Descompuneți gcd(x^4-1, x^6-1)

Alg Euclid

$$\begin{array}{l|l} x^6-1 & x^4-1 \\ \hline -x^6+x^2 & x^2 \\ \hline x^2-1 & \end{array}$$

$x^6-1=(x^4-1)x^2+x^2-1=x^2(x^2-1)(x^2+1)+x^2-1=(x^2-1)[x^2(x^2+1)+1]$

$x^6-1=(x^3)^2-1=(x^3+1)(x^3-1)=(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)=(x-1)(x+1)(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)(x-\varepsilon_3)(x-\varepsilon_4)$

Det gcd(x^5-1, x^6-1)

$$\begin{array}{l|l} x^6-1 & x^5-1 \\ \hline -x^6+x & x \\ \hline x-1 & \end{array}$$

$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x^2+x+1)$

$x^6-1=(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ în $\mathbb{R}$

$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$

$x^4+x^3+x^2+x+1=0 \quad |:x^2$

$x^2+x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2+\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}+2$

Notăm $x+\frac{1}{x}=t$

$t^2+t-1=0$

$\Delta=5, \sqrt{\Delta}=\sqrt{5}$

$t_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

a) $x+\frac{1}{x}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{x^2+1}{x}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow 2x^2+2=-x+x\sqrt{5} \Rightarrow 2x^2+x(1-\sqrt{5})+2=0$

$\Delta=(1-\sqrt{5})^2-16<0$

b) $x+\frac{1}{x}=\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{x^2+1}{x}=\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow 2x^2+2+x(1+\sqrt{5})=0$

$\Delta=(1+\sqrt{5})^2-16<0$

3) Det toate polinoamele de grad cel mult 4 ireductibile în $\mathbb{Z}_2[x]$

grad 1: $ax+b \Rightarrow \begin{cases} x+1 \\ x \end{cases}$

grad 2: $x^2+ax+b \Rightarrow x^2+x+1$

ireductibile $\Leftrightarrow$ nu au răd

$x=\hat{0} \qquad 0+0+b=1 \Rightarrow b=1$

$x=\hat{1} \qquad \hat{1}+a+\hat{1}=\hat{1} \Rightarrow a=\hat{1}$

Obs! $x^2+\hat{1}=(x+\hat{1})^2$

$x^2-1=(1-x)(x+1)=(x+1)^2$

grad 3: x^3+ax^2+bx+c

$x=0 \Rightarrow 0+0+0+c=\hat{1} \Rightarrow c=\hat{1}$

$x=1 \Rightarrow \hat{1}+\hat{a}+\hat{b}+\hat{1}=\hat{1} \Rightarrow a+b=\hat{1}$ $\begin{cases} a=\hat{0},\ b=\hat{1} \\ a=\hat{1},\ b=\hat{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3+x^2+\hat{1} \\ x^3+x+\hat{1} \end{cases}$

grad 4: ired $\begin{cases} \text{- nu are răd} \\ \text{- nu e prod de poligoame de gr. 2} \end{cases}$

$x^4+ax^3+bx^2+cx+d$

$x=0 \Rightarrow d=\hat{1}$

$x=1 \Rightarrow 1+a+b+c+1=1$

$a+b+c=\hat{1} \to$ $\hat{1},\hat{1},\hat{1}$; $\hat{1},\hat{0},\hat{0}$; $\hat{0},\hat{1},\hat{0}$; $\hat{0},\hat{0},\hat{1}$

$x^4+x^3+x^2+x+\hat{1}$

x^4+x^3+1

x^4+x+1

$(x^2+x+1)(x^2+x+1)=x^4+\cancel{x^3}+\cancel{x^2}+\cancel{x^3}+\cancel{x^2}+\cancel{x}+x^2+\cancel{x}+\hat{1}=x^4+x^2+\hat{1}$

4) Stabiliți dacă f e răd în $\mathbb{Q}[x]$

$f=x^4+2x^3+3x^2+x+1$

1. grad 1 · grad 3
2. grad 2 · grad 2

(1) $\frac{u}{v}\in\mathbb{Q}$ cu $u|1$ și $v|1$

$\frac{u}{v}=\pm 1$

$x=-1 \Rightarrow f(-1)=1-2+3-1-1\neq 0$

$x=1 \Rightarrow 1+2+3+1+1\neq 0$

(2) $f=\underbrace{g}_{\text{gr II}}\cdot\underbrace{h}_{\text{gr II}}$

$\underbrace{(a_0+a_1x+a_2x^2)}_{g}\underbrace{(b_0+b_1x+b_2x^2)}_{h}=a_0b_0+a_0b_1x+a_0b_2x^2+a_1b_0x+a_1b_1x^2+a_1b_2x^3+a_2b_0x^2+a_2b_1x^3+a_2b_2x^4=a_0b_0+x(a_0b_1+a_1b_0)+x^2(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)+x^3(a_1b_2+a_2b_1)+a_2b_2x^4=f$

$a_1, b_1 \in \mathbb{Z}$

$f=x^4+2x^3+3x^2+x+1$

$a_0b_0=1 \Rightarrow a_0=b_0=\pm 1$

$a_2b_2=1 \Rightarrow a_2=b_2=\pm 1$

$a_0b_1+a_1b_0=1 \Rightarrow a_0(b_1+a_1)=\pm 1$] - nu se poate

$a_1b_2+a_2b_1=2 \Rightarrow a_2(a_1+b_1)=2 \Rightarrow a_1+b_1=\pm 2$

$a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0=3 \Rightarrow f$ - ireductibilă

5) Stabiliți dacă $f=x^4+3x^3+5x^2+x+1$ este ired în $\mathbb{Q}[x]$

$\underbrace{x^4+x^3+x^2+x+1}_{\text{ired în } \mathbb{Z}_2[x]}\equiv f \pmod 2 \Rightarrow f$ - ireductibilă

6) Stabiliți dacă $f = x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 10x + 6$ în $Q[x]$

$2 \mid 4, 12, 10, 6$
$2^2 = 4$ - nu div 6 $\Bigg| \Rightarrow f$ - ired în $Q[x]$ - (Criteriul Einstein)

Criteriul Einstein

Fie f un polinom $\in R[x]$ cu $f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$

Dacă $\exists$ un elem p - prim din R cu: $p \mid a_i$ pt $0 \le i \le n-1$; p nu div a_n; p^2 nu div a_0 $\Bigg/ \Rightarrow f$ - ired în $K[x]$

R - inel factorial

$K = Q[R]$ - corp de fracții

7) Stabiliți inv dacă $\exists$ pt $x+2$ în $Q[x]/x^2-1$

$f = x+2$

$f \cdot g \equiv 1 \pmod{x^2-1}$
└ invers

$g = ax + b$

$f \cdot g = (x+2)(ax+b) = ax^2 + bx + 2ax + 2b$

$a(x^2-1) + a + x(b+2a) + 2b$

$f \cdot g = \hat{1} \Rightarrow \hat{1} = x(b+2a) + (2b+a)$

$\begin{cases} b + 2a = 0 \Rightarrow b = -2a \\ 2b + a = 1 \end{cases} \Bigg| \Rightarrow -4a + a = 1 \Rightarrow -3a = 1$
$\Rightarrow a = -\frac{1}{3} \Rightarrow b = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow g = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ inv lui f

$f \cdot g = (x+2)\left(-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}x + \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}(x^2-1) + 1 \equiv 1 \pmod{x^2-1}$

8) Găsiți inv / dacă $\exists$ pt x^2-1 în $Q[x]/x^3+1$

$f = x^2 - 1$

$g = ax^2 + bx + c$

$(x^2-1)(ax^2+bx+c) = ax^4 + bx^3 + cx^2 - ax^2 - bx - c = a x \underbrace{(x^3+1)}_{\hat{0}} - ax + b\underbrace{(x^3+1)}_{\hat{0}} - b + cx^2 - ax^2 - ax - c$

$f \cdot g = \hat{1}$

$\hat{1} = ((c-a)x^2 + (-b-a)x + (-b-c))$

$\begin{cases} c - a = 0 \Rightarrow c = a \\ -b - a = 0 \Rightarrow a = -b \\ -b - c = 1 \Rightarrow a - a = 1 \Rightarrow 0 = 1 \text{ Fals} \end{cases} \Bigg| \Rightarrow \nexists$ - nu e inversabilă