~ Seminar 4 ~

➢ *Expresii regulate (RegEx)*

Definiție: Se numeşte familia expresiilor regulate peste Σ şi se notează RegEx(Σ) mulţimea de cuvinte peste alfabetul $\Sigma \cup \{(,\ ),\ +,\ \cdot,\ *,\ \emptyset,\ \lambda\}$ definită recursiv astfel:

i) $\emptyset, \lambda \in RegEx$ și $a \in RegEx, \forall a \in \Sigma$.
ii) Dacă $e_1, e_2 \in RegEx$, atunci $(e_1 + e_2) \in RegEx$. *(reuniune)*
iii) Dacă $e_1, e_2 \in RegEx$, atunci $(e_1 \cdot e_2) \in RegEx$. *(concatenare)*
iv) Dacă $e \in RegEx$, atunci $(e^*) \in RegEx$. *(stelare)*

- ***Precedența operațiilor:*** $(\,) > * > \cdot > +$ (paranteze > stelare > concatenare > reuniune)

Obs: În evaluarea unei expresii regulate se ține cont în primul rând de paranteze, iar apoi ordinea în care se evaluează operațiile este: stelare, apoi concatenare, apoi reuniune.
(Dacă vreți să fiți siguri că nu le încurcați, puteţi să faceţi o analogie cu operaţiile aritmetice, unde se evaluează întâi ridicarea la putere, apoi înmulţirea şi apoi adunarea.)

- Reamintim din seminarul 1:

$$L = L_1 \cup L_2 = \{w \mid w \in L_1 \text{ sau } w \in L_2\}$$

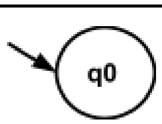
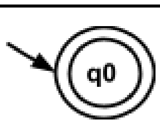
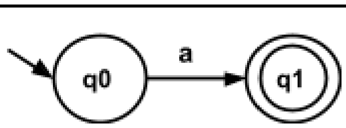
$$L = L_1 \cdot L_2 = \{w_1 \cdot w_2 \mid w_1 \in L_1 \text{ și } w_2 \in L_2\}$$

$$L = (L_1)^* = \{\lambda\} \cup \bigcup_{n \geq 1} \{w_1 w_2 \dots w_n \mid w_i \in L_1, \forall\, 1 \leq i \leq n\}$$

➢ *Algoritm:* Transformarea RegEx → AFN-λ

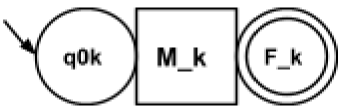
Pentru fiecare caz din definiția RegEx vom construi câte un automat finit echivalent.

Caz i)

RegEx	$e = \emptyset$	$e = \lambda$	$e = a$, unde $a \in \Sigma$
Limbaj	$L = \emptyset$	$L = \{\lambda\}$	$L = \{a\}$
Automat Finit			

În **cazurile ii), iii) și iv)** presupunem că
pentru expresia regulată e_k și limbajul $L(e_k), k \in \{1, 2\}$ avem deja
automate finite $AF(L(e_k)) = (Q_k, \Sigma_k, q_{0k}, F_k, \delta_k)$, cu $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$ (stări disjuncte).

Desenăm schema unui automat punând în evidență starea inițială q_{0k} și mulțimea stărilor finale F_k. Dreptunghiul M_k include toate celelalte stări și tranzițiile automatului.



Vom construi automatele pentru operațiile de reuniune, concatenare și stelare.

<table>
<tr>
<td>

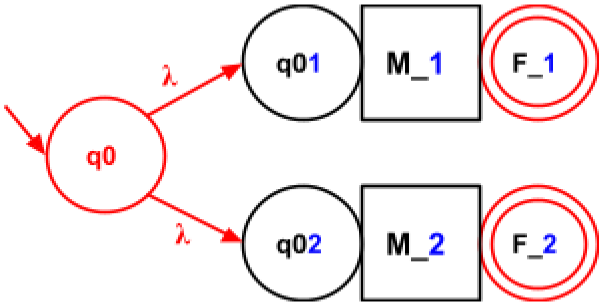
Caz ii)
(reuniune)

RegEx
$e = e_1 + e_2$

Limbaj
$L(e) = L(e_1) \cup L(e_2)$

</td>
<td>

Automat Finit
$AF\big(L(e_1 + e_2)\big) = (Q_1 \cup Q_2 \cup \{q_0\}, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, q_0, F_1 \cup F_2,$
$\delta_1 \cup \delta_2 \cup \big\{\delta(q_0, \lambda) = \{q_{01}, q_{02}\}\big\})$



</td>
</tr>
<tr>
<td>

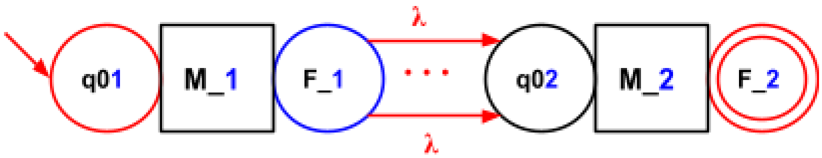
Caz iii)
(concatenare)

RegEx
$e = e_1 \cdot e_2$

Limbaj
$L(e) = L(e_1) \cdot L(e_2)$

</td>
<td>

Automat Finit
$AF\big(L(e_1 \cdot e_2)\big) = (Q_1 \cup Q_2, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, q_{01}, F_2,$
$\delta_1 \cup \delta_2 \cup \big\{\delta\big(q_{f_1}, \lambda\big) \ni q_{02} \mid \forall f_1 \in F_1\big\})$



</td>
</tr>
<tr>
<td>

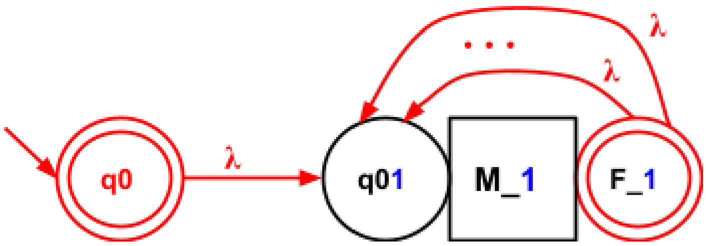
Caz iv)
(stelare)

RegEx
$e = (e_1)^*$

Limbaj
$L(e) = \big(L(e_1)\big)^*$

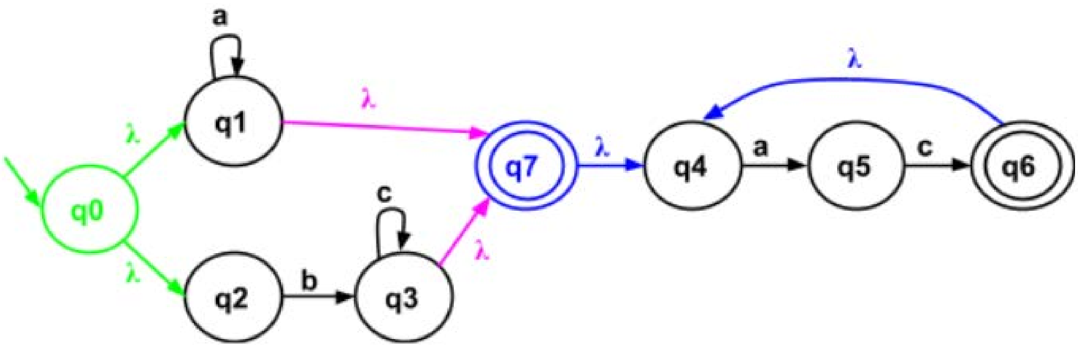
</td>
<td>

Automat Finit
$AF\big(L((e_1)^*)\big) = (Q_1 \cup \{q_0\}, \Sigma_1, q_0, F_1 \cup \{q_0\},$
$\delta_1 \cup \{\delta(q_0, \lambda) = q_{01}\} \cup \big\{\delta\big(q_{f_1}, \lambda\big) \ni q_{01} \mid \forall f_1 \in F_1\big\})$



</td>
</tr>
</table>

- ***Exemplu:*** Desenați 3 automate finite pentru $L_1 = a^*$, $L_2 = bc^*$, $L_3 = ac$, apoi folosind algoritmii pentru reuniune, concatenare, stelare și ținând cont de paranteze și de ordinea operațiilor, desenați automatul pentru $L_4 = (a^* + bc^*) \cdot (ac)^* = (L_1 + L_2) \cdot (L_3)^*$.



➢ *Algoritm:* Transformarea AFN-λ → RegEx

Definiție: Se numeşte ***AFE (automat finit extins)***, $M = (Q, \Sigma, et, q_0, F)$, unde, la fel ca la celelalte automate finite, Q este mulţimea stărilor, Σ este alfabetul, q_0 este starea iniţială, F este mulţimea stărilor finale. Aici (în locul funcției de tranziție) avem *funcţia de etichetare* $et: Q \times Q \rightarrow \boldsymbol{RegEx(\Sigma)}$.

Notăm $et(p, q)$ prin e_{pq} (*expresia regulată* asociată săgeții de la starea *p* la starea *q*)

Ideea algoritmului este de a transforma automatul finit într-un automat finit extins şi apoi a elimina una câte una stările până ajungem la o expresie regulată echivalentă cu automatul iniţial.

- ***Algoritm:***

Pas 1: Transformăm automatul finit dat într-un AFE astfel: dacă de la starea q_x către starea q_y există *mai multe tranziții*, atunci le înlocuim cu *expresia regulată* obținută prin reunirea (operatorul "+") simbolurilor de pe acele tranziții.

$$et(q_x, q_y) = \{w \in REX(\Sigma) \mid w = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \,; \\ q_y \in \delta(q_x, a_i), a_i \in (\Sigma \cup \{\lambda\}), \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

Pas 2: Dacă starea iniţială este şi finală sau dacă există săgeţi care vin către starea iniţială, atunci se adaugă la automat o nouă stare care va fi iniţială şi va avea o săgeată cu expresia λ către fosta stare iniţială.

Pas 3: Dacă există mai multe stări finale sau dacă există săgeți care pleacă din vreo stare finală, atunci se adaugă la automat o nouă stare care va fi unica finală şi va avea săgeţi cu expresia λ din toate fostele stări finale către ea.

Pas 4: În orice ordine, se elimină pe rând, una câte una, toate stările în afară de cea iniţială şi cea finală, astfel:

→ Presupunem că vrem să eliminăm starea **q** şi că există săgeţi cu etichetele (expresiile regulate) $et(p, \boldsymbol{q})$, $et(\boldsymbol{q}, s)$ şi eventual bucla cu $et(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q})$.

→ Atunci obținem noua etichetă (expresie regulată) de pe săgeata de la starea *p* la starea *s:*

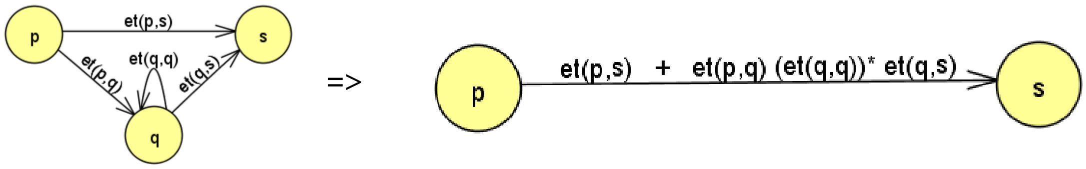
- [(fosta etichetă directă de la *p* la *s*) sau (∅ dacă nu există săgeată directă)]
  reunită cu
- [(eticheta de la *p* la ***q***) concatenată cu
  (stelarea etichetei buclei de la ***q*** la ***q***, sau λ dacă bucla nu există) concatenată cu
  (eticheta de la ***q*** la *s*)]. *(Vezi desenul de mai jos.)*

Pas 5: Atunci când rămân doar două stări, expresia obţinută între starea iniţială şi cea finală este răspunsul final (o expresie regulată echivalentă cu automatul finit dat).

- ***Observații:***

(1) La pas 4, pentru starea ***q*** pe care dorim să o eliminăm (împreună cu toate săgețile lipite de ea), trebuie să găsim orice "predecesor" $\boldsymbol{p} \neq q$ (adică există o săgeată de la *p* la *q*) și orice "succesor" $\boldsymbol{s} \neq q$ (adică există săgeată de la *q* la s). Deci făcând abstracție de eventuala buclă a lui *q*, căutăm și *grupăm orice săgeată care intră* spre q *cu orice săgeată care iese* din q și astfel obținem expresia regulată de pe săgeata de la ***p*** la ***s*** cu formula explicată mai sus.
Atenție, dacă $p = s$, înseamnă că vom obține o buclă.

→ Vrem să eliminăm q și avem un p ("predecesor") și un s („succesor").



(2) Dacă una dintre expresii conține reuniune ("+"), atunci *o includem între paranteze*, pentru a se executa întâi acea reuniune și abia apoi concatenarea cu expresiile de pe alte săgeți. Fiecare expresie obținută între *p* și *s* încercăm să o *simplificăm* cât mai mult folosind formulele de mai jos.

(3) În funcție de *ordinea* în care alegem să eliminăm stările la pasul 4, vom obține o anumită expresie, dar toate sunt echivalente între ele. ***Sfat:*** În general, eliminăm starea care are momentan cele mai puține săgeți pentru a calcula cât mai puține drumuri.

Atenție să nu confundați semnul "+" dintre expresii (folosit pentru *reuniunea* lor) cu semnul "+" pus la putere (folosit pentru *concatenare repetată*, cel puțin puterea 1).

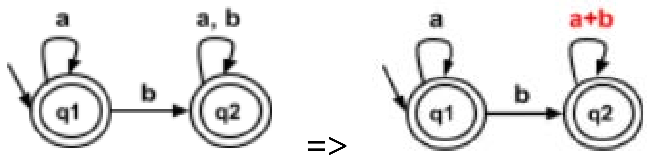
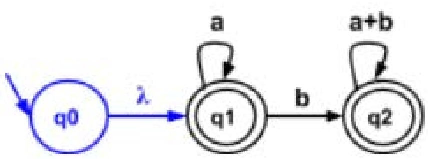
Obs: Algoritmul de mai sus descoperă și *reunește expresiile regulate corespunzătoare tuturor drumurilor de la starea inițială la o stare finală*. Puteți verifica asta pe exemplele următoare, comparând automatul finit dat cu expresia regulată obținută la finalul algoritmului.

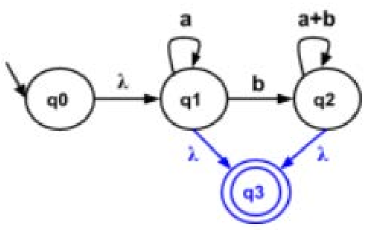
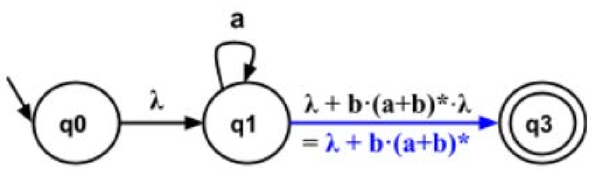
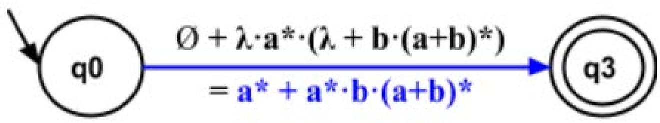
- **Câteva formule utile**

(A) $e \cdot \emptyset = \emptyset$ și $\emptyset \cdot e = \emptyset$ ($\emptyset$ este pentru concatenare cum este 0 pentru înmulțire)
(B) $e \cdot \lambda = e$ și $\lambda \cdot e = e$ (λ este pentru concatenare cum este 1 pentru înmulțire)
(C) $e^* \cdot e = e^+$ și $e \cdot e^* = e^+$ *(Dar* e^+ *nu va fi folosită în RegEx pt că nu respectă definiția lor.)*
(D) $\{e_1, e_2\}^* = (e_1 + e_2)^* = (e_1^* \cdot e_2^*)^*$ *(Formulă valabilă pentru oricâte expresii, nu doar 2.)*
(E) $\boldsymbol{e_1} \cdot (e_2 + e_3) = (\boldsymbol{e_1} \cdot e_2) + (\boldsymbol{e_1} \cdot e_3)$ și $(e_1 + e_2) \cdot \boldsymbol{e_3} = (e_1 \cdot \boldsymbol{e_3}) + (e_2 \cdot \boldsymbol{e_3})$
(F) $e + \emptyset = \emptyset + e = e$ ($\emptyset$ este pentru reuniune cum este 0 pentru adunare)
(G) $\emptyset^* = \{\lambda\}$ (conform definiției stelării) și $\lambda^* = \lambda$ (conform formulei B de mai sus)
(H) Dacă $e_1 \supseteq e_2$, atunci $e_1 + e_2 = e_2 + e_1 = e_1$. (*De exemplu:* $a + ab^* = ab^*$)
(I) În loc de $\lambda + (e)^+ = \lambda + e \cdot e^*$ scriem e^*.

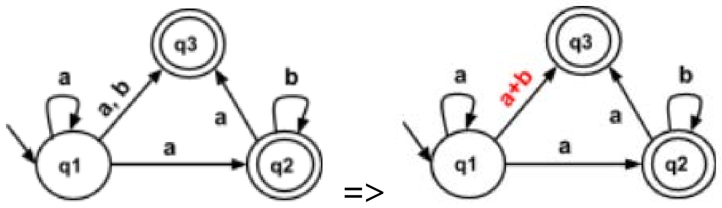
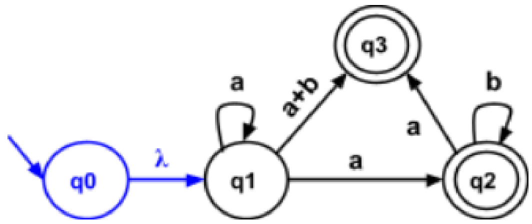
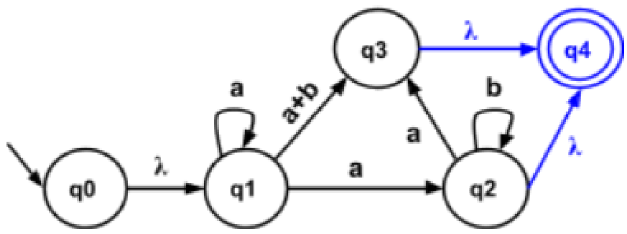
- ***Exemplu rezolvat:***

  Să se transforme următorul automat finit într-o expresie regulată echivalentă.

Pas 1 (AF → AFE): => Reunim tranzițiile aflate pe aceeași săgeată.	
Pas 2 *(Verificăm starea inițială:* *- să nu fie stare finală și* *- să nu vină săgeți către ea)* => adăugăm o nouă stare inițială cu λ către fosta stare inițială.	

Pas 3 *(Verificăm starea finală:* *- să fie unica finală și* *- să nu plece săgeți din ea)* => adăugăm o nouă unică stare finală spre care vin λ din fostele stări finale.	
Pas 4 *(eliminăm* ***q2****)*: => $\boldsymbol{et(q_1, q_3)} = et(q_1, q_3) +$ $et(q_1, q_2) \cdot (et(q_2, q_2))^* \cdot et(q_2, q_3)$	
Pas 4 *(eliminăm* ***q1****)*: => $\boldsymbol{et(q_0, q_3)} = et(q_0, q_3) +$ $et(q_0, q_1) \cdot (et(q_1, q_1))^* \cdot et(q_1, q_3)$	

- ***Exemplu:*** *[discutat la seminar]*
  Să se transforme următorul automat finit într-o expresie regulată echivalentă.

Pas 1 (AF → AFE): => Reunim tranzițiile aflate pe aceeași săgeată.	
Pas 2 *(Verificăm starea inițială:* *- să nu fie stare finală și* *- să nu vină săgeți către ea)* => adăugăm o nouă stare inițială cu λ către fosta stare inițială.	
Pas 3 *(Verificăm starea finală:* *- să fie unica finală și* *- să nu plece săgeți din ea)* => adăugăm o nouă unică stare finală spre care vin λ din fostele stări finale.	

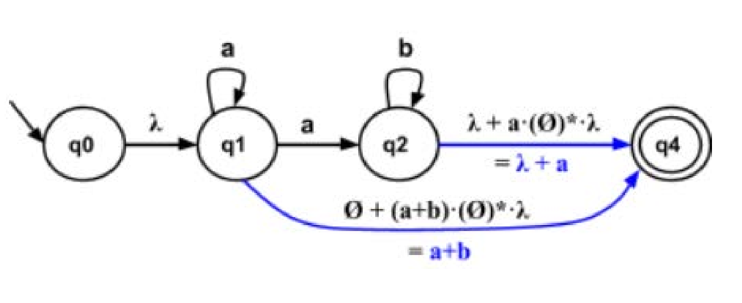
<table>
<tr>
<td>

Pas 4 _(eliminăm **q3**)_:

=> $\boldsymbol{et(q_2, q_4)} = et(q_2, q_4) +$
$et(q_2, q_3) \cdot (et(q_3, q_3))^* \cdot et(q_3, q_4)$

=> $\boldsymbol{et(q_1, q_4)} = et(q_1, q_4) +$
$et(q_1, q_3) \cdot (et(q_3, q_3))^* \cdot et(q_3, q_4)$

</td>
<td>

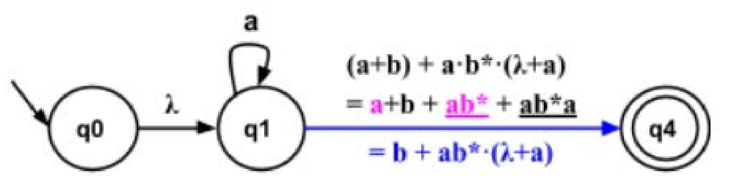


</td>
</tr>
<tr>
<td>

Pas 4 _(eliminăm **q2**)_:

=> $\boldsymbol{et(q_1, q_4)} = et(q_1, q_4) +$
$et(q_1, q_2) \cdot (et(q_2, q_2))^* \cdot et(q_2, q_4)$

</td>
<td>

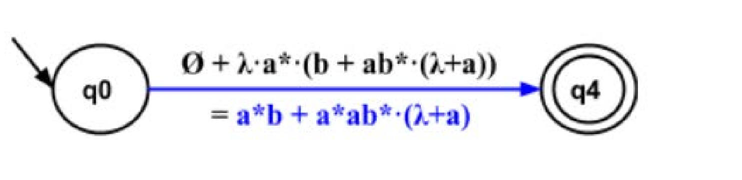


</td>
</tr>
<tr>
<td>

Pas 4 _(eliminăm **q1**)_:

=> $\boldsymbol{et(q_0, q_4)} = et(q_0, q_4) +$
$et(q_0, q_1) \cdot (et(q_1, q_1))^* \cdot et(q_1, q_4)$

</td>
<td>



</td>
</tr>
</table>

➢ _Minimizarea AFD_

[definiție extrasă din curs 7.2, pag 4]

Def: Echivalență pe cuvinte
Pentru un limbaj $L \subseteq \Sigma^*$ definim $\equiv_L$ astfel:

$$x \equiv_L y \iff [\forall \boldsymbol{z} \in \Sigma^* \text{ avem } x\boldsymbol{z} \in L \iff y\boldsymbol{z} \in L]$$

Obs: Cuvintele x și y **nu** sunt echivalente conform L dacă există un cuvânt z astfel încât _exact unul_ dintre cuvintele xz și yz aparține limbajului L și celălalt nu aparține lui L.

$$x \not\equiv_L y \iff [\exists \boldsymbol{z} \in \Sigma^* \text{ avem } x\boldsymbol{z} \in L \iff y\boldsymbol{z} \notin L]$$

➢ *Algoritm:* Minimizare AFD

Se dă un AFD complet definit (adică din fiecare stare din mulțimea Q pleacă câte o tranziție cu fiecare simbol din alfabetul Σ). Se cere să se construiască un AFD echivalent (care să accepte același limbaj) care să aibă un număr minim de stări.

Obs: Dacă AFD-ul dat **nu** este complet definit, atunci pentru completarea lui se adaugă *o nouă stare **nefinală*** q_{aux}. Toate tranzițiile lipsă din celelalte stări se adaugă spre această nouă stare, apoi pentru starea q_{aux} se adaugă o buclă cu toate simbolurile din alfabet.

Ideea algoritmului este de a găsi acele stări care au comportament echivalent, pentru a le grupa şi a obţine o unică stare nouă în locul acestora.

- Două stări sunt „**echivalente**” dacă pentru orice cuvânt am alege, plecând din cele două stări, fie ajungem în două stări finale, fie ajungem în două stări nefinale.
$$\forall p, q \in Q, p \equiv q \quad \Leftrightarrow \quad [\forall w \in \Sigma^*, \hat{\delta}(p, w) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(q, w) \in F]$$
- Două stări sunt „**separabile**” dacă există un cuvânt pentru care plecând din cele două stări ajungem într-o stare finală şi într-una nefinală.
$$\forall p, q \in Q, p \not\equiv_w q \quad \Leftrightarrow \quad [\exists w \in \Sigma^*, \hat{\delta}(p, w) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(q, w) \notin F]$$

➢ *Algoritm:* Minimizare AFD *(**metoda 1**: cu partiționarea mulțimii Q a stărilor)*

Ideea algoritmului este de a împărți mulțimea Q în partiții din ce în ce mai mici (pe măsură ce descoperim că două stări din *aceeași* partiție sunt separabile, le vom pune în partiții *diferite*), astfel încât la final orice partiție să conțină doar stări echivalente între ele.

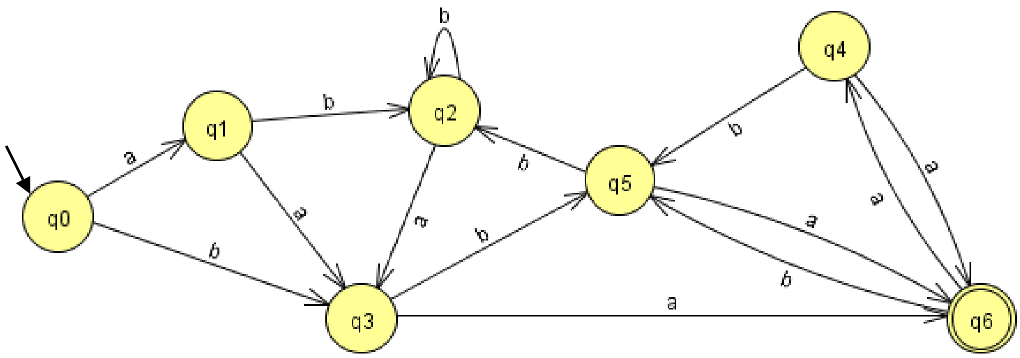
Pas 0: Împărțim mulțimea Q în două partiții, una care conține stările nefinale ($A_0 = Q \setminus F$) și una care conține stările finale ($B_0 = F$). Orice stare din A_0 este separabilă de orice stare din B_0 prin cuvântul λ de lungime 0.
Pas k $\in \{1, 2, ...\}$**:**
a) În cadrul fiecărei partiții X_{k-1} (cu $|X_{k-1}| \geq 2$, X∈{A, B, C,…}), verificăm pentru orice pereche de două stări ($q_i \in X_{k-1}$ *si* $q_j \in X_{k-1}$) dacă sunt separabile, adică dacă există vreo literă α din alfabetul Σ pentru care $\delta(q_i, \alpha) \in Y_{k-1}$ și $\delta(q_j, \alpha) \in Z_{k-1}$, cu $Y_{k-1} \neq Z_{k-1}$ (adică tranzițiile de la cele două stări q_i și q_j, cu o aceeași literă α, duc spre stări aflate deja (la pasul k-1) în partiții diferite).
→ Dacă duc către aceeași partiție ($Y_{k-1} = Z_{k-1}$), atunci stările q_i și q_j vor rămâne la pasul *k* în aceeași partiție T_k, pentru că *până acum* (pasul k) sunt echivalente (pentru orice cuvânt $\forall w \in \Sigma^*$, cu $0 \leq |w| \leq k$).
→ Iar dacă duc spre partiții diferite ($Y_{k-1} \neq Z_{k-1}$) atunci vom separa stările q_i și q_j în partiții diferite S_k și T_k, cu $S_k \neq T_k$ (există un cuvânt de lungime k, având ultima literă α, pentru care stările q_i și q_j sunt separabile).
b) Dacă la **pasul k, a)** s-a modificat vreo partiție, continuăm cu **pasul k+1, a)**. Altfel, algoritmul se oprește și în cadrul fiecărei partiții X_k avem doar stări echivalente între ele.

Atenție! La pasul k a) nu verificăm niciodată două stări aflate deja în partiții diferite (știm deja că stările sunt separabile), ci doar pe cele aflate în *aceeași* partiție.

Întrebări:
(1) Dacă AFD-ul dat era deja minimal, în ce situație vom ajunge la finalul algoritmului?
(2) Care este valoarea maximă la care poate ajunge k? (Adică maxim câți pași putem avea?)

- ***Exemplu:*** Să se minimizeze următorul AFD.

Fie automatul AFD complet definit din desen. Se cere automatul minimal echivalent cu el.



Pas 0:
Orice stare nefinală este separabilă prin λ de orice stare finală.
Deci împărțim stările din mulțimea Q în cele două partiții inițiale, A_0 și B_0.
Apoi în interiorul tabelului cu tranziții, pentru fiecare stare destinație scriem din ce partiție de la pasul curent face parte.

Partițiile	δ	a	b
$A_0 = Q \setminus F$	q_0	$q_1 \in A_0$	$q_3 \in A_0$
	q_1	$q_3 \in A_0$	$q_2 \in A_0$
	q_2	$q_3 \in A_0$	$q_2 \in A_0$
	q_3	$q_6 \in B_0$	$q_5 \in A_0$
	q_4	$q_6 \in B_0$	$q_5 \in A_0$
	q_5	$q_6 \in B_0$	$q_2 \in A_0$
$B_0 = F$	q_6	$q_4 \in A_0$	$q_5 \in A_0$

Obs: La fiecare pas k o să redenumim partițiile A_k, B_k, C_k, etc.

Pas k = 1:
→ Verificăm toate perechile de stări aflate în A_0 și observăm că stările din $\{q_0, q_1, q_2\}$ sunt separabile pe coloana literei „a” de cele din $\{q_3, q_4, q_5\}$, pentru că tranzițiile primelor ajung cu „a” în A_0, iar pentru celelalte tot cu „a” ajung în B_0.
→ Partiția B_0 conține o singură stare, deci aici nu avem ce compara.

Partițiile	δ	a	b
A_1	q_0	$q_1 \in A_1$	$q_3 \in B_1$
	q_1	$q_3 \in B_1$	$q_2 \in A_1$
	q_2	$q_3 \in B_1$	$q_2 \in A_1$
B_1	q_3	$q_6 \in C_1$	$q_5 \in B_1$
	q_4	$q_6 \in C_1$	$q_5 \in B_1$
	q_5	$q_6 \in C_1$	$q_2 \in A_1$
C_1	q_6	$q_4 \in B_1$	$q_5 \in B_1$

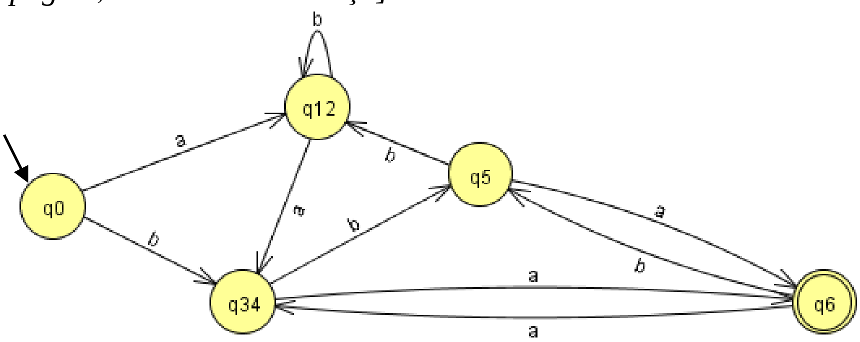
Pas k = 2:
→ Verificăm toate perechile de stări aflate în A_1 și observăm că starea q_0 este separabilă de stările din $\{q_1, q_2\}$ (atât pe coloana „a”, cât și pe coloana „b”).
→ Verificăm toate perechile de stări aflate în B_1 și observăm că starea q_5 este separabilă de stările din $\{q_3, q_4\}$ (pe coloana „b”).
→ Partiția C_1 conține o singură stare, deci aici nu avem ce compara.

Partițiile	δ	a	b
A_2	q_0	$q_1 \in B_2$	$q_3 \in C_2$
B_2	q_1	$q_3 \in C_2$	$q_2 \in B_2$
	q_2	$q_3 \in C_2$	$q_2 \in B_2$
C_2	q_3	$q_6 \in E_2$	$q_5 \in D_2$
	q_4	$q_6 \in E_2$	$q_5 \in D_2$
D_2	q_5	$q_6 \in E_2$	$q_2 \in B_2$
E_2	q_6	$q_4 \in C_2$	$q_5 \in D_2$

Pas k = 3:
→ Verificăm perechea de stări din partiția B_2 și observăm că q_1 și q_2 rămân echivalente (pentru fiecare coloană în parte, cele două stări din pereche duc către aceeași partiție).
→ Verificăm perechea de stări din partiția C_2 și observăm că q_3 și q_4 rămân echivalente (pentru fiecare coloană în parte, cele două stări din pereche duc către aceeași partiție).
→ Partițiile A_2, D_2 și E_2 conțin fiecare câte o singură stare, deci aici nu avem ce compara.

Nicio partiție nu s-a mai modificat, deci algoritmul se termină cu concluzia stărilor echivalente: $q_1 \equiv q_2$ și $q_3 \equiv q_4$.

Automatul AFD minimal obţinut va avea $Q = \{q_0, q_{12}, q_{34}, q_5, q_6\}$ şi $F = \{q_6\}$.
Tranziţiile le desenăm conform automatului iniţial, dar ţinând cont de această grupare a stărilor. _[vezi pag 10, înainte de observaţii]_



➢ _Algoritm:_ Minimizare AFD (**metoda 2**_: cu teorema Myhill-Nerode)_

- Vom construi un tabel, pe linii și pe coloane având stările automatului AFD complet definit. Vom completa tabelul (triunghiul de sub diagonala principală) pentru fiecare pereche de stări (q_i, q_j), având i > j, cu _un cuvânt prin care cele două stări sunt separabile_. Dacă nu vom găsi un astfel de cuvânt atunci acele stări sunt echivalente.
- Vom completa tabelul căutând cuvintele recursiv, în ordinea crescătoare a lungimii lor. Cuvintele de lungime _k_ le vom obţine cu ajutorul celor de lungime _k-1_ calculate anterior.

→ **Pas 0:** *Două stări sunt separabile prin cuvântul vid λ* (de lungime zero), dacă una din ele este finală și cealaltă este nefinală în automatul dat.

→ **Dacă** la pasul **k–1** s-a marcat în tabel cel puțin o pereche de stări separabile,
atunci Repetăm **Pas k:** *(Pentru k luând valori de la 1 la maxim cât ?)*

a) Pentru **fiecare** pereche de stări (q_i, q_j), cu $i > j$, care **nu** a fost încă marcată ca fiind separabilă prin niciun cuvânt, verificăm:

b) pentru **fiecare** simbol *x* din alfabetul Σ:

c) dacă plecând din perechea de stări (q_i, q_j) , cu $i > j$, și aplicând tranzițiile cu simbolul ***x*** din alfabet ajungem în perechea de stări (q_s, q_t), cu $s > t$,
iar stările q_s și q_t erau marcate în tabel ca fiind separabile prin cuvântul ***w***,

atunci rezultă că stările q_i și q_j sunt separabile prin cuvântul ***xw*** și le marcăm în tabel cu acest cuvânt. **Stop** *pas b)* și **continuăm *pas a).***

b') Dacă nu s-a găsit *niciun* simbol *x* care să ne ducă într-o pereche de stări separabile (adică *toate* simbolurile din alfabet ne-au dus fie în perechi de stări nemarcate încă în tabel, fie în perechi de stări identice ($q_s = q_t$)),

atunci perechea (q_i, q_j) rămâne *momentan* nemarcată în tabel și **continuăm *pas a)***.

a') Dacă la aplicarea pasului curent **k** am marcat cel puțin o pereche de stări separabile în tabel, **atunci** incrementăm valoarea lui k și repetăm acest pas (adică vom căuta stări separabile prin cuvinte de lungime **k+1**).

Altfel (dacă nu s-a modificat nimic în tabel la pasul k), ***algoritmul se termină*** cu concluzia că stările rămase ***nemarcate*** în tabel sunt stări echivalente.

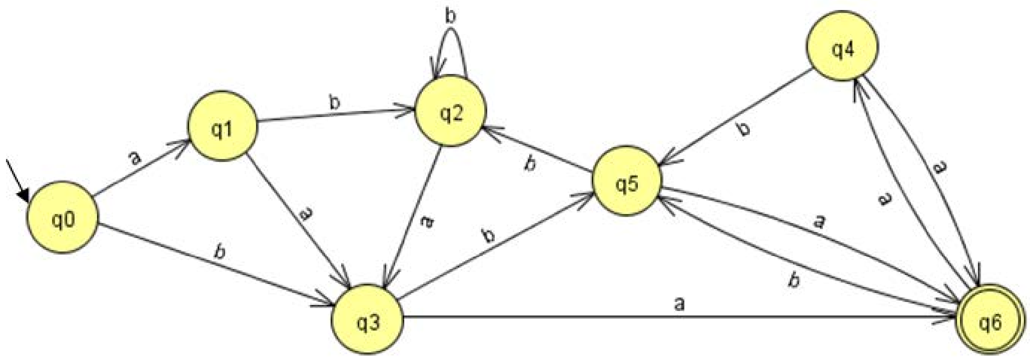
- Apoi desenăm AFD-ul minimal astfel:
  - Desenăm întâi toate stările, grupându-le pe cele echivalente între ele într-o singură stare a AFD-ului minimal.
  - **Starea inițială** este grupul format din stările echivalente cu fosta stare inițială q_0.
  - **Stările finale** sunt grupurile formate din stări care erau finale în automatul original.
  - Pentru a duce **tranzițiile**, dacă în automatul original aveam tranziție din starea **q** cu simbolul **x** către starea **r**, atunci în AFD-ul minimal, din grupul de stări echivalente cu starea **q** ducem tranziție cu simbolul **x** către grupul de stări echivalente cu starea **r**.

Observaţii: *[valabile pentru metoda 1 si metoda 2 ale algoritmului de minimizare AFD]*

Înainte de aplicarea algoritmului descris mai sus, **eliminăm** din automat toate **stările inaccesibile** (cele până la care nu există niciun drum care pleacă din starea iniţială) împreună cu toate tranziţiile care pleacă sau ajung în ele.

După aplicarea algoritmului descris mai sus, **eliminăm** toate stările plecând din care nu se poate ajunge în nicio stare finală, împreună cu tranziţiile care pleacă sau ajung în ele. *De exemplu* va fi eliminată acea stare nefinală q_{aux} adăugată pentru completarea AFD-ului.

- ***Exemplu:*** Pentru următorul AFD construiți un AFD minimal echivalent.



Observăm că AFD-ul dat este complet definit şi nu există stări inaccesibile.

Pas 0: Căutăm perechile de stări separabile prin cuvântul λ de lungime zero. Avem o singură stare finală în acest exemplu, deci ea va fi separabilă prin λ de toate celelalte stări, care sunt nefinale. Completăm în tabel, pentru toate perechile (q_6, q_i), $0 \leq i \leq 5$.

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
q_0							
q_1							
q_2							
q_3							
q_4							
q_5							
q_6	λ	λ	λ	λ	λ	λ	

Pas 1: Căutăm cuvinte de lungime 1.
Avem $\delta(q_0, a) = q_1 \notin F$; $\delta(q_1, a) = q_3 \notin F$; $\delta(q_2, a) = q_3 \notin F$
şi $\delta(q_3, a) = q_6 \in F$; $\delta(q_4, a) = q_6 \in F$; $\delta(q_5, a) = q_6 \in F$.
Rezultă că orice stare din mulțimea $\{q_0, q_1, q_2\}$ va fi separabilă de orice stare din mulțimea $\{q_3, q_4, q_5\}$ prin cuvântul "a".
(Observăm că toate tranziţiile cu "b" merg către stări nefinale, deci nu va exista nicio pereche de stări care să fie separabile prin cuvântul "b".)

Obs: E posibil să fie separabile şi prin altceva, dar este suficient să găsim un singur cuvânt.

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
q_0							
q_1							
q_2							
q_3	a	a	a				
q_4	a	a	a				
q_5	a	a	a				
q_6	λ	λ	λ	λ	λ	λ	

Pas 2: Căutăm cuvinte de lungime 2.

Dacă $(q_i, q_j) \xrightarrow{x \in \Sigma} (q_s, q_t)$	și $q_s \not\equiv_w q_t$	Rezultă: $q_i \not\equiv_{xw} q_j$
$(q_1, q_0) \xrightarrow{a} (q_3, q_1)$	$q_3 \not\equiv_a q_1$	=> $q_1 \not\equiv_{aa} q_0$
$(q_2, q_0) \xrightarrow{a} (q_3, q_1)$	$q_3 \not\equiv_a q_1$	=> $q_2 \not\equiv_{aa} q_0$
$(q_2, q_1) \xrightarrow{a} (q_3, q_3)$ $(q_2, q_1) \xrightarrow{b} (q_2, q_2)$	(q_3, q_3) și (q_2, q_2) sunt perechi de stări echivalente	=> $q_2 \equiv q_1$
$(q_4, q_3) \xrightarrow{a} (q_6, q_6)$ $(q_4, q_3) \xrightarrow{b} (q_5, q_5)$	(q_6, q_6) și (q_5, q_5) sunt perechi de stări echivalente	=> $q_4 \equiv q_3$
$(q_5, q_3) \xrightarrow{a} (q_6, q_6)$ $(q_5, q_3) \xrightarrow{b} (q_5, q_2)$	(q_6, q_6) stări echivalente, dar $q_5 \not\equiv_a q_2$	=> $q_5 \not\equiv_{ba} q_3$
$(q_5, q_4) \xrightarrow{a} (q_6, q_6)$ $(q_5, q_4) \xrightarrow{b} (q_5, q_2)$	(q_6, q_6) stări echivalente, dar $q_5 \not\equiv_a q_2$	=> $q_5 \not\equiv_{ba} q_4$

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
q_0							
q_1	aa						
q_2	aa	∅					
q_3	a	a	a				
q_4	a	a	a	∅			
q_5	a	a	a	ba	ba		
q_6	λ	λ	λ	λ	λ	λ	

Am terminat de completat tabelul şi am obţinut stări echivalente: $q_1 \equiv q_2$ și $q_3 \equiv q_4$.

Automatul AFD minimal obţinut va avea stările Q = {q_0, q_{12}, q_{34}, q_5, q_6}, starea iniţială q_0 şi stările finale F = {q_6}. Tranziţiile le desenăm conform automatului iniţial, dar ţinând cont de această grupare a stărilor.

Observăm că nu există nicio stare plecând din care să nu avem drum până într-o stare finală, deci nu avem de eliminat nicio stare și acesta este automatul minimal echivalent cu cel dat.