



# Dimostrazioni

Gabr1313

January 7, 2024

## Indice

1	Teorema (Formula risolutiva per le EDO del primo ordine lineari) . . . . .	1
2	Teorema (Teorema di struttura dell'integrale generale di equazioni del secondo ordine lineari omogenee) . . . . .	2
3	Teorema (Criterio della radice e criterio del rapporto per la determinazione del raggio di convergenza) . . . . .	3
4	Teorema (Calcolo dei coefficienti di Fourier di una funzione periodica) . . . . .	4
5	Teorema (Invarianza della lunghezza per riparametrizzazioni) . . . . .	5
6	Teorema (Differenziabilità implica continuità) . . . . .	6
7	Teorema (Formula del gradiente) . . . . .	7
8	Teorema (Ortogonalità del gradiente agli insiemi di livello) . . . . .	8
9	Teorema (Criterio della matrice Hessiana) . . . . .	9
10	Teorema (Cambiamenti di variabili in coordinate polari, cilindriche, e sferiche e il loro Jacobiano) . . . . .	10

**Teorema 1** (Formula risolutiva per le EDO del primo ordine lineari).  
Date  $a, b : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue, l'integrale generale delle EDO

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$$

con  $t \in I$ , è dato da:

$$y(t) = e^A \left( \int e^{-A} b(t) dt + c \right)$$

dove  $A = \int a(t) dt$ ,  $t \in I$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

*Dimostrazione.* Calcoli e teorema fondamentale del calcolo integrale

- Derivando la seguente funzione, si ottiene

$$\begin{aligned} (ye^{-A})' &= y'e^{-A} + [ye^{-A}(-a)] \\ &= y'e^{-A} - aye^{-A} \\ &= (y' - ay)e^{-A} \\ &= (b)e^{-A} \end{aligned}$$

- Utilizzando il teorema fondamentale del calcolo integrale

$$\begin{aligned} ye^{-A} &= \int (ye^{-A})' dt \\ &= \int be^{-A} dt + c \\ y &= e^A \int be^{-A} dt + c \end{aligned}$$

dove  $c \in \mathbb{R}$ .

□

**Teorema 2** (Teorema di struttura dell'integrale generale di equazioni del secondo ordine lineari omogenee).

Siano  $a, b, c : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue,  $a \neq 0$ , allora la EDO

$$a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = 0$$

con  $t \in I$  ha come IG uno spazio vettoriale di dimensione 2

$$y_o(t) = c_1 y_{o,1}(t) + c_2 y_{o,2}(t)$$

con  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ , dove  $y_{o,1}, y_{o,2}$  sono due soluzioni linearmente indipendenti dell'EDO.

*Dimostrazione.* Principio di Sovrapposizione +  $\exists!$  del PC

- per il principio di Sovrapposizione l'insieme di tutte le soluzioni è uno spazio vettoriale, perchè chiuso rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare. Rimane quindi da dimostrare che la dimensione di tale spazio vettoriale è 2:
  - si trovano  $y_{o,1}$  e  $y_{o,2}$  LI
  - si dimostra che ogni soluzione si possa scrivere come combinazione lineare di queste due
- Si scelgono  $y_{o,1}, y_{o,2}$  come soluzioni di problemi di Cauchy seguenti con  $t_o \in I$  fissato

$$\begin{cases} a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = 0 \\ y(t_o) = 1 \\ y'(t_o) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = 0 \\ y(t_o) = 0 \\ y'(t_o) = 1 \end{cases}$$

Queste soluzioni esistono e sono uniche per il teorema di  $\exists!$  del PC.  $y_{o,1}$  e  $y_{o,2}$  sono inoltre LI perchè se per assurdo si ipotizzasse che  $\exists c \neq 0 : y_{o,1} = c y_{o,2} \quad \forall t \in I$ , allora  $1 = y_{o,1}(t_o) = c y_{o,2}(t_o) = 0$ .

- Sia  $\bar{y}_o$  una qualunque soluzione particolare della EDO, si cercano  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  in modo tale che  $\bar{y}_o(t)$  coincida con

$$z(t) = c_1 y_{o,1}(t) + c_2 y_{o,2}(t)$$

la quale è una soluzione per il Principio di Sovrapposizione.

Si scelgono quindi  $c_1, c_2$  in modo che:

$$\begin{aligned} \bar{y}_o(t_o) &= z(t_o) = c_1 y_{o,1}(t_o) + c_2 y_{o,2}(t_o) = c_1 \\ \bar{y}'_o(t_o) &= z'(t_o) = c_1 y'_{o,1}(t_o) + c_2 y'_{o,2}(t_o) = c_2 \end{aligned}$$

quindi

$$z(t) = \bar{y}_o(t_o) y_{o,1}(t) + \bar{y}'_o(t_o) y_{o,2}(t)$$

Sia  $\bar{y}_o$  che  $z$  soddisfano lo stesso PC

$$\begin{cases} a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = 0 \\ y(t_o) = y_o(t_o) \\ y'(t_o) = y'_o(t_o) \end{cases}$$

e quindi per il teorema di  $\exists!$  del PC  $\bar{y}_o(t) = z(t)$ .

□

**Teorema 3** (Criterio della radice e criterio del rapporto per la determinazione del raggio di convergenza).

Data la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_o)^n$$

con  $a_n \in \mathbb{R}$ , capita uno dei seguenti casi:

$$\exists R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad \text{oppure} \quad \exists R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} \right|$$

con  $R \in [0, +\infty]$ , allora la serie converge e ha raggio  $R$ .

*Dimostrazione.* Applicazione dei criteri del rapporto e della radice

- Per il teorema del raggio di convergenza di una serie di potenze è sufficiente verificare che:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n (x - x_o)^n|$$

- converge per  $|x - x_o| < R$
- non converge per  $|x - x_o| > R$
- tutte le serie convergono per  $x = x_o$ ; nel caso in cui  $x \neq x_o$  si può applicare il criterio del rapporto alla serie di partenza:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} (x - x_o)^{n+1}}{a_n (x - x_o)^n} \right| = |x - x_o| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|x - x_o|}{R}$$

E quindi i 2 punti precedenti sono verificati.

- $\forall x \in \mathbb{R}$  si può applicare il criterio della radice alla serie di partenza:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n (x - x_o)^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} |x - x_o| \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x - x_o|}{R}$$

E quindi i 2 punti precedenti sono verificati.

□

**Teorema 4** (Calcolo dei coefficienti di Fourier di una funzione periodica).

Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione  $2\pi$ -periodica e somma di una funzione trigonometrica:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

con  $a_n, b_n \in \mathbb{R}$  e convergenza totale in  $[-\pi, \pi]$ , allora  $a_n, b_n$  sono i coefficienti di Fourier di  $f$ :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \end{aligned}$$

*Dimostrazione.* calcoli utilizzando le formule di ortogonalità

•  $a_0$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \right] dx = \end{aligned}$$

per convergenza totale

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} \left( a_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) dx \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} (2\pi a_0 + 0 + 0) = \\ &= a_0 \end{aligned}$$

•  $a_n$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \right] \cos(nx) dx = \end{aligned}$$

per convergenza totale:  $|\cos(nx)| \leq 1$

$$= \frac{1}{\pi} \left( a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \sin(nx) dx \right) =$$

per le formule di ortogonalità delle serie armoniche n-esime

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\pi} (0 + a_n \pi + 0) = \\ &= a_n \end{aligned}$$

•  $b_n$  si dimostra in modo analogo a  $a_n$ .

□

**Teorema 5** (Invarianza della lunghezza per riparametrizzazioni).

Sia  $r : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  una curva regolare con sostegno  $\gamma$  e sia  $v : [c, d] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  una riparametrizzazione di  $\gamma$  relativa alla variabile  $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  (monotona), cioè  $v(s) = r(\varphi(s)) \quad \forall s \in [c, d]$ , allora

$$\text{len}(r([a, b])) = \int_c^d \|v'(s)\| ds = \text{len}(v([c, d]))$$

*Dimostrazione.* calcoli e discussione della monotonia di  $\varphi$

- Siccome  $r$  è regolare

$$\text{len}(r([a, b])) = \int_a^b \|r'(t)\| dt$$

- allora  $\forall s \in [c, d]$

$$v'(s) = \begin{bmatrix} v'_1(s) \\ \vdots \\ v'_n(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [r_1(\varphi(s))]' \\ \vdots \\ [r_n(\varphi(s))]' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r'_1(\varphi(s))\varphi'(s) \\ \vdots \\ r'_n(\varphi(s))\varphi'(s) \end{bmatrix} = \varphi'(s)r'(\varphi(s))$$

quindi

$$\|v'(s)\| = \|\varphi'(s)r'(\varphi(s))\| = |\varphi'(s)|\|r'(\varphi(s))\|$$

- sia  $t = \varphi(s)$ , allora  $dt = \varphi'(s)ds$
- se  $\varphi$  è crescente, allora  $\varphi(c) = a < b = \varphi(d)$  e  $\varphi'(s) \geq 0 \quad \forall s \in [c, d]$ , quindi

$$\|v'(s)\| = \varphi'(s)\|r'(\varphi(s))\|$$

$$\text{len}(r([a, b])) = \int_a^b \|r'(t)\| dt = \int_c^d \|r'(\varphi(s))\| \varphi'(s) ds = \int_c^d \|v'(s)\| ds = \text{len}(v([c, d]))$$

- se  $\varphi$  è decrescente, allora  $\varphi(c) = b > a = \varphi(d)$  e  $\varphi'(s) \leq 0 \quad \forall s \in [c, d]$ , quindi

$$\|v'(s)\| = -\varphi'(s)\|r'(\varphi(s))\|$$

$$\text{len}(r([a, b])) = \int_a^b \|r'(t)\| dt = \int_d^c \|r'(\varphi(s))\| (-\varphi'(s)) ds = \int_c^d \|v'(s)\| ds = \text{len}(v([c, d]))$$

□

**Teorema 6** (Differenziabilità implica continuità).

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile in  $\underline{x}_0 \in A$ , allora  $f$  è continua in  $\underline{x}_0$ .

*Dimostrazione.* definizione, disuguaglianza triangolare, disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, limite e teorema dei carabinieri

- Siccome  $f$  è differenziabile in  $\underline{x}_0$ , allora

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0) + \nabla f(\underline{x}_0) \cdot (\underline{x} - \underline{x}_0) + o(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|)$$

ovvero

$$\begin{aligned} 0 &\leq |f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0)| \\ &= |\nabla f(\underline{x}_0) \cdot (\underline{x} - \underline{x}_0) + o(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|)| \end{aligned}$$

per la disuguaglianza triangolare

$$\begin{aligned} &\leq |\nabla f(\underline{x}_0) \cdot (\underline{x} - \underline{x}_0)| + |o(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|)| \\ &= |\nabla f(\underline{x}_0) \cdot (\underline{x} - \underline{x}_0)| + o(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|) \end{aligned}$$

per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$\leq \|\nabla f(\underline{x}_0)\| \cdot \|\underline{x} - \underline{x}_0\| + o(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|)$$

- passando ora al limite

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0) \\ &\leq \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} (\|\nabla f(\underline{x}_0)\| \cdot \|\underline{x} - \underline{x}_0\|) + \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} o(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|) \\ &= \|\nabla f(\underline{x}_0)\| \cdot \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} \|\underline{x} - \underline{x}_0\| + \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} \left( \frac{o(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|)}{\|\underline{x} - \underline{x}_0\|} \|\underline{x} - \underline{x}_0\| \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

- quindi per il teorema dei carabinieri

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} |f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0)| = 0$$

ovvero  $f$  è continua in  $\underline{x}_0$ .

□



**Teorema 7** (Formula del gradiente).

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  differenziale in  $\underline{x}_0 \in A$ , allora  $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^n, ||\underline{v}|| = 1$  esiste la derivata direzionale in  $\underline{x}_0$  lungo la direzione  $\underline{v}$ . In particolare

$$f_{\underline{v}}(\underline{x}_0) = \nabla f(\underline{x}_0) \cdot \underline{v}$$

*Dimostrazione.* definizione di differenziabilità e di derivata direzionale

- Siccome  $f$  è differenziabile in  $\underline{x}_0$ , allora per  $h \rightarrow 0$

$$f(\underline{x}_0 + h) = f(\underline{x}_0) + \nabla f(\underline{x}_0) \cdot \underline{h} + o(||\underline{h}||)$$

- sia  $\underline{h} = t\underline{v}$ , allora per  $t \rightarrow 0^+$

$$f(\underline{x}_0 + t\underline{v}) = f(\underline{x}_0) + \nabla f(\underline{x}_0) \cdot t\underline{v} + o(||t\underline{v}||)$$

- essendo  $o(||t\underline{v}||) = o(|t|||\underline{v}||) = o(t)$ , allora

$$\frac{f(\underline{x}_0 + t\underline{v}) - f(\underline{x}_0)}{t} = \frac{\nabla f(\underline{x}_0) \cdot t\underline{v}}{t} + \frac{o(t)}{t}$$

- dunque per la definizione di derivata direzionale

$$f_{\underline{v}}(\underline{x}_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\underline{x}_0 + t\underline{v}) - f(\underline{x}_0)}{t} = \nabla f(\underline{x}_0) \cdot \underline{v}$$

□

**Teorema 8** (Ortogonalità del gradiente agli insiemi di livello).

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile in  $A$ , supponendo che l'insieme di livello  $k \in \mathbb{R}$  di  $f$  ( $I_k = \{\underline{x} \in A : f(\underline{x}) = k\}$ ) sia il sostegno di una curva regolare  $\underline{r} : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow A$ , allora

$$\nabla f(\underline{x}) \cdot \underline{r}'(t) = 0 \quad \forall t \in I$$

*Dimostrazione.* definizione e teorema di derivazione delle funzioni composte

- Considerando  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(t) = f(r(t))$  si osserva che

$$\{\underline{r}(t) : t \in I\} = I_k = \{\underline{x} \in A : f(\underline{x}) = k\}$$

dunque  $F(t) = f(r(t)) = k$ , da cui si deduce che  $F'(t) = 0 \quad \forall t \in I$ .

- per il teorema di derivazione delle funzioni composte 1-n-1 si ottiene che

$$0 = F'(t) = \nabla f(\underline{r}(t)) \cdot \underline{r}'(t) \quad \forall t \in I$$

□

**Teorema 9** (Criterio della matrice Hessiana).

Siano  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  un aperto,  $f \in C^2(A)$ ,  $\underline{x}_0 \in A$  punto critico di  $f$ ,  $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  la forma quadratica indotta da  $H_f(\underline{x}_0)$ , allora:

- se  $q$  è definita positiva  $\Rightarrow \underline{x}_0$  è un punto di minimo locale
- se  $q$  è definita negativa  $\Rightarrow \underline{x}_0$  è un punto di massimo locale
- se  $q$  è indefinita  $\Rightarrow \underline{x}_0$  è un punto di sella

*Dimostrazione.* definizione di forma quadratica, formula di Taylor e definizione di limite

- $H_f(\underline{x}_0)$  è simmetrica per il teorema di Schwarz
- se  $q$  è definita positiva  $\Rightarrow H_f(\underline{x}_0)$  ha autovalori  $\lambda > 0 \in \mathbb{R}$
- quindi per la definizione di forma quadratica definita positiva

$$H_f(\underline{x}_0)\underline{h} \cdot \underline{h} = q(\underline{h}) \geq \lambda_{\min}||\underline{h}||^2 \quad \forall \underline{h} \in \mathbb{R}^n$$

- utilizzando la formula di Taylor al secondo ordine per  $||\underline{h}|| \rightarrow 0$ , dato che  $\underline{x}_0$  è un punto critico

$$\begin{aligned} f(\underline{x}_0 + \underline{h}) - f(\underline{x}_0) &= \nabla f(\underline{x}_0) \cdot \underline{h} + \frac{1}{2}q(\underline{h}) + o(||\underline{h}||^2) \\ &= \frac{1}{2}q(\underline{h}) + o(||\underline{h}||^2) \\ &\geq \lambda_{\min}||\underline{h}||^2 + o(||\underline{h}||^2) \end{aligned}$$

- per la definizione di  $o$  si ha che

$$\lim_{||\underline{h}|| \rightarrow 0} \frac{o(||\underline{h}||^2)}{||\underline{h}||^2} = 0$$

- per la definizione di limite

$$\exists \delta > 0 : \text{ se } ||\underline{h}|| < \delta \text{ e } \underline{h} \neq \underline{0} \Rightarrow \frac{o(||\underline{h}||^2)}{||\underline{h}||^2} < \frac{\lambda_{\min}}{4}$$

con  $\lambda_{\min} > 0$  perchè  $q$  è definita positiva.

- In particolare

$$\exists \delta > 0 : \forall \underline{h} \in B_\delta(0) \Rightarrow o(||\underline{h}||^2) > -\frac{\lambda_{\min}}{4}||\underline{h}||^2$$

- utilizzando la formula precedentemente trovata si deduce che  $\forall \underline{h} \in B_\delta(\underline{x}_0) : \underline{x}_0 + \underline{h} \in A$

$$\begin{aligned} f(\underline{x}_0 + \underline{h}) - f(\underline{x}_0) &\geq \lambda_{\min}||\underline{h}||^2 + o(||\underline{h}||^2) \\ &\geq \lambda_{\min}||\underline{h}||^2 - \frac{\lambda_{\min}}{4}||\underline{h}||^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

e quindi  $\underline{x}_0$  un punto di minimo locale

- analogamente si dimostra che se  $q$  è definita negativa  $\underline{x}_0$  è un punto di massimo locale

□

**Teorema 10** (Cambiamenti di variabili in coordinate polari, cilindriche, e sferiche e il loro Jacobiano).

Sia  $\omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un dominio regolare,  $f : \omega \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua, se  $\underline{T} : U \rightarrow V$  è un cambio di varibili tra  $U$  e  $V$  con  $\omega \subseteq V$

$$\underline{T}(u_1, \dots, u_n) = (x_1, \dots, x_n),$$

allora

$$\int \cdots \int_{\omega} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int \cdots \int_{\underline{T}^{-1}} f(\underline{T}(u_1, \dots, u_n)) |\det(J_{\underline{T}}(u_1, \dots, u_n))| du_1 \dots du_n$$

- Sia  $\underline{T}_p : \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\underline{T}_p(\rho, \theta) = \begin{bmatrix} \rho \cos(\theta) \\ \rho \sin(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

il suo Jacobiano è

$$\det(J_{\underline{T}_p}(\rho, \theta)) = \rho$$

- Sia  $\underline{T}_c : \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\underline{T}_c(\rho, \theta, z) = \begin{bmatrix} \rho \cos(\theta) \\ \rho \sin(\theta) \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

il suo Jacobiano è

$$\det(J_{\underline{T}_c}(\rho, \theta, z)) = \rho$$

- Sia  $\underline{T}_s : \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi) \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\underline{T}_s(\rho, \varphi, \theta) = \begin{bmatrix} \rho \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ \rho \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ \rho \cos(\varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

il suo Jacobiano è

$$\det(J_{\underline{T}_s}(\rho, \theta, \varphi)) = \rho^2 \sin(\varphi)$$

*Dimostrazione.* Dimostrazione riportata solo per il cambio di coordinate in coordinate sferiche: calcoli

•

$$J_{\underline{T}_s}(\rho, \varphi, \theta) = \begin{bmatrix} \sin(\varphi) \cos(\theta) & \rho \cos(\varphi) \cos(\theta) & -\rho \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ \sin(\varphi) \sin(\theta) & \rho \cos(\varphi) \sin(\theta) & \rho \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ \cos(\varphi) & -\rho \sin(\varphi) & 0 \end{bmatrix}$$

•

$$\begin{aligned} \det(J_{\underline{T}_s}(\rho, \varphi, \theta)) &= \cos(\varphi) \det \left( \begin{bmatrix} \rho \cos(\varphi) \cos(\theta) & -\rho \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ \rho \cos(\varphi) \sin(\theta) & \rho \sin(\varphi) \cos(\theta) \end{bmatrix} \right) \\ &\quad + \rho \sin(\varphi) \det \left( \begin{bmatrix} \sin(\varphi) \cos(\theta) & -\rho \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ \sin(\varphi) \sin(\theta) & \rho \sin(\varphi) \cos(\theta) \end{bmatrix} \right) \\ &= \rho^2 \sin(\varphi) \cos^2(\varphi) (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) \\ &\quad + \rho^2 \sin^3(\varphi) (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) \\ &= \rho^2 \sin(\varphi) (\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) \\ &= \rho^2 \sin(\varphi) \end{aligned}$$

□