Recap curs

$(A, +, \cdot)$ = inel comutativ ($\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_m, K[x], \ldots$)

Def:
$\emptyset \neq Y \subseteq A$ s.n. ideal dacă:
1) $x+y \in Y, \forall x, y \in Y$
2) $\forall x \in Y, \forall a \in A \Rightarrow x \cdot a \in Y$

$\{0\}, A$ ideale
Pt $S \subseteq A$. Not $Y = (S)$ = idealul generat de mulțimea elem din S
Y = finit generat dacă $Y = (\underbrace{S_1, S_2, \ldots, S_m}_{\text{m-m finit}})$

Y = principal de $Y = (S_1)$
$\Rightarrow Y$ - ideal în A (inel com)
$Y = (S_1, S_2, \ldots S_m)$
$Y \ni \underbrace{i = S_1 \cdot a_1}_{\text{elem din } Y} + S_2 \cdot a_2 + \ldots + S_m \cdot a_m$, cu $a_1, \ldots a_m \in \mathbb{N}$

Teoremă: Pt $A = \mathbb{Z}$ sau $K[x]$ (K - corp)
$(f_1, \ldots f_m) = (\gcd(f_1, \ldots, f_m))$
$(f_1) \cap \ldots (f_m) = (\operatorname{lcm}(f_1, \ldots, f_m))$

$\operatorname{Ker} \varphi = \{f(x) \in A[x] \mid \varphi(\underbrace{f(x)}_{A}) = 0\} = \{f(x) \in A[x] \mid f(a) = 0\}$

$= \{f(x) \in A[x] \mid a$ - răd pt $f\} = (x-a)$
a = răd pt $f \Rightarrow f = (x-a) \cdot \underset{\in A[x]}{g}$

$\Rightarrow$ surj:
Fie $b \in A$
$\varphi(f(x)) = b \rightarrow$ ~~ca să fie surj~~
$f(b) = b$

$(S_1, \ldots, S_m)$
$i = S_1 \cdot a_1 + S_2 \cdot a_2 + \ldots$
$(x-a)$

$f(x)$ = polinomul „b" $\Rightarrow$ surj

2) Arătați că $\underset{A_1}{\mathbb{Z}[x]} / \underset{\operatorname{Ker}\varphi}{(x^2+1)} \simeq \underset{A_2}{\mathbb{Z}[i]}$

$\mathbb{Z}[i] = \{a+bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$

Caut $f: \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}[i]$ surj:
$\varphi(f(x)) = f(i) \Rightarrow$ îmi trebuie o singură răd a lui x^2+1

surj: $a+bi \in \mathbb{Z}[i]$
Caut $f(x)$ a.î. $f(i) = a+bi \Rightarrow$ surj
$f(x) = a+bx$

$\operatorname{Ker} f = \{f(x) \in \mathbb{Z}[x] \mid f(f(x)) = 0\} = \{f(x) \in \mathbb{Z}[x] \mid f(i) = 0\} = (x^2+1)$
$f(i) = 0 \Rightarrow f = (x^2+1) \cdot g \longrightarrow$ răd $\pm i$

ideal

$\in \mathbb{Z}[x]$

A = inel

$\mathcal{I}=(p,g)=\{p\cdot x+g\cdot y \mid x,y\in A\}$

↳ mulțimea generator

$\mathcal{I}=(p)=\{p\cdot x \mid x\in A\}$

$\mathcal{I}=(p_1,\dots p_m)=\{p_1\cdot x_1+p_2 x_2+\dots+p_m\cdot x_m \mid x_1,x_2,\dots x_m\in A\}$

(2) ideal în $\mathbb{Z}$ | (7) ideal în $\mathbb{Z}=(1)$

Obs: $(A,+,\cdot)$ = inel, $x\in A$

1) x = idempotent dacă $x^2=x \Rightarrow x^m=x,\ m\geq 2$

$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$

2) x = nilpotent dacă $\exists k\in\mathbb{N}$ a.î. $x^k=0$

3) x = div al lui zero dacă $\exists y\in A$ a.î. $x\cdot y=0$

$\mathbb{Z}_8 \to \hat{2},\ \hat{4}$

3) Găsiți elem idempotente în

a) $\mathbb{Z}[x]/(x^2-1) \longrightarrow \hat{f}=f+(x^2-1)$

Caut $\hat{f}$ cu $\hat{f}^2=\hat{f}$ gr cu 1 mai mic

$\hat{f}=\widehat{ax+b}$

$\Rightarrow \hat{f}^2=\hat{f} \Rightarrow (\widehat{ax+b})^2=(\widehat{ax+b}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \widehat{ax^2+2abx+b^2}=\widehat{ax+b} \Rightarrow$

$\Rightarrow \widehat{a^2(x^2-1)+a^2+2ab x+b^2}=\widehat{ax+b} \Rightarrow$

$a^2(x^2-2x+1)=$
$=ax^2-2a^2x+a^2$

$\Rightarrow \widehat{a^2+b^2+2abx}=\widehat{b+ax}$

$\begin{cases} a^2+b^2=b \\ 2ab=a \end{cases}$

dc. $a=0 \Rightarrow b^2=b \Rightarrow b(b-1)=0 \Rightarrow b=0$ sau $b=1$

dc $a\neq 0 \Rightarrow 2b=1 \Rightarrow b=\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ Elem idempotente 0 și 1

b) $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

Caut (a,b) cu $(a,b)^2=(a,b)$

$\Rightarrow (a^2,b^2)=(a,b) \Rightarrow \left.\begin{cases} a(a-1)=0 \Rightarrow a=0 \text{ sau } a=1 \\ b(b-1)=0 \Rightarrow b=0 \text{ sau } b=1 \end{cases}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Elem idempotente: $(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$

4) Verif dacă:
a) $(2x,\ x^3+3x)\in\mathbb{R}[x]$
b) $(x^4-1,\ x+2)\in\mathbb{Z}[x]$
c) $(x^3-1,\ 3x^2+2x-5)=(x^2-2x+1,\ x^2-1)$ în $\mathbb{Q}[x]$

a) $\mathcal{I}=(2x,\ x^3+3x)$

$\mathcal{J} = \mathbb{R}[x]$ dc $1 \in \mathcal{J}$, generată în $\mathbb{R}[x]$

$x^3 + 3x = 2x\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}\right)$

$f \in \mathcal{J} \Rightarrow f = 2x \cdot f' + (x^3 + 3x) \cdot g'$ cu $f', g' \in \mathbb{R}[x]$

$f = 2x f' + 2x\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}\right) g'$

$f = 2x\left(f' + \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}\right) \cdot g'\right) \Rightarrow \mathcal{J} = (2x) = \{2x \cdot \text{ceva}$ <
- dc ceva $= 0 \Rightarrow 0 \neq 1$
- dc ceva $\neq 0 \Rightarrow 2x \cdot$ ceva are grad $\geq 1 \neq$ gr 0

$\Rightarrow$ <u>nu</u> poate să se genereze

b) $(x^2 - 1, x + 2) = \mathbb{Z}[x]$

$1 \in \mathcal{J}$?

$x^2 - 1 = (x+2)(x-2) + 3$

$f \in \mathcal{J} \Rightarrow f = (x^2 - 1) f' + (x+2) \cdot g'$

$f = [(x+2)(x-2) + 3] \cdot f' + (x+2) \cdot g'$

$f = (x+2)(x-2) \cdot f' + 3f' + (x+2) g'$

$f = (x+2)((x-2) f' + g') + 3f' \Rightarrow \mathcal{J} = (x+2, 3)$

$f \in \mathcal{J}: (x+2) \cdot f'' + 3 \cdot g'' = f$

$f = 1$?

$1 = (x+2) \cdot f'' + 3 \cdot g'' \mid$ în $x = -2$

$1 = 3 \cdot f'' \Rightarrow g'' = \frac{1}{3} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow$ nu se poate

c) $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$

$3x^2 + 2x - 5 = 3x^2 - 3x + 5x - 5 = 3x(x-1) + 5(x-1) = (x-1)(3x+5)$ – gcd cu $(x-1)$

$\overset{T}{\Rightarrow} \mathcal{J}_1 = (x-1)$

$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$
$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ $\Big] \Rightarrow$ gcd $(x-1) \overset{T}{\Rightarrow} \mathcal{J}_2 = (x-1)$ $\Big] \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_2$

$\Rightarrow$ dc nu mergea th aplicată, trebuia să arătăm că primul ideal e inclus în al doilea și invers

5) Det elem nilpotente din $\mathbb{Z}_n$

$\cdot\ n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_g^{\alpha_g}$

$\cdot\ x \in \mathbb{Z}$ e nilpotent dc $x^k = 0$ pt un $k \in \mathbb{N}$

$x^k = \hat{0} = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_g^{\alpha_g}$

$\Rightarrow p_1 p_2 \cdots p_g \mid x \Rightarrow x = p_1 p_2 \cdots p_g \cdot$ ceva

ex: $\mathbb{Z}_{48}$

$48 = 2^4 \cdot 3$

$\Rightarrow x =$ nilp dc $x = M_{2 \cdot 3} = M6 \Rightarrow \hat{0}, \hat{6}, \hat{12}, \hat{18}, \hat{24}, \hat{30}, \hat{36}, \hat{42}$