



Logică Matematică și Computațională

Anul I, Semestrul II 2025

Laurențiu Leuștean

Pagina web: <https://cs.unibuc.ro/courses/lmc/>



LOGICA PROPOZIȚIONALĂ

Limbaajul logicii propoziționale este bazat pe **propoziții** sau **enunțuri declarative**, despre care se poate argumenta în principiu că sunt **adevărate** sau **false**.

Propoziții declarative

- ▶ Suma numerelor 2 și 4 este 6.
- ▶ Mihai Eminescu a fost un scriitor român.
- ▶ Maria a reacționat violent la acuzațiile lui Ion.
- ▶ Orice număr natural par > 2 este suma a două numere prime. (Conjectura lui Goldbach).
- ▶ Andrei este deștept.
- ▶ Marțienilor le place pizza.

Propoziții care nu sunt declarative

- ▶ Poți să îmi dai, te rog, pâinea?
- ▶ Pleacă!

Considerăm anumite propoziții ca fiind **atomice** și le notăm

p, q, r, \dots sau p_1, p_2, p_3, \dots

Exemple: p =Numărul 2 este par. q =Mâine plouă. r =Sunt obosit.

Pornind de la propozițiile atomice, putem crea propoziții complexe (notate $\varphi, \psi, \chi, \dots$) folosind conectorii logici \neg (negația), \rightarrow (implicația), \vee (disjuncția), \wedge (conjuncția), \leftrightarrow (echivalența).

Exemple:

$\neg p$ = Numărul 2 **nu** este par.

$p \vee q$ = Numărul 2 este par **sau** mâine plouă.

$p \wedge q$ = Numărul 2 este par **și** mâine plouă.

$p \rightarrow q$ = **Dacă** numărul 2 este par, **atunci** mâine plouă.

$p \leftrightarrow q$ = Numărul 2 este par **dacă și numai dacă** mâine plouă.

Putem aplica repetat conectorii pentru a obține propoziții și mai complexe. Pentru a elimina ambiguitățile, folosim parantezele (,).

Exemplu: $\varphi = (p \wedge q) \rightarrow ((\neg r) \vee q)$



Exemplu:

Fie propoziția:

φ = Azi este vineri, deci avem curs de logică.

Considerăm propozițiile atomice

p = Azi este vineri. q = Avem curs de logică.

Atunci $\varphi = p \rightarrow q$. Cine este $\neg\varphi$?

$\neg\varphi = p \wedge (\neg q)$ = Azi este vineri și nu avem curs de logică.



Exemplu:

Fie propoziția:

φ = *Dacă trenul întârzie și nu sunt taxiuri la gară, atunci Ion întârzie la întâlnire.*

Considerăm propozițiile atomice

p = *Trenul întârzie.*

q = *Sunt taxiuri la gară.*

r = *Ion întârzie la întâlnire.*

Atunci $\varphi = (p \wedge (\neg q)) \rightarrow r$.

Presupunem că φ, p sunt adevărate și r este falsă (deci $\neg r$ este adevărată). Ce putem spune despre q ? **q este adevărată.**



Definiția 1.1

Limbajul logicii propoziționale LP este format din:

- ▶ o mulțime numărabilă $V = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ de *variabile*;
 - ▶ conectori logici: \neg (se citește *non*), \rightarrow (se citește *implică*)
 - ▶ paranteze: $(,)$.
- Mulțimea *Sim* a simbolurilor lui LP este

$$Sim := V \cup \{\neg, \rightarrow, (,)\}.$$

- Notăm variabilele cu $v, u, w, v_0, v_1, v_2, \dots$



Definiția 1.2

Mulțimea *Expr* a *expresiilor* lui LP este mulțimea tuturor șirurilor finite de simboluri ale lui LP.

- ▶ Expresia vidă se notează λ .
- ▶ **Lungimea** unei expresii θ este numărul simbolurilor din θ . Sim^n este mulțimea șirurilor de simboluri ale lui LP de lungime n .
- ▶ Prin convenție, $Sim^0 = \{\lambda\}$. Atunci $Expr = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Sim^n$.

Exemple:

$(((((v_7, v_1 \neg \rightarrow (v_2), \neg v_1 v_2, ((v_1 \rightarrow v_2) \rightarrow (\neg v_1)), (\neg(v_1 \rightarrow v_2))).$



Operația de bază pentru expresii este **concatenarea**: dacă $\varphi = \varphi_0 \dots \varphi_{k-1}$ și $\psi = \psi_0 \dots \psi_{l-1}$ sunt expresii, atunci concatenarea lor, notată $\varphi\psi$, este expresia $\varphi_0 \dots \varphi_{k-1}\psi_0 \dots \psi_{l-1}$.

Definiția 1.3

Fie $\theta = \theta_0\theta_1 \dots \theta_{k-1}$ o expresie a lui LP, unde $\theta_i \in \text{Sim}$ pentru orice $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$.

- ▶ Dacă $0 \leq i \leq j \leq k-1$, atunci expresia $\theta_i \dots \theta_j$ se numește (i, j) -**subexpresia** lui θ ;
- ▶ Spunem că o expresie ψ **apare** în θ dacă există $0 \leq i \leq j \leq k-1$ a.î. ψ este (i, j) -subexpresia lui θ .



Definiția formulelor este un exemplu de **definiție inductivă**.

Definiția 1.4

Formulele lui LP sunt expresiile lui LP definite astfel:

- (F0) Orice variabilă propozițională este formulă.
- (F1) Dacă φ este formulă, atunci $(\neg\varphi)$ este formulă.
- (F2) Dacă φ și ψ sunt formule, atunci $(\varphi \rightarrow \psi)$ este formulă.
- (F3) Numai expresiile obținute aplicând regulile (F0), (F1), (F2) sunt formule.

Notății: Mulțimea formulelor se notează **Form**. Notăm formulele cu $\varphi, \psi, \chi, \dots$

- ▶ Orice formulă se obține aplicând regulile (F0), (F1), (F2) de un număr finit de ori.
- ▶ $Form \subseteq Expr$. Formulele sunt expresiile "bine formate".



Exemple:

- ▶ $v_1 \neg \rightarrow (v_2)$, $\neg v_1 v_2$ nu sunt formule.
- ▶ $((v_1 \rightarrow v_2) \rightarrow (\neg v_1))$, $(\neg(v_1 \rightarrow v_2))$ sunt formule.

Citire unică (Unique readability)

Dacă φ este o formulă, atunci **exact** una din următoarele alternative are loc:

- ▶ $\varphi = v$, unde $v \in V$;
- ▶ $\varphi = (\neg\psi)$, unde ψ este formulă;
- ▶ $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$, unde ψ, χ sunt formule.

Mai mult, scrierea lui φ sub una din aceste forme este unică.



Principiul inducției pe formule

Propoziția 1.5 (Principiul inducției pe formule)

Fie P o proprietate. Presupunem că:

- (0) Orice variabilă are proprietatea P .
- (1) Pentru orice formulă φ , dacă φ are proprietatea P , atunci și $(\neg\varphi)$ are proprietatea P .
- (2) Pentru orice formule φ, ψ , dacă φ și ψ au proprietatea P , atunci $(\varphi \rightarrow \psi)$ are proprietatea P .

Atunci orice formulă φ are proprietatea P .

Dem.: Pentru orice formulă φ , notăm cu $c(\varphi)$ numărul conectorilor logici care apar în φ . Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ definim proprietatea $Q(n)$ astfel:

$Q(n)$ e adevărată ddacă orice formulă φ cu $c(\varphi) \leq n$ are proprietatea P .

Demonstrăm prin inducție că $Q(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$.



Principiul inducției pe formule

Pasul inițial. $Q(0)$ este adevărată, deoarece pentru orice formulă φ , $c(\varphi) \leq 0 \iff c(\varphi) = 0 \iff \varphi = v$, cu $v \in V$ și, conform ipotezei (0), v are proprietatea **P**.

Ipoteza de inducție. Fie $n \in \mathbb{N}$. Presupunem că $Q(n)$ este adevărată.

Pasul de inducție. Demonstrăm că $Q(n+1)$ este adevărată. Fie φ o formulă cu $c(\varphi) \leq n+1$. Avem trei cazuri:

- ▶ $\varphi = v \in V$. Atunci φ are proprietatea **P**, conform (0).
- ▶ $\varphi = (\neg\psi)$, unde ψ este formulă. Atunci $c(\psi) = c(\varphi) - 1 \leq n$, deci, conform ipotezei de inducție, ψ are proprietatea **P**.
Aplicînd ipoteza (1), rezultă că φ are proprietatea **P**.
- ▶ $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$, unde ψ, χ sunt formule. Atunci $c(\psi), c(\chi) \leq c(\varphi) - 1 \leq n$, deci, conform ipotezei de inducție, ψ și χ au proprietatea **P**. Rezultă din (2) că φ are proprietatea **P**.

Așadar, $Q(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Deoarece pentru orice formulă φ există $N \in \mathbb{N}$ a.î. $c(\varphi) \leq N$, rezultă că orice formulă φ are proprietatea **P**. □



Principiul inducției pe formule

Propoziția 1.6 (Principiul inducției pe formule - variantă alternativă)

Fie Γ o mulțime de formule care are următoarele proprietăți:

- ▶ $V \subseteq \Gamma$;
- ▶ Γ este închisă la \neg , adică $\varphi \in \Gamma$ implică $(\neg\varphi) \in \Gamma$;
- ▶ Γ este închisă la \rightarrow , adică $\varphi, \psi \in \Gamma$ implică $(\varphi \rightarrow \psi) \in \Gamma$.

Atunci $\Gamma = \text{Form}$.

Dem.: Definim următoarea proprietate **P**: pentru orice formulă φ ,
 φ are proprietatea **P** dacă $\varphi \in \Gamma$.

Conform definiției lui Γ , rezultă că sunt satisfăcute ipotezele (0), (1), (2) din Principiul inducției pe formule (Propoziția 1.5), deci îl putem aplica pentru a obține că orice formulă are proprietatea **P**, deci orice formulă φ este în Γ . Așadar, $\Gamma = \text{Form}$. □



Definiția 1.7

Fie φ o formulă a lui LP. O **subformulă** a lui φ este orice formulă ψ care apare în φ .

Notăție: Mulțimea subformulelor lui φ se notează $\text{SubForm}(\varphi)$.

Exemplu:

Fie $\varphi = ((v_1 \rightarrow v_2) \rightarrow (\neg v_1))$. Atunci

$$\text{SubForm}(\varphi) = \{v_1, v_2, (v_1 \rightarrow v_2), (\neg v_1), \varphi\}.$$

Conectorii derivați \vee (se citește **sau**), \wedge (se citește **și**), \leftrightarrow (se citește **dacă și numai dacă**) sunt introduși prin abrevierile:

$$(\varphi \vee \psi) \quad := \quad ((\neg\varphi) \rightarrow \psi)$$

$$(\varphi \wedge \psi) \quad := \quad (\neg(\varphi \rightarrow (\neg\psi)))$$

$$(\varphi \leftrightarrow \psi) \quad := \quad ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)).$$

Convenții

- ▶ În practică, renunțăm la parantezele exterioare, le punem numai atunci când sunt necesare. Astfel, scriem $\neg\varphi$, $\varphi \rightarrow \psi$, dar scriem $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \chi$.
- ▶ Pentru a mai reduce din folosirea parantezelor, presupunem că
 - \neg are precedența mai mare decât ceilalți conectori;
 - \wedge, \vee au precedență mai mare decât $\rightarrow, \leftrightarrow$.

Prin urmare, formula $((\varphi \rightarrow (\psi \vee \chi)) \wedge ((\neg\psi) \leftrightarrow (\psi \vee \chi)))$ va fi scrisă $(\varphi \rightarrow \psi \vee \chi) \wedge (\neg\psi \leftrightarrow \psi \vee \chi)$.



Principiul recursiei pe formule

Propoziția 1.8 (Principiul recursiei pe formule)

Fie A o mulțime și funcțiile

$$G_0 : V \rightarrow A, \quad G_{\neg} : A \rightarrow A, \quad G_{\rightarrow} : A \times A \rightarrow A.$$

Atunci există o unică funcție

$$F : \text{Form} \rightarrow A$$

care satisface următoarele proprietăți:

(R0) $F(v) = G_0(v)$ pentru orice variabilă $v \in V$.

(R1) $F(\neg\varphi) = G_{\neg}(F(\varphi))$ pentru orice formulă φ .

(R2) $F(\varphi \rightarrow \psi) = G_{\rightarrow}(F(\varphi), F(\psi))$ pentru orice formule φ, ψ .

Principiul recursiei pe formule se folosește pentru a da **definiții recursive** ale diverselor funcții asociate formulelor.

Exemplu:

Fie $c : \text{Form} \rightarrow \mathbb{N}$ definită astfel: pentru orice formulă φ ,
 $c(\varphi)$ este numărul conectorilor logici care apar în φ .

O definiție recursivă a lui c este următoarea:

$$\begin{aligned}c(v) &= 0 && \text{pentru orice variabilă } v \\c(\neg\varphi) &= c(\varphi) + 1 && \text{pentru orice formulă } \varphi \\c(\varphi \rightarrow \psi) &= c(\varphi) + c(\psi) + 1 && \text{pentru orice formule } \varphi, \psi.\end{aligned}$$

În acest caz, $A = \mathbb{N}$, $G_0 : V \rightarrow A$, $G_0(v) = 0$,

$$\begin{aligned}G_{\neg} : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N}, && G_{\neg}(n) = n + 1, \\G_{\rightarrow} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N}, && G_{\rightarrow}(m, n) = m + n + 1.\end{aligned}$$



Notăție:

Pentru orice formulă φ , notăm cu $Var(\varphi)$ mulțimea variabilelor care apar în φ .

Observație

Mulțimea $Var(\varphi)$ poate fi definită și recursiv.

Dem.: Exercițiu.



SEMANTICA LP

Valori de adevăr

Folosim următoarele notații pentru cele două valori de adevăr:

1 pentru **adevărat** și **0** pentru **fals**. Prin urmare, mulțimea valorilor de adevăr este $\{0, 1\}$.

Definim următoarele operații pe $\{0, 1\}$ folosind **tabelele de adevăr**.

$$\neg : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\},$$

p	$\neg p$
0	1
1	0

Se observă că $\neg p = 1 \iff p = 0$.

$$\rightarrow : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\},$$

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Se observă că $p \rightarrow q = 1 \iff p \leq q$.



Operațiile $\vee : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$, $\wedge : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ și $\leftrightarrow : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ se definesc astfel:

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Observație

Pentru orice $p, q \in \{0, 1\}$, $p \vee q = \neg p \rightarrow q$, $p \wedge q = \neg(p \rightarrow \neg q)$ și $p \leftrightarrow q = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

Dem.: Exercițiu.