um número natural. Prove que $ab-cd=1$.
Problema 4.12 Pode o número $A=111\ldots1$, formado por trezentos 1's, ser um quadrado perfeito?

Exemplo 4.3 — Maio, 2006. Encontre todos os naturais a e b tais que $a|(b+1)$ e $b|(a+1)$.
Solução: Pela propriedade da **limitação**, temos $a \leq b+1$ e $b \leq a+1$. Assim, $a-1 \leq b \leq a+1$. Temos os seguintes os casos:
(i) $a=b$. Como $a|b+1$ e $a|b$ (pois $b=a$) temos que $a|[(b+1)-b]=1$. Assim, $a=1$, gerando a solução única $(a,b)=(1,1)$;
(ii) $a=b+1$. Como $b|a+1$ e $b|a-1$ (pois $b=a-1$) temos que $b|[(a+1)-(a-1)]=2$. Assim, $b=1$ ou $b=2$ e nesse caso, temos as soluções $(3,2)$ e $(2,1)$;
(iii) $a=b-1$. De modo análogo a (ii) obtemos $(1,2)$ e $(2,3)$. ■

Exemplo 4.4 — AIME, 1986. Qual é o maior inteiro n para o qual n^3+100 é divisível por $n+10$?
Solução: Temos que

$$n^3+10^3=(n+10)(n^2-10n+100).$$

Assim,

$$n^3+100=(n+10)(n^2-10n+100)-900.$$

Desde que $(n+10)|(n^3+100)$, então $(n+10)|900$. Assim, o maior inteiro n para o qual $n+10$ divide 900 é 890. ■

Exemplo 4.5 — Leningrado, 1989. Seja A um número natural maior que 1, e seja B um número natural que é um divisor de A^2+1. Prove que se $B-A>0$, então $B-A>\sqrt{A}$.
Solução: Seja $B-A=q$. Assim, $(A+q)|(A^2+1)$ e desde que $(A-q)\cdot(A+q)=A^2-q^2$ é divisível por $A+q$, podemos concluir que $A+q|[(A^2+1)-(A^2-q^2)]=q^2+1$. Pela propriedade da **limitação**, $A+q \leq q^2+1$. Nessa desigualdade, não podemos ter $q=1$ pois $A>1$. Usando então que $q>1$, temos $A \leq q^2-q+1 < q^2$, ou seja, $\sqrt{A}<q$. ■

Exemplo 4.6 — ARML, 2003. Encontre o maior divisor de 1001001001 que não exceda 10000.
Solução: Tem-se que

$$1001001001 = 1001 \cdot 10^6 + 1001 = 1001 \cdot (10^6 + 1) = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot (10^6 + 1).$$

Observe que $x^6 + 1 = (x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)$. Donde $10^6 + 1 = 101 \cdot 9901$ e assim $1001001001 = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 101 \cdot 9901$. Não é difícil verificar que nenhuma combinação dos fatores 7, 11, 13 e 101 pode gerar um produto maior que 9901 e menor que 10000. ■

Exemplo 4.7 Seja n um número inteiro positivo. Prove que $3^{2^n} + 1$ é divisível por 2, mas não por 4.
Solução: Claramente, 3^{2^n} é ímpar e $3^{2^n} + 1$ é par. Observe também que

$$3^{2^n} = (3^2)^{2^{n-1}} = 9^{2^{n-1}} = (8+1)^{2^{n-1}}.$$

Lembremos o **Binômio de Newton**,

$$(x+y)^m = x^m + \binom{m}{1}x^{m-1}y + \binom{m}{2}x^{m-2}y^2 + \ldots + \binom{m}{m-1}xy^{m-1} + y^m.$$

Tomando $x = 8$, $y = 1$ e $m = 2^{n-1}$ na equação acima, vemos que cada parcela, com exceção da última (ou seja, $y^m = 1$), é um múltiplo de 8 (que é um múltiplo de 4).

Portanto, o resto de 3^{2^n} ao dividir por 4 é igual a 1 e o resto de $3^{2^n} + 1$ ao dividir por 4 é igual a 2. ■

Exemplo 4.8 Encontre o maior n tal que $2^n | 3^{1024} - 1$.
Solução: Observe que $2^{10} = 1024$ e $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$. Assim,

$$\begin{aligned} 3^{2^{10}} - 1 &= (3^{2^9}+1)(3^{2^9}-1) \\ &= (3^{2^9}+1)(3^{2^8}+1)(3^{2^8}-1) \\ &= \ldots \\ &= (3^{2^9}+1)(3^{2^8}+1)(3^{2^7}+1)\ldots(3^{2^1}+1)(3^{2^0}+1)(3-1). \end{aligned}$$

Pelo exemplo anterior, $2 | (3^{2^k} + 1)$ para todo inteiro positivo k.

Portanto, a resposta é $9 + 2 + 1 = 12$. ■

Exemplo 4.9 Para quais valores de $a \in \mathbb{N}$ a expressão $a^4 + 4$ é um número primo?
Solução: Note que

$$a^4 + 4 = (a^2+2)^2 - 4a^2 = (a^2+2)^2 - (2a)^2 = (a^2+2+2a)(a^2+2-2a).$$

Desse modo, $a^4 + 4$ é sempre composto para $a \neq 1$. ■

Exemplo 4.10 Prove que se $a \in \mathbb{N}$, então $6 | (2a^3 + 3a^2 + a)$.
Solução: Observe, de início, que

$$\begin{aligned} 2a^3 + 3a^2 + a &= a(2a^2 + 3a + 1) \\ &= a[2a^2 + 2a + a + 1] \\ &= a[2a(a+1) + (a+1)] \\ &= a(a+1)(2a+1). \end{aligned}$$

Assim,

$$6|(2a^3+3a^2+a) \Leftrightarrow 6|a(a+1)(2a+1) \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 2|a(a+1)(2a+1) \\ 3|a(a+1)(2a+1) \end{array} \right.$$

Isto de fato ocorre, uma vez que:
(i) Entre dois números consecutivos (a e $a+1$) algum deles é par. Deste modo,

$$2|a(a+1) \therefore 2|a(a+1)(2a+1)$$

(ii) Há 3 possibilidades para a ($a = 3k$ ou $a = 3k+1$ ou $a = 3k+2$). De tal modo que,

$$\left| \begin{array}{l} a = 3k \Rightarrow 3|a \therefore 3|a(a+1)(2a+1) \\ a = 3k+1 \Rightarrow 2a+1 = 3(2k+1) \Rightarrow 3|(2a+1) \therefore 3|a(a+1)(2a+1) \\ a = 3k+2 \Rightarrow a+1 = 3(k+1) \Rightarrow 3|(a+1) \therefore 3|a(a+1)(2a+1) \end{array} \right.$$

De **(i)** e **(ii)** tem-se que $6|(2a^3+3a^2+a)$. ■

Problema 4.13 Prove que se a é um número mutuamente primo com 6, então $24|(a^3-1)$.
Problema 4.14 Prove que se $a \in \mathbb{N}$, então $120|(a^5-5a^3+4a)$.
Problema 4.15 Prove que se a é um número par, $\frac{a}{12}+\frac{a^2}{8}+\frac{a^3}{24}$ é um número inteiro.
Problema 4.16 Prove que se $a \in \mathbb{N}$, então $\frac{a^5}{120}+\frac{a^4}{12}+\frac{7a^3}{24}+\frac{5a^2}{12}+\frac{a}{5}$ é um número inteiro.

4.2 Algoritmo da Divisão

Teorema 4.2.1 — Algoritmo da Divisão. Dados dois inteiros a e b, $b > 0$, existe um único par de inteiros q e r tais que

$$a = qb + r, \text{ com } 0 \leq r < b, \quad (r = 0 \Leftrightarrow b|a)$$

onde q é chamado de quociente e r de resto da divisão de a por b.
Prova: Como $b > 0$, existe q satisfazendo:

$$qb \leq a < (q+1)b$$

o que implica $0 \leq a - qb$ e $a - qb < b$. Desta forma, se definirmos $r = a - qb$, teremos, garantida, a existência de q e r. A fim de mostrarmos a unicidade, vamos supor a existência de outro par q_1 e r_1 verificando:

$$a = q_1 b + r_1, \text{ com } 0 \leq r_1 < b.$$

Disto temos $(qb+r)-(q_1b+r_1) = 0 \Rightarrow b(q-q_1) = r_1 - r$, o que implica $b|(r_1-r)$. Mas, como $r_1 < b$ e $r < b$, temos $|r_1 - r| < b$ e, portanto, como $b|(r_1-r)$ devemos ter $r_1 - r = 0$ o que implica $r = r_1$. Logo $q_1 b = qb \Rightarrow q_1 = q$, uma vez que $b \neq 0$.

4.3 Máximo Divisor Comum

Proposição 4.3.1 — Máximo Divisor Comum. Dados a, $b \in \mathbb{Z}$ existe um único $d \in \mathbb{N}$ tal que $d|a$, $d|b$ e, para todo $c \in \mathbb{N}$, se $c|a$ e $c|b$ então $c|d$. Além disso existem x, $y \in \mathbb{Z}$ com $d = ax + by$.
Esse natural d é chamado o *máximo divisor comum*, ou *mdc*, entre a e b. Escrevemos $d = mdc(a,b)$ ou se não houver possibilidade de confusão, $d = (a,b)$.
Prova: O caso $a = b = 0$ é trivial (temos $d = 0$). Nos outros casos, seja $I(a,b) = \{ax+by; x,y \in \mathbb{Z}\}$ e seja $d = ax_0 + by_0$ o menor elemento positivo de $I(a,b)$. Como $d \in \mathbb{N}^*$, existem $q, r \in \mathbb{Z}$ com $a = dq + r$ e $0 \leq r < d$. Temos $r = a - dq = a(1-qx_0) + b(-qy_0) \in I(a,b)$; como $r < d$ e d é o menor elemento

positivo de $I(a,b)$, $r=0$ e $d|a$. Analogamente, $d|b$. Suponha agora que $c|a$ e $c|b$; temos $c|ax+by$ para quaisquer valores de x e y donde, em particular, $c|d$.

Definição 4.3.1 Os inteiros a e b são relativamente primos quando $(a,b)=1$.

Teorema 4.3.2 Se a e b são inteiros e $a=qb+r$ onde q e r são inteiros, então $(a,b)=(b,r)$.
Prova: Da relação $a=qb+r$ podemos concluir que todo divisor de b e r é um divisor de a. Esta mesma relação, escrita na forma $r=a-qb$, nos diz que todo divisor de a e b é um divisor de r. Logo o conjunto dos divisores comuns de a e b é igual ao conjunto dos divisores comuns de b e r, o que nos garante o resultado $(a,b)=(b,r)$.

4.4 Problemas Relacionados

Exemplo 4.11 — Maio, N2. Quantos são os números de sete algarismos que são múltiplos de 388 e terminam em 388?
Solução: O número se expressa como

$$n\cdot 10^3+388,$$

em que n é um número de quatro algarismos. Ora,

$$n\cdot 10^3+388=k\cdot 388 \Rightarrow n\cdot 10^3=(k-1)\cdot 388.$$

Mas $388=2^2\cdot 97$, então n deve ser múltiplo de 97. Assim $n=t\cdot 97$, com $11\le t\le 103$. São 93 números. ■

Problema 4.17 Encontre os inteiros que, na divisão por 7, deixam um quociente igual ao resto.
Problema 4.18 Determinar os números que divididos por 17 dão um resto igual ao quadrado do quociente correspondente.
Problema 4.19 — OCM, 1994. Seja $A=777\ldots77$ um número onde o dígito 7 aparece 1001 vezes. Determinar o quociente e o resto da divisão de A por 1001.
Problema 4.20 Encontre um inteiro que deixa resto 4 na divisão por 5 e resto 7 na divisão por 13.
Problema 4.21 Encontre o menor inteiro que, dividido por 29 deixa resto 5, e dividido por 31 dá resto 28.

Teorema 4.4.1 — Teorema dos Restos. Se b_1 e b_2 deixam restos r_1 e r_2 na divisão por a, respectivamente, então:

$$b_1+b_2 \text{ deixa o mesmo resto que } r_1+r_2 \text{ na divisão por } a;$$
$$b_1\cdot b_2 \text{ deixa o mesmo resto que } r_1\cdot r_2 \text{ na divisão por } a.$$

Problema 4.22 Qual o resto que o número $1002\cdot 1003\cdot 1004$ deixa quando dividido por 7?
Problema 4.23 Qual o resto que o número 4^{5000} deixa quando dividido por 3?
Problema 4.24 — OBM. Mostre que se n é ímpar, então n^2-1 é divisível por 8.
Problema 4.25 Qual o resto que o número 2^{2k+1} deixa quando dividido por 3?
Problema 4.26 Qual o resto de n^3+2n na divisão por 3?
Problema 4.27 Prove que:
a) $5\mid(n^5+4n), \forall n\in\mathbb{Z}$;
b) $3\nmid(n^2+1), \forall n\in\mathbb{Z}$;
c) $9\nmid(n^3+2), \forall n\in\mathbb{Z}$;
d) $24\mid(n^3-n), \forall n(\text{ímpar})\in\mathbb{Z}$.
Problema 4.28 Prove que, para todo inteiro positivo n o número n^5-5n^3+4n é divisível por 120.
Problema 4.29 Qual é o último algarismo do número 777^{777}?
Problema 4.30 Prove que existe um número natural n tal que os números $n+1$, $n+2, \ldots,$ $n+2016$ são todos compostos.

Problema 4.31 Se $p > 3$ é primo, prove que o resto da divisão de p^2 por 12 é igual a 1.

Problema 4.32 — OBMEP, N2, 2017. Um número inteiro n é chamado de *bilegal* se n é maior do que 1 e n^2 é igual à soma de n inteiros positivos consecutivos. Por exemplo, 3 é bilegal, pois $3^2 = 9 = 2+3+4$ (3 inteiros consecutivos).
a) Verifique que 5 é bilegal.
b) Verifique que 4 não é bilegal.
c) Explique por que nenhum número par é bilegal e todo número ímpar maior do que 1 é bilegal.

Problema 4.33 Sejam m e n naturais tais que $mn+1$ é múltiplo de 24, mostre que $m+n$ também é múltiplo de 24.

Problema 4.34 Seja n um inteiro positivo tal que $3n+7$ é um quadrado perfeito. Prove que $n+3$ é a soma de três quadrados perfeitos, com possível repetição.

Problema 4.35 Prove que o produto de qualquer sequência de k inteiros consecutivos é divisível por $k!$.

Problema 4.36 Um número da forma $F_n = 2^{2^n}+1$ é chamado número de Fermat. Prove que quaisquer dois números de Fermat, diferentes entre si, são relativamente primos.

Problema 4.37 Prove que existem infinitos primos da forma $6k+5$.

Problema 4.38 Para $n \geq 2$ e k um inteiro positivo qualquer temos $(n-1)|(n^k-1)$.

Problema 4.39 Se a e b são ímpares, então a^2+b^2 não pode ser um quadrado perfeito.

Problema 4.40 Mostre que se m e n são inteiros positivos com $m > 1$, então $n < m^n$.

4.5 Congruência

Definição 4.5.1 Sejam a, b e $m > 0$ números inteiros. Dizemos que a é côngruo a b, módulo m, se $m|(a-b)$. Escreve-se:

$$a \equiv b\ (mod\, m) \tag{4.1}$$

Dito de outro modo: a e b são côngruos, módulo m, se ambos deixam o mesmo resto quando divididos por m.

Proposição 4.5.1 Se a e b são inteiros, temos que $a \equiv b\ (mod\, m)$ se, e somente se, existir um inteiro c tal que $a = b + cm$.

Prova: Se $a \equiv b\ (mod\, m)$, então $m|(a-b)$, o que implica na existência de um inteiro c tal que $a-b = cm$, isto é, $a = b+cm$. A reciproca é trivial, pois da existência de um c satisfazendo $a = b+cm$, temos $cm = a-b$, ou seja, que $m|(a-b)$, isto é, $a \equiv b\ (mod\, m)$.

Teorema 4.5.2 Se a, b, m e d são inteiros, $m > 0$, as seguintes sentenças são verdadeiras:
- **C1:** Para todo $m > 0$, a relação $\equiv$ é reflexiva, simétrica e transitiva, ou seja, é uma relação de equivalência;
- **C2:** Para quaisquer $a, b \in \mathbb{Z}$: $a \equiv b\ (mod\, m)$ se, e somente se, a e b fornecem o mesmo resto na divisão euclidiana por m;
- **C3:** Se $a \equiv b\ (mod\, m)$, então $a \pm c \equiv b \pm c (mod\, m)$ e $ac \equiv bc (mod\, m)$, para todo $c \in \mathbb{Z}$;
- **C4:** Se $a \equiv b\ (mod\, m)$ e $c \equiv d\ (mod\, m)$, então $a \pm c \equiv b \pm c\ (mod\, m)$ e $ac \equiv bd\ (mod\, m)$;
- **C5:** Se $a \equiv b\ (mod\, m)$, então $ra \equiv rb\ (mod\, m)$ e $a^r \equiv b^r\ (mod\, m)$, para todo inteiro $r \geq 1$;
- **C6:** Se $ca \equiv cb\ (mod\, m)$ e $mdc(m,c) = d > 0$, então $a \equiv b \left(mod\, \dfrac{m}{d}\right)$.

Corolário 4.5.3 Se $ca \equiv cb (mod\, m)$ e $mdc(m,c) = 1$, então $a \equiv b\ (mod\, m)$.

Corolário 4.5.4 Se $ca \equiv cb (mod\, p)$, onde p é primo e $p \nmid c$, então $a \equiv b (mod\, p)$.

Definição 4.5.2 — Sistema Completo de Restos módulo m. Um conjunto de $m > 0$ inteiros forma um *Sistema Completo de Restos módulo m* se dois quaisquer desses números, diferentes entre si, são **incôngruos** módulo m.

Proposição 4.5.5 Se $\{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$ é um sistema completo de restos módulo m, então todo inteiro a é côngruo a um e somente um dos r_i.

4.5.1 Problemas

Problema 4.41 Ache os restos nas seguintes divisões:
a) 2^{45} por 7;
b) 11^{10} por 100;
c) $(3^{10} \cdot 42^5 + 6^8)$ por 5;
d) $(5^2 \cdot 4841 + 28^5)$ por 3;
e) 11^{69} por 3.

Problema 4.42 Encontre o resto de $2222^{5555} + 5555^{2222}$ na divisão por 7.

Problema 4.43 Prove que o número $M = 111 + 222^2 + 333^3 + 444^4 + 555^5 - 12345$ não é um quadrado perfeito.

Problema 4.44 Quantos calendários anuais diferentes existem? Quantos anos consecutivos são necessários para que todos estes calendários sejam usados?

Problema 4.45 Enuncie e demonstre *Critérios de Divisibilidade* por 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10 e 11.

Problema 4.46 a) Seja n um inteiro positivo, mostre que o número

$$\frac{(5n+1)(5n+2)(5n+3)(5n+4)}{2}$$

é inteiro e que o dígito das unidades é 2.
b) Se é verdade que

$$51 \cdot 52 \cdot 53 \cdot \ldots \cdot 200 = (10m + n) \cdot 10^p,$$

onde m, n, p são números inteiros positivos e $0 < n < 10$. Encontre o valor de $n + p$.

Exemplo 4.12 Mostrar que $47 | (2^{23} - 1)$.
Solução: Devemos mostrar que $2^{23} - 1 \equiv 0 \ (mod\, 47)$, ou seja, $2^{23} \equiv 1 \ (mod\, 47)$.
Note que $2^{10} = 1024 = 37 + 47 \cdot 21$, o que significa que $2^{10} \equiv 37 \ (mod\, 47)$.
Assim,

$$2^{10} \equiv -10 \ (mod\, 47) \Rightarrow (2^{10})^2 \equiv (-10)^2 \ (mod\, 47) \Rightarrow 2^{20} \equiv 6 \ (mod\, 47).$$

Desse modo,

$$2^{20} \cdot 2^3 \equiv 6 \cdot 2^3 \ (mod\, 47) \therefore 2^{23} \equiv 1 \ (mod\, 47).$$

■

Problema 4.47 Encontrar o resto da divisão de 7^{34} por 51 e o resto da divisão de 5^{63} por 29.

Problema 4.48 Qual o resto da divisão euclidiana de

$$s = 1^5 + 2^5 + 3^5 + \ldots + 99^5 + 100^5$$

por 4? Justifique.

Problema 4.49 Mostre que o resto da divisão euclidiana de

$$s(n) = 1! + 2! + 3! + \ldots + n!$$

por 12 é 9, para todo $n \geq 4$.

Problema 4.50 Se n é múltiplo de 4, qual o resto da divisão de

$$1^n + 2^n + 3^n + \ldots + 9^n$$

por 10?

Problema 4.51 Sabendo que $7^4 = 2401$, ache os algarismos da dezena e da unidade do número 7^{99999}.

Problema 4.52 Encontre o resto da divisão de $9 \cdot 99 \cdot 999 \cdot \ldots \cdot \underbrace{99\ldots9}_{999\ 9's}$ quando dividido por 1000.

Problema 4.53 — EUA. Determine a soma dos dígitos na base 10 de $(10^{4n^2+8}+1)^2$, sendo n um inteiro positivo.

Exemplo 4.13 Mostrar que para a e b inteiros temos que $3|(a^2+b^2) \Rightarrow 3|a$ e $3|b$.
Solução: Suponha por absurdo, e sem perda de generalidade, que $3 \nmid a$.
Analisemos pela tabela abaixo as possíveis congruências de a^2+b^2, módulo 3.

a\b	0	1	2	$(mod\, 3)$
1	1	2	2	$\equiv a^2+b^2$
2	1	2	2	

De todo modo, $a^2+b^2 \not\equiv 0\ (mod\, 3)$. ∎

Exemplo 4.14 Mostrar que $5n^3+7n^5 \equiv 0\ (mod\, 12)$ para todo inteiro n.
Solução: Ora,

$$5n^3+7n^5 \equiv -7n^3+7n^5 \equiv 7n^3(n^2-1)\ (mod\, 12).$$

Analisemos pela tabela abaixo as possíveis congruências de $7n^3(n^2-1)$, módulo 12.

$n \equiv$	0	±1	±2	±3	±4	±5	6	$(mod\, 12)$
$n^3 \equiv$	0	±1	±8	±3	±4	±5	0	$(mod\, 12)$
$n^2-1 \equiv$	-1	0	3	8	3	0	-1	$(mod\, 12)$
$7n^3(n^2-1) \equiv$	0	0	0	0	0	0	0	$(mod\, 12)$

De todo modo, $5n^3+7n^5 \equiv 0\ (mod\, 12)$. ∎

Exemplo 4.15 — OBM. Sejam x, y, z inteiros tais que $x^3+y^3-z^3$ é múltiplo de 7. Mostre que um desses números é múltiplo de 7.
Solução: Suponha por absurdo que nenhum dos números é múltiplo de 7. Ademais, por hipótese,

$$x^3+y^3-z^3 \equiv 0\ (mod\, 7) \Leftrightarrow z^3 \equiv x^3+y^3\ (mod\, 7).$$

Além disso, para todo n inteiro,

$n \equiv$	±1	±2	±3	$(mod\, 7)$
$n^3 \equiv$	±1	±1	∓1	$(mod\, 7)$

Usando a tabela acima, analisemos as possíveis congruências de x^3+y^3, módulo 7.

$x^3\backslash y^3$	-1	1	$(mod\, 7)$
-1	-2	0	$z^3 \equiv x^3+y^3$
1	0	2	

Note que $z^3 \not\equiv -2,\ 2\ (mod\, 7)$ (pois $n^3 \equiv \pm1\ (mod\, 7)$) e $z^3 \not\equiv 0\ (mod\, 7)$ (suposição por absurdo). Deste modo, x ou y ou z é múltiplo de 7. ∎

Problema 4.54 — OBM. Dados 3 inteiros tais que $x^2+y^2=z^2$, mostre que x e y não são ambos ímpares e que xy é múltiplo de 6.

Problema 4.55 — OBM. Demonstre que:
a) O quadrado de um inteiro é da forma $8n$ ou $8n+1$ ou $8n+4$.
b) Um inteiro da forma $4^a(8b+7)$, com a e b inteiros não negativos, não pode ser uma soma de três quadrados de inteiros.

Exemplo 4.16 — OBM. Prove que não existem números inteiros x, y satisfazendo a equação

$$15x^2 - 7y^2 = 9.$$

Solução: Apliquemos congruência módulo 5 na equação acima:

$$15x^2 - 7y^2 \equiv 9\ (mod\ 5) \Rightarrow 3y^2 \equiv 4\ (mod\ 5).$$

Analisemos pela tabela abaixo as possíveis soluções de $3y^2 \equiv 4\ (mod\ 5)$.

$y \equiv$	0	± 1	± 2	$(mod\ 5)$
$y^2 \equiv$	0	1	4	$(mod\ 5)$
$3y^2 \equiv$	0	3	2	$(mod\ 5)$

Em quaisquer dos casos, não há soluções para $3y^2 \equiv 4\ (mod\ 5)$. ■

Exemplo 4.17 — OBM. Mostre que nenhum número inteiro da forma $1+4^n$ é divisível por 3.
Solução: Veja que,

$$4 \equiv 1\ (mod\ 3) \Rightarrow 4^n \equiv 1^n\ (mod\ 3) \therefore 1+4^n \equiv 2\ (mod\ 3).$$

■

Exemplo 4.18 Seja n um inteiro maior que três. Prove que

$$1!+2!+\ldots+n!$$

não pode ser uma potência perfeita.
Solução: Para $n=4$, temos $1!+2!+3!+4! = 33$, que não é uma potência perfeita. Para $k \geq 5$, $k! \equiv 0(mod 10)$. Segue-se que para $n \geq 5$, $1!+2!+3!+4!+\ldots+n! \equiv 3(mod 10)$, por isso, não pode ser um quadrado perfeito, ou outra potência par.
Para potências ímpares, o argumento a seguir estabelece todos os casos:
- por verificação direta para todo $n < 9$;
- para $k \geq 9$, $k!$ é um múltiplo de 27, enquanto $1!+2!+\ldots+8!$ é um múltiplo de 9, mas não de 27. Daí $1!+2!+\ldots+n!$ não pode ser um cubo ou potência superior.

■

Problema 4.56 — AIME, 1996. Um aluno entediado caminha por um corredor que contém uma fileira de armários fechados, numerados de 1 a 1024. Ele abre o armário com o número 1 e depois alterna entre pular e abrir cada armário a partir de então. Quando ele chega ao final do corredor, o aluno se vira e começa a voltar. Ele abre o primeiro armário fechado que encontra e depois alterna entre pular e abrir cada armário fechado a partir de então. O aluno continua vagando dessa maneira até que todos os armários estejam abertos. Qual é o número do último armário que ele abre?

Exemplo 4.19 Seja $n > 1$ um número inteiro. Prove que o número $\sqrt{\underbrace{11\ldots1}_{n}\underbrace{44\ldots4}_{2n}}$ não é racional.

Solução: Veja que

$$\begin{aligned}
\underbrace{11\ldots1}_{n}\underbrace{44\ldots4}_{2n} &= (10^{3n-1}+10^{3n-2}+\ldots+10^{2n})+4\cdot(10^{2n-1}+10^{2n-2}+\ldots+10+1)\\
&= \frac{10^{2n}(10^n-1)}{9}+4\cdot\frac{(10^{2n}-1)}{9}\\
&= \frac{10^{2n}(10^n-1)}{9}+4\cdot\frac{(10^n-1)\cdot(10^n+1)}{9}\\
&= \frac{(10^n-1)}{9}\cdot(10^{2n}+4\cdot10^n+4)\\
&= \frac{(10^{2n}+2)^2}{9}\cdot(10^n-1).
\end{aligned}$$

Então, para que $\underbrace{11\ldots1}_{n}\underbrace{44\ldots4}_{2n}$ seja um quadrado perfeito, (10^n-1) deve ser quadrado perfeito.
Ou seja, $(10^n-1)=k^2$. Isto significa que k deve ser ímpar.
Note,

$k\equiv$	1	3	$(mod\,4)$
$k^2\equiv$	1	1	$\equiv 10^n-1$

Mas veja que para $n>1$, tem-se sempre $10^n-1\equiv 3$.
Logo, para $n>1$, $\underbrace{11\ldots1}_{n}\underbrace{44\ldots4}_{2n}$ não pode ser quadrado perfeito. ■

4.5.2 Congruência Linear

Definição 4.5.3 Uma congruência algébrica do tipo

$$ax\equiv b\,(mod\,m) \tag{4.2}$$

onde $a,b,m\in\mathbb{Z}$, $a\neq 0$ e $m>0$, e x é uma variável em $\mathbb{Z}$, recebe o nome de *congruência linear* ou *congruência de primeiro grau.*

Proposição 4.5.6 Uma congruência linear $ax\equiv b\,(mod\,m)$ admite soluções em $\mathbb{Z}$ se, e somente se, b é divisível por $d=mdc\{a,m\}$. E, neste caso, se x_0 é uma solução particular, então o conjunto de todas as soluções tem d elementos, a saber:

$$x_0,\ x_0+\frac{m}{d},\ x_0+2\cdot\frac{m}{d},\ x_0+3\cdot\frac{m}{d},\ldots,\ x_0+(d-1)\cdot\frac{m}{d}. \tag{4.3}$$

Problema 4.57 Resolva as seguintes congruências lineares:
a) $5x\equiv 2\,(mod\,26)$;
b) $3x\equiv 17\,(mod\,5)$;
c) $34x\equiv 60\,(mod\,98)$;
d) $6x\equiv 15\,(mod\,21)$;
e) $20x\equiv 7\,(mod\,15)$;
f) $14x\equiv 36\,(mod\,48)$;
g) $5x\equiv -38\,(mod\,7)$;
h) $20x\equiv 30\,(mod\,31)$.

4.5.3 Equações Diofantinas

Teorema 4.5.7 — Euclides. Sejam a, b e c números inteiros e defina $d=mdc(b,c)$. Considere a equação diofantina linear:

$$bx+cy=a$$

Então temos:

1. Se $d \nmid a$, então a equação dada não tem solução inteira;
2. Se $d \mid a$, então a equação dada tem infinitas soluções inteiras e, além disso, o conjunto de pontos inteiros pode ser parametrizado a partir de um ponto particular. Precisamente, fazendo $a = d\alpha$, $b = d\beta$ e $c = d\gamma$ a equação fica da forma:

$$\beta x + \gamma y = \alpha$$

e dada uma solução particular (x_0, y_0) nos inteiros, então todas as outras soluções inteiras da equação são da forma:

$$\begin{cases} x &= x_0 + \gamma k \\ y &= y_0 - \beta k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Problema 4.58 Resolva cada uma das seguintes equações diofantinas:
a) $3x + 4y = 20$;
b) $5x - 2y = 2$;
c) $24x + 138y = 18$;
d) $18x - 20y = -8$;
e) $-26x + 39y = 65$;
f) $12x - 27y = 33$.

Problema 4.59 Dividir 100 em duas parcelas positivas tais que uma é múltipla de 7 e a outra de 11.

Problema 4.60 Ache todos os inteiros estritamente positivos com a seguinte propriedade: fornecem resto 6 quando divididos por 11 e resto 3 quando divididos por 7.

Problema 4.61 Se um macaco sobe uma escada de dois em dois degraus, sobra um degrau; se ele sobe de três em três degraus, sobram dois degraus. Quantos degraus a escada possui, sabendo que o número de degraus é múltiplo de sete e está compreendido entre 40 e 100.

Problema 4.62 Um grupo de homens, alguns dos quais acompanhados pelas esposas, gastaram 1000 dólares num hotel. Cada homem gastou 19 dólares e cada mulher, 13 dólares. Determine quantas mulheres e quantos homens estavam no hotel.

Problema 4.63 Dê uma interpretação geométrica, em termos de coordenadas cartesianas, para o fato de que uma equação diofantina linear em duas incógnitas quando admite uma solução, admite infinitas.

Proposição 4.5.8 Um sistema de congruências lineares

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \ (mod\, m_1) \\ x \equiv a_2 \ (mod\, m_2) \\ \vdots \\ x \equiv a_r \ (mod\, m_r) \end{cases} \tag{4.4}$$

admite soluções se, e somente se, $a_i - a_j$ é divisível por $d_{ij} = mdc(m_i, m_j)$, para qualquer par de índices $i, j (i \neq j)$. Neste caso, se x_0, é uma solução particular, então a solução geral do sistema é dada por:

$$x \equiv x_0 \ (mod\, m) \tag{4.5}$$

onde $m = mmc\{m_1, m_2, \ldots, m_r\}$.

Proposição 4.5.9 — Teorema Chinês do Resto. Sejam $m_1, m_2, \ldots, m_r$ números inteiros maiores que zero e tais que $mdc\{m_i, m_j\} = 1$, sempre que $i \neq j$. Façamos $m = m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_r$ e sejam $b_1, b_2, \ldots, b_r$, respectivamente, soluções das congruências lineares

$$\frac{m}{m_j} y \equiv 1 \ (mod\, m_j)(j = 1, 2, \ldots, r). \tag{4.6}$$

Então o sistema

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \ (mod\, m_1) \\ x \equiv a_2 \ (mod\, m_2) \\ \vdots \\ x \equiv a_r \ (mod\, m_r) \end{cases} \tag{4.7}$$

é **solúvel** para quaisquer $a_1, a_2, \ldots, a_r \in \mathbb{Z}$ e sua solução geral é dada por:

$$x \equiv a_1 b_1 \frac{m}{m_1} + a_2 b_2 \frac{m}{m_2} + \ldots + a_r b_r \frac{m}{m_r} \ (mod\, m). \tag{4.8}$$

4.5.4 Problemas

Problema 4.64 Determine todos os números naturais que, quando divididos por 18, deixam resto 6 e, quando divididos por 14, deixam resto 4.

Problema 4.65 Ache o menor inteiro que fornece restos 1, 2, 5 e 5 quando dividido, respectivamente, por 2, 3, 6 e 12 (Yin-Hing - séc. VII).

Problema 4.66 Retirando-se os ovos contidos num cesto 2, 3, 4, 5 e 6 de cada vez restarão, respectivamente, 1, 2, 3, 4 e 5 ovos. Quando eles são retirados de 7 em 7, não sobra nenhum no cesto. Qual o menor número de ovos que um cesto nessas condições pode conter? (Brahmagupta - séc. VII).

Problema 4.67 Dispomos de uma quantia de x reais menor do que 3000. Se distribuirmos essa quantia entre 11 pessoas, sobra um real; se a distribuirmos entre 12 pessoas, sobram dois reais, e se a distribuirmos entre 13 pessoas, sobram 3 reais. De quantos reais dispomos?

Problema 4.68 Ache todos os números que deixam resto 2, quando divididos por 7, deixam resto 3, quando divididos por 11 e deixam resto 5, quando divididos por 13. Aponte a menor solução positiva.

Problema 4.69 Encontre três números inteiros consecutivos tais que o primeiro é divisível pelo quadrado de um número primo, o segundo é divisível pelo cubo de um número primo e o terceiro é divisível pela quarta potência de um número primo.

Problema 4.70 **Descanse**.

4.6 Problemas do Banco OBM

Problema 4.71 Quantos quadrados perfeitos existem entre 40.000 e 640.000 que são múltiplos simultaneamente de 3, 4 e 5?

Problema 4.72 Se subtrairmos de um número positivo x, de 2 algarismos, o número obtido de x por troca de seus dígitos, obteremos um cubo perfeito. Ache os possíveis valores de x.

Problema 4.73 Sejam p, q inteiros positivos. Mostre que $2^p + 1 = q^2$ implica $p = q = 3$.

Problema 4.74 Dado um inteiro n, mostre que existem inteiros x e y tais que $x^2 - y^2 = n$, se, e somente se, $n = ab$, com a e b inteiros de mesma paridade.

Problema 4.75 Seja n um inteiro maior que 1. Mostre que $4^n + n^4$ não é primo.

Problema 4.76 Se $n > 4$ é um número não primo, prove que $(n-1)!$ é múltiplo de n.

Problema 4.77 Ache todas as soluções, no conjunto dos números naturais, para a equação $(n+1)^k - 1 = n!$.

Problema 4.78 Sejam a, b, c, d inteiros. Demonstre que

$$x^2 + ax + b = y^2 + cy + d$$

tem uma infinidade de soluções (x, y), com x e y inteiros, se, e somente se $a^2 - 4b = c^2 - 4d$.

Problema 4.79 Mostre que o número de soluções de $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{1983}$, com x, y e z naturais, é finito.

Problema 4.80 Prove que, para cada número natural p, com $p \geq 3$, existem p números naturais distintos dois a dois: n_1, n_2, ..., n_p, tais que $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \ldots + \frac{1}{n_p} = 1$.

Problema 4.81 Mostre que, para todo natural n, $n \geq 2$, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ não é inteiro.

Problema 4.82 Seja $n > 0$ um número natural e $a_n = n^2 + n + 1$. Demonstre que na sequência (a_n) existem infinitos termos a_k iguais ao produto de dois termos da sequência.

Problema 4.83 Todo número inteiro positivo a pode ser fatorado na forma $a = 2^b(2c+1)$ onde b e c são inteiros não negativos. O número $2c+1$ é chamado fator ímpar de a. Por exemplo, o fator ímpar de 60 é 15. Seja n um número ímpar e positivo, $a_0 = 2^n - 1$ e a_{k+1} o fator ímpar de $3a_k + 1$ para $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Calcule a_n.

Problema 4.84 Sendo m inteiro positivo, mostre que existem sempre 3 ou 4 potências de 2 com m algarismos. Ache os m para os quais existem 4.

Problema 4.85 Seja $P(n)$ o número de fatores primos distintos de n. Prove que existe n_0 tal que, se $n > n_0$, então $\frac{P(n)}{n} < \frac{1}{10^{1983}}$.

Problema 4.86 Em quantos zeros termina $1000!$?

Problema 4.87 Seja p um número natural primo e k um número natural. Se p é divisor de $\binom{k}{i}$ para todo $1 \leq i \leq k-1$, então existe um natural m tal que $k = p^m$.

Problema 4.88 Calcule a somatória $\sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{k} 2^{-k}$ para qualquer inteiro positivo n.

Problema 4.89 Dado um número inteiro n, mostre que existe um múltiplo de n que se escreve com os algarismos 0 e 1 apenas. (Por exemplo, se $n = 3$, temos 111 ou 1011, etc...)

Problema 4.90 Obtenha todos os números de 10 dígitos, tais que o dígito que figura na posição k (para todo k, com $0 \leq k \leq 9$) seja igual ao número de vezes que o algarismo k figura no número.

Problema 4.91 **Descanse**.

4.7 Problemas Finais

Problema 4.92 Mostrar que se p é um ímpar e $a^2 + 2b^2 = 2p$, então a é par e b é ímpar.

Problema 4.93 Provar que para p primo $(p-1)! \equiv p - 1(mod\ 1 + 2 + 3 + \ldots + (p-1))$.

Problema 4.94 Encontrar o máximo divisor comum de $(p-1)! - 1$ e $p!$ (p primo).

Problema 4.95 Mostrar que para n inteiro $3n^2 - 1$ nunca é um quadrado.

Problema 4.96 Resolver as seguintes congruências.

a) $5x \equiv 3\,(mod\ 24)$.

b) $3x \equiv 1\,(mod\ 10)$.

c) $23x \equiv 7\,(mod\ 19)$.

d) $7x \equiv 5\,(mod\ 18)$.

e) $25x \equiv 15\,(mod\ 120)$.

Problema 4.97 Seja $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ um polinômio com coeficientes inteiros onde $a_n > 0$ e $n \geq 1$. Mostrar que $f(x)$ é composto para infinitos valores da variável x.

Problema 4.98 Mostrar que se p_1 e p_2 são primos tais que $p_2 = p_1 + 2$ e $p_1 > 3$, então $p_1 + p_2 \equiv 0\,(mod 12)$.

Problema 4.99 Sejam p_1, p_2 e p_3 primos tais que $p = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$ é primo. Mostrar que algum dos p_i's é igual a 3.

Problema 4.100 Mostrar que $3x^2 + 4x^2 \equiv 3\,(mod\ 5)$ é equivalente a $3x^2 - x^2 + 2 \equiv 0\,(mod\ 5)$.

Problema 4.101 Mostrar que $p | \binom{p^\alpha}{k}$ onde $0 < k < p^\alpha$.

Problema 4.102 Mostrar que $3^{10} \equiv 1\,(mod\ 11^2)$.

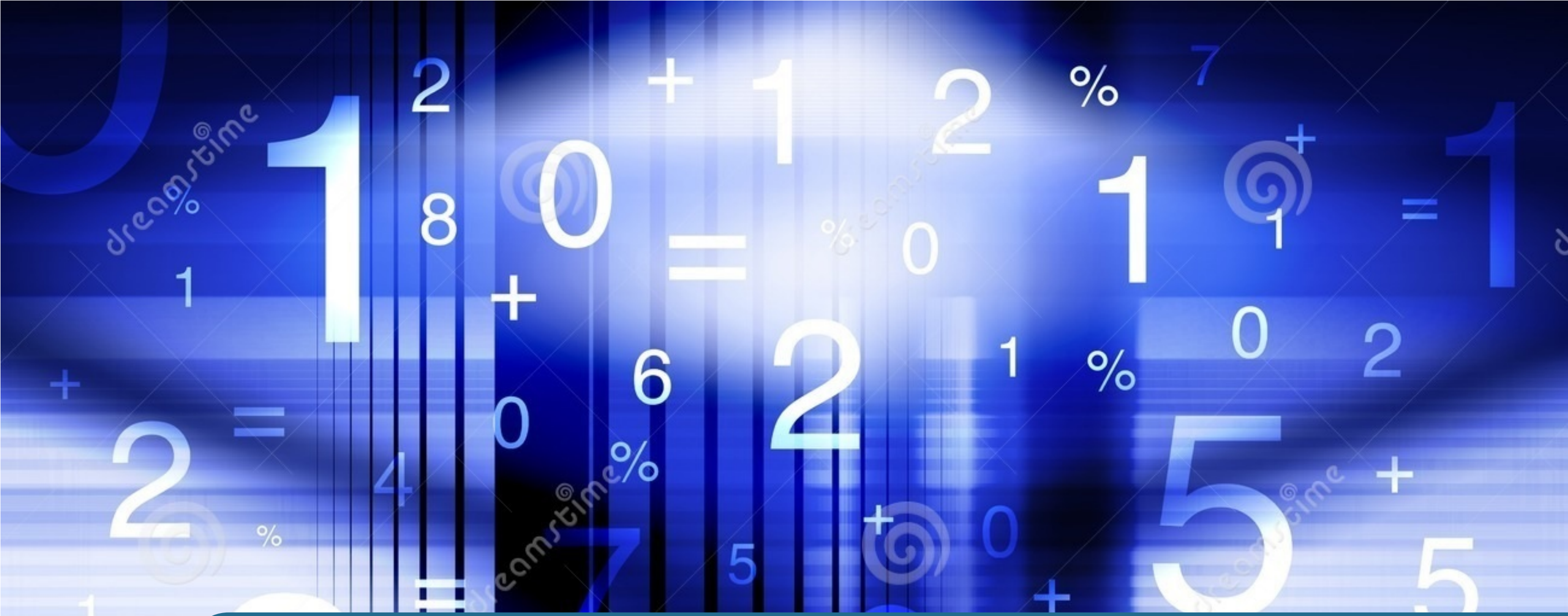
Problema 4.103 Resolver os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x \equiv 1 \,(mod\ 2) \\ x \equiv 2 \,(mod\ 3) \\ x \equiv 5 \,(mod\ 7) \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x \equiv 1 \,(mod\ 5) \\ 3x \equiv 2 \,(mod\ 7) \\ 5x \equiv 7 \,(mod\ 11) \end{cases}$ c) $\begin{cases} x \equiv 7 \,(mod\ 11) \\ 3x \equiv 5 \,(mod\ 13) \\ 7x \equiv 4 \,(mod\ 5) \end{cases}$

Problema 4.104 Encontrar todas as soluções de cada uma das seguintes congruências lineares.
a) $5x \equiv 3\,(mod\ 7)$.
b) $13x \equiv 14\,(mod\ 29)$.
c) $15x \equiv 9\,(mod\ 25)$.
d) $37x \equiv 16\,(mod\ 19)$.
e) $5x \equiv 20\,(mod\ 15)$.
Problema 4.105 Mostrar que $a^7 \equiv a\,(mod\ 21)$ para todo inteiro a.
Problema 4.106 Mostrar que para a e b inteiros, com $(a,b) = 1$ temos: $a^{\varphi(b)} + b^{\varphi(a)} \equiv 1\,(mod\ ab)$.
Problema 4.107 Provar ou dar contra-exemplo: "Se a e m são inteiros com $(a,m) = 1$, então $m|(1+a+a^2+\ldots+a^{\varphi(m)-1})$".
Problema 4.108 Mostrar que se p e q são primos, $p \geq q \geq 5$, então $p^2 - q^2 \equiv 0\,(mod\ 24)$.
Problema 4.109 Encontrar um sistema completo de resíduos módulo 11 formado somente por múltiplos de 6.
Problema 4.110 Encontrar um sistema completo de resíduos módulo 7 onde todos os elementos são números primos.
Problema 4.111 Dado um primo p é sempre possível encontrar um sistema completo de resíduos módulo p formado só por primos? Justificar.
Problema 4.112 Provar que, para todo número composto n, $n \neq 4$, a congruência $(n-1)! \equiv 0\ (mod\ n)$ é verdadeira.
Problema 4.113 **Descanse**.

IV

Conjuntos e Funções



6. Conjuntos

6.1 Conjuntos e Operações

A ideia de conjuntos pode ser considerada como um *conceito primito*; não necessitamos de uma definição. Podemos, assim, pensar em um conjunto como uma coleção de seus elementos. Disso decorre que dois conjuntos são iguais se, e somente se, possuem os mesmos elementos; não podendo haver dois conjuntos diferentes que tenham os mesmos elementos. Ademais, para um dado conjunto A e um objeto qualquer a; ou a pertence ao conjunto A ($a \in A$), ou não pertence ($a \notin A$).

Na Matemática, o julgamento sobre qualquer proposição só tem uma de duas respostas possíveis: verdadeiro ou falso; não sendo possível uma terceira opção e nem as duas ao mesmo tempo. Conhecemos isso como *Princípio do Terceiro Excluído* e *Princípio da Não Contradição*.

A linguagem dos conjuntos permite dar aos *conceitos* e às *proposições* precisão e generalidade; podendo substituir as propriedades e as condições.

Exemplo 6.1 Sejam P a propriedade de um número inteiro x ser par e Q a condição sobre o número real y expressa por $y^2 - 3y + 2 = 0$. Por outro lado, sejam $A = \{\ldots, 4, 2, 0, 2, 4, \ldots\}$ e $B = \{1, 2\}$. Então, dizer que x tem a propriedade P e y satisfaz a condição Q é o mesmo que afirmar que $x \in A$ e $y \in B$. ■

A vantagem da linguagem de conjuntos reside no fato da simplicidade da álgebra relacionada às operações de reunião ($A \cup B$) e interseção ($A \cap B$), além da relação de inclusão ($A \subset B$). Para mostrar, por exemplo, que um conjunto está contido em outro deve-se verificar que a propriedade que define o primeiro implica na propriedade que define o segundo ($P \Rightarrow Q$); para demonstrar a igualdade, deve-se aplicar a propriedade antissimétrica da inclusão (se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$), ou equivalentemente ($P \Leftrightarrow Q$).

Qualquer contradição representa o conjunto vazio ($\varnothing$), por exemplo, $\varnothing = \{x; x \neq x\}$. Para mostrar que X não é vazio, deve-se encontrar um objeto x tal que $x \in X$.

Definição 6.1.1 Se todo elemento de A for também elemento de B, diz-se que A é um subconjunto de B, que A está contido em B, ou que A é parte de B ($A \subset B$); no caso contrário ($A \not\subset B$), nem todo elemento de A pertence a B, ou seja, existe pelo menos um objeto a tal que $a \in A$ e $a \notin B$.

Exemplo 6.2 Em Geometria, uma reta, um plano e o espaço são conjuntos de pontos. Podemos assim dizer que a reta r está no plano Π, ou seja, r é um subconjunto de Π. Neste caso, deve-se escrever $r \subset \Pi$. Porém não é correto dizer que $r \in \Pi$, pois os elementos do conjunto Π são pontos e não retas. ■

6.2 Problemas

Problema 6.1 Seja $E = \{a, \{a\}\}$. Marque V para verdadeiro e F para falso.
( ) $a \in E$;
( ) $\{a\} \in E$;
( ) $a \subset E$;
( ) $\{a\} \subset E$;
( ) $\varnothing \in E$;
( ) $\varnothing \subset E$.

Problema 6.2 Marque V para verdadeiro e F para falso. Justifque suas respostas.
( ) $\varnothing \in \varnothing$;
( ) $\varnothing \subset \varnothing$;
( ) $\varnothing \in \{\varnothing\}$;
( ) $\varnothing \subset \{\varnothing\}$.

Problema 6.3 Prove que $\varnothing \in X$.

Problema 6.4 Uma população consome três marcas de sabão em pó: A, B e C. Feita uma pesquisa de mercado, colheram-se os resultados tabelados abaixo:

Marca	Número de Consumidores
A	109
B	203
C	162
A e B	25
B e C	41
C e A	28
A, B e C	5
Nenhuma das três	115

Forneça:
a. o número de pessoas consultadas;
b. o número de pessoas que só consomem a marca A;
c. o número de pessoas que não consomem as marcas A ou C;
d. o número de pessoas que consomem ao menos duas marcas.

Problema 6.5 Depois de n dias de férias, um estudante observa que:
I - Choveu 7 vezes, de manhã ou à tarde;
II - Quando chove de manhã, não chove à tarde;
III - Houve 5 tardes sem chuva;
IV - Houve 6 manhãs sem chuva.
Qual o valor de n?

Problema 6.6 Demonstre as propriedades de distributividade:
a. da operação de união em relação à interseção;
b. da interseção em relação à união.

Problema 6.7 Demonstre que $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$.

Problema 6.8 Dados $A, B \subset U$, demonstre as relações de De Morgan:
a. $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$;
b. $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.

Problema 6.9 Considere P, Q e R condições, aplicáveis aos elementos de um conjunto U; e A, B e C os subconjuntos de U dos elementos que satisfazem P, Q e R, respectivamente. Expresse, em termos de implicações entre P, Q e R, as seguintes relações entre os conjuntos A, B e C.
a. $A \cap B^C \subset C$;
b. $A^C \cup B^C \subset C$;
c. $A^C \cup B \subset C^C$;
d. $A^C \subset B^C \cup C$;
e. $A \subset B^C \cup C^C$.

Problema 6.10 Considere a definição da diferença entre conjuntos

$$B \backslash A = \{x; x \in B \wedge x \notin A\}.$$

Mostre que:
a. $B \backslash A = \varnothing$ se, e somente se, $B \subset A$;
b. $B \backslash A = B$ se, e somente se, $A \cap B = \varnothing$;
c. $B \backslash A = A \backslash B$ se, e somente se, $A = B$;
d. determine uma condição necessária e suficiente para que se tenha

$$A \backslash (B \backslash C) = (A \backslash B) \backslash C.$$

Problema 6.11 Dê exemplos de implicações, envolvendo conteúdos do ensino médio, que sejam: verdadeiras, com recíproca verdadeira; verdadeiras, com recíproca falsa; falsas, com recíproca verdadeira; falsas, com recíproca falsa.

Problema 6.12 Escreva as implicações lógicas que correspondem à resolução da equação $\sqrt{x} + x = 2$. Verifique quais são reversíveis e explique o aparecimento de raízes estranhas. Faça o mesmo com a equação $\sqrt{x} + 3 = x$.

Problema 6.13 Considere as seguintes (aparentes) equivalências lógicas:

$$\begin{aligned} x=1 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2-2x+1=0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2-2\cdot 1+1=0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2-1=0 \\ &\Leftrightarrow \quad x=\pm 1. \end{aligned}$$

Conclusão(?): $x=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$. Onde está o erro?

Problema 6.14 Escreva as recíprocas, contrapositivas e negações matemáticas das seguintes afirmações:

a. Todos os gatos têm rabo;
b. Sempre que chove, eu saio de guarda-chuva ou fico em casa;
c. Todas as bolas de ping pong são redondas e brancas;
d. Sempre que é terça feira e o dia do mês é um número primo, eu vou ao cinema;
e. Todas as camisas amarelas ou vermelhas têm manga comprida;
f. Todas as coisas quadradas ou redondas são amarelas e vermelhas.

Problema 6.15 Sejam A, B e C conjuntos. Determine uma condição necessária e suficiente para que se tenha

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap C.$$

Problema 6.16 Expressões tais como *para todo* e *existe* são chamadas de quantificadores e aparecem em sentenças dos tipos (sendo $P(x)$ é uma condição envolvendo a variável x):

1) Para todo x, é satisfeita a condição $P(x)$;
2) Existe algum x que satisfaz a condição $P(x)$.

a. Sendo A o conjunto de todos os objetos x (de um certo conjunto universo U) que satisfazem a condição $P(x)$, escreva as sentenças 1) e 2) acima, usando a linguagem de conjuntos.
b. Quais são as negações de 1) e 2)? Escreva cada uma destas negações usando conjuntos e compare com as sentenças obtidas em **a.** **c.** Para cada sentença abaixo, diga se ela é verdadeira ou falsa e forme sua negação.
i. Existe um número real x tal que $x^2=1$.
ii. Para todo número inteiro n, vale $n^2>n$.
iii. Para todo número real x, tem-se $x>1$ ou $x^2<1$.
iv. Para todo número real x existe um número natural n tal que $n>x$.
v. Existe um número natural n tal que, para todo número real x, tem-se $n>x$.

Problema 6.17 Considere os conjuntos abaixo:
F = conjunto de todos os filósofos;
M = conjunto de todos os matemáticos;
C = conjunto de todos os cientistas;
P = conjunto de todos os professores.

a. Exprima cada uma das afirmativas abaixo usando a linguagem de conjuntos.
i. Todos os matemáticos são cientistas;
ii. Alguns matemáticos são professores;
iii. Alguns cientistas são filósofos;
iv. Todos os filósofos são cientistas ou professores;
v. Nem todo professor é cientista.

b. Faça o mesmo com as afirmativas abaixo.
vi. Alguns matemáticos são filósofos;
vii. Nem todo filósofo é cientista;
viii. Alguns filósofos são professores;
ix. Se um filósofo não é matemático, ele é professor;
x. Alguns filósofos são matemáticos.

c. Tomando as cinco primeiras afirmativas como hipóteses, verifique quais das afirmativas do segundo grupo são necessariamente verdadeiras.

Problema 6.18 Considere um grupo de 4 cartões, que possuem uma letra escrita em um dos lados e um número do outro. Suponha que seja feita, sobre esses cartões, a seguinte afirmação: Todo cartão com uma vogal de um lado tem um número ímpar do outro. Quais do cartões abaixo você precisaria virar para verificar se esse afirmativa é verdadeira ou falsa?

A	1	B	4

Problema 6.19 O artigo 34 da Constituição Brasileira de 1988 diz o seguinte:
A União não intervirá nos Estados nem no Distrito Federal, exceto para:
I. Manter a integridade nacional;
II. Repelir invasão estrangeira ou de unidade da Federação em outra;
III. (...)
a. Suponhamos que o estado do Rio de Janeiro seja invadido por tropas do estado de São Paulo. O texto acima obriga a União a intervir no es-

tado? Na sua opinião, qual era a intenção dos legisladores nesse caso? **b.** Reescreva o texto do artigo 34 de modo a torná-lo mais preciso.

Problema 6.20 O conjunto das partes $P(A)$ de um conjunto A é o conjunto formado por todos os subconjuntos do conjunto A. Prove o teorema de Cantor: Se A é um conjunto, não existe uma função $f : A \to P(A)$ que seja sobrejetiva.

Sugestão: Suponha que exista uma tal função f e considere $X = \{x \in A; x \notin f(x)\}$.

Problema 6.21 **Descanse!**

V

Tópicos de Álgebra

8. Introdução

8.1 Álgebra e Números

inseri em Divisibilidade

8.2 Transformações de Expressões Racionais e Identidades

Simplifique as expressões seguintes:

05. $\dfrac{a^4+a^2-2}{a^6+8}$

06. $\dfrac{5a^4+5a^2-3a^2b-3b}{a^4+3a^2+2}$

07. $\dfrac{1}{1-a}+\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{2}{1+a^2}+\dfrac{4}{1+a^4}+\dfrac{8}{1+a^8}+\dfrac{16}{1+a^{16}}$

08. $\left(\dfrac{b}{a+b}+a\right)\left(\dfrac{a}{a-b}-b\right)-\left(\dfrac{a}{a+b}+b\right)\left(\dfrac{b}{a-b}-a\right)$

09. $\dfrac{a+b}{(b-c)(c-a)}+\dfrac{b+c}{(c-a)(a-b)}+\dfrac{c+a}{(a-b)(b-c)}$

10. $\dfrac{a-b}{a+b}+\dfrac{b-c}{b+c}+\dfrac{c-a}{c+a}+\dfrac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$

11. $\dfrac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{a-b}{(c-a)(c-b)}=\dfrac{2}{a-b}+\dfrac{2}{b-c}+\dfrac{2}{c-a}$

12. Prove que $(a-1)(a-3)(a-4)(a-6)+10$ é um número positivo para $a\in\mathbb{R}$.

13. Prove que se $a+b+c=0$, então

$$\frac{a^7+b^7+c^7}{7}=\left(\frac{a^5+b^5+c^5}{5}\right)\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)$$

14. Prove que se $a+b+c=0$, então

$$a^5(b^2+c^2)+b^5(a^2+c^2)+c^5(b^2+a^2)=\frac{(a^3+b^3+c^3)(a^4+b^4+c^4)}{2}$$

15. $1\cdot 4+2\cdot 7+3\cdot 10+\ldots+n\cdot(3n+1)=n\cdot(n+1)^2$.

1^o Passo: Caso Inicial
Para $n=1$, tem-se $1\cdot 4=1\cdot(1+1)^2$. O que é obviamente verdade.

2^o Passo: Hipótese de Indução
Suponhamos que a igualdade é válida para todo $n\leq k$, ou seja, que

$$1\cdot 4+2\cdot 7+3\cdot 10+\ldots+k\cdot(3k+1)=k\cdot(k+1)^2.$$

3^o Passo: Passo Indutivo
Devemos mostrar que

$$1\cdot 4+2\cdot 7+3\cdot 10+\ldots+k\cdot(3k+1)+(k+1)\cdot[3(k+1)+1]=(k+1)\cdot(k+2)^2.$$

Ora, por hipótese,
$1\cdot 4+2\cdot 7+3\cdot 10+\ldots+k\cdot(3k+1)+(k+1)[3(k+1)+1]=k\cdot(k+1)^2+(k+1)[3(k+1)+1]=(k+1)\cdot[k(k+1)+3k+4]=(k+1)\cdot(k^2+4k+4)=(k+1)\cdot(k+2)^2$.

Assim, a igualdade também é válida para $n=k+1$.

Portanto, o Princípio da Indução Finita garante que a igualdade é válida sempre.

■

16. $\frac{0}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{n-1}{n!}=1-\frac{1}{n!}$.

1^o Passo: Caso Inicial
Para $n=1$, tem-se $\frac{0}{1!}=1-\frac{1}{1!}$. O que é obviamente verdade.

2^o Passo: Hipótese de Indução
Suponhamos que a igualdade é válida para todo $n\leq k$, ou seja, que

$$\frac{0}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{k-1}{k!}=1-\frac{1}{k!}.$$

3^o Passo: Passo Indutivo
Devemos mostrar que

$$\frac{0}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{k-1}{k!}+\frac{k}{(k+1)!}=1-\frac{1}{(k+1)!}.$$

Ora, por hipótese,
$\frac{0}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{k-1}{k!}+\frac{k}{(k+1)!}=1-\frac{1}{k!}+\frac{k}{(k+1)!}=1+\frac{k-(k+1)}{(k+1)!}=1-\frac{1}{(k+1)!}$.

Assim, a igualdade também é válida para $n=k+1$.

Portanto, o Princípio da Indução Finita garante que a igualdade é válida sempre.

■

17. $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right).$

1^o Passo: Caso Inicial

Para $n=1$, tem-se $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{(1+1)(1+2)}\right)$. O que é obviamente verdade.

2^o Passo: Hipótese de Indução

Suponhamos que a igualdade é válida para todo $n\le k$, ou seja, que

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right).$$

3^o Passo: Passo Indutivo

Devemos mostrar que

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)}+\frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)\cdot(k+3)}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(k+2)(k+3)}\right).$$

Ora, por hipótese,

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)}+\frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)\cdot(k+3)}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)+\frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)\cdot(k}$$
$$\frac{1}{2}\cdot\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)+\frac{2}{(k+1)\cdot(k+2)\cdot(k+3)}\right]=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{2-(k+3)}{(k+1)(k+2)(k+3)}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{(k+1)}{(k+1)(k+2)(k}\right.$$
$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(k+2)(k+3)}\right).$$

Assim, a igualdade também é válida para $n=k+1$.

Portanto, o Princípio da Indução Finita garante que a igualdade é válida sempre.

■

18. $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}=\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right).$

19. $(n+1)(n+2)\ldots(n+n)=2^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1).$

1^o Passo: Caso Inicial

Para $n=1$, tem-se $(1+1)=2^1\cdot 1$. O que é obviamente verdade.

2^o Passo: Hipótese de Indução

Suponhamos que a igualdade é válida para todo $n\le k$, ou seja, que

$$(k+1)(k+2)\ldots(k+k)=2^k\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k-1).$$

3^o Passo: Passo Indutivo

Devemos mostrar que

$(k+2)(k+3)\ldots(2k-1)(k+k)(2k+1)(2k+2)=((k+1)+1)((k+1)+2)\ldots((k+1)+(k-1))((k+1)+k)((k+1)+(k+1))=2^{k+1}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k-1)\cdot[2(k+1)-1]=2^{k+1}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k-1)\cdot(2k+1).$

Ora, por hipótese,

$(k+2)(k+3)\ldots(k+k)=\dfrac{2^k\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{(k+1)}.$

Então,

$$(k+2)(k+3)\ldots(2k-1)(k+k)(2k+1)(2k+2)=\frac{2^k\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{(k+1)}\cdot(2k+1)\cdot(2k+2)=$$
$$\frac{2^k\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{(k+1)}\cdot(2k+1)\cdot 2(k+1)=2^{k+1}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k-1)\cdot(2k+1).$$

Assim, a igualdade também é válida para $n = k+1$.

Portanto, o Princípio da Indução Finita garante que a igualdade é válida sempre.

■

20. $S_n = \dfrac{1}{1\cdot 4} + \dfrac{1}{4\cdot 7} + \ldots + \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

21. $S_n = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1}n^2$

22. $\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{2}{1+x^2} + \dfrac{4}{1+x^4} + \ldots + \dfrac{2^n}{1+x^{2^n}} = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}$, onde $|x| \neq 1$.

23. $35|(6^{2n}-1)$.

24. $11|(6^{2n}+3^{n+2}+3^n)$.

25. $37|(2^{n+5}\cdot 3^{4n}+5^{3n+1})$.

26. $25|(2^{n+2}\cdot 3^n+5n-4)$.

27. $24|(n^6-3n^5+6n^4-7n^3-2n)$.

8.3 Desigualdades

Nos problemas seguintes, prove as dadas desigualdades.

28. $\dfrac{a^2}{1+a^4} \leq \dfrac{1}{2}$.

29. Se $a \geq 0$, $b \geq 0$, então $\sqrt{a^5+b^5} \geq a^4b+ab^4$.

30. Se $a > 0$, $b > 0$, então $\dfrac{a}{\sqrt{b}} + \dfrac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}$.

31. Se $a+b \geq 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, então $\dfrac{a}{b^2} + \dfrac{b}{a^2} \geq \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$.

32. Se $a+b \geq 0$, então $ab(a+b) \leq a^3+b^3$.

33. $a^2+2b^2+2ab+b+10 > 0$.

34. $1+2a^4 \geq a^2+2a^3$.

35. Se $a \neq 2$, então $\dfrac{1}{a^2-4a+4} > \dfrac{2}{a^3-8}$.

36. Se $a \geq -1$, então $a^3+1 \geq a^2+a$.

37. $a^2+b^2+c^2+3 \geq 2(a+b+c)$.

38. Se $a+b \geq 0$, então $\dfrac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^3$.

39. $a^2+b^2 \geq ab$.

Lema 1: Um número mais seu inverso é maior que ou igual a 2.
Prova do Lema: Aplicando $A \geq G$ para os números x e $\frac{1}{x}$, obtemos:

$$\frac{x+\frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} \therefore x+\frac{1}{x} \geq 2.$$

40. $\log_2 3+\log_3 2 > 2$.
Ora, $\log_2 3+\log_3 2 = \log_2 3+\frac{1}{\log_2 3} > 2$.

41. $\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} \geq 2$.

$$\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{a^2+1}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{a^2+1}} = \sqrt{a^2+1}+\frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \geq 2.$$

42. $\frac{a^2+a+2}{\sqrt{a^2+a+1}} \geq 2$.
Ora, $\frac{a^2+a+2}{\sqrt{a^2+a+1}} = \frac{a^2+a+1}{\sqrt{a^2+a+1}}+\frac{1}{\sqrt{a^2+a+1}} = \sqrt{a^2+a+1}+\frac{1}{\sqrt{a^2+a+1}} \geq 2$.

43. Se $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são números não-negativos e $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots a_n = 1$, então $(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geq 2^n$.
Solução: Da desigualdade $A \geq G$, obtemos

$$\frac{1+a_1}{2} \geq \sqrt{1 \cdot a_1} \therefore (1+a_1) \geq 2\sqrt{a_1}.$$

Do mesmo modo,

$$\begin{gathered}(1+a_2) \geq 2\sqrt{a_2}\\(1+a_3) \geq 2\sqrt{a_3}\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\(1+a_n) \geq 2\sqrt{a_n}\end{gathered}$$

Multiplicando todos os n resultados acima obtemos

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geq 2^n\sqrt{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots a_n} = 2^n.$$

∎

44. Se $n = 2, 3, 4, \ldots$, então $n! \geq n^{n/2}$.
45. . Se $n = 2, 3, 4, \ldots$, então

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$$

.
46. Se $a > 0$, $b > 0$, então $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}$.

47. Se $a \geq 0$, $b \geq 0$, então $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

48. Se $a > 0$, $b > 0$, então $\sqrt{a}+\sqrt{b} > \sqrt{a+b}$.

49. Se $a > 0$, $b > 0$, então $\frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \leq \sqrt[4]{ab}$.

50. $\sqrt{a^2+b^2} > \sqrt[3]{a^3+b^3}$.

51. $a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc$.

52. Se $abc \neq 0$, $ab+ac+bc \neq 0$, então $\dfrac{3}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}} \leq \sqrt[3]{abc}$.

Solução. Aplicando $A \geq G$ para os números $\dfrac{1}{a}$, $\dfrac{1}{b}$ e $\dfrac{1}{c}$ obtemos:

$$\frac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}} = \frac{1}{\sqrt[3]{abc}} \therefore \frac{3}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}} \leq \sqrt[3]{abc}.$$

■

53. Se $a>0$, $b>0$, $c>0$, $d>0$, então $\dfrac{4}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}} \leq \sqrt[4]{abcd}$.

Solução. Aplicando $A \geq G$ para os números $\dfrac{1}{a}$, $\dfrac{1}{b}$, $\dfrac{1}{c}$ e $\dfrac{1}{d}$ obtemos:

$$\frac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}}{4} \geq \sqrt[4]{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}\cdot\frac{1}{d}} = \frac{1}{\sqrt[4]{abcd}} \therefore \frac{4}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}} \leq \sqrt[4]{abcd}$$

■

54. Se $x>-1$, $n \geq 2$, então $(1+x)^n > 1+nx$.

Solução. Usaremos indução sobre n para demonstrar tal desigualdade.
1^o Passo: Caso Inicial
Para $n=2$, tem-se

$$1+2x+x^2 = (1+x)^2 > 1+2x.$$

O que é obviamente verdade.

2^o Passo: Hipótese de Indução
Suponhamos que a desigualdade é válida para todo n, com $2 \leq n \leq k$, ou seja, que

$$(1+x)^n > 1+nx.$$

3^o Passo: Passo Indutivo
Multiplicando ambos os membros da desigualdade acima por $(1+x)$, chegaremos a

$$\begin{aligned}(1+x)^n(1+x) &> (1+nx)(1+x)\\ &= 1+nx+x+nx^2\\ &= 1+(n+1)x+nx^2\\ &> 1+(n+1)x.\end{aligned}$$

Assim, a desigualdade também é válida para $n+1$.
Portanto, o Princípio da Indução Finita garante que a desigualdade é válida sempre.

■

55. Se $n \geq 5$, então $2^n > n^2$.

56. Se $n \geq 10$, então $2^n > n^3$.

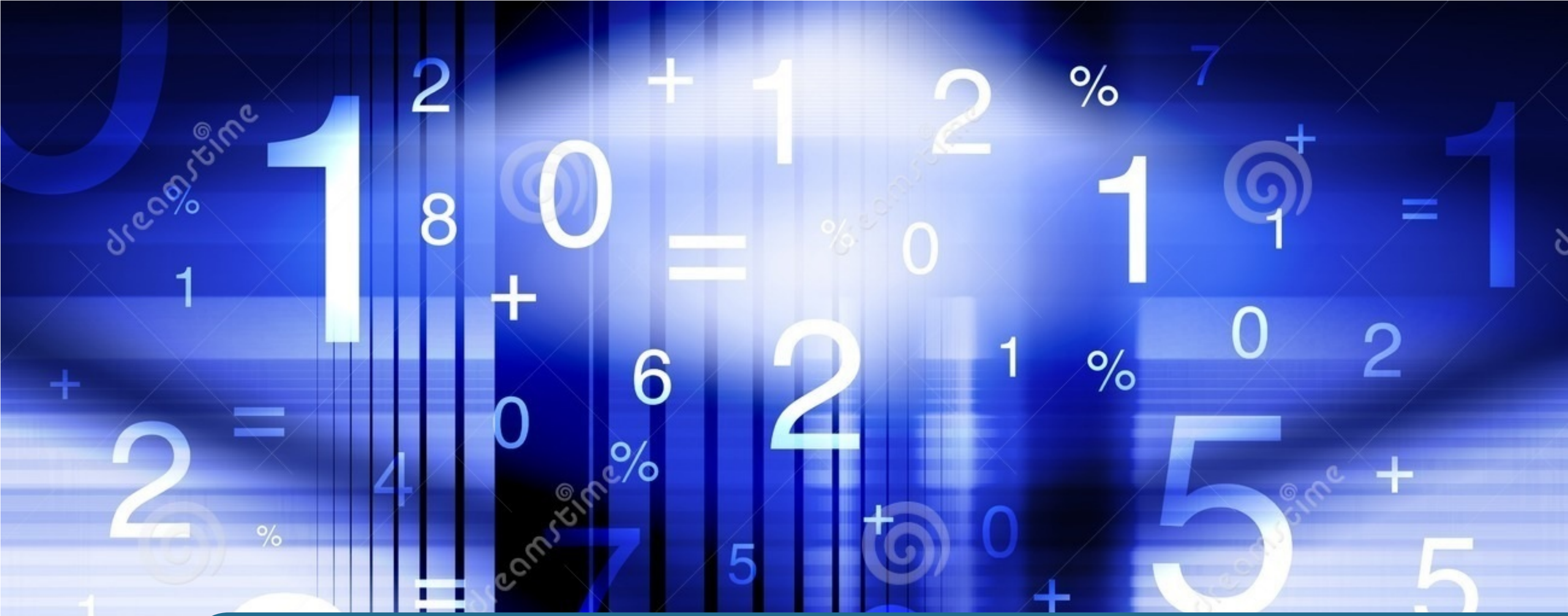
57. $|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$.

58. Se $n \geq 2$, então $\sqrt{n} < 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

59. Se $n \geq 2$, então $2\sqrt{n} > 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

60. Se $n \geq 2$, então $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{13}{24}$.

61. Se $n \geq 2$, então $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{2^n - 1} < n$.



9. Identidades e Transformações

Esta obra contém a solução de todos os 1.202 exercícios propostos na Parte I (Álgebra) do afamado livro "*Solving Problems in ALGEBRA and TRIGONOMETRY*" dos autores V. Litvinenko e A. Mordkovich, obra esta da propalada coleção de livros didáticos publicada em fins dos anos 1980 pela *Mir Publishers Moscow*.

Este livro, ora dado a lume, foi escrito com a intenção de ser mais um material de suporte para estudantes que pretendam concorrer a vagas em vestibulares de escolas militares, muito especialmente ao ITA e IME, e poderá, apropriadamente, ser usado desde o 8o. ano do Ensino Fundamental até a 3a. série do Ensino Médio por tais estudantes que pretendam uma vaga naquelas instituições.

Esperamos, sinceramente, que ela ajude a lograr êxito em seus projetos, bem como possibilite-os vislumbrar um pouco mais as sutis estratégias e engenhos na busca de soluções de problemas algébricos.

Finalmente, recomendamos fortemente, antes de pesquisar as soluções dadas no final deste livro, tentar dar sua própria resposta para cada um deles.

9.1 Fatoração de Polinômios

Fatore:

1. $a^4-1=(a^2-1)(a^2+1)=(a-1)(a+1)(a^2+1)$.

2. $a^6-1=(a^3-1)(a^3+1)=(a-1)(a^2+a+1)(a+1)(a^2-a+1)$.

4. $a^4-18a^2+81=(a^2-9)^2=[(a-3)(a+3)]^2=(a-3)^2(a+3)^2$.

5. $a^{12}-2a^6+1=(a^6-1)^2=[(a^3-1)(a^3+1)]^2=[(a-1)(a^2+a+1)(a+1)(a^2-a+1)]^2$.

7. $a^4+2a^3-2a-1=(a^4-1)+(2a^3-2a)=(a^2-1)(a^2+1)+2a(a^2-1)=(a^2-1)(a^2+1+2a)=(a-1)(a+1)(a+1)^2=(a-1)(a+1)^3$.

8. $4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2=-[(b^2+c^2-a^2)^2-(2bc)^2]=-[(b^2+c^2-a^2-2bc)(b^2+c^2-a^2+2bc)]=-[(b-c)^2-a^2][(b+c)^2-a^2]=-[(b-c-a)(b-c+a)(b+c-a)(b+c+a)]=(a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c)(a+b+c)$.

10. $a^4+4a^2-5=a^4-a^2+5a^2-5=a^2(a^2-1)+5(a^2-1)=(a^2-1)(a^2+5)=(a-1)(a+1)(a^2+5)$.

11. $4a^4+5a^2+1=4a^4+4a^2+a^2+1=4a^2(a^2+1)+(a^2+1)=(a^2+1)(4a^2+1)$.

13. $a^4+324=(a^2)^2+18^2=(a^2+18)^2-36a^2=(a^2+18)^2-(6a)^2=(a^2-6a+18)(a^2+6a+18)$.

14. $a^4+a^2+1=a^4+2a^2+1-a^2=(a^2+1)^2-a^2=(a^2+1-a)(a^2+1+a)$.

16. $2a^4+a^3+4a^2+a+2=2a^4+2a^2+a^3+a+2a^2+2=2a^2(a^2+1)+a(a^2+1)+2(a^2+1)=(a^2+1)(2a^2+a+2)$.

17. $a^4+3a^3+4a^2-6a-12=a^4+3a^3+6a^2-2a^2-6a-12=a^2(a^2+3a+6)-2(a^2+3a+6)=(a^2-2)(a^2+3a+6)=(a-\sqrt{2})(a+\sqrt{2})(a^2+3a+6)$.

19. $a^5+a^3-a^2-1=a^3(a^2+1)-(a^2+1)=(a^2+1)(a^3-1)=(a^2+1)(a-1)(a^2+a+1)$.

20. $2a^2b+4ab^2-a^2c+ac^2-4b^2c+2bc^2-4abc=2a^2b-2abc-a^2c+ac^2+4ab^2-4b^2c-2abc+2bc^2=2ab(a-c)-ac(a-c)+4b^2(a-c)-2bc(a-c)=(a-c)(2ab-ac+4b^2-2bc)=(a-c)[a(2b-c)+2b(2b-c)]=(a-c)(2b-c)(a+2b)$.

22. $a(b-2c)^2+b(a-2c)^2-2c(a+b)^2+8abc=a(b^2-4bc+4c^2)+b(a^2-4ac+4c^2)-2c(a^2+2ab+b^2)+8abc=ab^2-4abc+4ac^2+a^2b-4abc+4bc^2-2a^2c-4abc-2b^2c+8abc=a^2b-2a^2c-2abc+4ac^2+ab^2-2abc-2b^2c+4bc^2=a^2(b-2c)-2ac(b-2c)+ab(b-2c)-2bc(b-2c)=(b-2c)(a^2-2ac+ab-2bc)=(b-2c)[a(a-2c)+b(a-2c)]=(b-2c)(a-2c)(a+b)$.

23. $a^3(a^2-7)^2-36a$

25. $a^2b^2(b-a)+b^2c^2(c-b)+a^2c^2(c-a)=a^3b^2-a^2b^3+b^3c^2-b^2c^3-a^3c^2+a^2c^3=a^3b^2-a^2b^3+b^3c^2-b^2c^3-a^3c^2+a^2c^3-a^3bc+a^3bc-ab^3c+ab^3c-abc^3+abc^3-a^2bc^2+a^2bc^2-ab^2c^2+ab^2c^2-a^2b^2c+a^2b^2c=(a^3b^2-a^3bc-a^2b^3+a^2bc^2+ab^3c-ab^2c^2)+(a^2b^2c-a^2bc^2-ab^3c+abc^3+b^3c^2-b^2c^3)+(a^3bc-a^3c^2-a^2b^2c+a^2c^3+ab^2c^2-abc^3)=ab(a^2b-a^2c-ab^2+ac^2+b^2c-bc^2)+bc(a^2b-a^2c-ab^2+ac^2+b^2c-bc^2)+ac(a^2b-a^2c-ab^2+ac^2+b^2c-bc^2)=(a^2b-a^2c-ab^2+ac^2+b^2c-bc^2)(ab+bc+ac)=(a^2b-a^2c-ab^2+abc-abc+ac^2+b^2c-bc^2)(ab+bc+ac)=(a(ab-ac-b^2+bc)-c(ab-ac-b^2+bc))(ab+bc+ac)=((a-c)(ab-ac-b^2+bc))(ab+bc+ac)=(a-c)(a(b-c)-b(b-c))(ab+bc+ac)=(a-c)(b-c)(a-b)(ab+bc+ac)$

26. $8a^3(b+c)-b^3(2a+c)-c^3(2a-b)$

28. $a^4+9=(a^2+3)^2-6a^2=(a^2+3)^2-(\sqrt{6}a)^2=(a^2-\sqrt{6}a+3)(a^2+\sqrt{6}a+3)$

29. a^4+b^4

31. $a(a+1)(a+2)(a+3)+1=(a^2+a)(a^2+5a+6)+1=a4+5a^3+6a^2+a^3+5a^2+6a+1=a^4+6a^3+11a^2+6a+1=(a^4+3a^3+a^2)+(3a^3+9a^2+3a)+(a^2+3a+1)=a^2(a^2+3a+1)+3a(a^2+3a+1)+(a^2+3a+1)=((a^2+3a+1)(a^2+3a+1)=(a^2+3a+1)^2$

32. $(a+1)(a+3)(a+5)(a+7)+15$

34. $(a-b)c^3-(a-c)b^3+(b-c)a^3$

35. $(a-b)^3+(b-c)^3-(a-c)^3=[(a-b)+(b-c)][(a-b)^2+(a-b)(b-c)+(b-c)^2]-(a-c)^3=(a-c)(a^2-2ab+b^2+ab-ac-b^2+bc+b^2-2bc+c^2)-(a-c)^3=(a-c)[a^2-ab+b^2-bc+c^2-ac-(a^2-2ac+c^2)]=(a-c)(b^2-ab-bc+ac)=(a-c)[b(b-a)-c(b-a)]=(a-c)(b-a)(b-c)=(a-b)(b-c)(c-a)$.

37. $a^4+2a^3b-3a^2b^2-4ab^3-b^4=a^4+2a^3b+a^3b-a^3b+a^2b^2-a^2b^2-3a^2b^2-4ab^3-b^4=a^4+3a^3b+a^2b^2-a^3b-3a^2b^2-ab^3-a^2b^2-3ab^3-b^4=a^2(a^2+3ab+b^2)-ab(a^2+3ab+b^2)-b^2(a^2+3ab+b^2)=(a^2+3ab+b^2)(a^2-ab-b^2)$
38. $a^2b+ab^2+a^2c+b^2c+bc^2+3abc$

40. $a^5+a^4+a^3+a^2+a+1=a^4(a+1)+a^2(a+1)+a+1=(a+1)(a^4+a^2+1)=(a+1)(a^4+2a^2+1-a^2)=(a+1)((a^2+1)^2-a^2)=(a+1)(a^2+1-a)(a^2+1+a)$
41. $a^4+2a^3+3a^2+2a+1$

43. $a^4+a^2+\sqrt{2}a+2=a^4-\sqrt{2}a^3+2a^2+\sqrt{2}a^3-2a^2+2\sqrt{2}a+a^2-\sqrt{2}a+2=a^2(a^2-\sqrt{2}a+2)+\sqrt{2}a(a^2-\sqrt{2}a+2)+a^2-\sqrt{2}a+2=(a^2-\sqrt{2}a+2)(a^2+\sqrt{2}a+1)$
44. $a^{10}+a^5+1$
46. Demonstre que se a é um número mutuamente primo com 6, então $24|(a^3-1)$
47. Prove que se $a\in\mathbb{N}$, então $6|(2a^3+3a^2+a)$.
Solução. Observe, de início, que
$2a^3+3a^2+a=a(2a^2+3a+1)=a[2a^2+2a+a+1]=a[2a(a+1)+(a+1)]=a(a+1)(2a+1)$.
Assim,

$$6|(2a^3+3a^2+a)\Leftrightarrow 6|a(a+1)(2a+1)\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}2|a(a+1)(2a+1)\\ 3|a(a+1)(2a+1)\end{array}\right.$$

Isto de fato ocorre, uma vez que:
(i) Entre dois números consecutivos (a e $a+1$) algum deles é par. Deste modo,

$$2|a(a+1)\therefore 2|a(a+1)(2a+1)$$

(ii) Há 3 possibilidades para a ($a=3k$, $a=3k+1$ ou $a=3k+2$).

$$\left|\begin{array}{l}a=3k\Rightarrow 3|a\therefore 3|a(a+1)(2a+1)\\ a=3k+1\Rightarrow 2a+1=3(2k+1)\Rightarrow 3|(2a+1)\therefore 3|a(a+1)(2a+1)\\ a=3k+2\Rightarrow a+1=3(k+1)\Rightarrow 3|(a+1)\therefore 3|a(a+1)(2a+1)\end{array}\right.$$

De (i) e (ii) tem-se que $6|(2a^3+3a^2+a)$.

■

49. Prove que se a é um número par, $\dfrac{a}{12}+\dfrac{a^2}{8}+\dfrac{a^3}{24}$ é um número inteiro.
50. Prove que se $a\in\mathbb{N}$, então $\dfrac{a^5}{120}+\dfrac{a^4}{12}+\dfrac{7a^3}{24}+\dfrac{5a^2}{12}+\dfrac{a}{5}$ é um número inteiro.
Solução. Observe, de início, que
$2a^3+3a^2+a=a(2a^2+3a+1)=a[2a^2+2a+a+1]=a[2a(a+1)+(a+1)]=a(a+1)(2a+1)$.
Assim,

$$6|(2a^3+3a^2+a)\Leftrightarrow 6|a(a+1)(2a+1)\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}2|a(a+1)(2a+1)\\ 3|a(a+1)(2a+1)\end{array}\right.$$

Isto de fato ocorre, uma vez que:
(i) Entre dois números consecutivos (a e $a+1$) algum deles é par. Deste modo,

$$2|a(a+1)\therefore 2|a(a+1)(2a+1)$$

(ii) Há 3 possibilidades para a ($a = 3k$, $a = 3k+1$ ou $a = 3k+2$).

$$\left|\begin{array}{l} a = 3k \Rightarrow 3|a \therefore 3|a(a+1)(2a+1) \\ a = 3k+1 \Rightarrow 2a+1 = 3(2k+1) \Rightarrow 3|(2a+1) \therefore 3|a(a+1)(2a+1) \\ a = 3k+2 \Rightarrow a+1 = 3(k+1) \Rightarrow 3|(a+1) \therefore 3|a(a+1)(2a+1) \end{array}\right.$$

De (i) e (ii) tem-se que $6|(2a^3+3a^2+a)$.

■

9.2 Transformações de Expressões Racionais

53. $\dfrac{a^4+a^2-2}{a^6+8}$

56. $\dfrac{5a^4+5a^2-3a^2b-3b}{a^4+3a^2+2}$

59. $\dfrac{1}{1-a}+\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{2}{1+a^2}+\dfrac{4}{1+a^4}+\dfrac{8}{1+a^8}+\dfrac{16}{1+a^{16}}$

62. $\left(\dfrac{b}{a+b}+a\right)\left(\dfrac{a}{a-b}-b\right)-\left(\dfrac{a}{a+b}+b\right)\left(\dfrac{b}{a-b}-a\right)$

65. $\dfrac{a+b}{(b-c)(c-a)}+\dfrac{b+c}{(c-a)(a-b)}+\dfrac{c+a}{(a-b)(b-c)}$

68. $\dfrac{a-b}{a+b}+\dfrac{b-c}{b+c}+\dfrac{c-a}{c+a}+\dfrac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$

71. $\dfrac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{a-b}{(c-a)(c-b)}=\dfrac{2}{a-b}+\dfrac{2}{b-c}+\dfrac{2}{c-a}$

74. Prove que $(a-1)(a-3)(a-4)(a-6)+10$ é um número positivo para $a \in \mathbb{R}$.

Exemplo 9.1 Prove que se $a+b+c=0$, então

$$\frac{a^7+b^7+c^7}{7} = \left(\frac{a^5+b^5+c^5}{5}\right)\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right).$$

Solução. Sejam a, b e c, com $a+b+c=0$, as raízes de $P(x)=x^3+px+q$. Assim, as somas de potências $S_k = a^k+b^k+c^k$ obedecem à seguinte recorrência de Newton:

$$S_k = -p\cdot S_{k-2} - q\cdot S_{k-3}.$$

Desse modo:

$$\begin{aligned}
&S_0 = 3\\
&S_1 = 0\\
&S_2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = -2p\\
&S_3 = -p\cdot S_1 - q\cdot S_0 = -0 - 3q = -3q\\
&S_4 = -p\cdot S_2 - q\cdot S_1 = -p\cdot(-2p) - 0 = 2p^2\\
&S_5 = -p\cdot S_3 - q\cdot S_2 = -p\cdot(-3q) - q\cdot(-2p) = 5pq\\
&S_6 = -p\cdot S_4 - q\cdot S_3 = -p\cdot(2p^2) - q\cdot(-3q) = -2p^3+3q^2\\
&S_7 = -p\cdot S_5 - q\cdot S_4 = -p\cdot(5pq) - q\cdot(2p^2) = -7p^2q
\end{aligned}$$

Finalmente, concluímos que

$$\frac{a^7+b^7+c^7}{7}=\frac{-7p^2q}{7}=\frac{5pq}{5}\cdot\frac{-2p}{2}=\left(\frac{a^5+b^5+c^5}{5}\right)\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)$$

■

Exemplo 9.2 Prove que se $a+b+c=0$, então

$$a^5(b^2+c^2)+b^5(a^2+c^2)+c^5(b^2+a^2)=\frac{(a^3+b^3+c^3)(a^4+b^4+c^4)}{2}.$$

Solução. Sejam a, b e c, com $a+b+c=0$, as raízes de $P(x)=x^3+px+q$. Assim, as somas de potências $S_k=a^k+b^k+c^k$ obedecem à seguinte recorrência de Newton:

$$S_k=-p\cdot S_{k-2}-q\cdot S_{k-3}.$$

Podemos aproveitar do **Exemplo 9.1** os mesmos valores de S_k para concluir que:

$$\begin{aligned}
a^5(b^2+c^2)+b^5(a^2+c^2)+c^5(b^2+a^2)&=a^5(S_2-a^2)+b^5(S_2-b^2)+c^5(S_2-c^2)\\
&=S_2\cdot(a^5+b^5+c^5)-(a^7+b^7+c^7)\\
&=S_2\cdot S_5-S_7\\
&=(-2p)\cdot(5pq)-(-7p^2q)\\
&=-3p^2q
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{(a^3+b^3+c^3)\cdot(a^4+b^4+c^4)}{2}&=\frac{S_3\cdot S_4}{2}\\
&=\frac{-3p\cdot 2p^2}{2}\\
&=S_2\cdot S_5-S_7\\
&=-3p^2q
\end{aligned}$$

Isso conclui a prova. ■

Exemplo 9.3 Prove que $1\cdot 4+2\cdot 7+3\cdot 10+\ldots+n\cdot(3n+1)=n\cdot(n+1)^2$.

Solução. Usando as propriedades do somatório:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}k\cdot(3k+1)&=\sum_{k=1}^{n}(3k^2+k)\\
&=3\cdot\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k\\
&=3\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\\
&=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}\\
&=\frac{n(n+1)(2n+1+1)}{2}\\
&=n\cdot(n+1)^2.
\end{aligned}$$

■

Exemplo 9.4 Prove que $\dfrac{0}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\ldots+\dfrac{n-1}{n!}=1-\dfrac{1}{n!}$.
Solução. Manipulando a expressão inicial, temos:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{k-1}{k!}&=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k!}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k-1)!}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\end{aligned}$$

Na expressão acima, tomemos $m=k-1$:

$$\begin{aligned}&=\sum_{m=0}^{n-1}\frac{1}{m!}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\\&=\sum_{m=0}^{n-1}\frac{1}{m!}-\left(\sum_{m=0}^{n-1}\frac{1}{m!}-1+\frac{1}{n!}\right)\\&=1-\frac{1}{n!}.\end{aligned}$$

■

89. $\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}+\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}+\ldots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$.

1^o Passo: Caso Inicial

Para $n=1$, tem-se $\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{(1+1)(1+2)}\right)$. O que é obviamente verdade.

2^o Passo: Hipótese de Indução

Suponhamos que a igualdade é válida para todo $n\leq k$, ou seja, que

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right).$$

3^o Passo: Passo Indutivo

Devemos mostrar que

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)}+\frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)\cdot(k+3)}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(k+2)(k+3)}\right).$$

Ora, por hipótese,

$\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}+\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}+\ldots+\dfrac{1}{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)}+\dfrac{1}{(k+1)\cdot(k+2)\cdot(k+3)}=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}\right)+\dfrac{1}{(k+1)\cdot(k+2)\cdot(k+}$
$\dfrac{1}{2}\cdot\left[\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}\right)+\dfrac{2}{(k+1)\cdot(k+2)\cdot(k+3)}\right]=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{2-(k+3)}{(k+1)(k+2)(k+3)}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{(k+1)}{(k+1)(k+2)(k+3}\right.$
$\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{(k+2)(k+3)}\right)$.

Assim, a igualdade também é válida para $n=k+1$.

Portanto, o Princípio da Indução Finita garante que a igualdade é válida sempre.

■

92. $\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5}+\ldots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}=\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right)$.

95. $(n+1)(n+2)\ldots(n+n)=2^n\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)$.

1^o Passo: Caso Inicial

Para $n = 1$, tem-se $(1+1) = 2^1 \cdot 1$. O que é obviamente verdade.

2^o Passo: Hipótese de Indução

Suponhamos que a igualdade é válida para todo $n \leq k$, ou seja, que

$$(k+1)(k+2)\dots(k+k) = 2^k \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1).$$

3^o Passo: Passo Indutivo

Devemos mostrar que

$(k+2)(k+3)\dots(2k-1)(k+k)(2k+1)(2k+2) = ((k+1)+1)((k+1)+2)\dots((k+1)+(k-1))((k+1)+k)((k+1)+(k+1)) = 2^{k+1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1) \cdot [2(k+1)-1] = 2^{k+1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1) \cdot (2k+1)$.

Ora, por hipótese,

$(k+2)(k+3)\dots(k+k) = \dfrac{2^k \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{(k+1)}$.

Então,

$$(k+2)(k+3)\dots(2k-1)(k+k)(2k+1)(2k+2) = \frac{2^k \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{(k+1)} \cdot (2k+1) \cdot (2k+2) = \frac{2^k \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{(k+1)} \cdot (2k+1) \cdot 2(k+1) = 2^{k+1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1) \cdot (2k+1).$$

Assim, a igualdade também é válida para $n = k+1$.

Portanto, o Princípio da Indução Finita garante que a igualdade é válida sempre.

■

Exemplo 9.5 Simplifique a expressão $S_n = \dfrac{1}{1 \cdot 4} + \dfrac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.

Solução. Escrevendo a expressão em termos de somatório, temos:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1} \right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1} \right) \end{aligned}$$

Assim, usando soma telescópica, chegamos a:

$$S_n = \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{3n+1}\right) = \frac{n}{3n+1}.$$

■

101. $S_n = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1} n^2$

104. $\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{2}{1+x^2} + \dfrac{4}{1+x^4} + \dots + \dfrac{2^n}{1+x^{2^n}} = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}$, onde $|x| \neq 1$.

107. $35 | (6^{2n} - 1)$.

110. $11|(6^{2n}+3^{n+2}+3^n)$.

113. $37|(2^{n+5}\cdot 3^{4n}+5^{3n+1})$.

116. $25|(2^{n+2}\cdot 3^n+5n-4)$.

119. $24|(n^6-3n^5+6n^4-7n^3-2n)$.

Nos problemas 120 a 125, calcule o valor numérico das expressões:

122. $4a^3+2a^2-8a+7$ para $a=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)$

125. $2a(1+x^2)^{\frac{1}{2}}(x+(1+x^2)^{\frac{1}{2}})^{-1}$ para $x=\frac{1}{2}((ab^{-1})^{\frac{1}{2}}-(ba^{-1})^{\frac{1}{2}})$.

126. $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$.

127. $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

128. $(\sqrt{5+2\sqrt{6}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}})\frac{\sqrt{3}}{2}$.

129.

135. $\frac{1}{\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{2}}$.

136. $\frac{1}{\sqrt[3]{15}-\sqrt[3]{7}}$.

137. $\frac{\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}}}$.

138. $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

139. $\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}$.

140. $\frac{1}{\sqrt{14}+\sqrt{21}+\sqrt{15}+\sqrt{10}}$.

141. $\frac{1}{\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{4}+\sqrt[4]{8}+2}$.

142. $\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}}}$.

143. $\frac{2+\sqrt{6}}{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{6}-2}$.

144.

151. $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=2$.

182. **a.** $-log_8 log_4 log_2 16$;
(b) $-log_2 log_3\sqrt{\sqrt[4]{3}}$;
(c) $loglog\sqrt{\sqrt[5]{10}}$.

183. **a.** $\left(\frac{16}{15}\right)^{log_{\frac{125}{64}}3}$; (b) $\left(\frac{8}{27}\right)^{log_{\frac{81}{16}}5}$.

Nos problemas 216 a 268, prove as dadas desigualdades.

216. $\frac{a^2}{1+a^4} \leq \frac{1}{2}$.

217. Se $a \geq 0$, $b \geq 0$, então $\sqrt{a^5+b^5} \geq a^4b+ab^4$.

218. Se $a > 0$, $b > 0$, então $\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}$.

219. Se $a+b \geq 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, então $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2} \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

220. Se $a+b \geq 0$, então $ab(a+b) \leq a^3+b^3$.

221. $a^2+2b^2+2ab+b+10 > 0$.
$a^2+2b^2+2ab+b+10 = (a^2+2ab+b^2)+(b^2+b+10) = (a+b)^2+(b^2+b+10)$.

222. $1+2a^4 \geq a^2+2a^3$.

223. Se $a \neq 2$, então $\frac{1}{a^2-4a+4} > \frac{2}{a^3-8}$.

224. Se $a \geq -1$, então $a^3+1 \geq a^2+a$.
Ora, $a^3+1 \geq a^2+a \iff a^2(a-1) \geq a-1 \iff a^2 \geq 1$. O que de fato é verdade, pois $a \geq -1$.
CORRIGIR ESTA
225. $a^2+b^2+c^2+3 \geq 2(a+b+c)$.

226. Se $a+b \geq 0$, então $\frac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$.

227. $a^2+b^2 \geq ab$.

Lema 1: Um número mais seu inverso é maior que ou igual a 2.
Prova do Lema: Aplicando $A \geq G$ para os números x e $\frac{1}{x}$, obtemos:

$$\frac{x+\frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} \therefore x+\frac{1}{x} \geq 2.$$

240. $\log_2 3+\log_3 2 > 2$.
Ora, $\log_2 3+\log_3 2 = \log_2 3+\frac{1}{\log_2 3} > 2$.

241. $\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} \geq 2$.
Solução:
Ora,

$$\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{a^2+1}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{a^2+1}} = \sqrt{a^2+1}+\frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \geq 2.$$

242. $\frac{a^2+a+2}{\sqrt{a^2+a+1}} \geq 2$.
$\frac{a^2+a+2}{\sqrt{a^2+a+1}} = \frac{a^2+a+1}{\sqrt{a^2+a+1}}+\frac{1}{\sqrt{a^2+a+1}} = \sqrt{a^2+a+1}+\frac{1}{\sqrt{a^2+a+1}} \geq 2$.

246. Se $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são números não-negativos e $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots a_n = 1$, então $(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geq 2^n$.
Da desigualdade $A \geq G$, obtemos

$$\frac{1+a_1}{2} \geq \sqrt{1 \cdot a_1} \therefore (1+a_1) \geq 2\sqrt{a_1}.$$

Do mesmo modo,

$$\begin{gathered}(1+a_2) \geq 2\sqrt{a_2} \\ (1+a_3) \geq 2\sqrt{a_3} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (1+a_n) \geq 2\sqrt{a_n}\end{gathered}$$

Multiplicando todos os n resultados acima obtemos

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geq 2^n\sqrt{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots a_n} = 2^n.$$

■

248. Se $n = 2,3,4,\ldots$, então $n! \geq n^{n/2}$.
249. Se $n = 2,3,4,\ldots$, então

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$$

.

250. Se $a > 0$, $b > 0$, então $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}$.

251. Se $a \geq 0$, $b \geq 0$, então $\dfrac{a+b}{2} \leq \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.

252. Se $a > 0$, $b > 0$, então $\sqrt{a}+\sqrt{b} > \sqrt{a+b}$.

253. Se $a > 0$, $b > 0$, então $\dfrac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \leq \sqrt[4]{ab}$.

254. $\sqrt{a^2+b^2} > \sqrt[3]{a^3+b^3}$.
$\sqrt[6]{(a^2+b^2)^3} > \sqrt[6]{(a^3+b^3)^2}$ $a^6+3a^4b^2+3a^2b^4+b^6 > a^6+2a^3b^3+b^6$ $3a^2+3b^2 > 2ab$ $a^2+b^2 > \dfrac{2ab}{3}$

255. $a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc$.

258. Se $abc \neq 0$, $ab+ac+bc \neq 0$, então $\dfrac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \leq \sqrt[3]{abc}$.

Solução. Aplicando $A \geq G$ para os números $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ e $\frac{1}{c}$ obtemos:

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}} = \frac{1}{\sqrt[3]{abc}} \therefore \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \leq \sqrt[3]{abc}.$$

■

260. Se $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$, então $\dfrac{4}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}} \leq \sqrt[4]{abcd}$.

Solução. Aplicando $A \geq G$ para os números $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ e $\frac{1}{d}$ obtemos:

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}{4} \geq \sqrt[4]{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}\cdot\frac{1}{d}} = \frac{1}{\sqrt[4]{abcd}} \therefore \frac{4}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}} \leq \sqrt[4]{abcd}$$

■

261.[1] Se $x > -1$, $n \geq 2$, então $(1+x)^n > 1+nx$.

Solução. Usaremos indução sobre n para demonstrar tal desigualdade.
1^o Passo: Caso Inicial
Para $n = 2$, tem-se

$$1+2x+x^2 = (1+x)^2 > 1+2x.$$

O que é obviamente verdade.

2^o Passo: Hipótese de Indução
Suponhamos que a desigualdade é válida para todo n, com $2 \leq n \leq k$, ou seja, que

$$(1+x)^n > 1+nx.$$

3^o Passo: Passo Indutivo
Multiplicando ambos os membros da desigualdade acima por $(1+x)$, chegaremos a

$$\begin{aligned}(1+x)^n(1+x) &> (1+nx)(1+x)\\ &= 1+nx+x+nx^2\\ &= 1+(n+1)x+nx^2\\ &> 1+(n+1)x.\end{aligned}$$

Assim, a desigualdade também é válida para $n+1$.
Portanto, o Princípio da Indução Finita garante que a desigualdade é válida sempre.

■

262. Se $n \geq 5$, então $2^n > n^2$.

263. Se $n \geq 10$, então $2^n > n^3$.

264. $|a_1+a_2+\ldots+a_n| \leq |a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|$.

265. Se $n \geq 2$, então $\sqrt{n} < 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}$.

266. Se $n \geq 2$, então $2\sqrt{n} > 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}$.

267. Se $n \geq 2$, então $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$.

268. Se $n \geq 2$, então $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^n-1} < n$.

"I always thought something was fundamentally wrong with the universe" adams1995hitchhiker

[1]Nos problemas 261 a 268, assumimos que $n \in \mathbb{N}$.

10. Equações Diofantinas

10.1 Métodos Elementares de Solução

10.1.1 Método da Fatoração

Dada a equação $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, devemos escrevê-la da forma equivalente seguinte

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot \ldots \cdot f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a,$$

onde $f_1, f_2, \ldots, f_k \in \mathbb{Z}[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ e $a \in \mathbb{Z}$.
Com a fatoração em primos de a, obtemos uma quantidade finita de decomposições em k fatores inteiros $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Cada uma dessas fatorações produz um sistema de equações

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_2 \\ \vdots \\ f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_k \end{cases}$$

Resolver todos esses sistemas fornece o conjunto completo de soluções para a equação inicial.

Exemplo 10.1 Encontre todas as soluções inteiras para a equação

$$(x^2+1)(y^2+1) + 2(x-y)(1-xy) = 4(1+xy).$$

Solução. Escrevemos a equação na forma

$$x^2y^2 - 2xy + 1 + x^2 + y^2 - 2xy + 2(x-y)(1-xy) = 4,$$

o que equivale a

$$(xy-1)^2 + (x-y)^2 - 2(x-y)(xy-1) = 4.$$

E assim

$$[xy - 1 - (x-y)]^2 = 4 \Rightarrow (x+1)(y-1) = \pm 2.$$

Se $(x+1)(y-1) = 2$, obtemos os sistemas de equações

$$\begin{cases} x+1=2 \\ y-1=1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x+1=-2 \\ y-1=-1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x+1=1 \\ y-1=2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x+1=-1 \\ y-1=-2 \end{cases}$$

produzindo as soluções $(1,2)$, $(-3,0)$, $(0,3)$, $(-2,-1)$.
Se $(x+1)(y-1)=-2$, obtemos os sistemas de equações

$$\begin{cases} x+1=2 \\ y-1=-1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x+1=-2 \\ y-1=1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x+1=1 \\ y-1=-2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x+1=-1 \\ y-1=2 \end{cases}$$

produzindo as soluções $(1,0)$, $(-3,2)$, $(0,-1)$, $(-2,3)$. ■

10.1.2 Problemas Propostos

Problema 10.1 Sejam p e q dois primos. Resolva nos inteiros positivos a equação

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{pq}.$$

Problema 10.2 — Índia. Determine todos os pares de inteiros não-negativos (x,y) para que

$$(xy-7)^2=x^2+y^2.$$

Problema 10.3 — Polônia. Resolva a equação seguinte sabendo que x e y são inteiros:

$$x^2(y-1)+y^2(x-1)=1.$$

Problema 10.4 Encontre todos os inteiros para os quais a equação

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=n$$

é solúvel em números inteiros positivos.

Problema 10.5 Encontre todas as ternas de inteiros positivos (x,y,z) tais que

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=p,$$

onde p é um primo maior que 3.

Problema 10.6 Encontre todas as ternas (x,y,z) de inteiros tais que

$$x^3+y^3+z^3=x+y+z=3.$$

Problema 10.7 Encontre todos os primos p para os quais a equação $x^4+4=py^4$ seja solúvel em números inteiros.

11. Demonstrações Matemáticas

11.1 Redução ao Absurdo

A *Redução ao Absurdo* é um dos métodos mais comumente usados para demonstrar afirmações matemáticas. Tal método consiste em supor que a proposição que queremos demonstrar é falsa e, a partir dessa suposição, usando deduções matemáticas, chegarmos a uma contradição ou algo absurdo, o que implica que a proposição inicial é necessariamente verdadeira.

11.1.1 Problemas de Aplicação

Problema 11.1 Mostre, sem usar calculadora, que $6-\sqrt{35}<\dfrac{1}{10}$.

Problema 11.2 Se n é um número inteiro e seu quadrado é ímpar, então n também é ímpar.

Exemplo 11.1 Seja $a_1,a_2,\ldots,a_n$ uma permutação arbitrária dos números $1,2,\ldots,n$, onde n é um número ímpar. Prove que o produto $(a_1-1)(a_2-2)\ldots(a_n-n)$ é par.

Solução. Primeiro observe que a soma de um número ímpar de números inteiros ímpares é ímpar. Isto é suficiente para provar que existe alguma diferença par. Suponha, ao contrário, que todas as diferenças (a_k-k) são ímpares. Obviamente, $S=(a_1-1)+(a_2-2)+\ldots+(a_n-n)=0$, já que os a_k são uma reordenação de $1,2,\ldots,n$. S é um número ímpar de somas de números ímpares cuja soma é 0. Isso é impossível. Nossa suposição inicial de que todos os a_k-k são ímpares está errada, então um deles é par e, portanto, o produto é par. ■

Problema 11.3 Sempre que tivermos um número inteiro cuja representação decimal tem na casa das unidades um algarismo dentre 2, 3, 7, 8 poderemos afirmar que esse número não é um quadrado perfeito. Prove isso.

Exemplo 11.2 Sejam a,b números reais e assuma que, para todos os números $\epsilon>0$, a seguinte desigualdade é válida:

$$a<b+\epsilon.$$

Prove que $a\le b$.

Solução. Suponha, ao contrário, que $a>b$. Consequentemente $\dfrac{a-b}{2}>0$. Dado que a desigualdade $a < b+\epsilon$ vale para cada $\epsilon > 0$ em particular vale para $\epsilon = \dfrac{a-b}{2}$. Isso implica que

$$a < b + \frac{a-b}{2} \text{ ou } a < b.$$

Assim, partindo da suposição de que $a > b$ chegamos à conclusão incompatível de que $a < b$. A suposição original deve ser errada. Concluímos, portanto, que $a \leq b$. ■

Problema 11.4 Prove que 2003 não pode ser escrito como de dois quadrados.

Problema 11.5 Mostrar que a equação $x^2+x+1 = y^2$ não tem soluções x, y inteiras positivas.

Problema 11.6 O produto de 34 números inteiros é igual a 1. Mostre que sua soma não pode ser 0.

Problema 11.7 Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_{2000}$ números naturais tais que

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{2000}} = 1.$$

Prove que pelo menos um dos a_k's é par.

Exemplo 11.3 Prove que $\sqrt{2}$ é um número irracional, ou seja, não pode ser expresso como $\dfrac{p}{q}$ (com p e q inteiros).

Solução. Suponha que existam números inteiros positivos p_0 e q_0 tais que $\sqrt{2} = \dfrac{p_0}{q_0}$, o que é equivalente a $p_0^2 = 2q_0^2$. Assim, p_0 é par.

Tome $p_1 = \dfrac{p_0}{2}$, assim $4p_1 = 2q_0^2$, e então $2p_1^2 = q_0^2$. Logo q_0 é par.

Tome $q_1 = \dfrac{q_0}{2}$, assim $2p_1^2 = 4q_1^2$, e então $p_1^2 = 2q_1^2$.

Analogamente, iremos ter que p_1 e q_1 são ambos pares, e se $p_2 = \dfrac{p_1}{2}$ e $q_2 = \dfrac{q_1}{2}$, então

$$p_2^2 = 2q_2^2.$$

Se o mesmo procedimento for aplicado sucessivamente, concluímos que existem números inteiros positivos p_0, p_1, p_2, ... tais que $p_{i+1} = \dfrac{p_i}{2}$ $(i = 0,1,2,\ldots)$. Então $p_0 > p_1 > p_2 > \ldots$ Isso implica que há uma sequência infinita decrescente de números inteiros positivos. No entanto, essa sucessão não pode existir. Chegamos a algo absurdo, portanto, os números inteiros p_0 e q_0 não existem, ou seja, $\sqrt{2}$ é irracional. ■

O argumento usado na demonstração acima é conhecido como *Descida Infinita*, que consiste em provar a existência de uma sequência infinita decrescente de números inteiros positivos para obter uma contradição.

Os quatro problemas seguintes têm pelo menos uma solução usando tal método.

Problema 11.8 Adapte a demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$ para provar a de $\sqrt{3}$.

Problema 11.9 Mostre que a equação $8x^4+4y^4+2z^4 = t^4$ não tem soluções para números inteiros positivos.

Problema 11.10 Mostre que a equação $x^3-3y^3-9z^3 = 0$ não tem soluções inteiras com $x > 0$.

Problema 11.11 Mostre que a equação $x^2+y^2+z^2+u^2 = 2xyzu$ não tem soluções para números inteiros positivos.

Problema 11.12 Prove que $\log_2 3$ é irracional.

Problema 11.13 No ΔABC, $\angle A > \angle B$. Prove que $BC > AC$.

Problema 11.14 Seja $0 < \alpha < 1$. Prove que $\sqrt{\alpha} > \alpha$.

Problema 11.15 Prove que uma equação quadrática

$$ax^2+bx+c = 0,\ a \neq 0,$$

tem no máximo duas soluções.

Problema 11.16 Prove que se $ax^2+bx+c=0$ tem soluções reais e se $a>0$, $b>0$, $c>0$ então ambas as soluções devem ser negativas.

Exemplo 11.4 Demonstrar para a, b números reais positivos que $\dfrac{a^2+b^2}{2} \geq \dfrac{(a+b)^2}{4}$.
Solução. Suponha por absurdo que

$$\frac{a^2+b^2}{2} < \frac{(a+b)^2}{4} \Rightarrow a^2-2ab+b^2<0 \Rightarrow (a-b)^2<0.$$

O que é absurdo, pois o quadrado de todo número real é zero ou positivo.
■

Problema 11.17 Em cada casa de um tabuleiro 7×7 escreve-se exatamente um número tirado da lista $1,2,3,\ldots,49$. A seguir, calcula-se a soma dos números de cada linha e a soma dos números de cada coluna do tabuleiro. Indiquemos por P a soma de todas as somas pares e por I a soma de todas as ímpares. Pergunta-se se é possível ocorrer $P=I$.
Dica: trabalhe com $P+I$, procurando deduzir um absurdo.

Exemplo 11.5 — Euclides. Prove que o conjunto dos números primos é infinito.
Solução. Assumiremos, para essa prova, que qualquer número inteiro maior que 1 é primo ou produto de primos.

Suponha que $p_1,p_2,\ldots,p_n$ é uma lista que esgota todos os números primos. Considere agora o número $N=p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_n+1$. Esse é um número inteiro positivo, claramente maior que 1. Observe que nenhum dos números primos na lista $p_1,p_2,\ldots,p_n$ divide N, já que a divisão por qualquer um desses primos deixa resto 1. Como N é maior que qualquer um dos primos nesta lista, é um primo ou divisível por um primo fora desta lista. Assim, mostramos que a suposição de que qualquer lista finita de números primos leva a existência de um primo fora desta lista. Isso implica que o número de números primos é infinito. ■

Exemplo 11.6 Mostre que existem infinitos números primos da forma $4k+3$, com $k\in\mathbb{Z}$.
Solução. Suponha que o número de números primos da forma $4k+3$ $(k\in\mathbb{Z})$ seja finito. Sejam $4k_1+3$, $4k_2+3$, $\ldots$, $4k_n+3$ todos os primos dessa forma. Tomemos $a=2(4k_1+3)(4k_2+3)\ldots(4k_n+3)+1$.

Como $(4k_1+3)(4k_2+3)\ldots(4k_n+3)$ é ímpar, então $2(4k_1+3)(4k_2+3)\ldots(4k_n+3)\equiv 2 \pmod 4$. Portanto, $a\equiv 3 \pmod 4$. Por outro lado, por hipótese, a não é divisível por nenhum dos números da forma $4k+3$. Como a é ímpar, todos os divisores primos de a devem ter a forma $4k+1$. Portanto, $a\equiv 1 \pmod 4$. Isso contradiz o fato que tínhamos obtido anteriormente de $a\equiv 3 \pmod 4$. Essa contradição é resultado de assumir que o número de primos da forma $4k+3$ $(k\in\mathbb{Z})$ é finito. Então o número de números primos da forma $4k+3$ é infinito. ■

Problema 11.18 Mostre que existem infinitos números primos da forma $6k+5$, com $k\in\mathbb{Z}$.
Problema 11.19 Seja n um número ímpar e K_1, K_2, $\ldots$, K_n inteiros. Para uma permutação $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ dos números de 1 a n define-se $f(a_1,a_2,\ldots,a_n)=K_1a_1+K_2a_2+\ldots+K_na_n$. Mostre que existem duas permutações diferentes $(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ e $(c_1,c_2,\ldots,c_n)$ tais que $f(b_1,b_2,\ldots,b_n)-f(c_1,c_2,\ldots,c_n)$ é um múltiplo de $n!$.

Exemplo 11.7 Seja $n>1$ um número inteiro composto. Prove que n tem um fator primo $p\leq\sqrt{n}$.
Solução. Como n é composto, n pode ser escrito como $n=a\cdot b$, onde $a>1$ e $b>1$ são números inteiros. Agora, se $a>\sqrt{n}$ e $b>\sqrt{n}$ então $n=a\cdot b>\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}=n$, uma contradição. Portanto, um desses fatores deve ser $\leq\sqrt{n}$.

Note: Este resultado pode ser usado para testar a primalidade. Por exemplo, para mostrar que 101 é primo, calculamos $\lfloor\sqrt{101}\rfloor=10$. Pelo problema anterior, 101 é primo ou divisível por

2, 3, 5 ou 7 (primos menores que 10). Como nenhum desses primos divide 101, concluímos que 101 é primo. ■

Exemplo 11.8 Se m, n são números inteiros verificando $n+n^2+n^3 = m+m^2$, então n é par.
Solução. Suponha n ímpar. Então n^2 e n^3 também são ímpares (pois têm mesma paridade de n); e assim, $n+n^2+n^3$ é ímpar (pois é soma de três ímpares). Desse modo $m+m^2$ também é ímpar, pois é igual a $n+n^2+n^3$. No entanto, $m+m^2$ é sempre par (já que m e m^2 tem sempre mesma paridade). Chegamos, portanto, a uma contradição. Conclusão: n é par. ■

Exemplo 11.9 Provar que a equação $x^2-y^2 = 10$ não tem soluções inteiras positivas. E o que você pode dizer quanto à equação $x^2-y^2 = 25$? Compare.
Solução: (Parte 1) Suponha, por absurdo, que $x^2-y^2 = 10$ tem solução inteira positiva, ou seja,

$$(x+y)(x-y) = 10.$$

Há 4 casos possíveis para x e y: x e y pares, x ímpar e y par, x par e y ímpar e x e y ímpares (o segundo e o terceiro são análogos).
Caso 1: $(x+y)(x-y) = P\cdot P \neq 10$.
Caso 2: $(x+y)(x-y) = I\cdot I \neq 10$.
Caso 4: $(x+y)(x-y) = P\cdot P \neq 10$.
Note, em relação aos Casos 1 e 4, que não pode ocorrer a igualdade pois o produto de números pares é sempre um múltiplo de 4 (o 10 não cumpre essa característica).
■

Problema 11.20 Considere um número primo qualquer $p \geq 3$ e seja p' o primo consecutivo. Prove que $p+p'$ é o produto de três ou mais inteiros ≥ 2, não necessariamente primos e não necessariamente distintos.
Dicas: há um óbvio fator primo para $p+p'$, determine-o; suponha, a seguir, que essa soma tenha apenas mais um fator.

Exemplo 11.10 Quando a, b, c são números inteiros ímpares a equação $ax^2+bx+c = 0$ não tem raízes racionais.
Solução. Suponha, por absurdo, que a equação $ax^2+bx+c = 0$, a, b e c inteiros ímpares, tem raízes racionais. Ou seja, existe $\frac{p}{q}$ (p, q relativamente primos) que satisfaz a equação. Isto significa que

$$a(\frac{p}{q})^2+b(\frac{p}{q})+c = 0 \Rightarrow ap^2+bpq+cq^2 = 0.$$

Inicialmente existem quatro casos possíveis quanto a paridade de p e q: os dois serem pares, p ser par e q ímpar, p ímpar e q par, p e q ímpares. Note que o Caso 1 não é possível pois eles poderiam ser simplicados por 2 e isso não é possível por hipótese. Veja também que os Casos 2 e 3 são análogos. Analisemos:
Caso 2: $ap^2+bpq+cq^2 = P+P+I = I \neq 0$;
Caso 4: $ap^2+bpq+cq^2 = I+I+I = I \neq 0$.
Portanto, não há solução da forma $\frac{p}{q}$ para a equação. ■

Problema 11.21 Considere um inteiro ímpar $p \geq 5$ tal que uma certa potência inteira dele tem exatamente 20 dígitos em sua representação decimal. Prove que ao menos três desses dígitos são iguais.
Dica: supondo falsa a tese, calcule a soma dos dígitos dessa potência.

Exemplo 11.11 Prove que todo número primo maior que 2 pode ser escrito de maneira única como a diferença entre 2 quadrados.
Solução. Inicialmente temos $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$, $n \in \mathbb{N}$.
Mostramos assim que é possível escrever qualquer número ímpar como a diferença entre os quadrados de dois números consecutivos. E isso é quase toda a demonstração, pois todo número primo maior que 2 é ímpar. Basta apenas provar que essa representação é única.
Vamos supor por absurdo que essa representação não seja única, então existe um k natural maior que 1 que satisfaz $(n+k)^2 - (n)^2 = p$, onde p é um número primo e n é um número natural. Porém:

$$(n+k)^2 - (n)^2 = n^2 + 2nk + k^2 - n^2 = 2nk + k^2 = k(2n+k) = p.$$

Ou seja, p é um múltiplo de k, porém p é primo, então $k = 1$ ou $k = p$.
Absurdo, pois $k > 1$ e $k = p$ não satisfaz $k(2n+k) = p$ para todo n natural. ■

11.2 Princípio da Indução Finita

11.2.1 Falsa Indução: Um exemplo

Havia uma galinha nova no quintal de uma velha senhora. Diariamente, ao entardecer, a boa senhora levava milho às galinhas. No primeiro dia, a galinha, desconfiada, esperou que a senhora se retirasse para se alimentar. No segundo dia, a galinha, prudentemente, foi se alimentando enquanto a senhora se retirava. No nonagésimo dia, a galinha, cheia de intimidade, já não fazia caso da velha senhora. No centésimo dia, ao se aproximar a senhora, a galinha, por indução, foi ao encontro dela para reclamar o seu milho. Qual não foi a sua surpresa quando a senhora pegou-a pelo pescoço com a intenção de pô-la na panela.

11.2.2 Problemas de Aplicação

Problema 11.22 Considere a seguinte proposição: $P(n): n^2 - n + 41$ é um número primo, para todo natural n. É fácil verificar que as sentenças $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ são verdadeiras. Com algum trabalho, é possível ir além, verificando também que $P(4)$, $P(5)$,..., $P(35)$ são verdadeiras. Portanto, é plausível que tenhamos encontrado um polinômio cujos valores nos números naturais sejam sempre números primos. Isto é verdade? Argumente.

Exemplo 11.12 Mostre, usando o princípio da indução finita, que:
a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

Solução. De fato, para $n = 1$, $1^2 = \dfrac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6} = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{6}$.

Supondo válida a igualdade para $n=k$ analisemos o caso $n=k+1$:

$$\begin{aligned}\frac{(k+1)[(k+1)+1)][2(k+1)+1]}{6} &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}\\ &= \frac{(k+1)\left(2k^2+7k+6\right)}{6}\\ &= \frac{(k+1)[6(k+1)+k(2k+1)]}{6}\\ &= \frac{6(k+1)^2+k(k+1)(2k+1)}{6}\\ &= (k+1)^2+\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}\\ &= (k+1)^2+k^2+\ldots+3^2+2^2+1^2.\end{aligned}$$

b) $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\dfrac{n^2}{4}(n+1)^2$, $n\in\mathbb{N}$;

c) $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\dfrac{n}{3}(4n^2-1)$, $n\in\mathbb{N}$;

d) $1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$, $n\in\mathbb{N}$;

e) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n\cdot(n+1)=\dfrac{n}{3}(n+1)(n+2)$, $n\in\mathbb{N}$;

Solução. De fato, para $n=1$, $1\cdot 2=\dfrac{1(1+1)(1+2)}{3}=\dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{3}$.

Supondo válida a igualdade para $n=k$ analisemos o caso $n=k+1$:

$$\begin{aligned}\frac{(k+1)((k+1)+1)((k+1)+2)}{3} &= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}\\ &= \frac{3(k+1)(k+2)+k(k+1)(k+2)}{3}\\ &= (k+1)(k+2)+\frac{k(k+1)(k+2)}{3}\\ &= (k+2)(k+1)+(k+1)k+\ldots+4\cdot 3+3\cdot 2+2\cdot 1.\end{aligned}$$

f) $1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{9}+\ldots+\dfrac{1}{n^2}\le 2-\dfrac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}$;

g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k)^3=2[n(n+1)]^2$, $\forall n\ge 2$;

h) $\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\ldots+\dfrac{n}{(n+1)!}=\dfrac{(n+1)!-1}{(n+1)!}$, $\forall n\ge 2$. ■

Teorema 11.2.1 [Desigualdade de Bernoulli[a]] Vale a desigualdade

$$(1+x)^n\ge 1+n\cdot x,$$

onde $x\ge -1$ é um número real e n um natural.

Prova: Usaremos indução sobre n para demonstrar tal desigualdade. Doravante, por questões didáticas, faremos as demonstrações que envolvem o Princípio da Indução Finita em 3 (três) passos, a saber: *Caso Inicial*, *Hipótese de Indução* e *Passo Indutivo*.

1^o Passo: Caso Inicial

Para $n=1$, tem-se

$$(1+x)^1\ge 1+1\cdot x.$$

O que é obviamente verdade.
2^o Passo: Hipótese de Indução
Suponhamos que a desigualdade é válida para $n \geq 1$, ou seja, que

$$(1+x)^n \geq 1+n\cdot x.$$

3^o Passo: Passo Indutivo
Multiplicando ambos os membros da desigualdade acima por $(1+x)$, chegaremos a

$$\begin{aligned}(1+x)^n(1+x) &\geq (1+nx)(1+x)\\ &= 1+nx+x+nx^2\\ &= 1+(n+1)x+nx^2\\ &\geq 1+(n+1)x.\end{aligned}$$

Assim, a desigualdade também é válida para $n+1$.
Portanto, o Princípio da Indução Finita garante que a desigualdade é válida sempre.
Poderíamos argumentar também, usando o **Binômio de Newton**, que

$$(1+x)^n = 1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\ldots+\binom{n}{1}x^n,$$

e uma vez que todas as parcelas, a partir da terceira, são positivas ou nulas,

$$(1+x)^n \geq 1+\binom{n}{1}x = 1+nx.$$

[a] A afirmação de que vale a desigualdade acima é frequentemente atribuída ao suíço **Jacques Bernoulli** (1654-1705), ilustre integrante desta família que gerou, pelo menos, cinco gerações de matemáticos célebres entre os séculos XVII e XIX. Esta desigualdade tem enormes repercussões no *Cálculo* e na *Análise*.

Problema 11.23 Mostre, usando o princípio da indução finita, que:

a) $2^n > n$, $n \in \mathbb{N}$;
b) $n^2 > 2n+1$, $\forall n \geq 3$;
c) $\dfrac{1}{2^n} \leq 1-\dfrac{1}{n+1}$, $\forall n \geq 1$;
d) $2^{\frac{1}{n}} \geq 1+\dfrac{1}{2n-1}$, $\forall n \geq 1$; (use **Teorema 11.2.1**)
e) $(n!)^2\cdot 4^{n-1} \geq (2n)!$, $\forall n \geq 5$;
f) $n^n > n! > 2^n$, $\forall n \geq 4$;
g) $n^{n+1} > (n+1)^n$, $\forall n \geq 3$;
h) $(n!)^2 > n^n$, $\forall n \geq 3$; (use item anterior)
i) $(n^2)! \geq (n!)^2$, $\forall n \geq 1$;

Problema 11.24 Usando o Princípio da Indução Finita, prove as identidades abaixo:

a) $sen x + sen 2x + \ldots + sen nx = \dfrac{sen\left(\dfrac{n+1}{2}\cdot x\right)\cdot sen\left(\dfrac{n}{2}\cdot x\right)}{sen\left(\dfrac{x}{2}\right)}$, $x \neq 2k\pi$;

b) $sen x + sen(x+h) + \ldots + sen(x+nh) = \dfrac{sen\left(x+\dfrac{nh}{2}\right)\cdot sen\left(\dfrac{n+1}{2}\cdot h\right)}{sen\left(\dfrac{h}{2}\right)}$, $h \neq 2k\pi$.

c) $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}3\alpha+\operatorname{sen}5\alpha+\ldots+\operatorname{sen}(2n-1)\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha+\ldots+\cos(2n-1)\alpha} = \operatorname{tg} n\alpha.$

Problema 11.25 Demonstrar as desigualdades:

a) $2^n \cdot n! < n^n$, se $n > 2$;
b) $\dfrac{a_1}{a_2}+\dfrac{a_2}{a_3}+\ldots+\dfrac{a_{n-1}}{a_n}+\dfrac{a_n}{a_1} \geq n$, se $a_1 > 0, \ldots, a_n > 0$.

Problema 11.26 Demonstrar que para todo $n \in \mathbb{N}$
a) $3^{2n+1}+2^{n+2}$ é um múltiplo de 7.
b) $3^{2n+2}+2^{6n+1}$ é um múltiplo de 11.
Problema 11.27 Demonstrar que para qualquer inteiro n, o número $11^{n+2}+12^{2n+1}$ é divisível por 133.
Problema 11.28 Demonstrar que para qualquer número $a>0$ é válida a desigualdade

$$\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a}}}}<\frac{1+\sqrt{4a+1}}{2}$$

(no primeiro membro a quantidade de radicais é arbitrária).
Problema 11.29 Mostre que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}>\frac{n}{2}$$

Problema 11.30 — Binômio de Newton. Sejam a e b números reais e n um inteiro positivo. Demonstre por indução que

$$(a+b)^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^{n-j}b^j.$$

Problema 11.31 — PUTNAM, 2010, treinamento. A sequência de Fibonacci $0,1,1,2,3,5,8,13,\ldots$ é definida como uma sequência cujos dois primeiros termos são $F_0=0$ e $F_1=1$ e cada termo subsequente é a soma dos dois anteriores: $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ (para $n\geq 2$). Prove que $F_n<2^n$ para todo $n\geq 0$.
Problema 11.32 — Fibonacci. Sobre a sequência de Fibonacci $F_0=0$, $F_1=1$, $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$, com $n\geq 0$, prove cada fórmula abaixo.
1. $F_n=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\sqrt{5}}$, onde $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$
2. $F_n=\begin{pmatrix} n-1 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} n-2 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} n-3 \\ 2 \end{pmatrix}+\ldots$
3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}F_i^2=F_nF_{n+1}$
4. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$
5. $F_{n-1}F_{n+1}=F_n^2+(-1)^n$
6. $F_1+F_2+\ldots+F_n=F_{n+2}-1$
7. $F_1+F_3+\ldots+F_{2n+1}=F_{2n+2}$, $1+F_2+F_4+\cdots+F_{2n}=F_{2n+1}$
8. $F_nF_{n+1}-F_{n-2}F_{n-1}=F_{2n-1}$, $\quad F_{n+1}F_{n+2}-F_nF_{n+3}=(-1)^n$
9. $F_{n-1}^2+F_n^2=F_{2n-1}$, $F_n^2+2F_{n-1}F_n=F_{2n}$, $F_n\left(F_{n+1}+F_{n-1}\right)=F_{2n}$
10. $F_1F_2+F_2F_3+\ldots+F_{2n-1}F_{2n}=F_{2n}^2$
11. $F_n^3+F_{n+1}^3-F_{n-1}^3=F_{3n}$.

Para a solução deste problema usaremos o seguinte lema:

$$F_{a+b}=F_{a-1}F_b+F_aF_{b+1}\ (\textit{prove isto!})$$

Vamos usar indução sobre n para provar que a igualdade acima é válida para todo $n\geq 1$.
É fácil verificar o Caso Inicial. Suponha que a igualdade é verdadeira para $1\leq n\leq k$.
Queremos mostrar que ela também é verdadeira para $n+1$, ou seja,

$$F_{n+1}^3+F_{n+2}^3-F_n^3=F_{3(n+1)}$$

Manipulando o lado esquerdo da igualdade acima obtemos:

$$\begin{aligned}
F_{n+1}^3+F_{n+2}^3-F_n^3 &= (F_n+F_{n-1})^3+(F_{n+1}+F_n)^3-(F_{n-1}+F_{n-2})^3\\
&= F_{3n}+F_{3n-3}+3F_n(F_{n-1}F_{n+1}+\sum_{k=1}^{n+1}F_k^2-\sum_{k=1}^{n-2}F_k^2)\\
&= F_{3n}+F_{3n-3}+3F_n(F_{n-1}F_{n+1}+F_{n+1}^2+F_n^2+F_{n-1}^2)\\
&= F_{3n}+F_{3n-3}+3F_n(F_{n-1}F_{n+1}+F_{n+1}^2+F_{2n-1})\\
&= F_{3n}+F_{3n-3}+3F_n(F_{n+1}\frac{F_{2n}}{F_n}+F_{2n-1})\\
&= F_{3n}+F_{3n-3}+3(F_{n+1}F_{2n}+F_nF_{2n-1})\\
&= F_{3n}+F_{3n-3}+3F_{3n}=F_{3(n+1)}
\end{aligned}$$

Portanto, temos que $F_{n+1}^3+F_{n+2}^3-F_n^3=F_{3(n+1)}$. O que completa a prova.

12. $m|n \Rightarrow F_m|F_n$

13. $\mathrm{mdc}(F_m,F_n)=F_{\mathrm{mdc}(m,n)}$

14. Seja t a raiz positiva de $t^2=t+1$. Então $t=1+\frac{1}{t}$, a partir do qual segue a contínua expansão fracionária

$$t=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}}$$

em que $t_1=1$, $t_2=1+\frac{1}{1}$, $t_3=1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{1}}$,... Prove que:

a) $t_n=\dfrac{F_{n+1}}{F_n}$;

b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{F_n}=4-t$;

c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{F_sF_{n+1}}=t-1$; e

d) $\displaystyle\prod_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{F_n^2}\right)=t.$

Problema 11.33 Demonstre que a n-ésima potência do comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo é maior que a soma das n-ésimas potências dos comprimentos dos catetos, onde n é um inteiro maior que 2.

Problema 11.34 Em uma loteria de N números há um só prêmio. Salvador compra n $(1<n<N)$ bilhetes para uma só extração e Sílvio compra n bilhetes, um para cada uma de n extrações. Qual dos dois jogadores tem mais chance de ganhar algum prêmio?

Problema 11.35 — PROFMAT. Considere a sequência

$$a_1=2,\ a_2=3 \text{ e } a_n=a_{n-1}+a_{n-2},\ \forall n\geq 3.$$

Prove por indução sobre n que $a_n<\left(\frac{17}{10}\right)^n$, $\forall n\geq 4$.

Problema 11.36 — PROFMAT. Considere a sequência

$$a_1=2,\ a_2=3 \text{ e } a_n=a_{n-1}+a_{n-2},\ \forall n\geq 3.$$

Prove por indução sobre n que $a_n>\left(\frac{8}{5}\right)^n$, $\forall n\geq 1$.

Problema 11.37 — OCM. Suponha que a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ satisfaz $f(xy)=x\cdot f(y)+y\cdot f(x)$ para todos $x,y\in\mathbb{R}$. Prove que $f(1)=0$ e que $f(u^n)=n\cdot u^{n-1}\cdot f(u)$ para todo n natural e todo u real.

Problema 11.38 Prove que se $x+\dfrac{1}{x}$ é um inteiro, então $x^n+\dfrac{1}{x^n}$ também é inteiro.

Problema 11.39 Prove que $u_n=(3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n$ é sempre um número inteiro, qualquer que seja $n\in\mathbb{N}$.

Problema 11.40 Prove que se a e b são números inteiros, então para todo número natural n tem-se que

$$(a+b)^n=\dot{a}+b^n,$$

onde $\dot{a}$ denota um múltiplo de a.

Problema 11.41 Prove a *desigualdade triangular* ($|a+b|\leq|a|+|b|$) e generalize.

Problema 11.42 Prove que

$$|x-1|+|x-2|+|x-3|+\ldots+|x-2n|\geq\left(\frac{n}{2}\right)^2$$

para todo n natural.

Problema 11.43 $2n$ pontos são dados no espaço. No total, n^2+1 segmentos de reta são desenhados entre esses pontos. Mostre que há pelo menos um conjunto de três pontos que são unidos aos pares por segmentos de reta.

Teorema 11.2.2 Se $a_1,a_2,\ldots,a_n$ são números reais positivos e M_A e M_G, são suas médias aritmética e geométrica, então $M_A\geq M_G$.
Além do mais, a igualdade ocorre se, e somente se,

$$a_1=a_2=\ldots=a_n.$$

Prova: A demonstração a seguir é devida ao grande matemático francês **Augustin-Louis Cauchy**, responsável direto pelo rigor na *Análise*, típico da matemática moderna.

A estratégia desta demonstração baseia-se no Princípio da Indução Finita e consta de duas partes: na primeira delas, considera-se uma quantidade de termos que seja potência de 2, a próxima parte da prova é estender a validade de $M_A\geq M_G$ para qualquer quantidade de termos, aplicando-se para isso a desigualdade para uma quantidade n (que não seja uma potência de 2) de números positivos e 2^k-n cópias da média geométrica de tais n números.

Assim, devemos provar que

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n},$$

ocorrendo a igualdade se, e só se, $a_1=a_2=\ldots=a_n$.

Faremos a prova em dois passos, conforme antecipamos, a saber:

(i) $\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \Leftrightarrow n = 2^k (k \in \mathbb{N})$, ocorrendo a igualdade se, e só se, $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

(ii) a desigualdade é verdadeira para qualquer quantidade de números, e a igualdade ocorre se, e só se, $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Prova de (i): Usaremos indução sobre $k \geq 1$, e consideremos $n = 2^k$ a quantidade dos números em que aplicaremos nossas médias.

1^o Passo: Caso Inicial

Para $k = 1$, $(n = 2)$, temos

$$\frac{a_1+a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2} \Leftrightarrow (\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0,$$

o que é verdade. E mais: $(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 = 0 \Leftrightarrow a_1 = a_2$.

2^o Passo: Hipótese de Indução

Suponha que (i) seja verdade, ou seja, que para $n = 2^k$ números positivos ocorra

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}, \text{ com } n = 2^k.$$

3^o Passo: Passo Indutivo

Vejamos o que ocorre para n^{k+1} números:

$$\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)+(a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{2n})}{2n} = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} + \frac{\sum_{i=n+1}^{2n} a_i}{n} \right] \geq$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left[\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{i=n+1}^{2n} a_i\right)^{\frac{1}{n}} \right] \geq \left[\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}} \cdot \left(\prod_{i=n+1}^{2n} a_i\right)^{\frac{1}{n}} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\left(\prod_{i=1}^{2n} a_i\right)\right]^{\frac{1}{2n}}.$$

Para haver igualdade, devemos ter igualdade em todas as passagens. Assim, deve ocorrer

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n},$$

$$\frac{a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{2n}}{n} = \sqrt[n]{a_{n+1} \cdot a_{n+2} \cdot \ldots \cdot a_{2n}}$$

$$\text{e } \frac{\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} + \sqrt[n]{a_{n+1} \cdot a_{n+2} \cdot \ldots \cdot a_{2n}}}{2} = \sqrt[2n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot a_{n+1} \cdot a_{n+2} \cdot \ldots \cdot a_{2n}}.$$

Para as duas primeiras igualdades, a hipótese garante que

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n \text{ e } a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots = a_{2n}.$$

Já a última igualdade ocorre se, e somente se,

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} = \sqrt[n]{a_{n+1} \cdot a_{n+2} \cdot \ldots \cdot a_{2n}}.$$

Estas duas condições juntas implicam que devemos ter

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots = a_{2n}.$$

É também evidente que se os números forem todos iguais a igualdade está garantida.

Prova de (ii): Seja agora $n > 1$ um natural qualquer e $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reais positivos. Tome k de tal maneira que $2^k > n$.

Aplicando $M_A \geq M_G$ para os n números $\{a_1, \ldots, a_n\}$ e $2^k - n$ cópias de $a = \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}$, obtemos

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n + a + \ldots + a}{2^k} \geq= \sqrt[2^k]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot a^{2^k - n}} = \sqrt[2^k]{a^n \cdot a^{2^k - n}} = a \Rightarrow$$
$$a_1 + \ldots + a_n + (2^k - n) \cdot a \geq 2^k a \Rightarrow \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \geq a = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

Para haver igualdade, pelo item (i), deve ocorrer

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a = \ldots = a.$$

Em particular, $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Evidentemente, se $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ vale a igualdade.

12. Desigualdades

12.1 Banco de Problemas

Problema 12.1 — Experiência com calculadora. Experimente digitar um número qualquer e teclar repetidamente a tecla *raiz quadrada* $\boxed{\sqrt{\ }}$. Perceberemos, ao testar esse procedimento algumas vezes, que, independentemente do número inicial escolhido, o valor final no visor é sempre igual a 1. Por que isso ocorre?

Problema 12.2 Seja $a+b+c=1$. Prove a desigualdade

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1} \le \sqrt{21}.$$

Problema 12.3 Prove que, para quaisquer números positivos $x_1, x_2, \ldots, x_k$ $(k \ge 4)$,

$$\frac{x_1}{x_k+x_2}+\frac{x_2}{x_1+x_3}+\ldots+\frac{x_k}{x_{k-1}+x_1} \ge 2.$$

Você pode substituir 2 por um número maior?

Problema 12.4 Prove que, para reais positivos a, b, c

$$\frac{a+b-2c}{b+c}+\frac{b+c-2a}{c+a}+\frac{c+a-2b}{a+b} \ge 0.$$

Problema 12.5 Prove a desigualdade

$$(a^3-a+2)^2 > 4a^2(a^2+1)(a-2).$$

Problema 12.6 Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números positivos e $a_{n+1}=a_1$. Prove que

$$2 \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{a_k + a_{k+1}} \geq \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Problema 12.7 Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números positivos com $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$. Prove que

$$x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \ldots + x_n^{n-1} \geq \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}.$$

Problema 12.8 Ache todos os valores assumidos por

$$\frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}$$

se $x, y, z > 0$.

Problema 12.9 Sejam a, b e c os comprimentos dos lados de um triângulo, e sejam s_a, s_b, s_c os comprimentos de suas medianas. D é o diâmetro do círculo circunscrito. Prove que

$$\frac{a^2+b^2}{s_c} + \frac{b^2+c^2}{s_a} + \frac{c^2+a^2}{s_b} \leq 6D.$$

Problema 12.10 Ache todas as soluções positivas do sistema

$$\begin{cases} x+y+z = 1 \\ x^3+y^3+z^3+xyz = x^4+y^4+z^4+1 \end{cases}$$

Problema 12.11 Sejam x, y, z reais positivos com $xy+yz+zx = 1$. Prove a desigualdade

$$\frac{2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} + \frac{2y(1-y^2)}{(1+y^2)^2} + \frac{2z(1-z^2)}{(1+z^2)^2} \leq \frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2}.$$

Problema 12.12 — IMO, 1995. Sejam a, b e c números reais positivos tais que $abc = 1$. Prove que

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Problema 12.13 Prove que, para números reais $x_1 \geq x_1 \geq \ldots \geq x_n > 0$,

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \leq \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \ldots + \frac{x_n}{x_{n-1}} + \frac{x_1}{x_n}.$$

Problema 12.14 — MMO, 1996. Prove que, se a, b e c satisfazem às desigualdades

$$|a-b| \geq |c|,\ |b-c| \geq |a|,\ |c-a| \geq |b|,$$

então um desses números é a soma dos outros dois.

Problema 12.15 — MMO, 1996. Os números inteiros positivos a, b e c são tais que $a^2+b^2-ab = c^2$. Prove que

$$(a-c)(b-c) \leq 0.$$

Problema 12.16 Se x, y e z são reais do intervalo $[0,1]$, então

$$2(x^3+y^3+z^3) - x^2y - y^2z - z^2x \leq 3.$$

Problema 12.17 Se a, b e c são números reais tais que $0 \leq a, b, c \leq 1$, então

$$\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ac} + \frac{c}{1+ab} \leq 2.$$

Problema 12.18 Prove que, para qualquer distribuição de sinais $+$ e $-$ nas potências de x,

$$x^{2n} \pm x^{2n-1} \pm x^{2n-2} \pm x^{2n-3} + \ldots + x^4 \pm x^3 \pm x^2 \pm x + 1 > \frac{1}{2}.$$

Problema 12.19 São dados os oito números reais a, b, c, d, e, f, g e h. Prove que pelo menos um dos seis números $ac+bd$, $ae+bf$, $ag+bh$, $ce+df$, $cg+dh$, $eg+fh$ é não negativo.

Problema 12.20 Sejam $n>2$ e $x_1,x_2,\ldots,x_n$ reais não-negativos. Prove a desigualdade

$$(x_1x_2\ldots x_n)^{1/n}+\frac{1}{n}\sum_{i<j}|x_i-x_j|\geq\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}.$$

Problema 12.21 Sejam $a,b\in\mathbb{R}$ e $f(x)=a\cdot cos\,x+b\cdot cos\,3x$. Sabe-se que $f(x)>1$ não tem soluções. Prove que $|b|\leq 1$.

Problema 12.22 Sejam a, b e c lados de um triângulo. Prove que

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geq 3.$$

13. Miscelânea de Álgebra

Problema 13.1 Prove que se $a \in \mathbb{N}$, então $6|(2a^3+3a^2+a)$.

Problema 13.2 Prove que se $a \in \mathbb{N}$, então $\dfrac{a^5}{120}+\dfrac{a^4}{12}+\dfrac{7a^3}{24}+\dfrac{5a^2}{12}+\dfrac{a}{5}$ é um número inteiro.

13.1 Transformações de Expressões Racionais

Exemplo 13.1 $\dfrac{a^4+a^2-2}{a^6+8} = \dfrac{(a^2-1)(a^2+2)}{a^6+8} = \dfrac{(a^2-1)(a^2+2)}{(a^2+2)(a^4-2a^2+4)} = \dfrac{a^2-1}{a^4-2a^2+4}$. ■

Problema 13.3 $\dfrac{5a^4+5a^2-3a^2b-3b}{a^4+3a^2+2}$.

Problema 13.4 $\dfrac{1}{1-a}+\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{2}{1+a^2}+\dfrac{4}{1+a^4}+\dfrac{8}{1+a^8}+\dfrac{16}{1+a^{16}}$.

Problema 13.5

$$\left(\frac{b}{a+b}+a\right)\left(\frac{a}{a-b}-b\right)-\left(\frac{a}{a+b}+b\right)\left(\frac{b}{a-b}-a\right)$$

.

Problema 13.6

$$\frac{a+b}{(b-c)(c-a)}+\frac{b+c}{(c-a)(a-b)}+\frac{c+a}{(a-b)(b-c)}$$

.

Problema 13.7

$$\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}+\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

.

Problema 13.8

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}$$
$$=\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{c-a}$$

.

Problema 13.9 Prove que $(a-1)(a-3)(a-4)(a-6)+10$ é um número positivo para $a \in \mathbb{R}$.

Problema 13.10 Prove que se $a+b+c=0$, então

$$\frac{a^7+b^7+c^7}{7} = \left(\frac{a^5+b^5+c^5}{5}\right)\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right).$$

Problema 13.11 Prove que se $a+b+c=0$, então

$$a^5(b^2+c^2)+b^5(a^2+c^2)+c^5(b^2+a^2)$$
$$= \frac{(a^3+b^3+c^3)(a^4+b^4+c^4)}{2}$$

Problema 13.12 $1\cdot 4+2\cdot 7+3\cdot 10+\ldots+n\cdot(3n+1)=n\cdot(n+1)^2$.

Exemplo 13.2 $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}=\dfrac{1}{2}\cdot\left[\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$.
Dica: Use o fato que

$$\frac{1}{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)} = \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

■

Problema 13.13

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right)$$

.

Problema 13.14 $(n+1)(n+2)\ldots(n+n)=2^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)$.

Exemplo 13.3 $S_n=\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.
Dica: Use o fato que

$$\frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-2}-\frac{1}{3k+1}\right)$$

■

Problema 13.15 $S_n=1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n-1}n^2$.

Problema 13.16 $\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{2}{1+x^2}+\dfrac{4}{1+x^4}+\ldots+\dfrac{2^n}{1+x^{2^n}}=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}$, onde $|x|\neq 1$.

Problema 13.17 $35|(6^{2n}-1)$.

Problema 13.18 $11|(6^{2n}+3^{n+2}+3^n)$.

Problema 13.19 $37|(2^{n+5}\cdot 3^{4n}+5^{3n+1})$.

Problema 13.20 $25|(2^{n+2}\cdot 3^n+5n-4)$.

Problema 13.21 $24|(n^6-3n^5+6n^4-7n^3-2n)$.

Problema 13.22 Calcule o valor numérico das expressões:

a) $4a^3+2a^2-8a+7$, para $a=\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}+1)$;

b) $2a(1+x^2)^{\frac{1}{2}}(x+(1+x^2)^{\frac{1}{2}})^{-1}$, para $x=\dfrac{1}{2}((ab^{-1})^{\frac{1}{2}}-(ba^{-1})^{\frac{1}{2}})$;

c) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$;

d) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$;

e) $(\sqrt{5+2\sqrt{6}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}})\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

f) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{2}}$;

g) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{15}-\sqrt[3]{7}}$;

h) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}}}$;

i) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$;

j) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}$;

k) $\dfrac{1}{\sqrt{14}+\sqrt{21}+\sqrt{15}+\sqrt{10}}$;

l) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{4}+\sqrt[4]{8}+2}$;

m) $\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}}}$;

n) $\dfrac{2+\sqrt{6}}{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{6}-2}$;

o) $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=2$.

Problema 13.23 Nos itens seguintes, prove as desigualdades.

a) $\dfrac{a^2}{1+a^4}\leq\dfrac{1}{2}$.

b) Se $a\geq 0$, $b\geq 0$, então $\sqrt{a^5+b^5}\geq a^4b+ab^4$.

c) Se $a>0$, $b>0$, então $\dfrac{a}{\sqrt{b}}+\dfrac{b}{\sqrt{a}}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

d) Se $a+b\geq 0$, $a\neq 0$, $b\neq 0$, então $\dfrac{a}{b^2}+\dfrac{b}{a^2}\geq\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$.

e) Se $a+b\geq 0$, então $ab(a+b)\leq a^3+b^3$.

f) $a^2+2b^2+2ab+b+10>0$.

g) $1+2a^4\geq a^2+2a^3$.

h) Se $a\neq 2$, então $\dfrac{1}{a^2-4a+4}>\dfrac{2}{a^3-8}$.

i) Se $a\geq -1$, então $a^3+1\geq a^2+a$.

j) $a^2+b^2+c^2+3\geq 2(a+b+c)$.

k) Se $a+b\geq 0$, então $\dfrac{a^3+b^3}{2}\geq\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^3$.

l) $a^2+b^2\geq ab$.

m) $\dfrac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}}\geq 2$.

n) $\dfrac{a^2+a+2}{\sqrt{a^2+a+1}}\geq 2$.

o) Se $a_1,a_2,\ldots,a_n$ são números não-negativos e $a_1\cdot a_2\cdot\ldots a_n=1$, então $(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)\geq 2^n$.

p) Se $a\geq 0$, $b\geq 0$, então $\dfrac{a+b}{2}\leq\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.

q) Se $a>0$, $b>0$, então $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$.

r) Se $a>0$, $b>0$, então $\dfrac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\leq\sqrt[4]{ab}$.

s) $\sqrt{a^2+b^2}>\sqrt[3]{a^3+b^3}$.

t) $a^2+b^2+c^2\geq ab+ac+bc$.

u) Se $abc\neq 0$, $ab+ac+bc\neq 0$, então $\dfrac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\leq\sqrt[3]{abc}$.

v) Se $a>0$, $b>0$, $c>0$, $d>0$, então $\dfrac{4}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}\leq\sqrt[4]{abcd}$.

Problema 13.24 Se $n\geq 5$, então $2^n>n^2$.

Problema 13.25 Se $n\geq 10$, então $2^n>n^3$.

Problema 13.26 $|a_1+a_2+\ldots+a_n|\leq|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|$.

Problema 13.27 Se $n\geq 2$, então $\sqrt{n}<1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Problema 13.28 Se $n\geq 2$, então $2\sqrt{n}>1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Problema 13.29 Se $n\geq 2$, então $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{2n}>\dfrac{13}{24}$.

Problema 13.30 Se $n\geq 2$, então $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{2^n-1}<n$.

Problema 13.31 Se $n\geq 2$, então $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{2^n-1}<n$.

14. Somatórios

14.1 Somatórios

Definição 14.1.1 Sejam a_1, a_2, $a_3, \ldots$ uma sucessão de números reais, a expressão $\sum_{i=p}^{q} a_i$ denota a soma de todos os termos da sucessão cujos índices i vão desde p até q, quer dizer:

$$\sum_{i=p}^{q} a_i = a_p + a_{p+1} + a_{p+2} + \ldots + a_q.$$

Exemplo 14.1 Desenvolva as somas:

a) $\sum_{i=1}^{3} i = 1+2+3.$

b) $\sum_{i=2}^{5} i^2 = 2^2+3^2+4^2+5^2.$

c) $\sum_{i=1}^{4} 2^i = 2^1+2^2+2^3+2^4.$ ■

Na somatória $\sum_{i=p}^{q} a_i$ a quantidade de parcelas é $q-p+1$. Há uma notação similar: $\sum_{i\in S} a_i$ que denota a soma dos a_i, onde i assume os valores dos elementos do conjunto S. Por exemplo, se $S = \{2,3,7\}$ então $\sum_{i\in S} a_i = a_2+a_3+a_7$.

Proposição 14.1.1 Sejam $(a_1,\, a_2,\, a_3, \ldots)$ e $(b_1,\, b_2,\, b_3, \ldots)$ sucessões de números reais, e c um número real, então:

- **S1:** $\sum_{i=p}^{q} c = c(q-p+1)$;
- **S2:** $\sum_{i=p}^{q} (c \cdot a_i) = c \cdot \sum_{i=p}^{q} a_i$;

- **S3:** $\sum_{i=p}^{q}(a_i+b_i)=\sum_{i=p}^{q}a_i+\sum_{i=p}^{q}b_i$;
- **S4:** $\sum_{i=1}^{n}(a_{i+1}-a_i)=a_{n+1}-a_1$;
- **S5:** $\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{i=1}^{n}a_{n+1-i}$.

Exemplo 14.2 Calcule o valor de $S_n=\sum_{i=1}^{n}i$.

Solução. Usando as propriedades apresentadas acima:

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}i=\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)\Rightarrow 2S_n=\sum_{i=1}^{n}[i+(n+1-i)]=\sum_{i=1}^{n}[n+1]=n(n+1),$$

se obtém o resultado desejado. ■

Exemplo 14.3 Calcular a soma $\sum_{k=0}^{n}2^k=2^0+2^1+\ldots+2^n$.

Solução. Note que $2^k=2^{k+1}-2^k$, então a soma pedida é igual a

$$\sum_{k=0}^{n}[2^{k+1}-2^k]$$

e pela Propriedade Telescópica essa soma é igual a $2^{n+1}-2^0=2^{n+1}-1$. ■

Exemplo 14.4 Calcular a soma $\sum_{k=1}^{n}k\cdot 2^k$.

Solução 1: Seja T_n a soma pedida.

$$\begin{aligned} T_n &= 1\cdot 2^1+2\cdot 2^2+\ldots+n\cdot 2^n \\ 2T_n &= 1\cdot 2^2+2\cdot 2^3+\ldots+n\cdot 2^{n+1} \end{aligned}$$

Agora, subtraindo a primeira da segunda equação:

$$-T_n=2^1+2^2+2^3+\ldots+2^n-n\cdot 2^{n+1}$$

Porém, do problema anterior, tem-se que

$$2^1+2^2+\ldots+2^n=2^{n+1}-2$$

Substituindo isso na conclusão anterior

$$T_n=(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$$

Solução 2: Comecemos com a identidade seguinte:

$$(k+1)\cdot 2^{k+1}-k\cdot 2^k=k\cdot 2^k+2^{k+1}$$

Aplicando a somatória na identidade acima

$$\sum_{k=1}^{n}[(k+1)\cdot 2^{k+1}-k\cdot 2^k]=\sum_{k=1}^{n}k\cdot 2^k+\sum_{k=1}^{n}2^{k+1}.$$

Pela Propriedade Telescópica, o lado esquerdo é igual a $(n+1)\cdot 2^{n+1}-1\cdot 2^1$, logo:

$$(n+1)\cdot 2^{n+1}-1\cdot 2^1=\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^k+\sum_{k=1}^{n} 2^{k+1},$$

usando resultado anterior, conclui-se concluir que:

$$\sum_{k=1}^{n} 2^{k+1}=2^{n+2}-4,$$

e assim

$$\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^k=(n+1)\cdot 2^{n+1}-2-(2^{n+2}-4)=(n-1)\cdot 2^{n+1}+2.$$

■

14.2 Progressões Aritméticas e Progressões Geométricas

Suponhamos que uma progressão aritmética de n termos tem primeiro termo a e razão r, então o k-ésimo termo da progressão vale

$$t_k=a+(k-1)\cdot r,$$

em particular temos que o primeiro termo é $t_1=a$ e o último termo (n-ésimo) é $t_n=a+(n-1)\cdot r$. Vamos calcular a soma de todos os termos da progressão:

$$\sum_{k=1}^{n} t_k=\sum_{k=1}^{n}[a+(k-1)r]=an+r\cdot\sum_{k=1}^{n}(k-1)=an+r\cdot\frac{(n-1)n}{2}=n\frac{(t_1+t_n)}{2}.$$

O que em suma significa que se pode conhecer a soma dos termos de uma P.A. a partir do primeiro termo, último termo e a quantidade desses termos.

Exemplo 14.5 Calcule as somas abaixo.

a) $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n\cdot\left[\frac{1+(2n-1)}{2}\right]=n^2$;

b) $2+5+8+\ldots+(3n+2)=(n+1)\cdot\left[\frac{2+(3n+2)}{2}\right]=\frac{(n+1)(3n+4)}{2}$. ■

Analisemos agora o caso das progressões geométricas.
Suponhamos que uma progressão geométrica de n termos tem primeiro termo a e razão q, então o k-ésimo termo da progressão pode ser obtido por

$$t_k=a\cdot q^{k-1}.$$

Para calcular a soma de todos os termos desta progressão, necessitamos conhecer primeiro a soma

$$Q_n=\sum_{k=1}^{n} q^{k-1}=1+q+q^2+\ldots+q^{k-1}.$$

Multiplicando a expressão acima por q obtemos:

$$q\cdot Q_n=q+q^2+q^3+\ldots+q^k,$$

Subtraindo da última expressão acima o valor de Q_n chegamos a:

$$q\cdot Q_n-Q_n=q^n-1\therefore Q_n=\frac{q^n-1}{q-1}.$$

Assim, concluímos que

$$\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = \frac{q^n - 1}{q-1}.$$

Exemplo 14.6 Calcule as somas abaixo.

a) $3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2} + \ldots + 3^{2n} = 3^n \left(\dfrac{3^{n+1}-1}{3-1}\right) = \dfrac{3^n(3^{n+1}-1)}{2}$;

b) $1 - 2^1 + 2^2 - 2^3 + 2^4 - \ldots + 2^{2n} = 1\left[\dfrac{(-2)^{2n+1}-1}{(-2)-1}\right] = \dfrac{2^{2n+1}+1}{3}$. ■

14.3 Potências

Considere a notação definida abaixo.

Definição 14.3.1 Seja $S(n,k) = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k$, com $k \in \mathbb{N}$ e $k \geq 1$.

Note que já temos o resultado

$$S(n,1) = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Nosso objetivo agora é calcular os valores de $S(n,2)$ e $S(n,3)$, e dar uma ideia de como calcular $S(n,4)$, $S(n,5)$ etc. Mas antes de avançarmos, vamos novamente obter $S(n,1)$. A ideia que vamos usar servirá também em outras demonstrações. Para tanto, considere a identidade seguinte:

$$(k+1)^2 - k^2 = 2k + 1.$$

Tomemos todas as expresões como acima com k variando de 1 a n:

$$\sum_{k=1}^{n} [(k+1)^2 - k^2] = \sum_{k=1}^{n} (2k+1) = 2\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + n,$$

pela propriedade telescópica o lado esquerdo é igual a $(n+1)^2 - 1$, logo:

$$(n+1)^2 - 1 = 2\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + n \therefore S(n,1) = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exemplo 14.7 Calcular o valor de

$$S(n,2) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2.$$

Solução. Começamos com a identidade:

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1,$$

e somamos todas as expressões desde $k = 1$ até $k = n$:

$$\sum_{k=1}^{n} [(k+1)^3 - k^3] = \sum_{k=1}^{n} (3k^2 + 3k + 1) = 3\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) + 3\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + n,$$

pela propriedade telescópica o lado esquerdo é igual a $(n+1)^3 - 1$, logo:

$$(n+1)^3 - 1 = 3\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) + 3\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] + n,$$

que ao simplificar obtemos:

$$S(n,2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

■

Exemplo 14.8 Calcular o valor de

$$S(n,3) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3.$$

Solução 1: Comecemos com a identidade:

$$(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$$

e usemos os valores de $S(n,1)$ e $S(n,2)$ que foram encontrados previamente. O que acaarreta em

$$S(n,3) = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4} = \left[\frac{n \cdot (n+1)}{2}\right]^2.$$

Solução 2: Pela propriedade 5 temos que:

$$S(n,3) = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{n} (n+1-k)^3,$$

somando:

$$2 \cdot S(n,3) = \sum_{k=1}^{n} [k^3 + (n+1-k)^3] = \sum_{k=1}^{n} [(n+1)^3 - 3(n+1)^2 k + 3(n+1)k^2] =$$

$$(n+1)^3 n - 3(n+1)^2 S(n,1) + 3(n+1)S(n,2) = \left[\frac{n \cdot (n+1)}{2}\right]^2.$$

É intessante notar que $S(n,1)$ e $S(n,3)$ estão relacionados da forma que segue:

$$S(n,3) = [S(n,1)]^2.$$

■

14.4 Somas e Produtos Telescópicos

A propriedade **S4**, do **item 14.1.1**, é chamada *soma telescópica* e tem sido aplicada recorrentemente neste capítulo, isto é:

$$\sum_{k=2}^{n} [F(k) - F(k-1)] = F(n) - F(1)$$

De fato, em tal soma os $F(k)$'s, para k entre 2 e $n-1$, se cancelam, obtendo-se $F(n) - F(1)$.

Perceba a semelhança entre este método de soma e o teorema fundamental do cálculo; veja que o que fazemos é encontrar a integral discreta para os termos da soma.

Exemplo 14.9 Calcular $\sum_{k=1}^{n} k! \cdot k$.

Veja que $k! \cdot k = k! \cdot (k+1-1) = (k+1)! - k!$, assim $\sum_{k=1}^{n} [(k+1)! - k!]$, que, após os cancelamentos, é igual a $(n+1)! - 1$. ■

Exemplo 14.10 Calcular $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}$.
Racionalizando o denominador, temos

$$[(k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{k+1}][(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}] = k(k+1)^2-(k+1)k^2 = k(k+1).$$

Obtemos assim que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{k+1}}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) = 1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

■

Exemplo 14.11 — LMO. Prove que para todos os inteiros positivos n,

$$n-1 < \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}+\cdots+\frac{2n-1}{\sqrt{(n-1)^2+1}+\sqrt{n^2+1}} < n.$$

Para provar essa dupla desigualdade, observe que

$$\begin{aligned}\frac{2k-1}{\sqrt{(k-1)^2+1}+\sqrt{k^2+1}} &= \frac{(2k-1)\left(\sqrt{k^2+1}-\sqrt{(k-1)^2+1}\right)}{k^2+1-(k-1)^2-1}\\ &= \sqrt{k^2+1}-\sqrt{(k-1)^2+1}.\end{aligned}$$

Desse modo,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}+\cdots+\frac{2n-1}{\sqrt{(n-1)^2+1}+\sqrt{n^2+1}}\\ &= \sqrt{2}-1+\sqrt{5}-\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n^2+1}-\sqrt{(n-1)^2+1} = \sqrt{n^2+1}-1\end{aligned}$$

Donde se conclui que,

$$n-1 = \sqrt{n^2}-1 < \sqrt{n^2+1}-1 < \sqrt{(n+1)^2}-1 = (n+1)-1 = n.$$

■

Um método semelhante pode ser usado para produtos telescópicos. Nesse caso, escreve-se a expressão como um produto de frações cujos numeradores e denominadores se cancelam alternadamente para deixar o numerador da primeira fração e o denominador da última, ou vice-versa.

Exemplo 14.12 Prove que

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Truncando o produto e escrevendo cada fator como uma fração, obtemos

$$\prod_{n=2}^{N}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \prod_{n=2}^{N}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) = \prod_{n=2}^{N}\frac{n-1}{n}\prod_{n=2}^{N}\frac{n+1}{n} = \frac{1}{N}\cdot\frac{N+1}{2} = \frac{N+1}{2N}.$$

Fazendo N tender ao infinito, temos que o produto é igual a $\frac{1}{2}$. ■

14.5 Problemas

Problema 14.1 Calcular o valor de $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n\cdot(n+1)$.
Problema 14.2 Calcular o valor de $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+4\cdot 5\cdot 6+\ldots+n\cdot(n+1)\cdot(n+2)$.
Problema 14.3 Calcular $\sum_{k=1}^{n} k!\,(k^2+k+1)$.
Problema 14.4 Calcular o valor de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\cdot(k+1)}$.
Problema 14.5 Seja a_1, a_2, $\ldots$, a_n uma progressão aritmética de razão d. Calcular

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k a_{k+1}}.$$

Problema 14.6 Baseando-se no fato de que

$$\frac{1}{k\cdot(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1},$$

calcule o valor de

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)}.$$

Problema 14.7 Seja $f(n)=\dfrac{4n+\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$, calcule o valor de

$$f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(40).$$

Problema 14.8 Sejam $a_1,a_2,\ldots,a_{2010}$ números reais cuja soma é 2011. Se $\displaystyle\sum_{k=1}^{2010}\frac{1}{2011-a_k}=1$, calcule o valor de

$$\sum_{k=1}^{2010}\frac{a_k}{2011-a_k}.$$

Problema 14.9 Sendo n um inteiro positivo, calcule a soma de todos os números pares maiores que n^2-n+1 e menores que n^2+n+3.
Problema 14.10 Calcule as seguintes somas:
a) $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2$.
b) $1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3$.
Problema 14.11 Calcule o valor de

$$S(n,4)=1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4.$$

Problema 14.12 Calcule o valor de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k\cdot 3^k)$.
Problema 14.13 Para cada n calcule o valor das seguintes somatórias:
a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\cdot(k+2)}$.
b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{k^2\cdot(k+1)^2}$.
c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{4k^2-1}$.

Problema 14.14 Para cada n calcule o valor das seguintes somatórias:

a) $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2 \cdot k!$.

b) $\sum_{k=1}^{n}(k^2+1) \cdot k!$.

c) $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$.

Problema 14.15 Simplifique a seguinte soma (considere que $n \geq 3$):

$$\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{1}{(n-1)^2}+\frac{1}{n^2}}$$

Problema 14.16 Avalie a soma

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{6^k}{(3^k-2^k)(3^{k+1}-2^{k+1})}.$$

Problema 14.17 A sequência $\{x_n\}_n$ é definida por $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_{k+1} = x_k^2 + x_k$. Encontre o maior inteiro menor que

$$\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+\cdots+\frac{1}{x_{100}+1}.$$

Problema 14.18 Seja F_n a sequência de Fibonacci ($F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$). Avalie

a) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{F_n}{F_{n-1}F_{n+1}}$;

b) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{F_{n-1}F_{n+1}}$.

Problema 14.19 Prove a desigualdade

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{9997}+\sqrt{9999}} > 24$$

Problema 14.20 Sejam $1 \leq m < n$ dois inteiros. Prove a dupla desigualdade

$$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{m}) < \frac{1}{\sqrt{m}}+\frac{1}{\sqrt{m+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n}-\sqrt{m-1}).$$

Problema 14.21 Seja

$$a_k = \frac{k}{(k-1)^{4/3}+k^{4/3}+(k+1)^{4/3}}.$$

Prove que $a_1 + a_2 + \ldots + a_{999} < 50$.

Problema 14.22 Prove a desigualdade

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2.$$

Problema 14.23 Avalie a soma

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{F_{2^n}},$$

onde F_m é o m-ésimo termo da sequência de Fibonacci.

Problema 14.24 Prove que

$$\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1} = \frac{2}{3}.$$

Problema 14.25 Calcule o produto
$$\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right).$$

Problema 14.26 Seja $L_1 = 2$, $L_2 = 1$ e $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$, para $n \geq 1$, chamada *sequência de Lucas*. Prove que
$$\prod_{k=1}^{m} L_{2^k+1} = F_{2^{m+1}},$$
onde $\{F_n\}_n$ é a sequência de Fibonacci.

Exemplo 14.13 — APMO, 2000. Ache $S = \sum_{i=0}^{101} \frac{{x_i}^3}{1-3x_i+3{x_i}^2}$, para $x_i = \frac{i}{101}$.

Solução. Note que $1-3x+3x^2 = (1-x)^3 + x^3$. Assim, seja $f(x) = \frac{x^3}{(1-x)^3+x^3}$. Deste modo,
$$f(x)+f(1-x) = 1.$$
Desde que $1-x_i = x_{101-i}$, temos
$$2S = \sum_{i=0}^{101}[f(x_i)+f(x_{101-i})] = 102 \therefore S = 51$$
■

Exemplo 14.14 — HKMO, 2000. Expresse
$$\frac{cos\ 1^o + cos\ 2^o + \ldots + cos\ 44^o}{sen\ 1^o + sen\ 2^o + \ldots + sen\ 44^o}$$
na forma $a + b \cdot \sqrt{c}$, onde a, b e c são inteiros.
Solução 1: Usaremos que
$$cos\ a + cos\ b = 2 \cdot cos\frac{a+b}{2} \cdot cos\frac{a-b}{2} \text{ e}$$
$$sen\ a + sen\ b = 2 \cdot sen\frac{a+b}{2} \cdot cos\frac{a-b}{2}.$$
Fazendo $a = (45-n)^o$ e $b = n^o$ para $n = 1, 2, \ldots, 22$, tem-se
$$\frac{cos\ 1^o + cos\ 2^o + \ldots + cos\ 44^o}{sen\ 1^o + sen\ 2^o + \ldots + sen\ 44^o} = \frac{2 \cdot cos\frac{45^o}{2} \cdot \left(cos\frac{43^o}{2} + cos\frac{41^o}{2} + \ldots + cos\frac{1^o}{2}\right)}{2 \cdot sen\frac{45^o}{2} \cdot \left(cos\frac{43^o}{2} + cos\frac{41^o}{2} + \ldots + cos\frac{1^o}{2}\right)} = \frac{cos\frac{45^o}{2}}{sen\frac{45^o}{2}} =$$
$$\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}} = 1 + \sqrt{2}.$$
Solução 2: Tem-se que
$$cos\ n^o + sen\ n^o = \sqrt{2} \cdot (cos\ 45^o \cdot cos\ n^o + sen\ 45^o \cdot sen\ n^o) = \sqrt{2} \cdot cos(45-n)^o.$$
Assim,
$$(cos\ 1^o + cos\ 2^o + \ldots + cos\ 44^o) + (sen\ 1^o + sen\ 2^o + \ldots + sen\ 44^o) =$$
$$\sqrt{2} \cdot (cos\ 44^o + cos\ 43^o + \ldots + cos\ 1^o).$$
Portanto,

$$\frac{cos\ 1^o + cos\ 2^o + \ldots + cos\ 44^o}{sen\ 1^o + sen\ 2^o + \ldots + sen\ 44^o} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = 1+\sqrt{2}.$$

■

Exemplo 14.15 Simplifique $sen\ 1 + sen\ 2 + \ldots + sen\ n$.
Solução 1: Lembre-se que

$$sen\ a \cdot sen\ b = \frac{cos(a-b) - cos(a+b)}{2}.$$

Fazendo $b = \frac{1}{2}$, obtemos

$$sen\ a = \frac{cos\left(a - \frac{1}{2}\right) - cos\left(a + \frac{1}{2}\right)}{2 \cdot sen\frac{1}{2}}.$$

Logo,

$$sen\ 1 + sen\ 2 + \ldots + sen\ n =$$
$$\frac{\left[cos\frac{1}{2} - cos\frac{3}{2}\right] + \left[cos\frac{3}{2} - cos\frac{5}{2}\right] + \ldots + \left[cos\left(n-\frac{1}{2}\right) - cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]}{2 \cdot sen\frac{1}{2}} = \frac{cos\frac{1}{2} - cos\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2 \cdot sen\frac{1}{2}}.$$

■

Problema 14.27 Mostre que $2\sqrt{101} - 2 < \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{\sqrt{n}} < 20$.

Problema 14.28 Simplifique $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Problema 14.29 — Putnam, 1962. Ache uma fórmula "fechada"para $\sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot \binom{n}{k}$.

Problema 14.30 Calcule $\frac{1}{1+cotg\ 1^o} + \frac{1}{1+cotg\ 5^o} + \frac{1}{1+cotg\ 9^o} + \ldots + \frac{1}{1+cotg\ 85^o} + \frac{1}{1+cotg\ 89^o}$.

Problema 14.31 — Singapura, 1988. Calcule $\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}$.

Problema 14.32 Sendo n um inteiro positivo e $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$, prove que $cotg\ \frac{x}{2^n} - cotg\ x \geq n$.

Problema 14.33 — Hungria, 1990. Para n um inteiro positivo, mostre que

$$sen^3\frac{x}{3} + 3sen^3\frac{x}{3^2} + \ldots + 3^{n-1}sen^3\frac{x}{3^n} = \frac{1}{4}\left(3^n sen\frac{x}{3^n} - sen\ x\right).$$

Problema 14.34 Para um inteiro positivo n, mostre que

$$\sum_{k=0}^{[n/4]} \binom{n}{4k} = 2^{n-2} + (\sqrt{2})^{n-2} cos\frac{n\pi}{4}.$$

Problema 14.35 Prove que

$$tg^2 1^o + tg^2 3^o + tg^2 5^o + \ldots + tg^2 89^o = 4005.$$

Sugestão: Considere o polinômio de grau 45 cujas raízes são $tg^2 1^o, tg^2 3^o, tg^2 5^o, \ldots, tg^2 89^o$.

Problema 14.36 **Descanse!**

14.6 Somas de Newton

Teorema 14.6.1 — Somas de Newton. Sejam $P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$; $r_1, r_2, \ldots, r_n$ suas raízes e $S_k = r_1^k + r_2^k + \ldots + r_n^k$, $k \geq n$, as somas das k-ésimas potências dessas raízes. Então,

$$a_n \cdot S_k + a_{n-1} \cdot S_{k-1} + \ldots + a_0 \cdot S_{k-n} = 0.$$

Demonstração. Sendo $r_1, r_2, \ldots, r_n$ as raízes de $P(x)$, tem-se

$$P(r_i) = a_n \cdot r_i^n + a_{n-1} \cdot r_i^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot r_i + a_0 = 0, \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Multiplicando cada uma das equações assim formadas por r_i^{k-n}, encontramos

$$\begin{gathered} a_n \cdot r_1^k + a_{n-1} \cdot r_1^{k-1} + \ldots + a_0 \cdot r_1^{k-n} = 0 \\ a_n \cdot r_2^k + a_{n-1} \cdot r_2^{k-1} + \ldots + a_0 \cdot r_2^{k-n} = 0 \\ \vdots \\ a_n \cdot r_n^k + a_{n-1} \cdot r_n^{k-1} + \ldots + a_0 \cdot r_n^{k-n} = 0 \end{gathered}$$

Somando todas as equações acima, obtem-se

$$a_n \cdot (r_1^k + \ldots + r_n^k) + a_{n-1} \cdot (r_1^{k-1} + \ldots + r_n^{k-1}) + \ldots + a_0 \cdot (r_1^{k-n} + \ldots + r_n^{k-n}) = 0.$$

Ou ainda, usando a notação S_k,

$$a_n \cdot S_k + a_{n-1} \cdot S_{k-1} + \ldots + a_0 \cdot S_{k-n} = 0.$$

14.7 Problemas

Exemplo 14.16 Calcule $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{10} + \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{10}$. ■

Exemplo 14.17 Sejam $r_1, r_2, \ldots, r_{1000}$ as raízes de $x^{1000} - 10x + 10 = 0$; determine o valor de $S_{1000} = \sum_{i=1}^{1000} r_i^{1000}$.

Solução. Pelo **teorema 14.6.1**:

$$1 \cdot S_{1000} - 10 \cdot S_1 + 10 \cdot S_0 = 0,$$

com $S_0 = r_1^0 + r_2^0 + \ldots + r_{1000}^0 = 1000$. Ademais, pelas *Relações de Girard*,

$$S_1 = r_1 + r_2 + \ldots + r_{1000} = -\frac{a_{999}}{1} = 0.$$

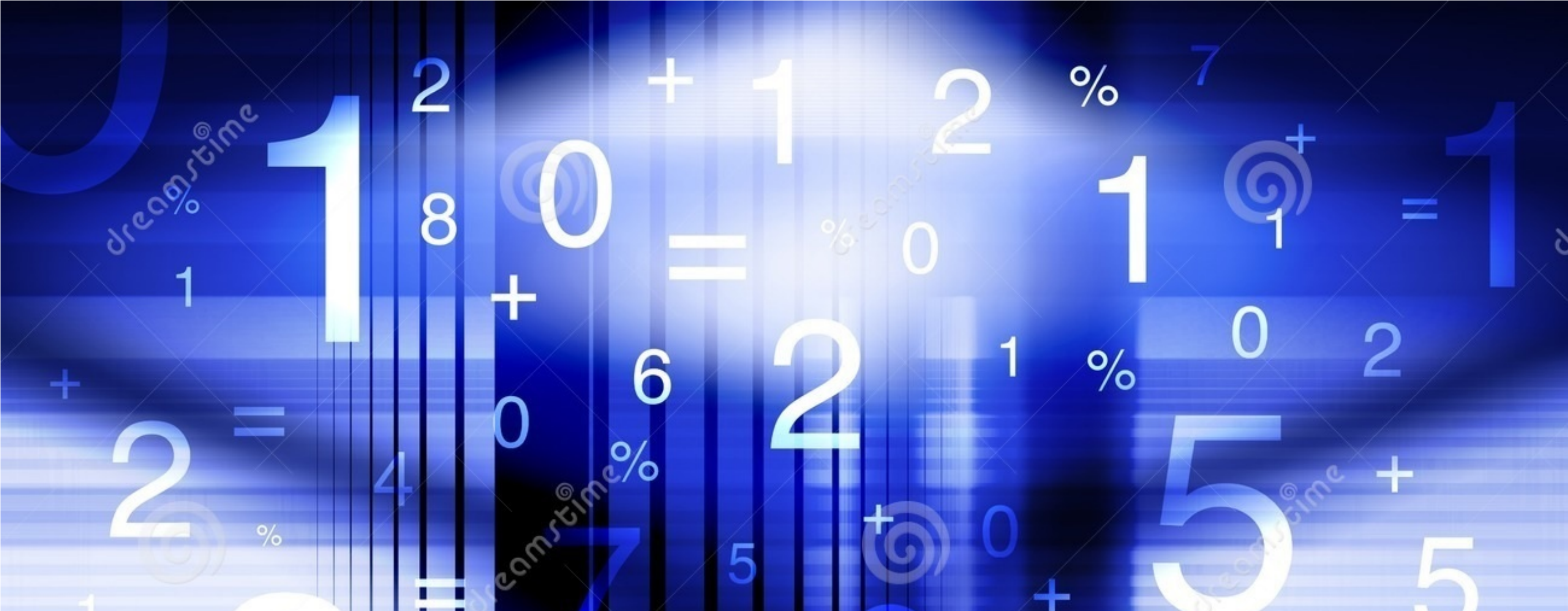
Finalmente,

$$1 \cdot S_{1000} - 10 \cdot 0 + 10 \cdot 1000 = 0 \therefore S_{1000} = -10000.$$

■

VI

ENUMERAÇÃO COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE



15. ENUMERAÇÃO COMBINATÓRIA

15.1 Método 1: Multiplique!

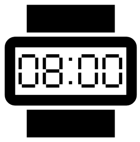
Problema 15.1 Uma porta só é aberta quando usamos simultaneamente a chave e o cartão corretos. Se você possui duas chaves e três cartões, quantos testes devemos fazer para garantir que a porta irá abrir?

Problema 15.2 Quantos são os gabaritos possíveis de um teste de 10 questões de múltipla escolha, com 5 alternativas por questão?

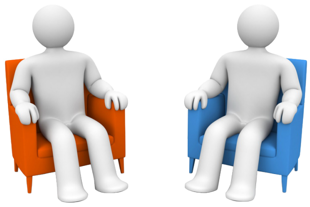
Problema 15.3 Quantos subconjuntos possui um conjunto que tem n elementos?

Problema 15.4 De quantos modos podemos pintar uma bandeira de 3 (três) listas usando apenas quatro cores, sem pintar listas vizinhas da mesma cor?

Problema 15.5 — OBM, 2005. Num relógio digital, as horas são exibidas por meio de quatro algarismos. O relógio varia das 00:00 às 23:59 horas. Quantas vezes por dia os quatro algarismos mostrados são todos pares?

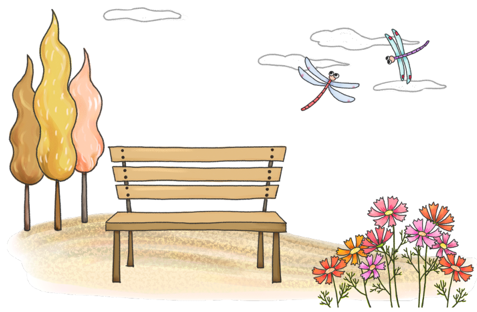


Problema 15.6 De quantos modos 3 pessoas podem se sentar em 5 cadeiras em fila?



Problema 15.7 De quantos modos podemos colocar 8 torres iguais em um tabuleiro 8×8, de modo que não haja duas torres na mesma linha ou na mesma coluna? E se as torres fossem diferentes?

Problema 15.8 De quantos modos 5 homens e 5 mulheres podem se sentar em 5 bancos de 2 lugares, se em cada banco deve haver um homem e uma mulher?



Problema 15.9 Um vagão do metrô tem 10 bancos individuais, sendo 5 de frente e 5 de costas. De 10 passageiros, 4 preferem sentar de frente, 3 preferem sentar de costas e os demais não têm preferência. De quantos modos eles podem se sentar, respeitadas as preferências?

Problema 15.10 Quantos números naturais pares de três algarismos distintos existem?

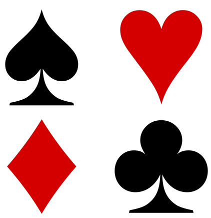
Problema 15.11 Quantos são os anagramas da palavra "CAPITULO":

a. possíveis?
b. que começam e terminam por vogal?
c. que têm as vogais e as consoantes intercaladas?
d. que têm as letras C, A, P juntas nessa ordem?
e. que têm as letras C, A, P juntas em qualquer ordem?
f. que têm a letra P em primeiro lugar e a letra A em segundo?
g. que têm a letra P em primeiro lugar ou a letra A em segundo?
h. que têm P em primeiro lugar ou A em segundo ou C em terceiro?
i. nos quais a letra A é uma das letras à esquerda de P e a letra C é uma das letras à direita de P?

Problema 15.12 Uma turma tem aulas as segundas, quartas e sextas, de 13h às 14h e de 14h às 15h. As matérias são Matemática, Física e Química, cada uma com duas aulas semanais, em dias diferentes. De quantos modos pode ser feito o horário dessa turma?

Problema 15.13 Uma faculdade realiza seu vestibular em dois dias de provas, com 4 matérias em cada dia. Este ano a divisão foi: Matemática, Português, Biologia e Inglês no primeiro dia e Geografia, História, Física e Química no segundo dia. De quantos modos pode ser feito o calendário de provas?

Problema 15.14 De um baralho comum de 52 cartas, sacam-se sucessivamente e sem reposição duas cartas. De quantos modos isso pode ser feito se a primeira carta deve ser de copas e a segunda não deve ser um rei?



Problema 15.15 Dispomos de 5 cores distintas. De quantos modos podemos colorir os quatro quadrantes de um círculo, cada quadrante com uma só cor, se quadrantes cuja fronteira é uma linha não podem receber a mesma cor?

Problema 15.16 Escrevem-se os inteiros de 1 até 2222. Quantas vezes o algarismo 0 é escrito?

Problema 15.17 Quantos são os inteiros positivos de 4 dígitos nos quais o algarismo 5 figura?

Problema 15.18 Quantas são as permutações simples dos números $1, 2, \ldots, n$ nas quais o elemento que ocupa a k-ésima posição é maior que $k-3$, para todo k?

Problema 15.19 Quantas permutações simples dos números $1, 2, \ldots, n$ nas quais o elemento que ocupa a k-ésima posição é inferior a $k+4$, para todo k?

Problema 15.20 — OBMEP, N3, fase 1, 2019. As 6 cadeiras de uma fila são numeradas de 1 a 6 e devem ser ocupadas uma de cada vez de modo que, sempre que possível, é escolhida uma cadeira sem vizinhas ocupadas. Por exemplo, é válida a ordem de ocupação 1 6 3 2 4 5, em que a primeira pessoa ocupa a cadeira 1, a segunda, a cadeira 6, a terceira, a cadeira 3, a quarta, a cadeira 2, a quinta, a cadeira 4 e a última, a cadeira 5. Já a ordem 1 5 2 3 6 4 não é válida, pois a terceira pessoa sentou-se ao lado da primeira quando poderia ter se sentado em uma cadeira sem vizinhas ocupadas. Quantas ordens de ocupação válidas existem?

Problema 15.21 — OBMEP, N3, fase 1, 2019. A rã Zinza quer ir da pedra 1 até a pedra 10 em cinco pulos, pulando de uma pedra para a seguinte ou por cima de uma ou de duas pedras. De quantas maneiras diferentes Zinza pode fazer isso?

Exemplo 15.1 **a.** De quantos modos o número 720 pode ser decomposto em um produto de dois inteiros positivos? Aqui consideramos, naturalmente, $8 \cdot 90$ como sendo o mesmo que $90 \cdot 8$. b) E o número 144?
Solução. $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$. Os divisores inteiros e positivos de 720 são da forma $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$, com $a \in \{0,1,2,3,4\}$, $b \in \{0,1,2\}$ e $c \in \{0,1\}$. Portanto, existem $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$ modos de escolher os expoentes a, b e c. Logo, temos 30 divisores. Para cada divisor x de 720 existe um outro divisor $y \neq x$ de 720, tal que $x \cdot y = 720$. Como exitem 30 divisores, temos 15 produtos diferentes.
(b)$144 = 2^4 \cdot 3^2$. Seguindo o raciocínio do item **a.**, temos $5 \cdot 3 = 15$ divisores de 144. Note que $144 = 12^2$; o que constitui um produto de inteiros positivos que é igual a 144. Os demais produtos contém dois inteiros diferentes, que são divisores de 144. Como são 14 divisores (diversos de 12) de 144, existem 7 produtos envolvendo esses divisores. Logo, temos 8 produtos diferentes. ■

Teorema 15.1.1 — Total de Divisores. Se $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, com os p_i primos e os α_i inteiros não negativos, então $\#D(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\dots(\alpha_k + 1)$.
Prova: Sabe-se que um inteiro positivo $d|n$ se, e só se, $d = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k}$, onde $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$, para $1 \leq i \leq k$. Portanto, n possui tantos divisores positivos quantas sejam as maneiras de escolhermos os inteiros $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$, tais que $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$, para $1 \leq i \leq k$. Como há exatamente $\alpha_i + 1$ possibilidades para β_i, pelo princípio multiplicativo, concluímos que n possui

$$(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_n + 1)$$

divisores.

Problema 15.22 Em um corredor há 900 armários, numerados de 1 a 900, inicialmente todos fechados. 900 pessoas, numeradas de 1 a 900, atravessam o corredor. A pessoa de número k reverte o estado de todos os armários cujos números são múltiplos de k. Por exemplo, a pessoa de número 4 mexe nos armários de números 4, 8, 12,..., abrindo os que encontra fechados e fechando os que encontra abertos. Ao final, quais armários ficarão abertos?
Problema 15.23 Quantos divisores positivos pares possui o número 360?
Problema 15.24 Qual a soma dos divisores positivos de 360?

Teorema 15.1.2 — Soma dos Divisores. Seja

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$$

com p_i números primos distintos e α_i inteiros positivos. Distribuindo os produtos

$$(1 + p_1 + \cdots + p_1^{\alpha_1})(1 + p_2 + \cdots + p_2^{\alpha_2})\dots(1 + p_k + \cdots + p_k^{\alpha_k}),$$

obtemos, pelo princípio multiplicativo, uma soma com exatamente $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\dots(\alpha_k + 1)$ parcelas, na qual cada divisor positivo de n aparece exatamente uma vez. Fazendo r sucessivamente igual a $p_1, p_2, \dots, p_k$, concluímos que a soma dos divisores positivos de n é igual a

$$\frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}.$$

Problema 15.25 De quantos modos é possível colocar 8 pessoas em fila de modo que duas dessas pessoas, Vera e Paulo, não fiquem juntas?
Problema 15.26 De quantos modos é possível colocar 8 pessoas em fila de modo que duas dessas

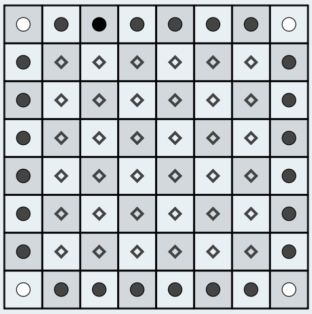
pessoas, Vera e Paulo, não fiquem juntas e duas outras, Helena e Pedro, permaneçam juntas?

Problema 15.27 De quantos modos é possível colocar r rapazes e m moças em fila de modo que as moças permaneçam juntas?

Problema 15.28 De quantos modos podemos formar uma palavra de 5 letras de um alfabeto de 26 letras, se a letra A deve figurar na palavra mas não pode ser a primeira letra da palavra? E se a palavra devesse ter letras distintas?

Exemplo 15.2 De quantos modos podemos colocar 2 reis diferentes em casas não-adjacentes de um tabuleiro 8×8? E se os reis fossem iguais?

Solução. Para a situação dos reis diferentes há 3 (três) casos possíveis:



- Colocando o primeiro rei em um dos quatro cantos do tabuleiro, o segundo rei não pode ser colocado em quatro casas (três em torno do primeiro rei e uma casa, que é a localização atual do primeiro rei): $4 \cdot (64 - 4)$.
- Colocando o primeiro rei na lateral do tabuleiro (sem contar com os quatro cantos) temos 24 possibilidades. Ao colocar o primeiro rei na lateral do tabuleiro, não podemos colocar o segundo rei em seis casas adjacentes (cinco casas em volta e uma que é a localização atual do primeiro rei): $24 \cdot (64 - 6)$.
- Colocando o primeiro rei em uma das 36 casas centrais do tabuleiro (ou seja, descontando as 4 casas dos cantos e as 24 das laterais), não podemos colocar o segundo rei em nove das casas adjacentes (8 casas em torno do primeiro rei e uma que é a localização atual do primeiro rei): $36 \cdot (64 - 9)$.

Somando os três resultados obtemos 3612.

Quando os reis forem iguais o resultado é metade do anterior, 1806. ■

Problema 15.29 O conjunto A possui 4 elementos e, o conjunto B, 7 elementos. Quantas funções $f : A \to B$ existem? Quantas delas são injetoras?

Problema 15.30 Se A é um conjunto de n elementos, quantas são as funções $f : A \to A$ bijetoras?

Problema 15.31 Quantas diagonais possui:

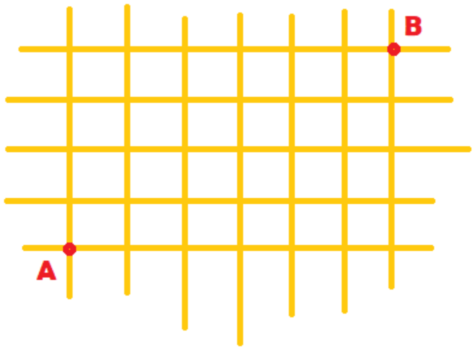
a. um octaedro regular?
b. um icosaedro regular?
c. um dodecaedro regular?
d. um cubo?
e. um prisma hexagonal regular?

15.2 Método 2: Multiplique e Divida!

Problema 15.32 Quantos anagramas da palavra AGUDO apresentam as consoantes em ordem alfabética, não necessariamente juntas?

Problema 15.33 O conjunto A possui n elementos. Quantos são os seus subconjuntos com p elementos?

Problema 15.34 No desenho abaixo, as retas representam ruas, e os quadriláteros representam quarteirões. Qual é a quantidade de trajetos de comprimento mínimo ligando A a B?



Problema 15.35 Em uma sala de aula existem a meninas e b meninos. De quantas formas eles podem ficar em uma fila, se as meninas devem ficar em ordem crescente de peso, e os meninos também? (Suponha que 2 pessoas quaisquer não tenham o mesmo peso.)

Problema 15.36 Um campeonato é disputado por 12 clubes em rodadas de 6 jogos cada. De quantos modos é possível selecionar os jogos da primeira rodada?

Problema 15.37 De quantos modos é possível dividir 15 atletas em três times de 5 atletas, denominados Esporte, Tupi e Minas?

Problema 15.38 De quantos modos é possível dividir 15 atletas em três times de 5 atletas?

Problema 15.39 Em uma banca há 5 exemplares iguais da "Veja", 6 exemplares iguais da "Época" e 4 exemplares iguais da "Isto é". Quantas coleções não-vazias de revistas dessa banca podem ser formadas?

Exemplo 15.3 De quantos modos é possível dividir 20 objetos em 4 grupos de 3 e 2 grupos de 4?

Solução. Escolhendo, sucessivamente, três objetos para formar quatro grupos de três objetos obtemos $\binom{20}{3}\cdot\binom{17}{3}\cdot\binom{14}{3}\cdot\binom{11}{3}$ modos. Com os oito objetos restantes, podemos formar os outros dois grupos de $\binom{8}{4}\cdot\binom{4}{4}$ modos.

Devemos, no entanto, observar que a ordem de escolha dos grupos é irrelevante para cada uma das contagens anteriores. Desse modo há

$$\frac{\binom{20}{3}\cdot\binom{17}{3}\cdot\binom{14}{3}\cdot\binom{11}{3}}{4!}\cdot\frac{\binom{8}{4}\cdot\binom{4}{4}}{2!}$$

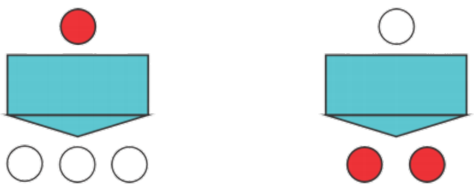
modos possíveis de formar 4 grupos de 3 e 2 grupos de 4. ∎

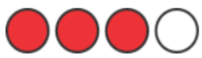
Problema 15.40 Quantas são as soluções inteiras e positivas de $x+y+z=7$?

Problema 15.41 Quantas são as soluções inteiras e não-negativas de $x+y+z\leq 6$?

15.3 Método 3: Diversos

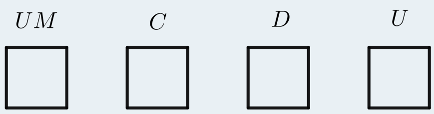
Problema 15.42 — Canguru, 2019. Amália tem uma máquina que transforma uma ficha vermelha em três fichas brancas e uma ficha branca em duas fichas vermelhas.



Amália tem três fichas vermelhas e uma ficha branca:  . Ela usa sua máquina três vezes. Depois disso, qual é o menor número possível de fichas que Amália poderá ter?

Problema 15.43 Permutam-se de todas as formas possíveis os algarismos 1, 2, 4, 6, 7 e escrevem-se os números assim formados em ordem crescente. Determine:
a. que lugar ocupa 62.417.
b. que número ocupa o 66° lugar.
c. qual o 166° algarismo escrito.
d. a soma dos números assim formados.

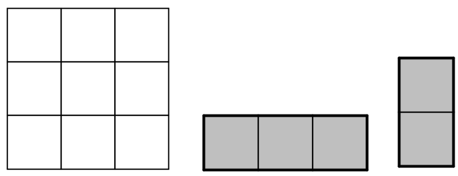
Exemplo 15.4 — Maio, N2. Inês escolheu quatro dígitos distintos do conjunto $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$. Formou com eles todos os possíveis números de quatro algarismos distintos e somou todos esses números. O resultado foi 193.314. Encontre os quatro dígitos que Inês escolheu.
Solução. Sejam a, b, c e d os quatro dígitos escolhidos por Inês. Com estes algarismos é possível formar $4! = 24$ números distintos. E como cada digito aparece 6 vezes em cada unidade, dezena, centena e unidade de milhar teremos:



- soma dos algarismos da posição U é: $6-(a+b+c+d)$;
- soma dos algarismos da posição D é: $6\cdot(a+b+c+d)\cdot 10$;
- soma dos algarismos da posição C é: $6\cdot(a+b+c+d)\cdot 100$;
- soma dos algarismos da posição UM é: $6\cdot(a+b+c+d)\cdot 1000$;
- soma total: $6\cdot(a+b+c+d)\cdot 1111$.

Assim, temos que $6\cdot(a+b+c+d)\cdot 1111 = 193.314 \Rightarrow a+b+c+d = 29 \Rightarrow \{a,\ b,\ c,\ d\} = \{9,8,7,5\}$
■

Problema 15.44 Um quadrado 3×3 deve ser desenhado, sem superposições ou sobras, usando somente retângulos 3×1 e 2×1 como os das figuras abaixo. De quantas maneiras se pode fazer esse quadrado 3×3?



Observação: Não é necessário o uso de ambos os tipos de retângulo.
Problema 15.45 — Maio, N1, 2002. Num banco só o diretor conhece o segredo do cofre, que é um número de cinco dígitos. Para proteger este segredo é dado a cada um dos dez empregados do banco um número de cinco dígitos. Cada um destes números tem numa das cinco posições o mesmo dígito que o segredo e nas outras quatro posi-ções um dígito diferente do que tem o segredo nesse lugar. Os números de proteção são:

07344, 14098, 27356, 36429, 45374,
52207, 63822, 70558, 85237, 97665.

Qual é o segredo do cofre?

Nota: A tabela abaixo é para lhe ajudar a pensar sobre a solução.

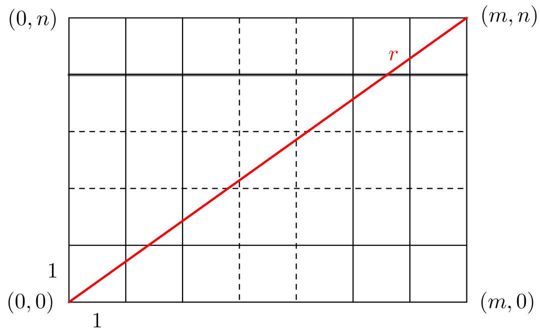
SENHAS				
0	7	3	4	4
1	4	0	9	8
2	7	3	5	6
3	6	4	2	9
4	5	3	7	4
5	2	2	0	7
6	3	8	2	2
7	0	5	5	8
8	5	2	3	7
9	7	6	6	5

Problema 15.46 — Maio, N1. Num tabuleiro quadrado de 9 casas (de três por três) deve-se colocar nove elementos do conjunto $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, distintos um do outro, de modo que cada um deles fique numa casa e se verifiquem as seguintes condições:

- as somas dos números da segunda e terceira linha sejam, respectivamente, o dobro e o triplo da soma dos números da primeira linha.
- as somas dos números da segunda e terceira coluna sejam, respectivamente, o dobro e o triplo da soma dos números da primeira coluna.

Mostre todas as formas possíveis de colocar elementos de S no tabuleiro, cumprindo com as condições indicadas.

Problema 15.47 Pelo interior de quantos quadradinhos 1×1 da malha retangular $m \times n$ abaixo a diagonal r passa?



17. PRINCÍPIO DAS CASAS DE POMBO

17.1 Princípio das Casas de Pombo

Teorema 17.1.1 — Casas de Pombo. Se tivermos de colocar $N+1$ ou mais pombos em N casas, então alguma dessas casas de pombo deve conter dois ou mais pombos.
Prova: Suponha que não mais do que um pombo estivesse em cada casa. Então não haveria mais do que N pombos juntos, o que contradiz a suposição de que temos $N+1$ pombos. Isso prova o Princípio das Casas de Pombo, usando - e devemos estar cientes disso - o método da prova por contradição.

Exemplo 17.1 Um milhão de pinheiros crescem em uma floresta. Sabe-se que nenhum pinheiro tem mais de 600.000 folhas. Mostre que dois pinheiros na floresta devem ter o mesmo número de folhas.
Solução. Temos um milhão de "pombos" (os pinheiros) e 600.001 casas de pombo, numerados de 0 a 600.000. Colocamos cada "pombo"(pinheiro) em cada casa, numerada com o número de folhas na árvore. Como há muito mais "pombos"que casas, deve haver pelo menos dois "pombos"(pinheiros) em alguma casa de pombo: se não houvesse mais de um em cada casa de pombo, então não haveria mais do que 600.001 "pombos". Mas se dois "pombos"estão na mesma casa, isso significa que eles têm o mesmo número de folhas. ■

17.2 Princípio Geral das Casas de Pombo

Teorema 17.2.1 — Casas Geral de Pombos. Se tivermos que colocar $Nk+1$ ou mais pombos em N casas, então alguma casa deve conter pelo menos $k+1$ pombos. No caso $k=1$, o Princípio Geral das Casas de Pombo reduz-se ao princípio na sua forma mais simples.

Exemplo 17.2 Vinte e cinco caixas de maçãs são entregues em uma loja. As maçãs são de três tipos diferentes e todas as maçãs de cada caixa são do mesmo tipo. Mostre que entre essas caixas há pelo menos nove contendo o mesmo tipo de maçã.
Solução. Estamos colocando 25 "pombos"(caixas) em 3 "casas de pombo"(tipos de maçãs). Já

que $25 = 3 \cdot 8 + 1$, podemos usar o Princípio Geral das Casas de Pombo para $N = 3$ e $k = 8$. Descobrimos que alguma "casa de pombo"deve conter pelo menos 9 caixas. ■

17.3 Problemas

Problema 17.1 Dado doze inteiros, mostre que dois deles podem ser escolhidos cuja diferença é divisível por 11.

Problema 17.2 A cidade de Leningrado tem cinco milhões de habitantes. Mostre que dois deles devem ter o mesmo número de cabelos na cabeça, se é sabido que ninguém tem mais de um milhão de cabelos na cabeça.

Problema 17.3 Em um país existem M equipes de futebol, cada uma com 11 jogadores. Todos os jogadores estão reunidos em um aeroporto para uma viagem para outro país para um jogo importante, mas eles estão viajando em "lista de espera". Há 10 vôos para o destino deles e cada vôo tem espaço para exatamente M jogadores. Um jogador de futebol levará seu próprio helicóptero para o jogo, em vez de viajar em um avião. Mostre que pelo menos uma equipe inteira terá a certeza de chegar ao jogo importante.

Exemplo 17.3 Dados 8 números naturais diferentes, nenhum maior que 15, mostre que pelo menos três pares deles têm a mesma diferença positiva (os pares não precisam ser disjuntos como conjuntos).

Solução. Aqui, encontramos um obstáculo aparentemente insuperável. Existem 14 diferenças possíveis entre os 8 números indicados (os valores das diferenças são de 1 a 14). Estes são as 14 casas de pombo. Mas quais são nossos pombos? Eles devem ser as diferenças entre pares dos números dados. No entanto, existem 28 pares, e podemos encaixá-los em nossas 14 casas de tal forma que há exatamente dois "pombos"em cada casa (e, portanto, nenhuma casa contendo três). Aqui devemos usar uma consideração adicional. Não podemos colocar mais de um pombo na casa de pombo numerada 14, pois o número 14 pode ser escrito como uma diferença de dois números naturais menores que 15 de uma única maneira: $14 = 15 - 1$. Isso significa que as 13 casas restantes contêm pelo menos 27 pombos, e o Princípio Geral das Casas de Pombo nos dá o nosso resultado. ■

Problema 17.4 Em um país existem M equipes de futebol, cada uma com 11 jogadores. Todos os jogadores estão reunidos em um aeroporto para uma viagem para outro país para um jogo importante, mas eles estão viajando em "lista de espera". Há 10 vôos para o destino deles e cada vôo tem espaço para exatamente M jogadores. Um jogador de futebol levará seu próprio helicóptero para o jogo, em vez de viajar em um avião. Mostre que pelo menos uma equipe inteira terá a certeza de chegar ao jogo importante.

Problema 17.5 Mostre que, em qualquer grupo de cinco pessoas, há duas que têm um número idêntico de amigos dentro do grupo.

Problema 17.6 Vários times de futebol entram em um torneio no qual cada time joga com todos os outros times exatamente uma vez. Mostre que a qualquer momento durante o torneio haverá duas equipes que jogaram, até aquele momento, um número idêntico de jogos.

Problema 17.7 Qual é o maior número de quadrados em um tabuleiro de xadrez de 8×8 que pode ser colorido de verde, de modo que em qualquer arranjo de três quadrados (um "triminó") como na figura abaixo, pelo menos um quadrado não é colorido de verde? (O triminó pode aparecer como na figura, ou pode ser girado através de um múltiplo de 90 graus.)

Problema 17.8 Qual é o menor número de quadrados em um tabuleiro de xadrez de 8×8 que pode ser colorido de verde, de modo que em qualquer triminó, como na figura acima, pelo menos um quadrado seja colorido de verde?

Problema 17.9 Dez alunos resolveram um total de 35 problemas em uma olimpíada de matemática. Cada problema foi resolvido por exatamente um aluno. Há pelo menos um aluno que resolveu exatamente um problema, pelo menos um aluno que resolveu exatamente dois problemas e pelo menos um aluno que resolveu exatamente três problemas. Prove que há pelo menos um aluno que resolveu pelo menos cinco problemas.

Problema 17.10 Qual é o maior número de reis que podem ser colocados em um tabuleiro de xadrez para que nenhum deles coloque um ao outro em cheque?

Problema 17.11 Qual é o maior número de aranhas que podem compartilhar amigavelmente a teia de aranha mostrada abaixo? Uma aranha irá tolerar um vizinho apenas a uma distância de 1,1 metro ou mais, ao longo da teia.

Problema 17.12 Mostre que um triângulo equilátero não pode ser coberto completamente por dois triângulos equiláteros menores.

Problema 17.13 Cinquenta e um pontos estão espalhados dentro de um quadrado com lado de 1 metro. Prove que um conjunto de três desses pontos pode ser coberto por um quadrado com 20 centímetros de lado.

Problema 17.14 Cinco jovens trabalhadores receberam como salário 1.500 rublos no total. Cada um deles quer comprar um toca-fitas de 320 rublos. Prove que pelo menos um deles deve esperar pelo próximo pagamento para fazer sua compra.

Problema 17.15 Em um conjunto de sete pessoas, a soma das idades delas é de 332 anos. Prove que três pessoas podem ser escolhidas de modo que a soma de suas idades não seja inferior a 142 anos.

Problema 17.16 Num determinado planeta do sistema solar Tau Cetauro, mais da metade da superfície do planeta é terra seca. Mostre que os habitantes desse planeta podem cavar um túnel reto através do centro de seu planeta, começando e terminando em terra seca (suponha que sua tecnologia esteja suficientemente desenvolvida).

Problema 17.17 Prove que existem duas potências de dois que diferem por um múltiplo de 2017.

Problema 17.18 Prove que de quaisquer 52 inteiros, dois podem sempre ser encontrados de tal forma que a diferença de seus quadrados seja divisível por 100.

Problema 17.19 Prove que existe um inteiro cuja representação decimal consiste inteiramente em l's, e que é divisível por 2018.

Problema 17.20 Prove que existe uma potência de três que termina com os dígitos 001 (em notação decimal).

Problema 17.21 Prove que existe uma potência de três que termina com os dígitos 001 (em notação decimal).

Problema 17.22 Cada célula em um quadriculado 3×3 de células é preenchida com um dos números -1, 0, 1. Prove que das oito somas possíveis ao longo das linhas, das colunas e das diagonais, duas somas devem ser iguais.

Problema 17.23 Das 100 pessoas sentadas em uma mesa redonda, mais da metade são homens. Prove que há dois homens sentados diametralmente opostos um ao outro.

Problema 17.24 Quinze garotos reuniram 100 nozes. Prove que alguns garotos reuniram um número idêntico de nozes.

Problema 17.25 Os dígitos 1, 2, ..., 9 são divididos em três grupos. Prove que o produto dos números em um dos grupos deve exceder 71.

Problema 17.26 Os inteiros são colocados em cada entrada de uma tabela de $10x10$, sem que dois inteiros vizinhos diferem em mais de 5 (dois inteiros são considerados vizinhos se seus quadrados compartilharem uma borda comum). Prove que dois dos inteiros devem ser iguais.

Problema 17.27 Prove que entre seis pessoas há três pessoas, cada uma das quais conhece as outras duas ou três pessoas, cada uma das quais não conhece as outras duas.

Problema 17.28 Cinco pontos de uma rede são escolhidos em uma rede quadrada infinita. Prove que o ponto médio de um dos segmentos que unem dois desses pontos é também um ponto da rede.

Problema 17.29 Um armazém contém 200 botas de tamanho 41, 200 botas de tamanho 42 e 200 botas de tamanho 43. Dessas 600 botas, há 300 botas esquerdas e 300 botas direitas. Prove que é possível encontrar entre essas botas pelo menos 100 pares utilizáveis.

Problema 17.30 O alfabeto de uma determinada língua contém 22 consoantes e 11 vogais. Qualquer sequência dessas letras é uma palavra nesse idioma, desde que não haja duas consoantes juntas e nenhuma letra seja usada duas vezes. O alfabeto é dividido em 6 subconjuntos (não vazios). Prove que as letras em pelo menos um desses grupos formam uma palavra no idioma.

Problema 17.31 Prove que podemos escolher um subconjunto de um conjunto de dez números inteiros, de modo que sua soma seja divisível por 10.

Problema 17.32 Dados 11 números naturais diferentes, nenhum maior que 20. Prove que dois destes podem ser escolhidos, um dos quais divide o outro.

Problema 17.33 Onze estudantes formaram cinco grupos de estudo em um acampamento de verão. Prove que dois alunos podem ser encontrados, digamos A e B, de modo que cada grupo de estudo que inclua o aluno A também inclua o aluno B.

Problema 17.34 **Descanse!**

18. RECORRÊNCIAS

Uma **relação de recorrência** é uma equação que define uma sequência recursivamente, relacionando cada termo com os anteriores. São amplamente usadas, por exemplo, em: análise de algoritmos (complexidade temporal), modelagem de sistemas dinâmicos, problemas combinatórios, teoria dos números etc.

As relações de recorrência podem ser classificadas em dois grandes grupos: lineares e não-lineares. Sendo as relações lineares aquelas que podem ser expressas na forma geral

$$x_n + a_1 \cdot x_{n-1} + a_2 \cdot x_{n-2} + \ldots + a_k \cdot x_{n-k} = f(n),$$

enquanto as não-lineares envolvem termos como potências ou produtos de termos da sequência.

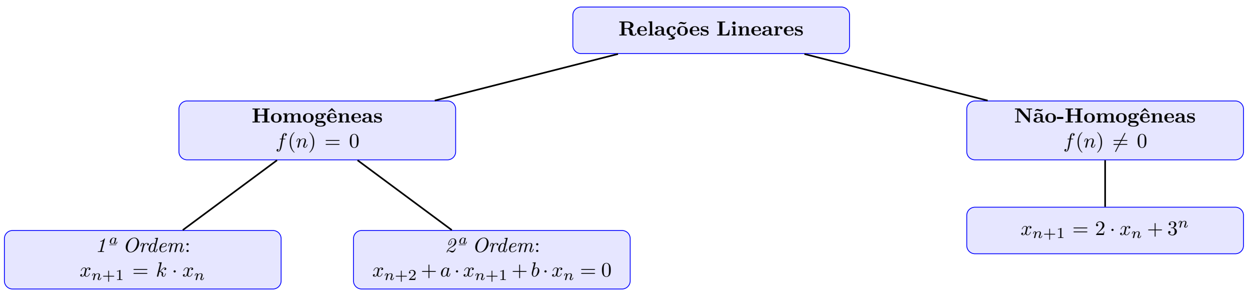


Figura 18.1: Classificação das Relações Lineares

18.1 Recorrências Lineares

Definição 18.1.1 — Recorrências Lineares Homogêneas. Uma relação de recorrência da forma

$$x_n + a_1 \cdot x_{n-1} + a_2 \cdot x_{n-2} + \ldots + a_k \cdot x_{n-k} = 0, \ \forall n \geq k;$$

para constantes a_1, a_2, …, a_k é chamada de relação de *recorrência linear homogênea de ordem k*. Ademais, o *polinômio característico* da relação é

$$P(x) = x^k + a_1 \cdot x^{k-1} + a_2 \cdot x^{k-2} + \ldots + a_k = 0.$$

Teorema 18.1.1 Usando a notação introduzida na definição acima, podemos escrever $P(x)$ na sua forma fatorada

$$P(x) = (x-\alpha_1)^{k_1} \cdot (x-\alpha_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_r)^{k_r},$$

onde α_1, α_2, ..., α_r são *números complexos distintos* e k_1, k_2, ..., k_r são inteiros positivos. A solução geral desta recorrência é, neste caso, dada por

$$x_n = p_1 \cdot n \cdot \alpha_1^n + p_2 \cdot n \cdot \alpha_2^n + \ldots + p_r \cdot n \cdot \alpha_1^r,$$

onde p_i é um polinômio de grau menor que k_i.

Em particular, se $P(x)$ tem k raízes distintas, então todos os p_i são constantes.

Se x_0, x_1, ..., x_{k-1} são definidos, então os coeficientes dos polinômios são determinados exclusivamente.

Prova: A prova segue em três etapas:

1. **Fatoração do polinômio característico**: Pelo Teorema Fundamental da Álgebra, qualquer polinômio $P(x)$ pode ser fatorado em termos de suas raízes complexas α_i com multiplicidades k_i, como mostrado.
2. **Solução geral da recorrência**: Para uma raiz α_i com multiplicidade k_i, as soluções linearmente independentes são da forma $n^m \alpha_i^n$, com $0 \leq m < k_i$. Portanto, a solução geral é combinação linear desses termos: $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \sum_{m=0}^{k_i-1} c_{i,m} \cdot n^m \cdot \alpha_i^n = \sum_{i=1}^{r} p_i \cdot n \cdot \alpha_i^n$, com $gr(p_i) < k_i$.
3. **Unicidade dos coeficientes**: Quando $P(x)$ tem k raízes distintas ($k_i = 1$), cada p_i é constante. As condições iniciais $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ formam um sistema linear $V\vec{c} = \vec{x}$ onde V é uma matriz de Vandermonde. Como os α_i são distintos, V é invertível, garantindo unicidade da solução.

18.2 Problemas

Problema 18.1 Para a sequência definida por $x_{n+2} = 2x_{n+1} + x_n$, com $x_0 = x_1 = 1$, determine x_5.

Problema 18.2 — Pizza de Steiner. Seja x_n o número máximo de regiões em que n retas podem dividir o plano. Caracterize x_n recursivamente.

Problema 18.3 — Queijo de Steiner. Seja x_n o número máximo de regiões em que n planos podem dividir o espaço. Caracterize x_n recursivamente.

Problema 18.4 Prove que uma recorrência de primeira ordem, $x_{n+1} = f(x_n)$, com uma condição inicial $x_1 = a$, tem sempre uma e uma só solução.

Problema 18.5 Prove que uma recorrência de segunda ordem, $x_{n+2} = f(x_{n+1}, x_n)$, com condições iniciais $x_1 = a$ e $x_2 = b$, tem sempre solução única.

Problema 18.6 Se $x_{n+1} = 2x_n$ e $x_1 = 3$, determine x_n.

Problema 18.7 Se $x_{n+1} = x_n + 3$ e $x_1 = 2$, determine x_n.

Problema 18.8 Seja x_n o número máximo de regiões em que n círculos podem dividir o plano. Caracterize x_n recursivamente.

Problema 18.9 Determine o número de permutações caóticas de 5 elementos.

Problema 18.10 Prove que o número de permutações caóticas de n elementos é

$$D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

18.3 Recorrências Lineares de Primeira Ordem

As recorrências lineares de primeira ordem são um dos tipos mais simples e fundamentais de relações de recorrência, frequentemente encontradas em matemática, ciência da computação e engenharia. Elas descrevem sequências em que cada termo é definido como uma combinação linear do termo anterior, seguindo a forma geral:

$$x_{n+1} = a \cdot x_n + f(n),$$

Quanto às suas aplicações, podemos citar:

- **Crescimento Populacional**: Modela populações onde cada geração depende linearmente da anterior.
- **Finanças**: Cálculo de juros compostos ou amortizações.
- **Algoritmos**: Análise de complexidade de algoritmos recursivos simples.

Estas recorrências são a base para entender casos mais complexos, como as de ordem superior ou não-lineares, e destacam a importância das condições iniciais e da estrutura das soluções.

Exemplo 18.1 Resolva a recorrência $x_{n+1} = nx_n$, com $x_1 = 1$.
Solução. Temos que

$$\begin{aligned} x_2 &= 1x_1 \\ x_3 &= 2x_2 \\ x_4 &= 3x_3 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= (n-1)x_{n-1} \end{aligned}$$

Dai, multiplicando todas as $n-1$ igualdades acima, obtemos $x_n = (n-1)!x_1$.
Como $x_1 = 1$, temos $x_n = (n-1)!$. ■

Exemplo 18.2 Resolva a recorrência $x_{n+1} = 2x_n$.
Solução. Temos que

$$\begin{aligned} x_2 &= 2x_1 \\ x_3 &= 2x_2 \\ x_4 &= 2x_3 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= 2x_{n-1} \end{aligned}$$

Dai, multiplicando, obtemos $x_n = 2^{n-1}x_1$. É claro que como não foi prescrito o valor de x_1, há uma infinidade de soluções para a recorrência, $x_n = C \cdot 2^{n-1}$ onde C é uma constante arbitrária. ■

As recorrências lineares não-homogêneas de primeira ordem que mais facilmente se resolvem são as da forma $x_{n+1} = x_n + f(n)$.
Com efeito, temos

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + f(1) \\ x_3 &= x_2 + f(2) \\ x_4 &= x_3 + f(3) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= x_{n-1} + f(n-1) \end{aligned}$$

Somando todas as $n-1$ igualdades acima, obtemos $x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$.

Exemplo 18.3 Resolva $x_{n+1} = x_n + n$, com $x_1 = 0$.
Solução. Temos que

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + 1 \\ x_3 &= x_2 + 2 \\ x_4 &= x_3 + 3 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= x_{n-1} + (n-1) \end{aligned}$$

Somando todas as $n-1$ igualdades acima, obtemos

$$\begin{aligned} x_n &= x_1 + 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) \\ &= 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) \\ &= \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

■

Exemplo 18.4 Resolva a recorrência $x_{n+1} = x_n + 2^n$, com $x_1 = 1$.
Solução. Temos que

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + 2 \\ x_3 &= x_2 + 2^2 \\ x_4 &= x_3 + 2^3 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= x_{n-1} + 2^{n-1} \end{aligned}$$

Somando todas as $n-1$ igualdades acima, resulta

$$\begin{aligned} x_n &= x_1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1} \\ &= 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1} \\ &= 1\frac{2^n - 1}{2-1} \\ &= 2^n - 1 \end{aligned}$$

■

O teorema a seguir mostra que qualquer recorrência linear não-homogênea de primeira ordem pode ser transformada em uma da forma $x_{n+1} = x_n + f(n)$.

Teorema 18.3.1 Se a_n é uma solução não-nula da recorrência homogênea $x_{n+1} = g(n) \cdot x_n$, então a substituição $x_n = a_n \cdot y_n$ transforma a recorrência não-homogênea $x_{n+1} = g(n) \cdot x_n + h(n)$ em

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h(n)}{g(n) \cdot a_n}.$$

Prova: Substituindo $x_n = a_n \cdot y_n$ em $x_{n+1} = g(n) \cdot x_n + h(n)$, obtemos

$$a_{n+1} \cdot y_{n+1} = g(n) \cdot a_n y_n + h(n).$$

Mas, $a_{n+1} = g(n) \cdot a_n$, pois a_n é solução de $x_{n+1} = g(n) \cdot x_n$. Assim,

$$g(n) \cdot a_n \cdot y_{n+1} = g(n) \cdot a_n \cdot y_n + h(n).$$

O que equivale a

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h(n)}{g(n) \cdot a_n}.$$

Exemplo 18.5 Resolva $x_{n+1} = 2 \cdot x_n + 1$, sabendo que $x_1 = 2$.
Solução. Uma solução não-nula de $x_{n+1} = 2 \cdot x_n$ é, por exemplo, $x_n = 2^{n-1}$.
Fazendo a substituição $x_n = 2^{n-1} \cdot y_n$, obtemos $2^n y_{n+1} = 2^n \cdot y_n + 1$, ou seja, $y_{n+1} = y_n + 2^{-n}$.
Donde,

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + 2^{-1} \\ y_3 &= y_2 + 2^{-2} \\ y_4 &= y_3 + 2^{-3} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n &= y_{n-1} + 2^{-(n-1)} \end{aligned}$$

Somando todas as $n-1$ igualdades acima, resulta que

$$\begin{aligned} y_n &= y_1 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \cdots + 2^{-(n-1)} \\ &= y_1 + 2^{-1} \frac{\left(2^{-1}\right)^{n-1} - 1}{2^{-1} - 1} \\ &= y_1 - 2^{1-n} + 1. \end{aligned}$$

Como $x_n = 2^{n-1} \cdot y_n$ e $x_1 = 2$, temos $y_1 = 2$ e $y_n = 3 - 2^{1-n}$.
Daí, $x_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$. ■

Exemplo 18.6 Resolva $x_{n+1} = 3 \cdot x_n + 3^n$, com $x_1 = 2$.
Solução. Uma solução não-nula de $x_{n+1} = 3 \cdot x_n$ é, por exemplo, $x_n = 3^{n-1}$.
Fazendo a substituição $x_n = 3^{n-1} \cdot y_n$, obtemos $3^n \cdot y_{n+1} = 3^n \cdot y_n + 3^n$, ou seja, $y_{n+1} = y_n + 1$. Donde, y_n é uma progressão aritmética de razão 1. Logo, $y_n = y_1 + (n-1)1$. Como $x_n = 3^{n-1} \cdot y_n$ e $x_1 = 2$, temos $y_1 = 2$ e $y_n = n + 1$. Finalmente, $x_n = (n+1) \cdot 3^{n-1}$. ■

Problema 18.11 Determine o número máximo de regiões em que n retas podem dividir o plano.
Problema 18.12 Quantas são as sequências de n termos, todos pertencentes a $\{0, 1\}$, que possuem um número ímpar de termos iguais a 0?
Problema 18.13 Quantas são as sequências de n termos, todos pertencentes a $\{0, 1, 2\}$, que possuem um número ímpar de termos iguais a 0?

Exemplo 18.7 — A Torre de Hanói. Diz a lenda que havia em um tempo 3 estacas e n discos de ouro, de diâmetros diferentes. Inicialmente os discos estavam enfiados na primeira estaca, em ordem crescente de diâmetros, de cima para baixo. Ocupavam-se os sacerdotes em transferi-los para a terceira estaca, usando a segunda como estaca auxiliar. No processo de transferência, de cada vez se movia apenas um disco, de uma estaca para outra, e jamais um disco poderia ser colocado sobre um disco menor. Quando todos estivessem enfiados na terceira estaca, o mundo acabaria. Quantas transferências de discos, de uma estaca para outra, devem ser feitas para colocá-los na terceira estaca?
Solução. Suponha que a primeira estaca possui $n+1$ discos. Para que o último disco possa ser retirado e passado para a terceira estaca, os n discos de cima devem ser passados para a segunda estaca e, a seguir, movidos para a terceira estaca. Logo, representando por x_n o número de movimentos necessários para mover n discos, temos a recorrência

$$x_{n+1} = 2x_n + 1, \text{ com } x_1 = 1.$$

■

Exemplo 18.8 Sheila e Helena disputam uma série de partidas. Cada partida é iniciada por quem venceu a partida anterior. Em cada partida, quem a iniciou tem probabilidade $0,6$ de ganhá-la e probabilidade $0,4$ de perdê-la. Se Helena iniciou a primeira partida, qual é a probabilidade de Sheila ganhar a n-ésima partida?

Solução. Para Sheila ganhar a $(n+1)$-ésima partida, ou ela ganha a n-ésima partida (com probabilidade s_n) e ganha a seguinte (com probabilidade condicional 0,6) ou perde a n-ésima (com probabilidade $1-s_n$) e ganha a seguinte (com probabilidade condicional 0,4). Logo, a probabilidade s_{n+1} de vitória na $(n+1)$-ésima partida é dada por $s_{n+1} = 0,6 \cdot s_n + 0,4 \cdot (1-s_n)$, ou seja,

$$s_{n+1} = 0,2 \cdot s_n + 0,4, \text{ com } s_1 = 0,4.$$

■

Problema 18.14 Determine o número máximo de regiões em que n círculos podem dividir o plano.

Problema 18.15 Resolva a equação $x_{n+1} = (n+1) \cdot x_n + n$, com $x_1 = 1$.

Exemplo 18.9 Resolva a equação $(n+1)x_{n+1} + nx_n = 2n-3$, $x_1 = 1$.

Solução. Uma solução da parte homogênea $(n+1)x_{n+1} = -nx_n$ é dada por

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}.$$

Fazendo a substituição $x_n = a_n \cdot y_n$, conseguimos

$$(-1)^{n+1} \cdot y_{n+1} = (-1)^{n+1} \cdot y_n + (2n-3),$$

ou seja,

$$y_{n+1} = y_n + (-1)^{n+1} \cdot (2n-3), \text{ com } y_1 = \frac{x_1}{a_1} = -1.$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned}
y_1 &= -1, \\
y_2 &= y_1 + (2-3) = -1 + (-1), \\
&\vdots \\
y_n &= y_{n-1} + (-1)^n \cdot [2(n-1)-3].
\end{aligned}$$

Somando os termos:

$$y_n = -1 - 1 - 1 + 3 - 5 + 7 - 9 + \cdots + (-1)^n \cdot [2(n-1)-3].$$

Para n par, agrupamos os termos dois a dois:

$$\begin{aligned}
y_n &= -2 + \underbrace{(-1+3)}_{2} + \underbrace{(-5+7)}_{2} + \cdots + \underbrace{[-2(n-2)-3+2(n-1)-3)]}_{2} \\
&= -2 + 2 \cdot \left(\frac{n-2}{2}\right) \\
&= -2 + (n-2) \\
&= n-4.
\end{aligned}$$

Assim,

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n} \cdot (n-4).$$

Para n ímpar:

$$y_n = (n-5) - [2(n-1)-3] = -n$$

e

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n} \cdot (-n) = (-1)^{n+1}.$$

As duas expressões unificadas:

$$x_n = 1 - \frac{2 + 2(-1)^{n+1}}{n}.$$

■

Problema 18.16 Resolva a equação $x_{n+1} - nx_n = (n+1)!$, $x_1 = 1$.

Problema 18.17 Um círculo foi dividido em n ($n \geq 2$) setores. De quantos modos podemos colori-los, cada setor com uma só cor, se dispomos de k ($k > 2$) cores diferentes e setores adjacentes não devem ter a mesma cor?

Problema 18.18 A torcida do Fluminense tem hoje p_o membros. A taxa anual de natalidade é i, a de mortalidade é j e, além disso, todo ano um número fixo de R torcedores desiste de vez. Se $i > j$, determine o número de torcedores daqui a n anos. A torcida está condenada à extinção?

18.4 Recorrências Lineares de Segunda Ordem

Problema 18.19 Resolva as recorrências a seguir:
a) $x_{n+2} + 5x_{n+1} + 6x_n = 0$.
b) $x_{n+2} + 6x_{n+1} + 9x_n = 0$.
c) $x_{n+2} + 2x_{n+1} + 2x_n = 0$.
d) $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = n$.
e) $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 1 + 3 \cdot 4^n$.
f) $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 2^n$.
g) $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = n + 3^n$.
h) $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = n - 3^n$.
i) $x_{n+2} + x_n = 1$.
j) $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = 1 + n \cdot 3^n$.

Problema 18.20 Resolva as equações a seguir:
a) $x_{n+2} + 5x_{n+1} + 6x_n = 0$; $x_0 = 3$; $x_1 = -6$.
b) $x_{n+2} + x_{n+1} - 6x_n = 6 - 8n$; $x_0 = 1$; $x_1 = 4$.
c) $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 2^{n+3}$; $x_0 = 3$; $x_1 = 6$.

Problema 18.21 Encontre uma relação de recorrência e forneça condições iniciais para o número de cadeias de bits de comprimento n que não possui dois 0's consecutivos. Quantas cadeias de bits existem de comprimento cinco?

Problema 18.22 Quantas são as sequências de n termos, todos pertencentes a $\{0,1,2\}$, que não possuem dois termos consecutivas iguais a 0?

Exemplo 18.10 Seja D_n o número de permutações caóticas de $1, 2, \ldots, n$, isto é o número de permutações simples de $1, 2, \ldots, n$, nas quais nenhum elemento ocupa o seu lugar primitivo. Mostre que $D_{n+2} = (n+1) \cdot (D_{n+1} + D_n)$, se $n \geq 1$.

Solução. Calculemos D_{n+2}, o número de permutações simples de $1, 2, \ldots, n+2$ nas quais nenhum elemento ocupa o seu lugar primitivo.

Tais permutações podem ser divididas em dois grupos: aquelas nas quais o 1 ocupa o lugar do número que ocupa o primeiro lugar e aquelas nas quais isso não ocorre.

Para formar uma permutação do primeiro grupo, devemos escolher o número que trocará de lugar com o 1, o que pode ser feito de $n+1$ modos, e, em seguida, devemos arrumar os demais n elementos nos restantes n lugares, sem que nenhum desses elementos ocupe o seu lugar primitivo, o que pode ser feito de D_n modos. Há, portanto, $(n+1) \cdot D_n$ permutações no primeiro grupo.

Para formar uma permutação do segundo grupo, temos de escolher o lugar que será ocupado pelo número 1 (chamemos esse lugar de k), o que pode ser feito de $n+1$ modos, e, em seguida devemos arrumar os restantes $n+1$ elementos dos demais $n+1$ lugares, sem que o elemento k ocupe o primeiro lugar e sem que nenhum dos demais elementos ocupe o seu lugar primitivo, o que pode ser feito de D_{n+1} modos. Há, portanto, $(n+1) \cdot D_{n+1}$ permutações no segundo grupo.

Consequentemente, $D_{n+2} = (n+1) \cdot (D_{n+1} + D_n)$, como queríamos demonstrar. ■

Problema 18.23 Seja a_n o número de maneiras de cobrir um retângulo $2 \times n$ com peças 2×1.
a. Encontre a_n.
b. Encontre o número de maneiras simétricas e distintas.

Exemplo 18.11 De quantas maneiras podemos cobrir um retângulo $2 \times n$ com peças 2×1 ou 2×2?
Solução. Seja T_n o número de maneiras de preencher esse retângulo.
Observe que:

- Se utilizarmos uma peça 2×1, ainda restará um espaço $2 \times (n-1)$, que pode ser preenchido de T_{n-1} maneiras.
- Se utilizarmos uma peça 2×2, ainda restará um espaço $2 \times (n-2)$, que pode ser preenchido de T_{n-2} maneiras.

Dessa forma, obtemos a recorrência

$$T_n = T_{n-1} + T_{n-2};$$

com casos iniciais $T_1 = 1$ e $T_2 = 2$. ■

Problema 18.24 De quantas maneiras podemos cobrir um retângulo $2 \times n$ com peças 1×1 e L-triminós?
Problema 18.25 De quantas maneiras podemos cobrir um retângulo $2 \times n$ com peças 2×2 e L-triminós?
Problema 18.26 De quantas maneiras podemos cobrir um retângulo $2 \times n$ com peças 2×2 e L-triminós?
Problema 18.27 De quantas maneiras podemos cobrir um retângulo $3 \times n$ com peças 2×1?
Problema 18.28 De quantas maneiras podemos cobrir um retângulo $4 \times n$ com peças 3×1?
Problema 18.29 De quantas maneiras podemos cobrir um retângulo $2 \times n$ com peças 1×1 ou 2×1?
Problema 18.30 De quantas maneiras podemos cobrir um retângulos $4 \times n$ com peças 2×1?
Problema 18.31 De quantas maneiras você pode preencher uma caixa $2 \times 2 \times n$ com blocos $1 \times 1 \times 2$?
Problema 18.32 Um casal de coelhos adultos gera mensalmente um casal de coelhos que se tornam adultos dois meses após o nascimento. Suponha os coelhos imortais. Começando no mês 0 com um casal adulto (que terá prole apenas no mês 1), quantos casais serão gerados no mês n?
Problema 18.33 Uma planta é tal que cada uma de suas sementes produz, um ano após ter sido plantada, 21 novas sementes e, a partir daí, 44 novas sementes a cada ano. Se plantarmos hoje uma semente e se, toda vez que uma semente for produzida ela for imediatamente plantada, quantas sementes serão produzidas daqui a n anos?
Problema 18.34 O salário de Carmelino no mês n é $S_n = a + b \cdot n$. Sua renda mensal é formada pelo salário e pelos juros de suas aplicações financeiras. Ele poupa anualmente $\frac{1}{p}$ de sua renda e investe sua poupança a juros mensais de taxa i. Determine a renda de Carmelino no mês n.
Problema 18.35 Cinco times de igual força disputarão todo ano um torneio. Uma taça será ganha pelo primeiro time que vencer três vezes consecutivas. Qual é a probabilidade de a taça não ser ganha nos n primeiros torneios?
Problema 18.36 Em um jogo, em cada etapa Olavo pode fazer 1 ou 2 pontos. De quantos modos ele pode totalizar n pontos?
Problema 18.37 Mostre que

$$\frac{2\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}(1-\sqrt{5})^n + \frac{2\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}(1+\sqrt{5})^n$$

é, para todo n natural, um número inteiro.
Problema 18.38 Mostre que a parte inteira de

$$(1+\sqrt{3})^{2n+1}$$

é sempre par.
Problema 18.39 **Descanse!**

19. PROBABILIDADE

Situações ou acontecimentos cujos resultados não podem ser certamente previstos são chamados **fenômenos aleatórios**. Condições climáticas para a próxima semana ou mesmo a taxa inflacionária para o próximo mês são exemplos disso. No entanto, modelos matemáticos podem ser estabelecidos para quantificar as incertezas das diversas ocorrências de tais fenômenos.

Para a teoria que segue, chamaremos de **espaço amostral** - Ω - o conjunto de todos os resultados possíveis de um fenômeno aleatório, os subconjuntos destes serão chamados **eventos** e designados por letras maiúsculas do nosso alfabeto.

Definição 19.0.1 — Probabilidade. Nesse contexto a probabilidade de um evento será a funcão $P(\cdot)$ satisfazendo às condições:

- $0 \leq P(X) \leq 1, \forall X \subset \Omega$;
- $P(\Omega) = 1$;
- $P\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j)$, com $A_{j's}$ disjuntos.

Para a *união* de eventos A e B, subconjuntos de Ω, aceitaremos - sem demonstrar - que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Para A e B *disjuntos* a expressão acima reduz-se a $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, ademais $P(A) = 1 - P(A^c)$.

Definição 19.0.2 — Probabilidade Condicional. Dados dois eventos A e B, a probabilidade condicional de A dado que ocorreu B é representada por $P(A|B)$ e dada por

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ com } P(B) > 0.$$

Caso $P(B) = 0$, $P(A|B)$ pode ser definido arbitrariamente; neste texto usaremos $P(A|B) = P(A)$.

Da definição de probabilidade condicional, deduzimos a regra do produto de probabilidades. Para A e B eventos de Ω,

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B), \text{ com } P(B) > 0.$$

Definição 19.0.3 — Independência de Eventos. Dois eventos A e B são independentes, se a informação da ocorrência ou não de B não altera a probabilidade da ocorrência de A. Isto é,

$$P(A|B) = P(A), \text{ com } P(B) > 0,$$

ou ainda a forma equivalente $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

19.1 Problemas

Problema 19.1 Suponhamos que você tenha duas escolhas para apostar na Sena. Na primeira escolha aposta nas dezenas 1 - 3 - 5 - 7 - 9 - 11, e na segunda escolha nas dezenas 8 - 17 - 31 - 45 - 49 - 55. Qual você acha que tem maiores chances de ser vitoriosa?

Problema 19.2 O trecho a seguir foi obtido em um site de internet que se propõe a aumentar as chances de vitória no jogo da Sena. "Quando afirmamos, por exemplo, que as dezenas atrasadas são importantes, é porque já observamos, em nossos estudos, que todas as dezenas são sorteadas a cada quarenta testes, portanto, seria útil você acompanhar e apostar em dezenas atrasadas; você estaria assim aumentando muito suas chances." Você concorda que apostar em uma dezena atrasada aumenta as chances de vitória na Sena?

Problema 19.3 A China tem um sério problema de controle de população. Várias políticas foram propostas (e algumas colocadas em efeito) visando proibir as famílias de terem mais de um filho. Algumas dessas políticas, no entanto, tiveram consequências trágicas. Por exemplo, muitas famílias de camponeses abandonaram suas filhas recém-nascidas, para terem uma outra chance de ter um filho do sexo masculino. Por essa razão, leis menos restritivas foram consideradas. Uma das leis propostas foi a de que as famílias teriam o direito a um segundo (e último) filho, caso o primeiro fosse do sexo feminino. Deseja-se saber que consequências isso traria para a composição da população, a longo prazo. Haveria uma maior proporção de mulheres? De homens?

a. Com auxílio de uma moeda, simule a prole de um conjunto de 10 famílias (jogue a moeda; se obtiver cara, é um menino, e a família para por aí; se der coroa, é uma menina; jogue a moeda mais uma vez e veja se o segundo filho é menino ou menina).

b. Reúna os resultados obtidos pelos integrantes do grupo e produza estatísticas mostrando o número médio de crianças por família, a proporção de meninos e meninas na população e a proporção de famílias que têm um filho homem. O que esses resultados sugerem?

c. Qual é a probabilidade de que uma família tenha um filho do sexo masculino? Qual o número médio de filhos por família? Dentre todas as crianças nascidas, qual é a proporção de meninos e meninas?

Problema 19.4 Uma universidade tem 10 mil alunos dos quais 4 mil são considerados esportistas. Temos, ainda, que 500 alunos são do curso de biologia diurno, 700 da biologia noturno, 100 são esportistas e da biologia diurno e 200 são esportistas e da biologia noturno. Um aluno é escolhido, ao acaso, e pergunta-se a probabilidade de:

a. ser esportista.

b. ser esportista e aluno da biologia noturno.

c. não ser da biologia.

d. ser esportista ou aluno da biologia.

e. não ser esportista, nem aluno da biologia.

Problema 19.5 Sejam A e B dois eventos em um dado espaço amostral, tais que $P(A) = 0,2$, $P(B) = p$, $P(A \cup B) = 0,5$ e $P(A \cap B) = 0,1$. Determine o valor de p.

Problema 19.6 Dois processadores tipos A e B são colocados em teste por 50 mil horas. A probabilidade de que um erro de cálculo aconteça em um processador do tipo A é de $1/30$, no tipo B, $1/80$ e, em ambos, $1/1000$. Qual a probabilidade de que:

a. pelo menos um dos processadores tenha apresentado erro?

b. nenhum processador tenha apresentado erro?

c. apenas o processador A tenha apresentado erro?

Problema 19.7 Um sistema de segurança tem dois dispositivos que funcionam de modo independente e que tem probabilidades iguais a 0,2 e 0,3 de falharem. Qual é a probabilidade de que pelo menos um dos dois componentes não falhe?

Exemplo 19.1 Dois dados são lançados e observa-se a soma de suas faces.

a. Quais são os possíveis resultados para esta soma?

b. Esses resultados são equiprováveis? Caso contrário, que resultado é mais provável? Com que probabilidade? E o menos provável?

c. Qual é a probabilidade de cada resultado possível?

Solução. Aproveite este problema para perceber a *função de probabilidade* da soma das faces dos dois dados:

Soma		Prob.
$S=2$	(1,1)	1/36
$S=3$	(1,2), (2,1)	2/36
$S=4$	(1,3), (2,2), (3,1)	3/36
$S=5$	(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)	4/36
$S=6$	(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)	5/36
$S=7$	(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)	6/36
$S=8$	(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)	5/36
$S=9$	(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)	4/36
$S=10$	(4,6), (5,5), (6,4)	3/36
$S=11$	(5,6), (6,5)	2/36
$S=12$	(6,6)	1/36

■

Exemplo 19.2 Joga-se um dado não-viciado duas vezes. Determine a probabilidade condicional de obter 3 na primeira jogada, sabendo que a soma dos resultados foi 7.

Solução. De acordo com a tabela do **Exemplo 19.1**, tem-se que esta probabilidade é de $\dfrac{1}{6}$. ■

Problema 19.8 Pedro e João combinaram de lançar uma moeda 4 vezes. Pedro apostou que, nesses 4 lançamentos, não apareceriam 2 caras seguidas; João aceitou a aposta. Quem tem maior chance de ganhar a aposta?

Problema 19.9 Um casal decidiu que vai ter 4 filhos. O que é mais provável: que tenham dois casais ou três filhos de um sexo e um de outro?

Problema 19.10 Ana, Joana e Carolina apostam em um jogo de cara-e-coroa. Ana vence na primeira vez que saírem duas caras seguidas; Joana vence na primeira vez que saírem duas coroas seguidas; Carolina vence quando sair uma cara seguida de uma coroa. Qual é a probabilidade que cada uma tem de vencer?

Problema 19.11 Uma carta é sorteada de um baralho comum, que possui 13 cartas (A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K) de cada naipe (ouros, copas, paus e espadas).

a. Qual é a probabilidade de que a carta sorteada seja um A?

b. Sabendo que a carta sorteada é de copas, qual é a probabilidade de que ela seja um A?

Problema 19.12 Duas máquinas A e B produzem 3000 peças em um dia. A máquina A produz 1000 peças, das quais 3% são defeituosas. A máquina B produz as restantes 2000, das quais 1% são defeituosas. Da produção total de um dia, uma peça é escolhida ao acaso e, examinando-a, constata-se que ela é defeituosa. Qual é a probabilidade de que ela tenha sido produzida pela máquina A?

Problema 19.13 Uma moeda, com probabilidade 0,6 de dar cara, é lançada duas vezes.

a. Qual é a probabilidade de que se observem resultados iguais no primeiro e segundo lançamentos?

b. Dado que os resultados observados no primeiro e segundo lançamentos são iguais, qual é a probabilidade condicional de que o resultado observado neles seja cara?

Problema 19.14 Os professores de seis disciplinas (entre as quais Português e Matemática) devem escolher um dia, de segunda a sexta, de uma única semana para a realização da prova de sua disciplina. Suponha que cada professor escolha o seu dia de prova ao acaso, sem combinar com os demais professores.

a. Qual é a probabilidade de que as provas de Português e Matemática sejam realizadas no mesmo dia?

b. Qual é a probabilidade de que os alunos façam provas em todos os dias da semana?

Problema 19.15 Em uma caixa há 10 bolas idênti-

cas, numeradas de 1 a 10. O número de cada bola corresponde a um dos pontos da figura, os quais dividem a circunferência em 10 partes iguais. Nos itens a seguir, considere que as bolas são retiradas ao acaso, uma a uma e sem reposição.
a. Se forem retiradas duas bolas, qual é a probabilidade de que os pontos correspondentes sejam extremidades de um diâmetro?
b. Se forem retiradas três bolas, qual é a probabilidade de que os pontos correspondentes sejam vértices de um triângulo isósceles?

Problema 19.16 Três jogadores, A, B e C, disputam um torneio. Os três têm probabilidades iguais de ganhar o torneio; têm também probabilidades iguais de tirarem o segundo lugar e têm probabilidades iguais de tirarem o último lugar. É necessariamente verdadeiro que cada uma das seis ordens possíveis de classificação dos três jogadores tem probabilidade $\frac{1}{6}$ de ocorrer? Justifique.

Problema 19.17 Cinco dados são jogados simultaneamente. Determine a probabilidade de se obter:
a. um par;
b. dois pares;
c. uma trinca;
d. uma quadra;
e. uma quina;
f. uma sequência;
g. um *full hand* (uma trinca e um par).

Exemplo 19.3 Laura e Telma retiram cada uma um bilhete numerado de uma urna que contém bilhetes numerados de 1 a 100. Determine a probabilidade do número de Laura ser maior que o de Telma, supondo a extração:
a. sem reposição.
Laura e Telma possuem a mesma probabilidade de uma tirar um número maior que a outra. Portanto, a probabilidade de que o número retirado por Laura seja maior do que o de Telma é de 50%.
b. com reposição.
Neste caso, pode acontecer de as duas meninas tirarem o mesmo número, cuja probabilidade é $\frac{100}{100 \cdot 100} = 1\%$. Assim, a probabilidade de que o número retirado por Laura seja maior do que o de Telma é de $\frac{100\% - 1\%}{2} = 49,5\%$.
■

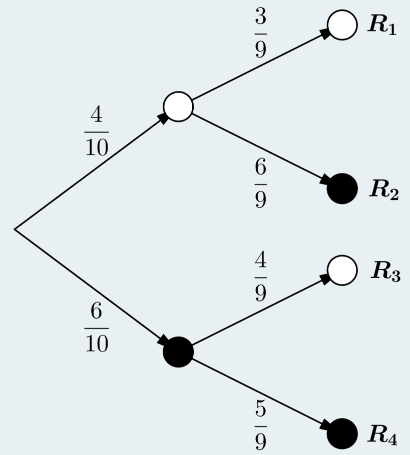
Problema 19.18 No sorteio da Mega-Sena, são sorteados, consecutivamente e sem reposição, 6 números de 1 a 60.
a. Qual é a probabilidade de que o número 23 seja um dos sorteados?
b. Qual é a probabilidade de que o último número sorteado seja o maior dos 6 números que foram sorteados?

Problema 19.19 Em uma urna há 5 bolas vermelhas e 4 pretas, todas de mesmo tamanho e feitas do mesmo material. Retiramos duas bolas sucessivamente da urna, sem repô-las. Qual é a probabilidade de que sejam retiradas duas bolas vermelhas?

Problema 19.20 Existem duas caixas, a caixa ímpar contendo 1 bola preta e 3 bolas brancas, e a caixa par contendo 2 bolas pretas e 4 bolas brancas. Uma caixa é selecionada ao acaso e uma bola de gude é retirada ao acaso da caixa selecionada.
a. Qual é a probabilidade de que a bolinha seja preta?
b. Dado que a bolinha é branca, qual é a probabilidade de ela ter vindo da caixa par?

Problema 19.21 Um juiz de futebol meio trapalhão tem no bolso um cartão amarelo, um cartão vermelho e um cartão com uma face amarela e uma face vermelha. Depois de uma jogada violenta, o juiz mostra um cartão, retirado do bolso ao acaso, para um atleta. Se a face que o jogador vê é amarela, qual é a probabilidade da face voltada para o juiz ser vermelha?

Exemplo 19.4 Uma urna contém 4 bolas brancas e 6 bolas pretas. Sacam-se, sucessivamente e sem reposição, duas bolas dessa urna. Determine a probabilidade de ambas serem brancas.
Solução. Neste problema, especificamente, não seria preciso recorrer à *árvore de probabilidades*. Fi-lo para evidenciar quão proveitosa será a sua utilização.
Cada ramo desta figura representa a *probabilidade condicional* da ocorrência de retiradas, sem reposição, de duas bolas da urna.



A probabilidade de ambas as bolas serem brancas é representada pela ocorrência do ramo superior (R_1) da árvore, $\frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{2}{15}$. ■

Exemplo 19.5 Uma urna contém 4 bolas brancas e 6 bolas pretas. Sacam-se, sucessivamente e sem reposição, duas bolas dessa urna. Determine a probabilidade da primeira bola ser branca, sabendo que a segunda bola é branca.
Solução. Observe mais uma vez a figura acima.
"Casos Possíveis": ramos R_1 ou R_3.
"Casos Bons": ramo R_1.
Desse modo, a probabilidade procurada é

$$\frac{R_1}{R_1+R_3} = \frac{\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}}{\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}+\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9}} = \frac{1}{3}.$$

■

Problema 19.22 Escolhe-se uma entre três moedas. Duas dessas moedas são não-viciadas e a outra tem duas caras. A moeda selecionada é lançada e é obtida uma cara. Qual é a probabilidade de ter sido selecionada a moeda de duas caras?

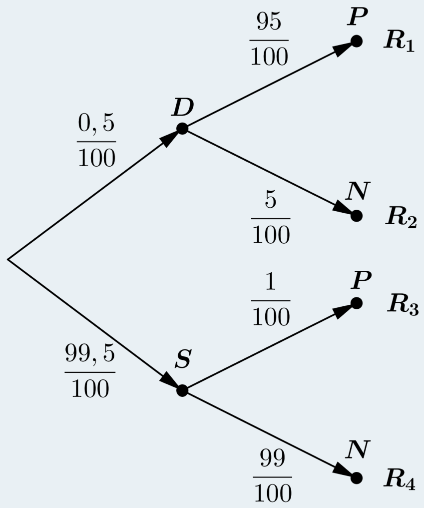
Problema 19.23 Em uma urna há duas moedas aparentemente iguais. Uma delas é uma moeda comum, com uma cara e uma coroa. A outra, no entanto, é uma moeda falsa, com duas caras. Suponhamos que uma dessas moedas seja sorteada e lançada.
a. Qual é a probabilidade de que a moeda lançada seja a comum?
b. Qual é a probabilidade de que saia uma cara?
c. Se o resultado do lançamento é cara, qual é a probabilidade de que a moeda sorteada tenha sido a comum?

Problema 19.24 Um estudante resolve um teste de múltipla escolha de 10 questões, com 5 alternativas por questão. Ele sabe 60% da matéria do teste. Quando ele sabe uma questão, ele acerta, e, quando não sabe, escolhe a resposta ao acaso. Se ele acerta uma questão, qual é a probabilidade de que tenha sido por acaso?

Problema 19.25 João tem dois dados. O dado A tem três faces vermelhas e três azuis. O dado B tem duas faces vermelhas e quatro azuis. Ele escolhe um dos dados ao acaso e o lança. Se a face que sai é azul, ele lança a seguir o dado A; se é vermelha, ele lança o dado B.
a. Qual é a probabilidade de que o segundo dado lançado seja o dado B?
b. Qual é a probabilidade de que saia uma face vermelha no segundo lançamento?
c. Se a face que sai no segundo lançamento é vermelha, qual é a probabilidade de que o primeiro dado lançado tenha sido o A?

Problema 19.26 Uma questão de múltipla escolha tem 5 alternativas. Dos alunos de uma turma, 50% sabem resolver a questão, enquanto os demais "chutam" a resposta. Um aluno da turma é escolhido ao acaso.
a. Qual é a probabilidade de que ele tenha acertado a questão?
b. Dado que o aluno acertou a questão, qual é a probabilidade de que ele tenha "chutado"?

Exemplo 19.6 Um exame de laboratório tem eficiência de 95% para detectar uma doença quando ela de fato existe. Entretanto o teste aponta um resultado falso positivo para 1% das pessoas sadias testadas. Se 0,5% da população tem a doença, qual é a probabilidade de uma pessoa ter a doença, dado que o seu exame foi positivo?
Solução:



Na figura acima, as letras tem o significado de: **D** (doente) ou **S** (sadio), **P** (positivo) ou **N** (negativo).
A probabilidade em questão é

$$\frac{\frac{0,5}{100}\cdot\frac{95}{100}}{\frac{0,5}{100}\cdot\frac{95}{100}+\frac{99,5}{100}\cdot\frac{1}{100}}=\frac{95}{294}\approx 32,3\%.$$

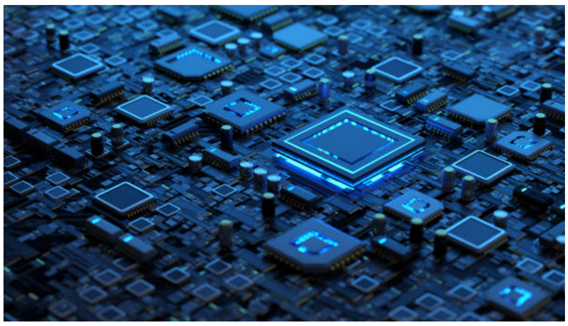
■

Problema 19.27 Suponha que um médico esteja examinando um paciente da população do **Exemplo 19.6**. Este paciente não foi escolhido ao acaso. Ele entrou no consultório do médico porque estava se sentindo doente. Depois de examinar o paciente, mas não ver o resultado do teste de sangue, a opinião do médico é que há 30% de chance de o paciente ter a doença. Como o médico deve revisar sua opinião depois de ver um exame de sangue positivo?

Problema 19.28 — Diagnóstico Falso. A fração de pessoas em uma população que tem uma determinada doença é $0,01$. Um teste de diagnóstico está disponível para testar a doença. Mas para uma pessoa saudável a chance de ser falsamente diagnosticada como portadora da doença é de $0,05$, enquanto para alguém com a doença a chance de ser falsamente diagnosticada como saudável é de $0,2$. Suponha que o teste seja realizado em uma pessoa selecionada aleatoriamente da população.
a. Qual é a probabilidade de o teste apresentar um resultado positivo (significando que a pessoa é diagnosticada como doente, talvez corretamente, talvez não)?
b. Qual é a probabilidade de que a pessoa selecionada ao acaso seja aquela que tem a doença, mas é diagnosticada saudável?
c. Qual é a probabilidade de que a pessoa seja diagnosticada corretamente e esteja saudável?
d. Suponha que o teste mostre um resultado positivo. Qual é a probabilidade de que a pessoa testada realmente tenha a doença?
e. As probabilidades acima admitem uma interpretação de frequência de longo prazo? Explique.

Problema 19.29 — Urnas de Polya. Uma urna contém 4 bolas brancas e 6 bolas pretas. Uma bola é escolhida ao acaso e sua cor anotada. A bola é então recolocada, juntamente com mais 3 bolas da mesma cor (para que agora haja 13 bolas na urna). Em seguida, outra bola é retirada ao acaso da urna.
a. Encontre a chance de que a segunda bola retirada seja branca.
b. Dado que a segunda bola retirada é branca, qual é a probabilidade de que a primeira bola retirada seja preta?
c. Suponha que o conteúdo original da urna seja w bolas brancas e b bolas pretas, e que depois que uma bola é retirada da urna, ela é substituída por mais d bolas da mesma cor. Na parte a), w era 4, b era 6 e d era 3. Mostre que a chance de a segunda bola retirada ser branca é $\frac{w}{w+b}$.

Problema 19.30 Um processo de fabricação produz chips de circuito integrado. A longo prazo, a fração de chips ruins produzidos pelo processo é de cerca de 20%. Testar completamente um chip para determinar se é bom ou ruim é bastante caro, então um teste barato é tentado. Todos os chips bons passarão no teste barato, mas também 10% dos chips ruins.
a. Dado que um chip passa no teste barato, qual é a probabilidade de que seja um chip bom?
b. Se uma empresa que usa esse processo de fabricação vende todos os chips que passam no teste barato, no longo prazo, qual porcentagem de chips vendidos será ruim?



Problema 19.31 Um sistema de comunicação di-

gital consiste em um transmissor e um receptor. Durante cada curto intervalo de transmissão, o transmissor envia um sinal que deve ser interpretado como zero, ou envia um sinal diferente que deve ser interpretado como um. No final de cada intervalo, o receptor faz sua melhor estimativa do que foi transmitido. Considere os eventos:

$$T_0 = \{\text{Transmissor envia } 0\},$$
$$T_1 = \{\text{Transmissor envia } 1\},$$
$$R_0 = \{\text{Receptor conclui que um } 0 \text{ foi enviado}\},$$
$$R_1 = \{\text{O receptor conclui que um } 1 \text{ foi enviado}\}.$$

Suponha que $P(R_0 \mid T_0) = 0,99, P(R_1 \mid T_1) = 0,98$ e $P(T_1) = 0,5$. Achar:
a. a probabilidade de um erro de transmissão dado R_1;
b. a probabilidade global de um erro de transmissão.
c. repita **a.** e **b.** assumindo $P(T_1) = 0.8$ em vez de 0.5.

Problema 19.32 Em um jogo, uma moeda honesta é jogada seguidamente. Cada vez que sai cara, o jogador ganha 1 real; cada vez que sai coroa, o jogador ganha 2 reais. O jogo termina quando o jogador tiver acumulado 4 ou mais reais.
a. Qual é a probabilidade de que o jogador ganhe exatamente 4 reais?
b. Qual é a probabilidade de que no último lançamento saia cara?
c. Dado que o jogador ganhou exatamente 4 reais, qual é a probabilidade de que tenha saído cara no último lançamento?

Problema 19.33 Um pesquisador observa a ocorrência de um evento A como resultado de um experimento específico. Existem três hipóteses diferentes, H_1, H_2 e H_3, que o pesquisador considera como as únicas explicações possíveis para a ocorrência de A. Sob a hipótese H_1, o experimento deve produzir o resultado A cerca de 10% do tempo a longo prazo, sob H_2 cerca de 1% do tempo e sob H_3 cerca de 39% das vezes. Tendo observado A, o pesquisador decide que H_3 é a explicação mais provável e que a probabilidade de H_3 ser verdadeira é

$$\frac{39\%}{10\% + 1\% + 39\%} = 78\%.$$

a. Que suposição o pesquisador está fazendo implicitamente?
b. A probabilidade 78% admite uma interpretação de frequência de longo prazo?
c. Suponha que o experimento seja um teste de laboratório em uma amostra de sangue de um indivíduo escolhido aleatoriamente de uma determinada população. A hipótese H_i é que o sangue do indivíduo é de algum tipo particular i. Em toda a população sabe-se que a proporção de indivíduos com sangue do tipo 1 é de 50%, a proporção com sangue do tipo 2 é de 45%, e a proporção restante é do tipo 3. Revise o cálculo do pesquisador da probabilidade de H_3 dado A, para que ele admita uma interpretação de frequência de longo prazo. H_3 ainda é a hipótese mais provável dada A?

Exemplo 19.7 24 times são divididos em dois grupos de 12 times cada. Qual é a probabilidade de dois desses times ficarem no mesmo grupo?
Solução. Nomeie os 24 times de $\{A, B, x_1, x_2, \ldots, x_{22}\}$ para melhor pensar. Quer-se, digamos, que os times A e B fiquem juntos no mesmo grupo...
"Casos Possíveis": queremos dividir os 24 times em dois grupos (**G1** e **G2**). Isso pode ser feito de

$$\binom{24}{12} \cdot \binom{12}{12} = \binom{24}{12} \text{ modos.}$$

"Casos Bons": de início, os times A e B podem ficar juntos no grupo **G1** ou no **G2**. Digamos que seja no **G1**. Para completar este grupo, deve-se escolher outros 10 times dentre os 22 restantes. Isto pode ser feito de $\binom{22}{10}$ modos. Observe que a escolha dos times para G1 acarretam a formação do G2.
Desse modo, a probabilidade procurada é

$$\frac{2 \cdot \binom{22}{10}}{\binom{24}{12}} = \frac{11}{23}.$$

■

Problema 19.34 Suponha que 16 seleções, entre as quais Brasil e Argentina, vão participar de um torneio. Serão formados quatro grupos de quatro seleções, através de sorteio. Qual é a probabilidade de que Brasil e Argentina fiquem no mesmo grupo?

Problema 19.35 Doze pessoas são divididas em 3 grupos de 4. Qual é a probabilidade de duas determinadas dessas pessoas ficarem no mesmo grupo?

Exemplo 19.8 Em um grupo de 4 pessoas, qual é a probabilidade de haver alguma coincidência de signos zodiacais?
Solução. Pense no seguinte: a probabilidade de haver alguma coincidência dos signos zodiacais é o *complemento* de **não haver** coincidência. De modo que; é mais vantajoso calcular deste último modo que pensar em três casos (2, 3 ou 4 pessoas coincidindo seus signos).
"Casos Possíveis": para a primeira pessoa há 12 signos possíveis, para a segunda, terceira e quarta, idem. Assim, o total de possibilidades é 12^4.
"Casos Bons": queremos que todas as pessoas tenham signos diferentes. Assim, para a primeira pessoa há 12 signos possíveis, para a segunda 11, a terceira 10 e a quarta 9.
Desse modo, a probabilidade procurada é

$$1 - \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{12^4} = \frac{41}{96}.$$

Exemplo 19.9 Em um armário há 5 pares de sapatos. Escolhem-se 4 pés de sapatos. Qual é a probabilidade de se formar exatamente um par de sapatos?
Solução:
"Casos Possíveis": escolher 4 dentre 10 pés de sapatos possíveis - $\binom{10}{4}$.
"Casos Bons": (i) escolher o par igual de sapatos - 5 maneiras; (ii) escolher os outros dois pés: 8 maneiras de escolher o *primeiro sapato* e 6 maneiras de escolher o *segundo sapato* - no entanto, não importa a ordem em que escolhemos estes dois pés (a categoria *primeiro* e *segundo* sapatos não faz sentido). Dividimos, com isto, este último resultado por 2.
Desse modo, a probabilidade procurada é

$$\frac{5 \cdot \frac{8 \cdot 6}{2}}{\binom{10}{4}} = \frac{4}{7}.$$

Problema 19.36 — Problema do Bode. Este problema foi proposto em um programa de rádio nos Estados Unidos e causou um enorme debate na internet. Em um programa de prêmios, o candidato tem diante de si três portas. Atrás de uma dessas portas, há um grande prêmio; atrás das demais há um bode. O candidato escolhe inicialmente uma das portas. O apresentador (que sabe qual é a porta que contém o prêmio) abre uma das portas não indicadas pelo candidato, mostrando necessariamente um bode. A seguir, ele pergunta se o candidato mantém sua escolha ou deseja trocar de porta. O candidato deve trocar ou não?

Problema 19.37 — Problema dos Pontos. Dois jogadores apostaram R$ 10,00 cada um em um jogo de cara-e-coroa, combinando que o primeiro a conseguir 6 vitórias ficaria com o dinheiro da aposta. O jogo, no entanto, precisa ser interrompido quando um dos jogadores tem 5 vitórias e o outro tem 3. Qual é a divisão justa da quantia apostada?
Problema 19.38 Em certa cidade, os táxis são numerados de 1 a N. Para estimar o número N de táxis da cidade, um turista anotou os números de todos os táxis que pegou: 47, 12, 33 e 25. Determine a probabilidade do turista ter tomado os táxis que têm esses números e determine o valor de N para o qual essa probabilidade é máxima.
Problema 19.39 Algumas pesquisas estatísticas podem causar constrangimentos aos entrevistados com perguntas do tipo "você usa drogas?"e correm o risco de não obter respostas sinceras ou não obter respostas de espécie alguma. Para estimar a proporção p de usuários de drogas em certa comunidade, pede-se ao entrevistado que, longe das vistas do entrevistador, jogue uma moeda: se o resultado for cara, responda a "você usa drogas?"e, se o resultado for coroa, responda a

"sua idade é um número par?". Assim, caso o entrevistado diga sim, o entrevistador não saberá se ele é um usuário de drogas ou se apenas tem idade par. Se s é a probabilidade de um entrevistado responder sim, s é estimado pela proporção de respostas sim obtidas nas entrevistas. Determine, assim, a relação entre s e p.

Problema 19.40 A e B lançam sucessivamente um par de dados até que um deles obtenha soma de pontos 7, caso em que a disputa termina e o vencedor é o jogador que obteve soma 7. Se A é o primeiro a jogar, qual é a probabilidade de A ser o vencedor?

Problema 19.41 Quantas vezes, no mínimo, se deve lançar um dado para que a probabilidade de obter algum seis seja superior a 0,9?

Problema 19.42 A e B disputam uma série de partidas. Ganha um prêmio quem primeiro completar 10 vitórias. A é mais habilidoso do que B, sendo de 0,6 a probabilidade de A ganhar uma partida e de 0,4 a probabilidade de B ganhar uma partida. No momento o placar está 7×4 a favor de B. Qual é a probabilidade de A ganhar o prêmio?

Problema 19.43 Em uma cidade, as pessoas falam a verdade com probabilidade $\frac{1}{3}$. Suponha que A faz uma afirmação e que D diz que C diz que B diz que A falou a verdade. Qual a probabilidade de A ter falado a verdade?

Problema 19.44 2^n jogadores de igual habilidade disputam um torneio. Eles são divididos em grupos de 2, ao acaso, e jogadores de um mesmo grupo jogam entre si. Os perdedores são eliminados e os vencedores são divididos novamente em grupos de 2 e assim por diante até restar apenas um jogador que é proclamado campeão. Qual é a probabilidade de dois jogadores A e B se enfrentarem durante o torneio. Qual é a probabilidade do jogador A jogar exatamente k partidas?

Problema 19.45 Um prisioneiro possui 50 bolas brancas, 50 bolas pretas e duas urnas iguais. O prisioneiro deve colocar do modo que preferir as bolas nas urnas, desde que nenhuma urna fique vazia. As urnas serão embaralhadas e o prisioneiro deverá, de olhos fechados, escolher uma urna e, nesta urna, escolher uma bola. Se a bola for branca ele será libertado e, se for preta, será condenado. Como deve agir o prisioneiro para maximizar a probabilidade de ser libertado?

19.1.1 Espaço Não Enumerável

Problema 19.46 Selecionam-se ao acaso dois pontos em um segmento de tamanho 1, dividindo-o em três partes. Determine a probabilidade de que se possa formar um triângulo com essas três partes.

Problema 19.47 Cristina e Maria, que não são pessoas muito pontuais, marcaram um encontro às 16 horas. Se cada uma delas chegará ao encontro em um instante qualquer entre 16 e 17 horas e se dispõe a esperar no máximo 10 minutos pela outra, qual é a probabilidade delas se encontrarem?

Problema 19.48 Seleciona-se ao acaso um ponto X em um diâmetro AB de uma circunferência. Qual a probabilidade da corda que contém X e é perpendicular a AB ter comprimento maior do que o lado do triângulo equilátero inscrito na circunferência?

Problema 19.49 Selecionam-se ao acaso dois pontos em uma circunferência. Qual a probabilidade da corda determinada por esses pontos ter comprimento maior do que o lado do triângulo equilátero inscrito na circunferência?

Problema 19.50 Um polígono regular de $2n+1$ lados está inscrito em um círculo. Escolhem-se três dos seus vértices, formando um triângulo. Determine a probabilidade do centro do círculo ser interior ao triângulo.

Problema 19.51 **Descanse!**

20. VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS

20.1 Função de Probabilidade

Seja X uma varivel aleatória num espaço amostral S com contradomínio finito; isto é, $X(S) = x_1, x_2, \ldots, x_n$. Se, para cada ponto x, de $X(S)$, definirmos sua probabilidade como $P(X = x_i)$, denotada por $f(x_i) = p_i$, teremos um espaço de probabilidade. Esta função f em $X(S)$, isto é, definida por $f(x_i) = p_i = P(X = x_i)$, é chamada de *distribuição* ou *função de probabilidade* de X e é usualmente dada na forma de uma tabela:

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

A distribuição f satisfaz às condições

$$p_i \geqslant 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Definição 20.1.1 — Esperança. Se X é uma variável aleatória com a função de probabilidade acima, então a *esperança* (ou valor esperado) de X, denotada por $E(X)$ ou μ_X, é definida por

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i$$

Exemplo 20.1 Um par de dados é lançado. Seja X a variável que associa cada ponto (a,b) de S (espaço amostral) ao maior desses números, isto é,

$$X(a,b) = \text{máx.}\{a,b\}$$

Assim, sua distribuição de probabilidade é dada por

x_i	1	2	3	4	5	6
$f(x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

A esperança de X é:

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{3}{36} + 3 \cdot \frac{5}{36} + 4 \cdot \frac{7}{36} + 5 \cdot \frac{9}{36} + 6 \cdot \frac{11}{36} = \frac{161}{36} = 4,47$$

Exemplo 20.2 Seja Y a variável que associa a cada ponto (a,b) de S a soma desses números, isto é, $Y(a,b) = a+b$. Assim, a distribuição g de Y é a seguinte.

y_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$g(y_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

A esperança de Y é:

$$E(Y) = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + \ldots + 12 \cdot \frac{1}{36} = 7$$

Definição 20.1.2 — Variância. Seja X uma variável aleatória com $P(X_i = x_i) = p_i$, $i = 1,2,\ldots,k$ e média μ. A variância de X é a ponderação pelas respectivas probabilidades, dos desvios relativos à média, elevados ao quadrado, isto é,

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{k} p_i \cdot (x_i - \mu_X)^2.$$

Muitas vezes, denotamos a variância por σ^2 e, se houver possibilidade de confusão, usamos σ_X^2. Extraindo a raiz quadrada da variância obtemos o *desvio-padrão* que é representado por σ ou σ_X.

Teorema 20.1.1 — Variância: fórmula alternativa. Uma outra fórmula para variância é dada por

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Demonstração. Usando $E(X) = \sum x_i \cdot f(x_i) = \mu$ e $\sum f(x_i) = 1$, teremos

$$\begin{aligned}
Var(X) &= \sum (x_i - \mu)^2 \cdot f(x_i) \\
&= \sum (x_i^2 - 2\mu x_i + \mu^2) \cdot f(x_i) \\
&= \sum x_i^2 \cdot f(x_i) - 2\mu \cdot \sum x_i \cdot f(x_i) + \mu^2 \cdot \sum f(x_i) \\
&= \sum x_i^2 \cdot f(x_i) - 2\mu^2 + \mu^2 \\
&= E(X^2) - [E(X)]^2.
\end{aligned}$$

A seguir, estabelecemos algumas propriedades da variância.

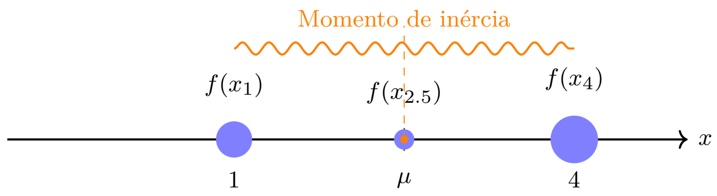
Teorema 20.1.2 Seja X uma variável aleatória e k um número real. Então:

- $Var(X+k) = Var(X)$;
- $Var(k \cdot X) = k^2 \cdot Var(X)$.

Portanto, $\sigma_{X+k} = \sigma_X$ e $\sigma_{kX} = |k| \cdot \sigma_X$.

Existe uma interpretação física da média e da variância. Suponha que para cada ponto x_i sobre o eixo x seja colocada uma unidade de massa $f(x_i)$. Então a média é o centro de gravidade do sistema, e a variância é o *momento de inércia*[1] do sistema. Se os dados estão muito espalhados (alta variância), o "momento de inércia" estatístico é grande, indicando maior dispersão.

Assim, o momento de inércia representa como as probabilidades $f(x_i)$ estão distribuídas em relação à média, assim como massas físicas resistem à rotação. Quanto mais afastados os dados da média, maior a variância (e o "momento de inércia" estatístico). Essa analogia é útil porque ajuda a entender que a variância mede como os dados "resistem" a se concentrar na média. Tal ideia é deveras importante em algoritmos de *machine learning* que dependem da análise de dispersão.



Muitas variáveis aleatórias dão origem à mesma distribuição; por isso frequentemente falamos da média, variância e desvio padrão de uma distribuição em vez da variável aleatória fundamental.

Definição 20.1.3 Seja X uma variável aleatória com média μ e desvio padrão $\sigma > 0$. A variável aleatória padronizada X^* correspondente a X é definida por

$$X^* = \frac{X - \mu}{\sigma}.$$

Verificando-se, ainda, que $E(X^*) = 0$ e $Var(X^*) = 1$.

20.2 Problemas

Problema 20.1 Em um jogo muito popular no Brasil, escolhe-se uma dentre 25 possibilidades para apostar. Caso a escolha seja contemplada, o apostador recebe 18 vezes a quantia apostada. Qual é o ganho esperado de quem aposta R$ 10,00?

Problema 20.2 Duas moedas estão sobre a mesa, uma delas tem duas caras e a outra tem probabilidade igual de cara e coroa. Sorteamos, ao acaso, uma dessas moedas e a lançamos duas vezes. Seja X a variável aleatória que conta o número de caras nesses dois lançamentos. Qual é a média de X?

Problema 20.3 Em uma cela há três túneis. Um conduz à liberdade em 3 horas; outro, em 5 horas, e o último conduz ao ponto de partida depois de 9 horas. Qual o tempo médio que os prisioneiros que descobrem os túneis gastam para escapar?

Problema 20.4 Suponha que, no problema anterior, os prisioneiros que entram pelo terceiro túnel, quando voltam ao ponto de partida, não se lembram de qual foi o túnel em que entraram e, portanto, escolhem para a próxima tentativa um entre três túneis.

Problema 20.5 Num teste de digitação, o tempo em minutos (T) que os candidatos levam para digitar um texto é modelado, de forma aproximada, pela seguinte função de probabilidade:

[1]**Momento de Inércia** é um conceito físico que mede a resistência de um corpo à aceleração angular (mudança em seu movimento de rotação):

$$I = \sum m_i \cdot r_i^2.$$

Onde m_i é a massa e r_i é a distância ao eixo. Assim, quanto maior o momento de inércia, mais difícil é girar o objeto.

T	3	4	5	6	7	8	9
p_i	0,1	0,1	0,2	0,2	0,2	0,1	0,1

O candidato recebe 4 pontos se terminar a digitação em 9 minutos, 5 se terminar em 8 minutos e assim por diante. Determine a média e a variância do número de pontos obtidos no teste.

Problema 20.6 A função de probabilidade da variável X é $P(X=k)=\dfrac{1}{5}$ para $k=1,2,\ldots,5$. Calcule $E(X)$ e $E(X^2)$ e, usando esses resultados, determine $E[(X+3)^2]$ e $Var(3X-2)$.

Problema 20.7 Estatísticas obtidas junto às assistências técnicas indicam que a bomba de água de uma certa lavadora só pode apresentar defeitos após 4 anos de uso. Admita que nos próximos 6 meses, após esse tempo, um mal funcionamento tem probabilidade 0,1 de ocorrer e, caso ocorra, terá 0,5 de probabilidade de ser recuperável. O reparo, que só pode ser feito uma vez, tem o preço de R$ 10,00, enquanto uma bomba nova custa R$ 30,00. Determine a média e a variância do gasto com essa peça em 4,5 anos de uso.

Problema 20.8 Uma peça produzida por uma máquina pode receber do controle de qualidade três classificações: boa, defeituosa ou recuperável, com as seguintes probabilidades, 0,5; 0,2 e 0,3, respectivamente. Suponha que sejam vendidas a R$ 100,00, R$ 10,00 ou R$ 50,00 conforme forem boas, defeituosas ou recuperáveis, respectivamente. Se duas peças, escolhidas ao acaso, são vendidas, qual é o valor médio da venda?

Problema 20.9 O tempo de duração cm horas de uma lâmpada especial foi modelado por uma variável aleatória X com a seguinte função de probabilidade:

X	5	6	7	8	9	10
p_i	0,1	0,1	0,2	0,4	0,1	0,1

Cada lâmpada custa ao fabricante R$ 10,00, mas se sua duração for inferior a 6 horas ele se compromete a indenizar o comprador com R$ 15,00. Qual deve ser o preço de cada lâmpada para o fabricante obter um lucro médio por lâmpada de R$ 20,00?

Problema 20.10 Uma concessionária tem disponível, para um certo automóvel, os modelos S, CL e GL com duas versões de combustível, álcool ou gasolina. Com motor a álcool os preços são 30, 35 e 40 mil reais para os modelos S, CL e GL, respectivamente. Esses preços são 10% superiores se o combustível for gasolina. A procura por carros a álcool é de 30% e a gasolina 70%. Qualquer que seja o combustível escolhido há igual preferência entre os modelos. Calcule a função de probabilidade do preço desse automóvel e obtenha sua média e variância.

Problema 20.11 Num cassino, um jogador lança dois dados, cujas probabilidades são proporcionais aos valores das faces. Se sair soma 7, ganha R$ 50,00, se sair soma 11, ganha R$ 100,00 e se sair soma 2, ganha R$ 200,00. Qualquer outro resultado ele não ganha nada. Qual é o ganho médio do jogador?

Problema 20.12 Uma indústria pretende comprar 3 lotes de peças que são produzidas por dois fornecedores, A e B. Ela inicia, comprando de um dos fornecedores escolhido ao acaso e, se ficar satisfeita com o material entregue, compra o próximo lote do mesmo fornecedor. Se não ficar satisfeita, troca o fornecedor. Admita que para cada lote o índice de satisfação é de 80% e de 70% para A e B, respectivamente. Calcule a média e a variância do número de lotes fornecidos por A.

Problema 20.13 A experiência de diversas companhias de resgate de navios naufragados indica que a probabilidade de um resgate ser bem sucedido na primeira tentativa é de 0,6; caindo para a metade a cada nova tentativa. Uma empresa de resgate tem como norma não realizar mais de três tentativas e cobra 50 mil reais para iniciar os trabalhos e mais $10.000\cdot(k-1)$ reais, com k sendo o número de tentativas.

a. Qual o custo médio dos serviços dessa empresa?

b. Se um navio resgatado pode render ao proprietário 65 mil reais, é interessante para ele contratar essa empresa? Justifique.

Problema 20.14 Suponha que a demanda por certa peça, numa loja de autopeças, siga o seguinte modelo:

$$P(X=k)=\frac{a\cdot 2^k}{k!},\ k=l,2,3,4.$$

a. Encontre o valor de a.

b. Calcule a demanda esperada.

c. Qual é a variabilidade da demanda?

Problema 20.15 Numa indústria farmacêutica, uma máquina produz 100 cápsulas por minuto. A máquina está regulada de modo que no máximo 5% das cápsulas não contenham remédio e, assim, sejam consideradas defeituosas.

a. Se as cápsulas são acondicionadas em vidros com 20 unidades, qual a probabilidade de um vidro apresentar no máximo 2 cápsulas com de-

feito?
b. Qual o número esperado de cápsulas com defeito, por vidro?
c. Qual o número esperado de cápsulas com defeito por minuto de produção?

Problema 20.16 Um fotógrafo negocia com o jornal o seguinte trato: ele submete algumas fotos semanalmente e por cada foto publicada, ganha R$ 50,00. Se a foto não for publicada, não ganha nada. Nesta semana 4 fotos são submetidas com cada uma tendo probabilidade 0,60 de ser publicada, independentemente da demais.
a. Qual a probabilidade que o fotógrafo tenha pelo menos duas fotos publicadas esta semana?
b. Calcule a distribuição de probabilidade de Y (montante que o fotógrafo recebe esta semana).
c. Calcule o ganho médio do fotógrafo nesta semana.

Problema 20.17 Admita que, em cada corrida de Fórmula 1, o motor tem 0,4 de probabilidade de quebrar, independentemente das corridas anteriores. Suponha que a equipe encerrará sua participação no torneio quando o motor quebrar pela primeira vez. Se o ganho acumulado da equipe (em milhares de reais) é $50C$, sendo C o número de corridas completadas por esse motor antes de quebrar, calcule:
a. Qual a probabilidade da equipe completar 8 corridas? E de participar de 8 corridas?
b. Quanto receberá em média essa equipe durante sua "vida" em corridas?

Problema 20.18 Um vendedor de cachorro quente trabalha na porta do Estádio do Morumbi em dias de jogo. Ele pode deixar preparado 5, 6 ou 7 dúzias de sanduíches que custam a ele R$ 5,00 a dúzia. Sabe-se que a procura do cachorro quente (X), no seu ponto, é uma variável aleatória com a seguinte função de probabilidade:

X	4	5	6	7
p_i	0,2	0,3	0,3	0,2

Sabe-se que cada dúzia de sanduíche é vendida a R$ 12,00 e os sanduíches não vendidos vão para um canil que paga R$ 2,00 pela dúzia. Qual é o número de dúzias de sanduíches que devem ser preparadas de modo a maximizar o lucro médio do vendedor?

Problema 20.19 Uma floricultura vende rosas, cravos e jasmins com lucro de, respectivamente, R$ 10,00, R$ 12,00 e R$ 15,00 por dezena. Observa-se que a procura é igual para as três flores. Se o estoque do dia não for vendido, a floricultura tem um prejuízo (lucro negativo) de, respectivamente, R$ 5,00, R$ 7,00 ou R$ 10,00 com cada dezena de rosas, cravos ou jasmins. Se a floricultura dispõe de duas dezenas de cada flor e três clientes visitam a floricultura sucessivamente e compram uma dezena cada um. Fazendo alguma suposição adicional que seja conveniente, determine o lucro esperado da loja.

Problema 20.20 Repita o problema anterior, se a procura por rosas e cravos forem iguais e corresponderem ao dobro da procura por jasmins.

Problema 20.21 Para um exame com 25 questões do tipo certo-errado, um estudante sabe a resposta correta de 17 questões e responde as demais "chutando".
a. Calcule a probabilidade dele acertar pelo menos 90% das respostas.
b. Determine a média e a variância do número de acertos.
c. Suponha que nesse mesmo exame, um outro estudante saiba a resposta correta para 15 questões e tenha probabilidade de acerto nas demais de 0,7. Qual dos estudantes você espera que tenha melhor desempenho?
d. Nas mesmas condições do item **c.**, qual dos estudantes terá desempenho mais homogêneo?

20.3 Variáveis Bidimensionais

Vamos tratar agora de problemas envolvendo duas variáveis. Todavia, os conceitos discutidos aqui podem ser, em geral, expandidos para situações em que mais variáveis são estudadas. Apresentamos para *variáveis aleatórias*, a função de probabilidade conjunta.

Definição 20.3.1 — Função de Probabilidade Conjunta. Para todos os possíveis pares de valores de (X,Y), a conjunta é:

$$p(x,y) = P[(X = x) \cap (Y = y)] = P(X = x, Y = y),$$

isto é $p(x,y)$ representa a probabilidade de (X,Y) ser igual a (x,y).

Podemos nos referir como termos sinônimos, também, à função de probabilidade conjunta como **distribuição conjunta** ou simplesmente **conjunta** das variáveis.

Da função de probabilidade conjunta $p(x,y)$ é possível obter as funções de probabilidade **marginal** de X ou de Y, através da soma de uma das coordenadas. Assim,

$$P(X=x)=\sum_y p(x,y) \text{ e } P(Y=y)=\sum_x p(x,y).$$

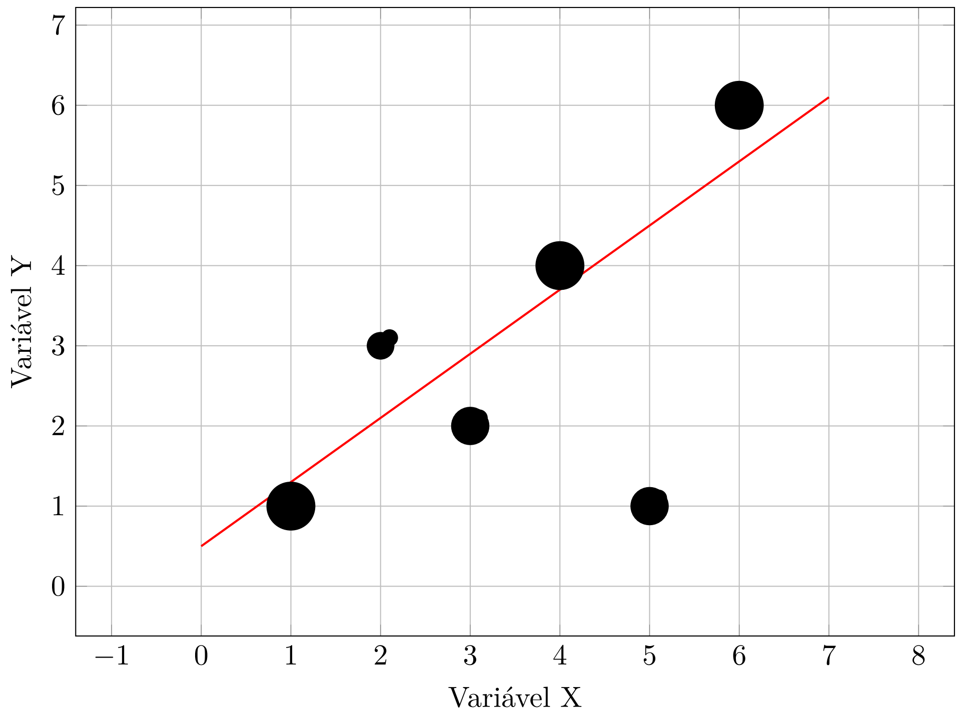
20.4 Relações entre Variáveis

Uma das dúvidas mais comuns entre pesquisadores e usuários da Estatística diz respeito à existência de associação entre duas ou mais variáveis. Entender como uma variável se comporta em função de outras é o foco de diversos estudos que utilizam a Estatística como ferramenta de análise. Nesta seção, daremos os primeiros passos para responder a essa questão, cuja abordagem mais aprofundada será apresentada na parte dedicada à Inferência Estatística.

Quando dispomos de dados referentes a duas variáveis, seja em uma população ou em uma amostra, é possível representá-los em um gráfico no plano cartesiano, indicando a frequência dos diferentes pares de valores. Esse tipo de representação gráfica pode ser útil para identificar possíveis tendências de associação entre as variáveis.

No entanto, embora os diagramas sejam ferramentas valiosas, sua interpretação pode se tornar difícil em certas situações. Isso ocorre, por exemplo, quando o conjunto de dados possui muitas observações, mas poucos valores distintos — o que resulta em frequências elevadas para alguns pares e compromete a visualização de uma tendência clara.

Dificuldade de visualização com muitos dados concentrados



Veja que no diagrama de dispersão acima, a alta concentração de pontos em alguns valores dificulta a identificação da tendência subjacente (linha vermelha). Observe também como múltiplas observações se sobrepõem nos mesmos pares de valores, tornando a visualização da relação entre as variáveis menos clara.

Por isso, é essencial aprofundar o estudo da associação entre variáveis, buscando formas de caracterização que vão além da análise visual. Nesse contexto, introduziremos os conceitos de **probabilidade condicional** e **independência** de variáveis aleatórias.

Definição 20.4.1 — Probabilidade condicional. Dadas duas variáveis aleatórias discretas, a probabilidade condicional de $X = x$, dado que $Y = y$ ocorreu, é dada pela expressão:

$$P(X = x \mid Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}, \text{ se } P(Y = y) > 0.$$

Caso $P(Y = y) = 0$, a probabilidade condicional pode ser definida arbitrariamente e adotaremos $P(X = x \mid Y = y) = P(X = x)$.

Definição 20.4.2 — Independência de variáveis. Duas variáveis aleatórias discretas são independentes, se a ocorrência de qualquer valor de uma delas não altera a probabilidade de ocorrência de valores da outra. Em termos matemáticos,

$$P(X = x \mid Y = y) = P(X = x), \ \forall (x, y)$$

Como definição alternativa e equivalente podemos usar que:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y), \ \forall (x, y)$$

Observe que a definição de independência apresentada acima exige que a igualdade seja válida para todos os pares (x,y). Portanto, para demonstrar que duas variáveis aleatórias não são independentes, basta identificar um único par de valores para o qual a igualdade não seja satisfeita.

! X e Y são independentes $\iff p(x,y) = p(x) \cdot p(y), \ \forall (x,y)$.
Se $\exists (x_o, y_o)$ tal que $p(x_o, y_o) \neq p(x_o) \cdot p(y_o)$, então X e Y não são independentes.

Para definir medidas de dependência entre as variáveis, precisamos estudar, inicialmente, as propriedades do valor esperado.

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias discretas com distribuição conjunta $p(x,y)$. As marginais de X e Y serão representadas, respectivamente, por $p(x)$ e $p(y)$. Vamos determinar o valor esperado da variável $X + Y$:

$$\begin{aligned}
E(X+Y) &= \sum_x \sum_y p(x,y) \cdot (x+y) \\
&= \sum_x \sum_y p(x,y) \cdot x + \sum_x \sum_y p(x,y) \cdot y \\
&= \sum_x x \cdot \left(\sum_y p(x,y) \right) + \sum_y y \cdot \left(\sum_x p(x,y) \right) \\
&= \sum_x p(x) \cdot x + \sum_y p(y) \cdot y \\
&= E(X) + E(Y)
\end{aligned}$$

! $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$.

Perceba que essa importante propriedade do valor esperado foi obtida sem exigir nenhuma condição adicional sobre as variáveis envolvidas. Por isso, trata-se de um resultado com ampla aplicabilidade, que se estende inclusive para o caso de mais de duas variáveis.

Vamos agora considerar o produto XY. Quando as variáveis são **independentes**, o valor esperado do produto é simplesmente o produto dos valores esperados. Ou seja, para variáveis aleatórias discretas X e Y que sejam independentes, temos:

$$
\begin{aligned}
E(XY) &= \sum_x \sum_y p(x,y) \cdot x \cdot y \\
&= \sum_x \sum_y p(x) \cdot p(y) \cdot x \cdot y \\
&= \left(\sum_x p(x) \cdot x \right) \left(\sum_y p(y) \cdot y \right) \\
&= E(X) \cdot E(Y)
\end{aligned}
$$

! Se X e Y são independentes, $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$.

É importante destacar que a relação entre independência e o valor esperado do produto é **unidirecional**. Ou seja, o que se pode afirmar com segurança é que, se X e Y são independentes, então $E(XY)$ será igual ao produto dos valores esperados de X e de Y: $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$.

No entanto, o contrário *não é necessariamente verdadeiro* — o fato de $E(XY)$ ser igual a $E(X) \cdot E(Y)$ não garante que X e Y sejam independentes.

Se as variáveis são dependentes, a relação entre elas pode ser de vários tipos e, no caso de ser linear, vamos definir uma medida dessa dependência.

Definição 20.4.3 — Covariância. A covariância fornece uma medida de dependência linear entre X e Y:

$$Cov(X,Y) = \sigma_{X,Y} = E[(X - \mu_X) \cdot (Y - \mu_Y)].$$

A covariância pode ser calculada mais facilmente pela seguinte expressão alternativa:

$$Cov(X,Y) = \sigma_{X,Y} = E(XY) - E(X) \cdot E(Y).$$

Observe que, no caso em que X e Y são independentes, temos $Cov(X,Y) = 0$, uma vez que o valor esperado do produto se torna igual ao produto dos valores esperados. A partir da covariância, definimos uma nova medida de dependência linear.

Definição 20.4.4 — Correlação. O coeficiente de correlação entre as variáveis aleatórias discretas X e Y é dado por:

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

Pela definição acima, o coeficiente de correlação é o quociente entre a covariância e o produto dos desvios-padrão de X e Y. A divisão pelo produto dos desvios-padrão tem a função de padronizar a medida e torná-la possível de ser utilizada para comparações com outras variáveis. Não é difícil verificar que $\rho_{X,Y}$ é um número adimensional e limitado por 1, isto é, $|\rho_{X,Y}| \leq 1$. A interpretação de sua expressão segue os mesmos passos da covariância, sendo que valores de $\rho_{X,Y}$ próximos de ± 1 indicam correlação forte.

Deduziremos agora, a partir da definição, a expressão da variância da soma de duas variáveis aleatórias.

$$
\begin{aligned}
Var(X+Y) &= E[(X+Y) - (\mu_X + \mu_Y)]^2 \\
&= E[(X - \mu_X) + (Y - \mu_Y)]^2 \\
&= E[(X - \mu_X)^2 + (Y - \mu_Y)^2 + 2 \cdot (X - \mu_X) \cdot (Y - \mu_Y)] \\
&= E(X - \mu_X)^2 + E(Y - \mu_Y)^2 + 2 \cdot E[(X - \mu_X) \cdot (Y - \mu_Y)] \\
&= Var(X) + Var(Y) + 2 \cdot Cov(X,Y)
\end{aligned}
$$

! $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2 \cdot Cov(X,Y)$, que se reduzirá à soma das variâncias, no caso de independência entre X e Y.

Para finalizar, considere uma sequência de variáveis aleatórias independentes com **distribuição Bernoulli** de parâmetro p. Queremos saber como se comporta a soma de n dessas variáveis. Representemos por $X_1, X_2, \ldots, X_n$ a sequência de variáveis de Bernoulli. Estamos interessados em $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ e, pela definição do modelo Binomial, já sabemos que $X \sim b(n,p)$.

Lembrando que $E(X_i) = p$ e $Var(X_i) = p \cdot (1-p)$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, vamos calcular a média e a variância de X, utilizando as propriedades antes apresentadas. Temos,

$$\begin{aligned} E(X) &= E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) \\ &= E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n) \\ &= p + p + \ldots + p \\ &= n \cdot p \end{aligned}$$

Para obter a variância, usaremos a independência dos $X_{i's}$:

$$\begin{aligned} Var(X) &= Var(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) \\ &= Var(X_1) + Var(X_2) + \ldots + Var(X_n) \\ &= p \cdot (1-p) + p \cdot (1-p) + \ldots + p \cdot (1-p) \\ &= n \cdot p \cdot (1-p) \end{aligned}$$

20.5 Problemas

Problema 20.22 Num estudo sobre o tratamento de crises asmáticas, estabeleceu-se a seguinte função conjunta de probabilidades entre o número de crises de asma (A) e o número de internações hospitalares (H).

$A \setminus H$	0	1	2
0	1/8	1/16	0
1	3/16	1/8	1/16
2	1/16	3/16	3/16

a. Determine as funções de probabilidade marginal das variáveis A e H.
b. Calcule o valor esperado dessas variáveis.
c. Obtenha a função de probabilidade da variável $A + H$.

Problema 20.23 A função conjunta de probabilidade entre as variáveis X e Y é apresentada abaixo (com algumas entradas faltando):

$X \setminus Y$	-1	0	2	4	$P(X=x)$
-2		3/64	1/32		5/16
-1	1/16	1/16	0		
1	1/64	11/64		1/64	5/16
2	5/64		3/64	1/32	
$P(Y=y)$		5/16		1/4	1

a. Complete a tabela.
b. Obtenha as marginais de X e Y.
c. Calcule a função de probabilidade da variável $X \cdot Y$.

Problema 20.24 Para o lançamento de dois dados equilibrados, defina duas variáveis aleatórias. Seja x o número de vezes que aparece a face 2 e Y igual a 0 se a soma for par e 1, caso contrário.
a. Determine a função de probabilidade conjunta de X e Y.
b. Calcule $E(X)$, $E(Y)$ e $E(X+Y)$.
c. Verifique se X e Y são independentes.
d. Calcule o coeficiente de correlação entre X e Y.

Problema 20.25 Considere a função conjunta:

$X \setminus Y$	0	1	2
0	1/18	1/9	1/6
1	1/9	1/18	1/9
2	1/6	1/6	1/18

a. Calcule $P(1 \leq X \leq 2, Y \geq 1)$ e $P(X = 1, Y > 1)$.
b. Determine $E(X)$, $E(Y)$ e $Cov(X,Y)$.
c. X e Y são independentes? Justifique.

Problema 20.26 A função de probabilidade conjunta das variáveis X e Y é dada pela seguinte tabela de dupla entrada.

$X \setminus Y$	-1	0	1
-1	1/8	1/8	1/8
0	1/8	0	1/8
1	1/8	1/8	1/8

a. Verifique se $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$.
b. X e Y são independentes? Comente.

Problema 20.27 Numa caixa existem 4 bolas numeradas 3, 5, 5 e 7. Uma bola é sorteada ao acaso, seu número anotado (X_1) e devolvida à caixa. Uma segunda bola é escolhida, também ao acaso, e seu número denotado por X_2.
a. Determine a conjunta de X_1 e X_2.
b. Calcule as marginais de X_1 e X_2. Elas são independentes?
c. Encontre o valor esperado e a variância de X_1, X_2 e $\overline{X} = \dfrac{X_1 + X_2}{2}$.

Problema 20.28 Uma moeda equilibrada é lançada três vezes e são definidas as variáveis aleatórias: *número de caras nos dois primeiros resultados* X, *número de caras no último lançamento* Y e *número total de caras* S.
a. Construa a tabela conjunta de (X,Y).
b. Verifique se X e Y são independentes.
c. Calcule $E(X)$, $E(Y)$ e $Cov(X,Y)$.
d. Expresse S em função de X e Y e determine $E(S)$ e $Var(S)$.

Problema 20.29 Considere a frase: "Para mais saúde pratique mais esporte". Escolha ao acaso uma palavra dessa frase e considere as variáveis aleatórias número de vogais (V) e número de consoantes (C).
a. Determine a distribuição conjunta de V e C.
b. Obtenha as distribuições marginais de V e C.
c. Calcule $E(V)$ e $E(C)$.
d. V e C são independentes? Justifique.
e. Sabendo que $V = 2$, qual a probabilidade de ter sido escolhida a palavra "mais"?

Problema 20.30 A tabela a seguir representa a função de probabilidade conjunta de duas variáveis aleatórias independentes.

$X \setminus Y$	1	2	3	$P(X=x)$
-1				1/6
0				2/6
1				3/6
$P(Y=y)$	1/5	3/5	1/5	1

a. Complete a tabela.
b. Determine $E(X)$, $E(Y)$ e $Cov(X,Y)$.
c. Calcule $Var(X+Y)$.

Problema 20.31 Sorteia-se ao acaso um dentre os números 9, 12, 18 e 27 e é feita a decomposição do número sorteado em fatores primos. Sejam D e T, as variáveis que representam, respectivamente, o número de vezes em que o 2 e o 3 aparecem na decomposição.
a. Obtenha a conjunta entre D e T.
b. Calcule a covariância e o coeficiente de correlação entre as variáveis.

Problema 20.32 As variáveis F e M representam, respectivamente, o número de anos para completar o ensino fundamental e o ensino médio. Numa certa cidade, a tabela a seguir é adotada:

$F \setminus M$	3	4	5	6
8	9/60	9/60	7/60	1/60
9	7/60	7/60	5/60	3/60
10	3/60	4/60	3/60	2/60

Determine o valor esperado e a variância da variável $F + M$.

Problema 20.33 Sejam $X \sim b(5; 0,5)$ e $Y \sim b(3; 0,2)$ independentes. Determine o valor esperado e a variância da variável $2X - 3Y$.

Problema 20.34 Tabela da função de probabilidade conjunta:

$E \setminus I$	13	14	15	16
5	0,02	0,02	0,02	0,03
6	0,07	0,09	0,12	0,13
7	0,10	0,08	0,03	0,05
8	0,10	0,06	0,04	0,04

a. Determine $E(I - 18)$ e $Var(I - 18)$.
b. Idem para $Y = E - \mu_E$.
c. Obtenha a conjunta entre X e Y.

Problema 20.35 A conjunta das variáveis aleatórias independentes X e Y é parcialmente apresentada a seguir:

$X \setminus Y$	-2	0	2	$P(X=x)$
1				0,3
2				0,7
$P(Y=y)$	0,2	0,3		

a. Complete a tabela.
b. Calcule o valor esperado e a variância de $2X - Y$.

Problema 20.36 Sendo X_1, X_2 e X_3 variáveis aleatórias independentes, seguindo o modelo Bernoulli de parâmetro p, pergunta-se:
a. Qual é a função de probabilidade de $X_1 + X_2 + X_3$? Você reconhece essa variável?
b. Qual é o valor de $Var\left(\frac{X_1+X_2+X_3}{3}\right)$?

Problema 20.37 Sabe-se que X e Y são independentes e assumem, respectivamente, os valores 1, 2 e 3 e 0, 1 e 2. Admita conhecidas as probabilidades $P(Y=0)=\frac{1}{3}$, $P(X=3)=\frac{1}{3}$, $P(X=1,Y=0)=\frac{1}{9}$ e $P(X=3,Y=2)=\frac{1}{9}$.
a. Construa a tabela de dupla entrada para X e Y.
b. Calcule $E(X\times Y)$ e $Var(X+Y)$.

Problema 20.38 Um paleontólogo acredita que o número de minerais presentes em certo tipo de rocha pode influir na chance de se encontrar fósseis perto de uma indústria calcária. Através de amostras de rocha obtidas em levantamentos de campo, ele obteve a distribuição conjunta para as variáveis Z: número de minerais presentes e W: variável que assume 1, se for observada a presença de fóssil e 0 caso contrário.

$W\setminus Z$	1	2	3
0	1/8	1/8	1/4
1	1/8	1/4	1/8

a. Calcule $P(W=0,Z>1)$.
b. Encontre as distribuições marginais para Z e W.
c. Qual a esperança de Z?
d. A suspeita do paleontólogo é confirmada pelos valores apresentados na tabela? Justifique sua resposta quantitativamente.

Problema 20.39 Sejam $U=Y^2$ e $V=X+Y$, com a função de probabilidade conjunta entre X e Y dada na tabela a seguir:

$X\setminus Y$	0	1	2
-1	1/12	1/6	1/3
1	1/6	1/4	0

a. Obtenha a conjunta de U e V.
b. Calcule $P(U=4\mid V=1)$.
c. Determine $Cov(U,V)$.

Problema 20.40 Considere duas variáveis aleatórias discretas A e B. Admita que A assume somente os valores a_1, a_2 e a_3, enquanto B os valores b_1 e b_2. Sabemos que:

$$P(A=a_1)=0,2;\ P(A=a_3)=0,5;$$
$$P(B=b_1)=0,6;$$
$$P(A=a_1,B=b_1)=0,12 \text{ e}$$
$$P(B=b_2\mid A=a_3)=0,5.$$

a. Construa a tabela de dupla entrada entre A e B.
b. As variáveis são independentes? Justifique.
c. Calcule $P(A=a_2\mid B=b_1)$.

Problema 20.41 Sejam X e Y independentes com função de probabilidade $G(0,5)$. Determine o valor esperado e a variância de:
a. $S=X+Y$.
b. $D=X-Y$.

Problema 20.42 Baseando-se nas projeções de preço de duas matérias primas, M_1 e M_2, pretende-se estudar a viabilidade econômica do lançamento de um certo produto. A função conjunta de probabilidade com os preços (em reais) é apresentada a seguir:

$M_1\setminus M_2$	5	9	13
1	0,1	0	0
3	0,1	0,2	0,2
5	0	0,2	0,2

a. Determine o preço médio e a variância das matérias primas.
b. O produto usa 2 unidades de M_1 e 3 de M_2. Qual é seu custo médio?
c. Se o produto deverá ser vendido por 50 reais, qual será o lucro médio por unidade?

Problema 20.43 A caixa I contém uma bola vermelha e uma azul, enquanto que a caixa II contém duas vermelhas e uma azul. Um experimento consiste em escolher uma bola ao acaso da caixa I e passar para a caixa II e, em seguida, escolher uma bola da II e passar para a I. Sejam X e Y os números de bolas vermelhas nas caixas I e II, respectivamente.
a. Calcule conjunta de X e Y. Elas são independentes?
b. Comente o que ocorre com a variável $X+Y$.
c. Determine $E(X)$, $E(Y)$, $Var(X)$ e $Var(Y)$.

Problema 20.44 A variável X é Bernoulli com $p=0,4$ e Y é Binomial com $p=0,5$ e $n=3$. Admita que X e Y são independentes. **a.** Determine $P(X=0|Y=2)$.
b. Obtenha a função de probabilidade conjunta de X e Y e do produto XY.
c. Calcule $E(X)$, $E(Y)$ e $E(XY)$ e verifique que $E(X)\cdot E(Y)=E(XY)$.
d. Determine o valor de $Cov(X,Y)$ e de $\rho_{X,Y}$.

Problema 20.45 Considere duas variáveis aleatórias independentes $U\sim Po(2)$ e $V\sim G(0,3)$. Defina:

$$X=\begin{cases}0 & \text{se } U=0\\ 1 & \text{se } U\geq 1\end{cases} \quad \text{e} \quad Y=\begin{cases}-1 & \text{se } V=0\\ 0 & \text{se } V=1\\ 1 & \text{se } V\geq 2\end{cases}$$

a. Construa a conjunta de X e Y e determine

$Cov(X,Y)$.
b. Determine $E(2X-3Y)$ e $Var(2X-3Y)$.

Problema 20.46 Duas moedas são lançadas simultaneamente. Uma delas é equilibrada e a outra tem probabilidade 2/3 de sair face cara. Considere as variáveis U total de caras observadas e V é uma Bernoulli que assume valor 1 se as duas faces são iguais.
a. Determine a conjunta de U e V e verifique se são independentes.
b. Calcule a média e a variância de $2U-V$.

Problema 20.47 **Descanse!**

Bibliografia

[1] ANDREESCU, Titu et all. *An Introduction to Diophantine Equations.* New York, Birkhäuser, 2010.

[2] CARVALHO, P.C.P & MORGADO, A. C. *Coleção PROFMAT: Matemática discreta.* Rio de Janeiro, SBM, 2013.

[3] LIPSCHUTZ, Seymour. *Probabilidad.* México, McGraw-Hill/Interamericana, 1998.

[4] MAGALHÃES, Marcos N. & LIMA, Antonio Carlos P. *Noções de Probabilidade e Estatística.* São Paulo, Edusp, 2020.

[5] MEGA, Élio & WATANABE, Renate. *Olimpíadas Brasileiras de Matemática · 1a. a 8a.: problemas e resoluções.* São Paulo, Atual, 1995.

[6] SANTOS, José Plínio de Oliveira. *Introdução à Teoria dos Números.* Rio de Janeiro, IMPA, 1998.

VII

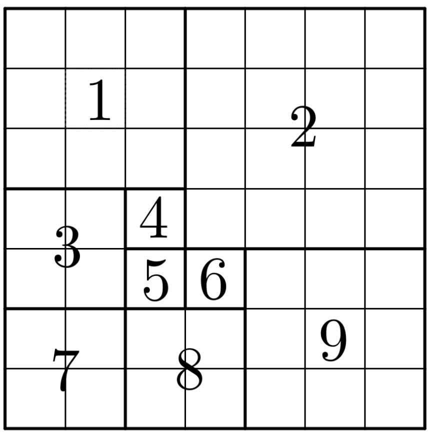
Problemas Diversos

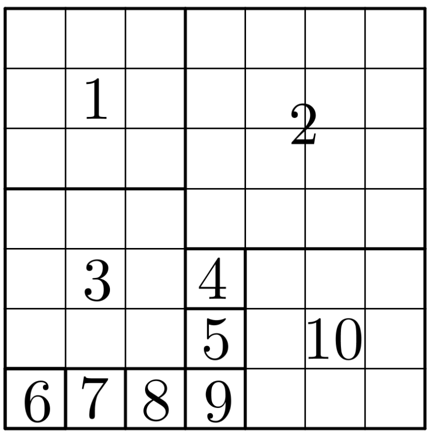
21. Problemas Diversos

Esta coleção de problemas demonstra, de maneira sucinta, que uma abordagem bastante elementar é suficiente para "atacar" uma grande variedade de situações.
Espero que eles possam contribuir com seu aprendizado; e também com a desmistificação da Matemática que, muita das vezes, é tratada com muita antipatia pela maioria dos estudantes. Consequência, isto, de pontos de vistas pouco significativos.
Recomendo, fortemente, antes de pesquisar soluções, tentar dar sua própria resposta para cada um destes problemas.

Problema 21.1 Dizemos que um inteiro positivo n é ESPECIAL se é possível dividir um tabuleiro 7×7 em n quadrados de lados inteiros.

Exemplo: Os números 9 e 10 são especiais, pois é possível dividir um tabuleiro 7×7 em 9 quadrados de lados inteiros, bem como é possível dividir tal quadrado em 10 quadrados de lados inteiros, conforme mostram as figuras.

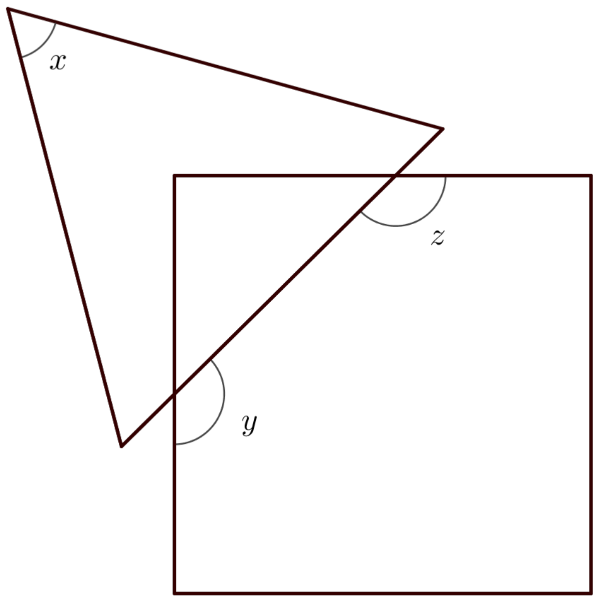




a) Mostre que 14 é especial.
b) Prove que 7 não é especial.

Problema 21.2 Encontre o menor número de 3 dígitos tal que o triplo deste número tem todos seus dígitos pares.

Problema 21.3 Na figura seguinte temos um quadrado e um triângulo equilátero. Ache $x+y+z$.



Problema 21.4 Seja N um número de 3 dígitos, e seja M o número que resulta ao inverter a ordem dos dígitos de N. Se o produto de M e N é 394695, calcule a soma dos dígitos de N.

Problema 21.5 A sequência de números $2,4,8,32,256,\ldots$ cumpre que cada termo, a partir do terceiro, é igual ao produto dos dois anteriores. Qual o dígito das unidades do termo de ordem 2017?

Problema 21.6 Um relógio digital marca a hora no formato $HORAS : MINUTOS$, desde as $00:00$ até as $23:59$. Se em determinado momento o relógio mostra $20:08$, quantos minutos devem passar, no mínimo, para que os mesmos 4 dígitos apareçam novamente numa ordem qualquer?

Problema 21.7 Um quadrado mágico é um tabuleiro 3×3 tal que a soma dos números de qualquer linha, coluna ou diagonal é sempre a mesma. Assim, complete o quadrado mágico abaixo e determine o menor valor possível de x.

		3
x	4	5

Problema 21.8 Mostre que a diferença entre um número racional, suposto distinto de zero e um, e seu inverso, nunca é um número inteiro.
Problema 21.9 Considere a sequência

$$a_n = \sqrt{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} + \sqrt{1+\left(1-\frac{1}{n}\right)^2},\ n \geq 1.$$

Prove que

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_{20}}$$

é um inteiro.

Problema 21.10 Prove que se $n \in \mathbb{N}$, $n < 1$, então

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{n^2}<1.$$

Problema 21.11 Seja a um número real positivo dado. Determine o valor mínimo possível de x^3+y^3, onde x e y são reais positivos tais que $xy(x+y)=a$.

Problema 21.12 Os comprimentos dos lados de um triângulo são os inteiros $x-1$, x e $x+1$ e o seu maior ângulo é o dobro do menor. Determine o valor de x.

Problema 21.13 Quantos números $\overline{abc}$ de três dígitos distintos cumprem a seguinte propriedade: "ao substituir o maior dígito por 1 obtem-se um múltiplo de 30"?

Problema 21.14 Escrevem-se os números naturais desde 1 até 9, inclusive, e logo se pintam usando as cores roxo, azul e verde. Cada número é pintado com uma só cor, de tal modo que cada número pintado de roxo é igual a soma de um número pintado de azul mais um número pintado de verde. Qual a máxima quantidade de números que se podem pintar de roxo?

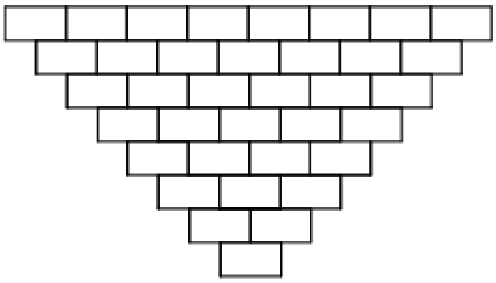
Problema 21.15 Dizemos que um inteiro positivo m é "direito" se existe um inteiro positivo N tal que a soma dos algarismos de N é m, e além disso N é divisível por $m+2008$.

a) Ache um número "direito" maior que 1000.

b) Ache um número "direito" menor que 100.

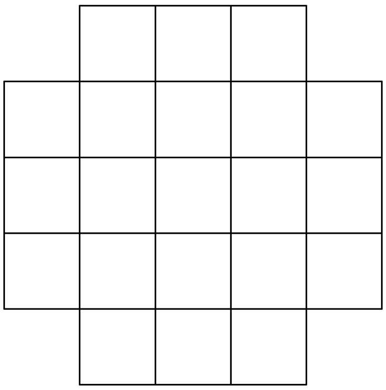
Problema 21.16 André e Victor jogam em um tabuleiro 7×7, escrevendo alternadamente 0 ou 1 em uma casa desocupada. André inicia o jogo. André ganha o jogo se ele conseguir escrever seis números iguais em uma linha, coluna ou diagonal. Além disso, Victor tem a opção de não jogar na sua vez se desejar. Mostre que Victor tem uma maneira de jogar de tal forma que André não pode vencê-lo.

Problema 21.17 Nas casas da primeira linha da figura abaixo, são escritos os números de 1 a 8 em alguma ordem e sem repetir. Então, nas casas das linhas seguintes, você deve escrever a diferença (o maior menos o menor se eles forem diferentes e zero se forem iguais) dos dois números que estão localizados imediatamente acima dele. Qual é o valor mais alto possível que a casa na última linha pode conter?

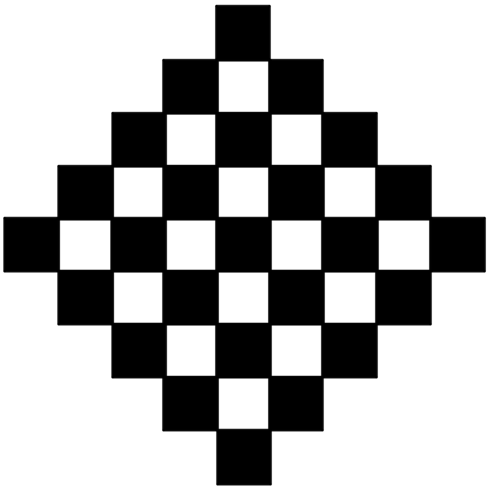


Problema 21.18 Alonso, Beatriz e Carol compartilham nove cartas numeradas de 1 a 9, sem repetição, três para cada uma. Então, cada um encontra o produto dos números em seus cartões e divide-o entre a sua soma. Se Alonso obteve 3.2; Beatriz obteve 5; e Carol teve 7, quais números cada um recebeu?

Problema 21.19 O tabuleiro a seguir é formado por 21 quadrados brancos:

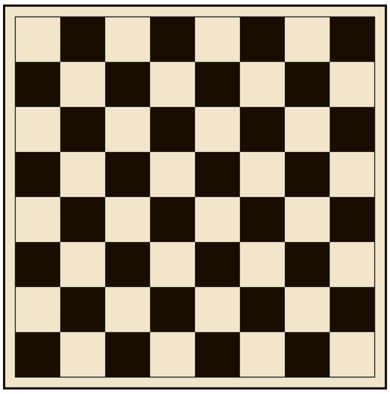


Uma operação BN consiste em escolher dois quadrados brancos que têm exatamente um vértice em comum e pintar esses dois quadrados de preto. Depois de fazer 10 operações BN de forma apropriada, um único quadrado branco permaneceu no quadro.
a) Dê um exemplo em que, depois de 10 operações BN, permanece um único quadrado branco.
b) Em que posições do quadro poderia ser esse quadrado branco?
Problema 21.20 Um conjunto de inteiros positivos é chamado "manso" se seus elementos podem ser escritos em alguma ordem, e um após o outro, para formar um número capicúa. Por exemplo, o conjunto 2, 10, 201 é manso, porque podemos escrever primeiro 201, depois 10, e finalmente o 2, para formar o número 201102 que é capicúa. Encontre o menor inteiro positivo $n \neq 1$ para o qual o conjunto $1, 2, 3, \ldots, n$ é manso.
Problema 21.21 Cada casa de um quadro 2011×2011 é pintado de vermelho ou azul. É possível pintá-los para que cada quadrado vermelho tenha exatamente três quadrados vizinhos azuis e que cada quadrado azul tenha exatamente um quadrado vizinho vermelho?
Note: Duas casas são vizinhas se tiverem um lado em comum.
Problema 21.22 João escolheu três algarismos distintos e, com eles, formou todos os seis números possíveis de três algarismos distintos. Em seguida, ele somou esses seis números, obtendo como resultado um múltiplo de 108. Pergunta-se: quais os possíveis valores dos algarismos escolhidos por João? Justifique sua resposta.
Problema 21.23 Um comerciante de tijolos possui 100 tijolos, distribuídos em dez pilhas de dez tijolos. Ele possui também uma balança, que mede com precisão o peso de qualquer quantidade de tijolos. Sabe-se que em uma das pilhas cada tijolo pesa exatamente 999 gramas e que nas outras nove pilhas cada tijolo pesa exatamente 1000 gramas, mas não se sabe em qual das pilhas estão os tijolos de 999 gramas. Explique como o comerciante, fazendo apenas uma pesagem, pode identificar a pilha que contém os tijolos de 999 gramas.
Problema 21.24 Sejam x e y números reais tais que $x^n + y^n$ é racional para $n = 2$, 3, 4 e 5.
a. Mostre que $(xy)^2$ é racional.
(b) Mostre que $x + y$ é racional.
Problema 21.25 Determine como distribuir 100 livros em 10 pilhas com quantidades livros todas distintas de modo que a divisão de qualquer uma dessas pilhas em outras duas faça com que a nova distribuição de 11 pilhas tenha pelo menos duas com o mesmo número de livros.
Problema 21.26 Calcule o raio da circunferência circunscrita ao triangulo ABC sabendo que $AB = 4$, $AC = 6$ e a altura AH relativa ao lado BC é igual a 3.
Problema 21.27 Sejam a, b e c reais tais que $a \neq b$ e $a^2 \cdot (b+c) = b^2 \cdot (c+a) = 2010$. Calcule $c^2 \cdot (a+b)$.
Problema 21.28 No tabuleiro seguinte algumas casas estão pintadas de preto e outras de branco:



Uma operação consiste em escolher um retângulo formado por uma ou mais casas do tabuleiro e trocar todas as casas que estão dentre do retângulo (as pretas viram brancas e as brancas viram pretas).
a) Qual a menor quantidade de operações necessárias para que todas as casas do tabuleiro virem brancas?
b) Qual a menor quantidade de operações necessárias para que todas as casas do tabuleiro virem pretas?

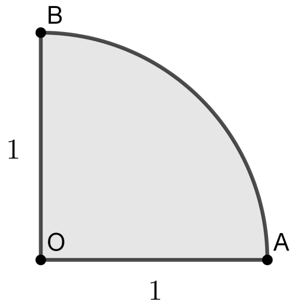
Problema 21.29 De quantos modos é possível colocar 8 torres brancas em um tabuleiro de xadrez 8×8 de modo que nenhuma torre fique na diagonal branca e não haja duas torres na mesma linha ou na mesma coluna?



Problema 21.30 Quando uma segunda lua cheia ocorre no mesmo mês, ela é chamada de "blue moon" (lua azul). Sabendo que o período entre duas luas cheias consecutivas é de aproximadamente 29,5 dias e, que uma "blue moon" ocorreu em janeiro de 2018, quando (mês e ano), a partir de hoje, ocorrerá a segunda "blue moon"?

Problema 21.31 Dos seguintes números: $1, 4, 7, 10, 13, \ldots, 97, 100$, escolhem-se 19 deles. Demonstre que entre estes sempre existem dois cuja soma é 104.

Problema 21.32 A figura representa a quarta parte de um círculo de raio 1. No arco AB, se consideram os pontos P e Q de forma tal que a reta PQ seja paralela a reta AB. Sejam X e Y os pontos de interseção da reta PQ com as retas OA e OB respectivamente. Calcular $\overline{PX}^2 + \overline{PY}^2$.



Problema 21.33 **Descanse!**