Def: $\sim$ = rel de ordine pe $A \neq \emptyset$ dc. $\sim$ = reflexivă, antisim, tranzitivă

1) R: $\sim$ = R dc $\forall x \in A, x \sim x$

2) A.S: $\sim$ = A.S dc $\forall x, y \in A$ cu $x \sim y$ și $y \sim x \Rightarrow x = y$

3) T: $\sim$ = T dc $\forall x, y, z \in A$ cu $x \sim y$ și $y \sim z \Rightarrow x \sim z$

Obs: „$\leq$" = rel de ord pe A

1) A = mulțimea parțial ordonată

2) Dc, în plus, $\forall x, y \in A \rightarrow x \leq y$ sau $y \leq x \Rightarrow$ A = mult total ordonată (toate elem se pot „compara")

1) (Din 15.4) $\rightarrow$ Pe $\mathbb{N}$: $x | y$

$\hookrightarrow$ rel de ordin pe $\mathbb{N}$

a) $(\mathbb{N}, |)$ = M.T.O.

Nu, 2 și 3 nu se pot compara

$\begin{cases} 2 \nmid 3 \\ 3 \nmid 2 \end{cases} \Rightarrow$ ~~M.T.O~~

Def!

1) Element minimal = un elem care nu e mai mare decât niciun alt elem (mai multe)

2) Element minimal = un elem care e mai mic decât toate celelalte (unic, dc $\exists$)

3) Element maximal = un element care nu este mai mic niciun alt elem (mai multe)

4) Element maxim = un element care e mai mare decât toate celelalte (unic, de E)

b) Det elem minimale, maximale, minimul și maximul (dc. $\exists$).

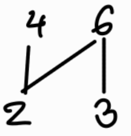
$1 | x, \forall x \in \mathbb{N} \Rightarrow 1$ = minim

$x | 0, \forall x \in \mathbb{N} \Rightarrow 0$ = maximul

2) Det elem minimali, maximali, min și max (de $\exists$):

a) $(DP(12), |)$

$DP = \{2, 3, 4, 6\}$

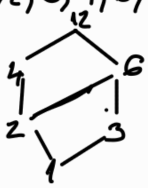


elem
[illegible]

2,3 → minimale
4,6 - elem maximal

b) $(D(12), |)$

$D = \{1,2,3,4,6,12\}$

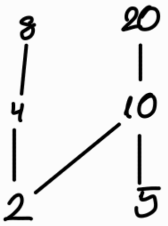


minim: 1
maxim: 12

2,3 - minimali (div prim)
4,6 - maximali $\left(\frac{12}{3}, \frac{12}{2}\right)$

c) $(DP(40), |)$

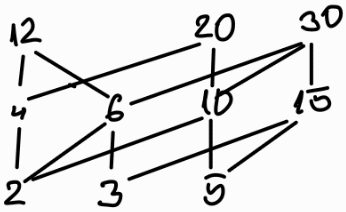
$DP(40) = \{2,4,5,8,10,20\}$



2,5 - minimali
8,20 - maximali
$\left(\frac{40}{5}\right) \left(\frac{40}{2}\right)$

d) $(DP(60), |)$

$DP(60) = \{2,3,4,5,6,10,12,15,20,30\}$



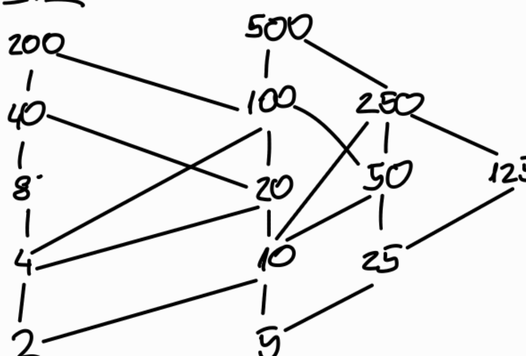
2,3,5 - minimale
12,20,30 - maximale
$\left(\frac{60}{5}\right)\left(\frac{60}{3}\right)\left(\frac{60}{2}\right)$

div $= 2^2 \cdot 5 \cdot 3$
nr div $= (2+1)(1+1)(1+1) = 12$

d) $(DP(1000), |)$

div $= 2^3 \cdot 5^3$
nr div $= (3+1)(3+1) = 16$

$DP(1000) = \{2,4,5,8,10,20,25,40,50,100,125,200,250,500\}$



2,5 - minimale
200,500 - maximali
$\frac{1000}{5}$ $\frac{1000}{2}$

Obs!
Elem minimali = div primi
Elem maximali = $\frac{n}{p}$, p − div primi

f) $(DP(81), |)$
$DP(81) = \{3, 9, 27\}$

27
|
9
|
3

minim = 3
maxim = 27

g) $(D(81), |)$
$D(81) = \{1, 3, 9, 27, 81\}$

81
|
27
|
9
|
3
|
1

} − M.T.O.

3) M.T.O sau M.P.O ?
a) $(D(12), |)$ − M.P.O : 2, 3 − nu sunt comparabile
b) $(DP(40), |)$ − M.P.O : 2, 5 − ——//——
c) $(D(8), |)$ − M.T.O : (D.H = lanț)
d) $(DP(256), |)$ − M.T.O : (D.H = lanț)

Obs: $(D(n), |)$ = M.T.O dc
$n = p^t$, p − nr prim
$1 - p - p - p^2 - \dots - p^t = n$
(Diagrama Hasse = lanț)

4) Det elem minimale, maximale, min, max (dc $\exists$)
a) $(\mathbb{N}, \leq)$ − minim = 0 (elem minimal
maximal − NU
b) $(\mathbb{Z}, \leq)$ − Nimic
c) $(P(\{1,2\}), \subseteq)$
$P(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$ $\Rightarrow$ maxim = $\{1,2\}$
minimale = $\{1\}, \{2\}$
d) $(P(\{1,2\}) \setminus \emptyset, \subseteq)$
maxim = $\{1,2\}$
minimale = $\{1\}, \{2\}$

Aritmetică în $\mathbb{Z}$

• | pe $\mathbb{Z}$

$R \Rightarrow x \mid x, \forall x \in \mathbb{Z}$

$A.S \Rightarrow x \mid y$ și $y \mid x \Rightarrow x = y$

Nu ex: $2 \mid -2$ și $-2 \mid 2$ dar $2 \neq -2$

T: ✓

Teorema împărțirii cu Rest

$a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$

$a : b = q$ rest $r \Rightarrow a = b \cdot q + r$

$0 \leq r \leq |b|$

exp: $a = -18$ $b = -5$

$-18 = -5 \cdot 3 - 3$

Nu este corect pt că $-3 < 0$

$-18 = -5 \cdot 4 + 2$ ✓

Def: $\gcd(a,b) = d$ (cmmdc → cel mai mare div comun)

1) $d \mid a$ și $d \mid b$

2) $\forall d_1$ a.î. $d_1 \mid a$ și $d_1 \mid b \Rightarrow d_1 \mid d$

Def: $\operatorname{lcm}(a,b) = l$ (c.m.m.m.c → cel mai mic multiplu comun)

1) $a \mid l$, $b \mid l$

2) $\forall l_1$ a.î. $a \mid l_1$ și $b \mid l_1 \Rightarrow l \mid l_1$

Obs! $a \cdot b = \gcd(a,b) \cdot \operatorname{lcm}(a,b)$

Alg. Euclid

input: $a, b \in \mathbb{Z}$ $(a > b)$

while $b \neq 0$

$(a : b = q$, rest $r)$

$a \leftarrow b$

$b \leftarrow r$

$d \leftarrow a$

(ultimul rest nenul)

$\exists u, v \in \mathbb{Z}$ a.î. $d = u \cdot a + v \cdot b$

(Det toate val întregi u și v pt care: $1 = u \cdot 13 + v \cdot 72$)

5) Det $\gcd(a,b)$ și $u, v \in \mathbb{Z}$ a.î.

$\gcd(a,b) = u \cdot a + v \cdot b$

a) $a = 348, b = 24$

$$\begin{array}{r|l} 348 & 24 \\ \cline{2-2} 24 & 14 \\ \cline{1-1} 108 & \\ 96 & \\ \cline{1-1} =12 & \end{array}$$

$348 = 24 \cdot 14 + 12$

$24 = 12 \cdot 2 + 0$

$\Rightarrow \gcd(348, 12) = 12$

$u, v \in \mathbb{Z}$ a.î. $12 = u \cdot 348 + v \cdot 24$

$12 = 348 - 24\cdot 14 \Rightarrow u_1 = 1$
$v_1 = (-14)$

$348 : 12 = 29 \Rightarrow v = -14 - 29\cdot k$

$24 : 12 = 2 \Rightarrow u = 1 + 12\cdot k$; $\forall k \in \mathbb{Z}$

b) $a = 3737$ $b = 1517$

$3737 : 1517 = 2$, $3737 - 3034 = 703 \Rightarrow a = 1517$, $b = 703$

$1517 : 703 = 2$, $1517 - 1406 = 111 \Rightarrow a = 703$, $b = 111$

$703 : 111 = 6$, $703 - 666 = 37$

$111 : 37 = 3$, $111 - 111 = 0 \Rightarrow \gcd(a,b) = 37$

$u, v \in \mathbb{Z}$ ai $u\cdot 3737 + v\cdot 1517 = 37$

$37 = 703 - 111\cdot 6$
$= 703 - (1517 - 703\cdot 2)6$
$= 703 - 1517\cdot 6 + 703\cdot 12$
$= 703\cdot 13 - 1517\cdot 6$

$= (3737 - 1715\cdot 2)\cdot 13 - 1517\cdot 6$
$= 3713\cdot 13 - 1517\cdot 26 - 1517\cdot 6$
$= 3713\cdot 13 - 1517\cdot 32$

$u_1 = 13$
$v_1 = -32$

$3737 : 37 = 101 \Rightarrow v = -32 - 101\cdot k$; $\forall k \in \mathbb{Z}$
$1517 : 31 = 41 \Rightarrow u = 13 + 41k$

Temă:

a) $a = 461$, $b = 153$
3) $b = 120$, $b = 23$

a) $\gcd(461, 153)$

$461 : \underset{a}{\underline{153}} = 3$ r $\underset{b}{\underline{2}}$

$153 : \underline{2} = 76$ r $\underline{1}$

$2 : \underline{1} = 2$ r $\underline{0}$

$u, v \in \mathbb{Z}$ ai $v\cdot 461 + u\cdot 153 = 1$

$1 = 461 -$