Def: $\sim$ - relație pe $A \neq \emptyset$

1) $\sim$ = reflexivă dc $\forall x \in A$, $x \sim x$

2) $\sim$ = simetrică dc $\forall x, y \in A$ cu $x \sim y \Rightarrow y \sim x$

3) $\sim$ = antisimetrică dc $\forall x, y \in A$ cu $x \sim y$ și $y \sim x \Rightarrow x = y$

4) $\sim$ = tranzitivă dc $\forall x, y, z \in A$ cu $x \sim y$ și $y \sim z \Rightarrow x \sim z$

Def:

$\sim$ - relație de echivalență pe A dc:

$\sim$ - reflexivă
- simetrică
- tranzitivă

$\Rightarrow$ pt $x \in A \rightarrow \hat{x} = [x] = \{\forall y \in A : x \sim y\}$

$[x]$ - clasă de echivalență

• $A/_\sim$ - mulțime factor a rel. $\sim$
- toate cls de echiv

$A/_\sim = \{[x] : x \in A\}$

S.C.R = sistem complet de reprezentanți
= câte un sg reprezentant

Aplicații:

1) Pe $\mathbb{R}$: rel de echivalență:

a) $x \sim y \Leftrightarrow |x-y| < 2$

Reflexivitate: $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x-x| = 0 < 2$ (A) deci $x \sim x$ ✓

Simetria: $\forall x, y \in \mathbb{R}$ cu $x \sim y \Rightarrow y \sim x$

$x \sim y \Rightarrow |x-y| < 2 \Rightarrow |y-x| < 2 \Rightarrow y \sim x$ ✓

Tranzitivă $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ cu $x \sim y$ și $y \sim z \overset{?}{\Rightarrow} x \sim z$

$x \sim y \Rightarrow |x-y| < 2$
$y \sim z \Rightarrow |y-z| < 2$
$\overset{?}{\Rightarrow} |x-z| < 2$

Contraexemplu:

$x = 1$, $y = 2$, $z = 3$

$|1-2| < 2$, $|2-3| < 2$, dar $|1-3| = 2$ (Nu) $\Rightarrow \sim \neq$ tranz $\Rightarrow \sim \neq$ rel de echivalență

b) $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$

(Seminar 3) $\Rightarrow \sim$ = rel de echiv

c) $x \sim y \Leftrightarrow x + y \in \mathbb{Z}$

R: Pt $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x+x = 2x \in \mathbb{Z}$

Contraex:

$x \in \mathbb{R}: x = \frac{1}{5} \in \mathbb{R} \Rightarrow 2 \cdot \frac{1}{5} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \sim \neq$ reflex $\Rightarrow \sim \neq$ rel de echiv

2) Pe $\mathbb{C}: z \sim w \Leftrightarrow |z| = |w|$ $\qquad z = a+bi \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2+b^2}, \forall a,b \in \mathbb{R}$

a) rel de echiv

b) Det un S.C.R.

a) R: Pt $\forall z \in \mathbb{C}, |z| = |z| \Rightarrow z \sim z$

S: Pt $\forall z, w \in \mathbb{C}, z \sim w \Rightarrow w \sim z$

$z \sim w \Rightarrow |z| = |w| \Rightarrow |w| = |z| \Rightarrow w \sim z$

T: Pt $\forall z, w, t \in \mathbb{C}$ cu $z \sim w$ și $w \sim t \overset{?}{\Rightarrow} z \sim t$

$\left.\begin{array}{l} z \sim w \Rightarrow |z| = |w| \\ w \sim t \Rightarrow |w| = |t| \end{array}\right| \Rightarrow |z| = |t| \Rightarrow z \sim t$ Adevarat

$\Rightarrow \sim$ rel de echiv

b) $[1] = \{w \in \mathbb{C} : |1| = |w|\} = \{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\} = \{a+b \cdot i \in \mathbb{C} : \sqrt{a^2+b^2} = 1\}$

⋮

$[\sqrt{2}] = \dots$

$[0] = \{0\}$

...

Un S.C.R.: $[0, +\infty)$ - avem câte un reprezentant pt fiecare els pe $\mathbb{R}_+$

3. Pe $\mathbb{Z}$: $x \sim y \Leftrightarrow 3 | x-y$ (x și y au același rest la împ la 3) $(0, 1, 2)$

$\Rightarrow x \equiv y \pmod 3$

a) $\sim$ - rel de echiv

b) Det un S.C.R.

a) R: Pt $x \in \mathbb{Z}$, $x - x = 0 \Rightarrow 3 | 0 \Rightarrow x \sim x$

S: Pt $x, y \in \mathbb{Z}$ cu $x \sim y \overset{?}{\Rightarrow} y \sim x$

Dacă $x \sim y \Rightarrow 3 | x-y \Rightarrow 3 | -(x-y) \Rightarrow 3 | y-x \Rightarrow y \sim x$

T: Pt $x, y, z \in \mathbb{Z}$ cu $x \sim y$ și $y \sim z \overset{?}{\Rightarrow} x \sim z$

Dc $x \sim y \Rightarrow 3 | x-y$

Dc $y \sim z \Rightarrow 3 | y-z$ +

$3 | x-z \Rightarrow x \sim z$

$\Rightarrow \sim$ - rel de ec

b) $[0] = \{\dots, -3, 0, 3, \dots\} = (M_3)$

$[1] = \{\dots, -2, 1, 4, \dots\} = (M_3 + 1)$

$[2] = \{\dots, -1, 2, 5, \dots\} = (M_3 + 2)$

$[3]$

Un S.C.R $= \{0, 1, 2\}$ sau $\{-3, -2, -1\}$

$\mathbb{Z}/_\sim = \{\{0\}, \{1\}, \{2\}\} = \mathbb{Z}_3$

4) $\mathbb{Z}$: $x \sim y \Rightarrow x \underset{(m)}{\equiv} y$, $m \in \mathbb{N}$ $\Longleftrightarrow m \mid x-y$

a) Rel de echiv
b) S.C.R.

a) R: $\forall x \in \mathbb{Z}$ $\quad x - x = 0 \Rightarrow m \mid 0 \Rightarrow x \sim x$

S: $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ cu $x \sim y \overset{?}{\Rightarrow} y \sim x$

De $x \sim y \Rightarrow m \mid x-y \Rightarrow m \mid -(x-y) \Rightarrow m \mid y-x \Rightarrow y \sim x$

T: $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ cu $x \sim y$ și $y \sim z$

De $x \sim y \Rightarrow m \mid x-y$

De $y \sim z \Rightarrow m \mid y-z$ $\oplus$

$m \mid x-z \Rightarrow x-z$

$\Rightarrow \sim$ - rel de echivalentă

b) $[0] = \{m \cdot k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$[1] = \{m \cdot k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$\vdots$

$[m-1] = \{m \cdot k + m-1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Un S.C.R $= \{0, 1, 2, \dots m-1\}$ sau $\{m, m+1, \dots, 2m-1\}$

$\mathbb{Z}/_{\sim} = \{\{0\}, \{1\}, \dots, \{m-1\}\} = \mathbb{Z}_m$

5) Pe $\mathbb{C}$: $z \sim w \Leftrightarrow z - w \in \mathbb{R}$

a) $\sim$ - rel de echiv
b) Un S.C.R=?

a) R: Pt $\forall z \in \mathbb{C}$ $\quad z - z = 0 \in \mathbb{R} \Rightarrow z \sim z$

S: Pt $\forall z, w \in \mathbb{C}$ cu $z \sim w \overset{?}{\Rightarrow} w \sim z$

De $z \sim w \Rightarrow z - w \in \mathbb{R} \Rightarrow -(z-w) \in \mathbb{R} \Rightarrow w - z \in \mathbb{R} \Rightarrow w \sim z$

T: Pt $\forall z, w, t \in \mathbb{C}$ cu $z \sim w$ și $w \sim t$

De $z \sim w \Rightarrow z - w \in \mathbb{R}$

De $w \sim t \Rightarrow w - t \in \mathbb{R}$ $\oplus$

$z - t \in \mathbb{R} \Rightarrow z \sim t$

$\Rightarrow \sim$ - rel de ec

b) $z - w \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{im}(z) = \operatorname{im}(w)$

$[a+bi] = \{x + bi, x \in \mathbb{R}\}$, $a, b \in \mathbb{R}$

Un S.C.R $= \{b \cdot i \mid b \in \mathbb{R}\} = \{1 + b \cdot i \mid b \in \mathbb{R}\}$

n

7. $|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$

6) Fie $N \times N : (m,n) \sim (p,q) \Leftrightarrow m+q = n+p \Leftrightarrow m-n = p-q$

$\sim$ - rel de echiv?

R: Pt $(m,n) \in N \times N$, $m+n = n+m$ (A) $\Rightarrow (m,n) \sim (m,n)$

S: Pt $\forall (m,n),(p,q) \in N \times N$ cu $(m,n) \sim (p,q) \overset{?}{\Rightarrow} (p,q) \sim (m,n)$

Dc $(m,n) \sim (p,q) \Rightarrow m+q = n+p \Rightarrow p+n = q+m \Rightarrow (p,q) \sim (m,n)$

T: Pt $\forall (m,n),(p,q),(a,b) \in N \times N$ cu $(m,n) \sim (p,q)$ și $(p,q) \sim (a,b) \Rightarrow (m,n) \sim (a,b)$

Dc $(m,n) \sim (p,q) \Rightarrow m+q = n+p$

Dc $(p,q) \sim (a,b) \Rightarrow p+b = q+a$

$\overset{+}{\Rightarrow} m+\cancel{q}+\cancel{p}+b = n+\cancel{p}+\cancel{q}+a \Rightarrow m+b = n+a \Rightarrow (m,n) \sim (a,b)$

$\Rightarrow \sim$ - rel de ec

$N \times N /_{\sim} = \mathbb{Z}$

Def: $\sim$ - rel de ordine pe A dacă
$\sim$ - reflexivă, antisimetrică, tranz

7) Fie $\mathbb{N}: x \sim y \Leftrightarrow x | y$

$\sim$ - rel de ord?

R: $\forall x \in \mathbb{N}$, $x|x \Rightarrow x \sim x$

AS: $\forall x,y \in \mathbb{N}$ cu $x \sim y$ și $y \sim x \overset{?}{\Rightarrow} x = y$

Dc $x \sim y \Rightarrow x|y \Rightarrow y = k_1 \cdot x$

Dc $y \sim x \Rightarrow y|x \Rightarrow x = k_2 \cdot y$

$\Rightarrow x = k_1 \cdot k_2 \cdot x$, $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$

Caz 1: $x = 0 \Rightarrow x = y = 0$

Caz 2: $x \neq 0 \Rightarrow k_1 \cdot k_2 = 1$, $k_1, k_2 \in N \Rightarrow k_1 = k_2 = 1 \Rightarrow x = y$ ✓

T: $\forall x,y,z \in \mathbb{N}$ cu $x \sim y$ și $y \sim z \overset{?}{\Rightarrow} x \sim z$

Dc $x \sim y \Rightarrow x|y \Rightarrow y = k_1 \cdot x$

Dc $y \sim z \Rightarrow y|z \Rightarrow z = k_2 \cdot y$

$\Rightarrow z = k_1 \cdot k_2 \cdot x$ cu $k_1, k_2 = x \Rightarrow x|z \Rightarrow x \sim z$

S.C.R $= \{(0,n) : n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{(n,0) : n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{(0,0)\}$

$n \in \mathbb{N}$

$D(n) = D_n$ — mult div lui n

$D.P(n)$ = mult div propri $= D(n) \setminus \{1, n\}$

$n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k}$

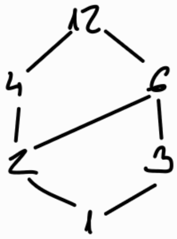
Nr div ai lui $n = (e_1+1)(e_2+1) \ldots (e_k+1)$

8) Desenați Diagrama Hasse pt $(D(m), |)$

a) $m = 12$

b) $m = 8$

a) $D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$



b) $D(8) = \{1, 2, 4, 8\}$

9) Diagrama Hasse pt $(DP(60), |)$

$DP = \{2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30.\}$