marți 17.12: 8–10 sala 120 – (seminar 12 + test 2)

1) Verificați dacă $\widehat{153}$ este inversabil în $\mathbb{Z}_{461}$ și det inversul dacă $\exists$

$\hat{x}$ – inversabil în $\mathbb{Z}_m \iff gcd(x,m)=1$

$1 = u\cdot x + \underbrace{v\cdot m}_{\hat{0}}$ $/ \bmod m \Rightarrow \hat{1} = \hat{u}\cdot\hat{x}$

$461 = 153\cdot 3 + 2$
$153 = 2\cdot 76 + 1$
$2 = 1\cdot 2 + 0 \Rightarrow gcd(461, 153) = 1$

$1 = 153 - 2\cdot 76$
$1 = 153 - 76(461 - 153\cdot 3)$
$1 = 153 - 76\cdot 461 + 153\cdot 228$
$1 = 153\cdot 229 - 76\cdot 461$
$\hat{1} = \widehat{153}\cdot\widehat{229}$

Temă: $\widehat{23}$ în $\mathbb{Z}_{120}$

2) Det $gcd(f,g)$ și u, v a.î. $u\cdot f + g\cdot v = gcd(f,g)$

$f = x^4 + 2x^2 + x + 1$
$g = x^2 + 3$

$$\begin{array}{l|l} x^4+2x^2+x+1 & x^2+3 \\ \cline{2-2} -x^4-3x^2 & x^2-1 \\ \hline = -x^2+x+1 & \\ +x+3 & \\ \hline = \underbrace{x+4}_{rest} & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} x^2+3 & x+4 \\ \cline{2-2} -x^2-4x & x-4 \\ \hline -4x+3 & \\ 4x+16 & \\ \hline 19 & \end{array}$$

$x^4 + 2x^2 + x + 1 = (x^2+3)(x^2-1) + x + 4$
$x^2 + 3 = (x+4)(x-4) + 19$
$x + 4 = 19\left(\frac{1}{19}x + \frac{4}{19}\right) + 0$
$gcd(f,g) = 19$ – constantă $\in \mathbb{R}$

Obs! f, g – prime între ele

$19 = x^2 + 3 - (x+4)(x-4)$
$19 = \underbrace{x^2+3}_{g} - \left(\underbrace{x^4+2x^2+x+1}_{f} - \underbrace{(x^2+3)}_{g}(x^2-1)\right)(x-4)$
$19 = g - (x-4)f - (x^2-1)(x-4)\cdot g$
$19 = g\underbrace{(x^3 - 4x^2 - x + 5)}_{v} - f\underbrace{(x-4)}_{u}$

$19 = \underbrace{-(x-4)}_{-u_1}(x^4 + 2x^2 + x + 1) + \underbrace{(x^3 - 4x^2 - x + 5)}_{v_1}\underbrace{(x^2+3)}_{g}$

$f : 19 = \frac{1}{19}x^4 + \frac{2}{19}x^2 + \frac{1}{19}x + \frac{1}{19} \Rightarrow v = (\underbrace{x^3 - 4x^2 - x + 5}_{v_1}) + p(\frac{1}{19}x^4 + \frac{2}{19}x^2 + \frac{1}{19}x + \frac{1}{19})$; $\forall p \in \mathbb{R}[x]$

$g : 19 = \frac{1}{19}x^2 + \frac{3}{19} \Rightarrow u = -(x-4) - p(\frac{1}{19}x^2 + \frac{3}{19})$

3) Det toate polinoamele de grad cel mult 3 din $\mathbb{R}[x]$ care dau:

a) restul 12 la împ la $(x-1)$

$\underset{\text{grad cel mult 3}}{f} = (\underbrace{x-1}_{\text{grad 1}}) \cdot g + 12 \Rightarrow g$ are cel mult grad 2

$g = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$

$f = (x-1)(ax^2 + bx + c) + 12$

$f = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c + 12$

$f = ax^3 + x^2(b-a) + x(c-b) + (12-c)$ $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$

b) restul $(x-1)$ la imp la $(x-2)^2$

$f = (x-2)^2 \cdot g + x - 1$

$g = bx + c$; $b, c \in \mathbb{R}$

$f = (x-2)^2(bx+c) + x - 1$

$f = (x^2 - 4x + 4)(bx + c) + x - 1 = x^3 b + x^2(c - 4b) + x(4b - 4c + 1) + 4c - 1$

$f = x^3 b + cx^2 - 4bx^2 - 4cx + 4bx + 4c + x - 1$

4) Them : $f \in \mathbb{Z}[x]$. $f = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

$\frac{u}{v}$ = răd cu $(u, v) = 1$

Atunci : $u | a_0$
$v | a_n$

Dem:

Dacă $\frac{u}{v}$ = rădacină $\Rightarrow f(\frac{u}{v}) = 0$

$\Rightarrow a_n \frac{u^n}{v^n} + a_{n-1} \cdot \frac{u^{n-1}}{v^{n-1}} + \ldots + a_1 \cdot \frac{u}{v} + a_0 = 0 \,/ \cdot v^n$

$\Rightarrow a_n \cdot u^n + a_{n-1} \cdot v \cdot u^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot u \cdot v^{n-1} + a_0 \cdot v^n = 0$

$\Rightarrow u(a_n \cdot u^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot v^{n-1}) = -a_0 \cdot v^n$

$\left.\begin{matrix} \Rightarrow -a_0 \cdot v^n \vdots u \\ (u, v) = 1 \end{matrix}\right| \Rightarrow u | a_0$

$\left.\begin{matrix} u \cdot P \vdots v \\ (u, v) = 1 \end{matrix}\right| \Rightarrow v | P \Rightarrow \left.\begin{matrix} v | a_n u^{n-1} \\ (u, v) = 1 \end{matrix}\right| \Rightarrow v | a_n$

Consecinte:

- dc $a_n = \pm 1$ și $\alpha \in \mathbb{Q}$ răd pt $f \Rightarrow \alpha \in \mathbb{Z}$

• dc $a_n = \pm 1 \Rightarrow \alpha \in \mathbb{Z}$ - răd dc e un div al termenului liber

5) $f = x^4 - 7x^3 + 15x^2 - x - 24 \in \mathbb{Z}[x]$ găsiți o factorizare pt f

$D_{24} = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 8; \pm 12; \pm 24\}$

$x = 1 \Rightarrow f(1) = 1 - 7 + 15 - 1 - 24 \neq 0$

$x = -1 \Rightarrow f(-1) = 1 + 7 - 15 + 1 - 24 = 0$

$\Rightarrow (x+1) \mid f$

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 - 7x^3 + 15x^2 - x - 24 & x+1 \\
\hline
-x^4 - x^3 & x^3 - 8x^2 + 23x - 24 \\
\quad -8x^3 + 15x^2 - x - 24 & \\
\quad 8x^3 + 8x^2 & \\
\quad\quad 23x^2 - x - 24 & \\
\quad -23x^2 - 23x & \\
\quad\quad -24x - 24 & \\
\quad\quad 24x + 24 & \\
\quad\quad\quad 0 &
\end{array}
$$

$f = (x+1)(x^3 - 8x^2 + 23x - 24)$

$x = 3 \Rightarrow f(3) = (3+1)(27 - 72 + 69 - 24) = 0 \Rightarrow (x-3) \mid f$

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 - 8x^2 + 23x - 24 & x-3 \\
\hline
-x^3 + 3x^2 & x^2 - 5x + 8 \\
= -5x^2 + 23x - 24 & \\
\quad 5x^2 - 15x & \\
\quad\quad 8x - 24 & \\
\quad -8x + 24 & \\
\quad = \; = &
\end{array}
$$

$f = (x+1)(x-3)(x^2 - 5x + 8)$

6) Descompuneți în $\mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$, $x^n - 1$ unde $n = 2, 3, 4, 5, \underset{\text{temă}}{6}$

pt $n = 2$: $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ în $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

pt $n = 3$: $x^3 - 1 = (x-1)(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)$ în $\mathbb{C}$

$\quad = (x-1)(x^2+x+1)$ în $\mathbb{R}, \mathbb{Q}$

pt $n = 4$: $x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)\underbrace{(x-i)(x+i)}$ în $\mathbb{C}$

$\quad = (x-1)(x+1)(x^2+1)$ în $\mathbb{R}, \mathbb{Q}$

pt $n = 5$: $x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ în $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$

$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \quad |: x^2$

$x^2 + x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$

$x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} + 1 = 0$

$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$

$x^2 + \frac{1}{x^2} = \underbrace{\left(x + \frac{1}{x}\right)}_{t}^2 - 2$

$\Rightarrow t^2 - 2 + t + 1 = 0$

$t^2 + t - 1 = 0$