Logică Matematică și Computațională

Anul I, Semestrul II 2025

Laurențiu Leuștean

Pagina web: https://cs.unibuc.ro/courses/lmc/

LOGICA PROPOZIȚIONALĂ

Logica propozițională - informal

Limbajul logicii propoziționale este bazat pe propoziții sau enunțuri declarative, despre care se poate argumenta în principiu că sunt adevărate sau false.

Propoziții declarative

- Suma numerelor 2 și 4 este 6.
- Mihai Eminescu a fost un scriitor român.
- Maria a reacționat violent la acuzațiile lui Ion.
- Orice număr natural par > 2 este suma a două numere prime. (Conjectura lui Goldbach).
- Andrei este deștept.
- Marțienilor le place pizza.

Propoziții care nu sunt declarative

- Poți să îmi dai, te rog, pâinea?
- Pleacă!

Logica propozițională - informal

Considerăm anumite propoziții ca fiind atomice și le notăm $p, q, r, \ldots$ sau $p_1, p_2, p_3, \ldots$.
Exemple: p=Numărul 2 este par. q=Mâine plouă. r=Sunt obosit.

Pornind de la propozițiile atomice, putem crea propoziții complexe (notate φ, ψ, χ, $\cdots$) folosind conectorii logici $\neg$ (negația), $\rightarrow$ (implicația), $\vee$ (disjuncția), $\wedge$ (conjuncția), $\leftrightarrow$ (echivalența).

Exemple:

$\neg p$	$=$	Numărul 2 nu este par.
$p \vee q$	$=$	Numărul 2 este par sau mâine plouă.
$p \wedge q$	$=$	Numărul 2 este par și mâine plouă.
$p \rightarrow q$	$=$	Dacă numărul 2 este par, atunci mâine plouă.
$p \leftrightarrow q$	$=$	Numărul 2 este par dacă și numai dacă mâine plouă.

Putem aplica repetat conectorii pentru a obține propoziții și mai complexe. Pentru a elimina ambiguitățile, folosim parantezele (,).
Exemplu: $\varphi = (p \wedge q) \rightarrow ((\neg r) \vee q)$

Exemplu:

Fie propoziția:

φ=*Azi este vineri, deci avem curs de logică.*

Considerăm propozițiile atomice

p=*Azi este vineri.* q=*Avem curs de logică.*

Atunci $\varphi = p \rightarrow q$. Cine este $\neg\varphi$?

$\neg\varphi = p \wedge (\neg q)$=*Azi este vineri și nu avem curs de logică.*

Exemplu:

Fie propoziția:

φ=*Dacă trenul întârzie și nu sunt taxiuri la gară, atunci Ion întârzie la întâlnire.*

Considerăm propozițiile atomice

p = *Trenul întârzie.*
q = *Sunt taxiuri la gară.*
r = *Ion întârzie la întâlnire.*

Atunci $\varphi = (p \wedge (\neg q)) \rightarrow r$.

Presupunem că φ, p sunt adevărate și r este falsă (deci $\neg r$ este adevărată). Ce putem spune despre q? q este adevărată.

Definiția 1.1

Limbajul logicii propoziționale LP este format din:

- *o mulțime numărabilă $V = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ de variabile;*
- *conectori logici: $\neg$ (se citește non), $\rightarrow$ (se citește implică)*
- *paranteze: (,).*

- Mulțimea *Sim* a simbolurilor lui *LP* este

$$Sim := V \cup \{\neg, \rightarrow, (,)\}.$$

- Notăm variabilele cu $v, u, w, v_0, v_1, v_2, \ldots$

Definiția 1.2

Mulțimea Expr a expresiilor lui LP este mulțimea tuturor șirurilor finite de simboluri ale lui LP.

- Expresia vidă se notează λ.
- Lungimea unei expresii θ este numărul simbolurilor din θ. Sim^n este mulțimea șirurilor de simboluri ale lui *LP* de lungime n.
- Prin convenție, $Sim^0 = \{\lambda\}$. Atunci $Expr = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Sim^n$.

Exemple:

$((((v_7,\ v_1\neg \rightarrow (v_2),\ \neg v_1 v_2,\ ((v_1 \rightarrow v_2) \rightarrow (\neg v_1)),\ (\neg(v_1 \rightarrow v_2)).$

Logica propozițională LP - Limbajul

Operația de bază pentru expresii este concatenarea: dacă $\varphi = \varphi_0 \dots \varphi_{k-1}$ și $\psi = \psi_0 \dots \psi_{l-1}$ sunt expresii, atunci concatenarea lor, notată $\varphi\psi$, este expresia $\varphi_0 \dots \varphi_{k-1}\psi_0 \dots \psi_{l-1}$.

Definiția 1.3

Fie $\theta = \theta_0\theta_1 \dots \theta_{k-1}$ o expresie a lui LP, unde $\theta_i \in Sim$ pentru orice $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$.

- *Dacă $0 \leq i \leq j \leq k-1$, atunci expresia $\theta_i \dots \theta_j$ se numește (i, j)-subexpresia lui θ;*
- *Spunem că o expresie ψ apare în θ dacă există $0 \leq i \leq j \leq k-1$ a.î. ψ este (i, j)-subexpresia lui θ.*

Formule

Definiția formulelor este un exemplu de definiție inductivă.

Definiția 1.4

Formulele lui LP sunt expresiile lui LP definite astfel:

(F0) *Orice variabilă propozițională este formulă.*

(F1) *Dacă φ este formulă, atunci $(\neg\varphi)$ este formulă.*

(F2) *Daca φ și ψ sunt formule, atunci $(\varphi \to \psi)$ este formulă.*

(F3) *Numai expresiile obținute aplicând regulile (F0), (F1), (F2) sunt formule.*

Notații: Mulțimea formulelor se notează *Form*. Notăm formulele cu $\varphi, \psi, \chi, \dots$.

- Orice formulă se obține aplicând regulile (F0), (F1), (F2) de un număr finit de ori.
- $Form \subseteq Expr$. Formulele sunt expresiile "bine formate".

Formule

Exemple:

- $v_1\neg \to (v_2)$, $\neg v_1 v_2$ nu sunt formule.
- $((v_1 \to v_2) \to (\neg v_1))$, $(\neg(v_1 \to v_2))$ sunt formule.

Citire unică (Unique readability)

Dacă φ este o formulă, atunci exact una din următoarele alternative are loc:

- $\varphi = v$, unde $v \in V$;
- $\varphi = (\neg\psi)$, unde ψ este formulă;
- $\varphi = (\psi \to \chi)$, unde ψ, χ sunt formule.

Mai mult, scrierea lui φ sub una din aceste forme este unică.

Principiul inducției pe formule

Propoziția 1.5 (Principiul inducției pe formule)

*Fie **P** o proprietate. Presupunem că:*

(0) *Orice variabilă are proprietatea **P**.*

(1) *Pentru orice formulă φ, dacă φ are proprietatea **P**, atunci și $(\neg\varphi)$ are proprietatea **P**.*

(2) *Pentru orice formule φ, ψ, dacă φ și ψ au proprietatea **P**, atunci $(\varphi \to \psi)$ are proprietatea **P**.*

*Atunci orice formulă φ are proprietatea **P**.*

Dem.: Pentru orice formulă φ, notăm cu $c(\varphi)$ numărul conectorilor logici care apar în φ. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ definim proprietatea $Q(n)$ astfel:

$Q(n)$ e adevărată ddacă orice formulă φ cu $c(\varphi) \leq n$ are proprietatea **P**.

Demonstrăm prin inducție că $Q(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Principiul inducției pe formule

Pasul inițial. $Q(0)$ este adevărată, deoarece pentru orice formulă φ, $c(\varphi) \leq 0 \iff c(\varphi) = 0 \iff \varphi = v$, cu $v \in V$ și, conform ipotezei (0), v are proprietatea $\boldsymbol{P}$.
Ipoteza de inducție. Fie $n \in \mathbb{N}$. Presupunem că $Q(n)$ este adevărată.
Pasul de inducție. Demonstrăm că $Q(n+1)$ este adevărată. Fie φ o formulă cu $c(\varphi) \leq n+1$. Avem trei cazuri:

- $\varphi = v \in V$. Atunci φ are proprietatea $\boldsymbol{P}$, conform (0).
- $\varphi = (\neg\psi)$, unde ψ este formulă. Atunci $c(\psi) = c(\varphi) - 1 \leq n$, deci, conform ipotezei de inducție, ψ are proprietatea $\boldsymbol{P}$. Aplicînd ipoteza (1), rezultă că φ are proprietatea $\boldsymbol{P}$.
- $\varphi = (\psi \to \chi)$, unde ψ, χ sunt formule. Atunci $c(\psi), c(\chi) \leq c(\varphi) - 1 \leq n$, deci, conform ipotezei de inducție, ψ și χ au proprietatea $\boldsymbol{P}$. Rezultă din (2) că φ are proprietatea $\boldsymbol{P}$.

Așadar, $Q(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Deoarece pentru orice formulă φ există $N \in \mathbb{N}$ a.î. $c(\varphi) \leq N$, rezultă că orice formulă φ are proprietatea $\boldsymbol{P}$. □

Principiul inducției pe formule

Propoziția 1.6 (Principiul inducției pe formule - variantă alternativă)

Fie Γ o mulțime de formule care are următoarele proprietăți:

- *$V \subseteq \Gamma$;*
- *Γ este închisă la $\neg$, adică $\varphi \in \Gamma$ implică $(\neg\varphi) \in \Gamma$;*
- *Γ este închisă la $\to$, adică $\varphi, \psi \in \Gamma$ implică $(\varphi \to \psi) \in \Gamma$.*

Atunci $\Gamma = Form$.

Dem.: Definim următoarea proprietate $\boldsymbol{P}$: pentru orice formulă φ,

$$\varphi \text{ are proprietatea } \boldsymbol{P} \text{ ddacă } \varphi \in \Gamma.$$

Conform definiției lui Γ, rezultă că sunt satisfăcute ipotezele (0), (1), (2) din Principiul inducției pe formule (Propoziția 1.5), deci îl putem aplica pentru a obține că orice formulă are proprietatea $\boldsymbol{P}$, deci orice formulă φ este în Γ. Așadar, $\Gamma = Form$. □

Subformule

Definiția 1.7

Fie φ o formulă a lui LP. O subformulă a lui φ este orice formulă ψ care apare în φ.
Notație: Mulțimea subformulelor lui φ se notează $SubForm(\varphi)$.

Exemplu:

Fie $\varphi = ((v_1 \to v_2) \to (\neg v_1))$. Atunci

$$SubForm(\varphi) = \{v_1, v_2, (v_1 \to v_2), (\neg v_1), \varphi\}.$$

Formule

Conectorii derivați $\vee$ (se citește sau), $\wedge$ (se citește și), $\leftrightarrow$ (se citește dacă și numai dacă) sunt introduși prin abrevierile:

$$\begin{aligned}
(\varphi \vee \psi) &:= ((\neg\varphi) \to \psi)\\
(\varphi \wedge \psi) &:= (\neg(\varphi \to (\neg\psi)))\\
(\varphi \leftrightarrow \psi) &:= ((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)).
\end{aligned}$$

Convenții

- În practică, renunțăm la parantezele exterioare, le punem numai atunci când sunt necesare. Astfel, scriem $\neg\varphi, \varphi \to \psi$, dar scriem $(\varphi \to \psi) \to \chi$.
- Pentru a mai reduce din folosirea parantezelor, presupunem că
  - $\neg$ are precedența mai mare decât ceilalți conectori;
  - $\wedge, \vee$ au precedență mai mare decât $\to, \leftrightarrow$.

Prin urmare, formula $(((\varphi \to (\psi \vee \chi)) \wedge ((\neg\psi) \leftrightarrow (\psi \vee \chi)))$ va fi scrisă $(\varphi \to \psi \vee \chi) \wedge (\neg\psi \leftrightarrow \psi \vee \chi)$.

Propoziția 1.8 (Principiul recursiei pe formule)

Fie A o mulțime și funcțiile

$$G_0 : V \to A, \quad G_\neg : A \to A, \quad G_\to : A \times A \to A.$$

Atunci există o unică funcție

$$F : Form \to A$$

care satisface următoarele proprietăți:

(R0) $F(v) = G_0(v)$ *pentru orice variabilă* $v \in V$.

(R1) $F(\neg\varphi) = G_\neg(F(\varphi))$ *pentru orice formulă* φ.

(R2) $F(\varphi \to \psi) = G_\to(F(\varphi), F(\psi))$ *pentru orice formule* φ, ψ.

Principiul recursiei pe formule se folosește pentru a da definiții recursive ale diverselor funcții asociate formulelor.

Exemplu:

Fie $c : Form \to \mathbb{N}$ definită astfel: pentru orice formulă φ,

$c(\varphi)$ este numărul conectorilor logici care apar în φ.

O definiție recursivă a lui c este următoarea:

$$\begin{aligned} c(v) &= 0 \quad \text{pentru orice variabilă } v \\ c(\neg\varphi) &= c(\varphi) + 1 \quad \text{pentru orice formulă } \varphi \\ c(\varphi \to \psi) &= c(\varphi) + c(\psi) + 1 \quad \text{pentru orice formule } \varphi, \psi. \end{aligned}$$

În acest caz, $A = \mathbb{N}$, $G_0 : V \to A$, $G_0(v) = 0$,

$$G_\neg : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad G_\neg(n) = n + 1,$$
$$G_\to : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad G_\to(m, n) = m + n + 1.$$

Notație:

Pentru orice formulă φ, notăm cu $Var(\varphi)$ mulțimea variabilelor care apar în φ.

Observație

Mulțimea $Var(\varphi)$ poate fi definită și recursiv.

Dem.: Exercițiu.

SEMANTICA LP

Valori de adevăr

Folosim următoarele notații pentru cele două valori de adevăr: 1 pentru adevărat și 0 pentru fals. Prin urmare, mulțimea valorilor de adevăr este $\{0,1\}$.

Definim următoarele operații pe $\{0,1\}$ folosind tabelele de adevăr.

$\neg : \{0,1\} \to \{0,1\}$,

p	$\neg p$
0	1
1	0

Se observă că $\neg p = 1 \iff p = 0$.

$\to: \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$,

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Se observă că $p \to q = 1 \iff p \leq q$.

Operațiile $\vee : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$, $\wedge : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$ și $\leftrightarrow : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$ se definesc astfel:

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Observație

Pentru orice $p, q \in \{0,1\}$, $p \vee q = \neg p \to q$, $p \wedge q = \neg(p \to \neg q)$ și $p \leftrightarrow q = (p \to q) \wedge (q \to p)$.

Dem.: Exercițiu.