Lezione 10 – Generatori di spazi

Combinazioni lineari

sia V uno spazio vettoriale in $\mathbb{K}$, siano $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \in V$, siano $k_i \in \mathbb{K}$

$\underline{w} = k_1 \underline{v}_1 + k_2 \underline{v}_2 + \dots + k_n \underline{v}_n$ si dice combinazione lineare di $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$
una combinazione lineare $\underline{w}$ si dice:

- nulla se $\underline{w} = 0$
- banale se $k_i = 0 \ \forall i$ (banale $\Rightarrow$ nulla)

Sottospazi generati e sistemi di generatori

sia V un $\mathbb{K}$-spazio, sia $S \subseteq V$ allora:

- si dice sottospazio di V generato da S e si scrive $\langle S \rangle$ tutti e soli i vettori di V che sono comb. lineare degli $s_i \in S$
- S si dice sistema di generatori di $\langle S \rangle$

con $S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$, $\langle S \rangle = \{\underline{w} \in V : \exists k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{K} : \underline{w} = \sum_{i=0}^{n} \underline{v}_i k_i\}$

Spazi finitamente generati

uno spazio si dice finitamente generato se ammette un sistema di generatori finito

Somma sottospazi generati

siano $U = \langle \underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n \rangle$ e $W = \langle \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m \rangle$ sottospazi di V, allora

$$U + W = \langle \underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n, \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m \rangle$$

Teorema: lo spazio generato è un sottospazio

enunciato

sia V un $\mathbb{K}$-spazio, sia $\underline{v} \in V$ allora $\langle v \rangle$ è un sottospazio di V

dimostrazione

si ricorda $\langle v \rangle = \{ \underline{w} \in V : \exists k \in \mathbb{K} : \underline{w} = k\underline{v} \}$

1. $\underline{0}_V \in \langle v \rangle$

sia $k = 0_{\mathbb{K}}$ allora $\underline{w} = \underline{0}_{\mathbb{K}} \underline{v} = \underline{0}_V$ poichè per def. di spazio $0_{\mathbb{K}} \underline{v} = \underline{0}_V$

2. $\forall a, b \in \langle v \rangle \quad a + b \in \langle v \rangle$

$a = k\underline{v}$, $b = k'\underline{v} \Rightarrow a + b = k\underline{v} + k'\underline{v} = (k + k')\underline{v} \in \langle v \rangle$ ($\mathbb{K}$ è campo $\Rightarrow$ chiuso per $+$)

3. $\forall \underline{w} \in \langle v \rangle, \forall k \in \mathbb{K} \quad k\underline{w} \in \langle v \rangle$

$\underline{w} = k\underline{v}$, $\underline{w}' = k'\underline{w} = kk'\underline{w} \in \langle v \rangle$ ($\mathbb{K}$ è campo $\Rightarrow$ chiuso per $\cdot$)

Criterio sistemi di generatori

dato un $\mathbb{K}$-spazio V, questo è generato da $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\} \iff A\underline{x} = \underline{b}$ con $A = [\underline{v}_1 | \dots | \underline{v}_n]$ è risolubile $\forall \underline{b} \in V$

Dipendenza e indipendenza lineare

si dice che n vettori $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ sono:

- linearmente indipendenti se l'unica comb. nulla è quella banale
- linearmente dipendenti altrimenti

Criterio indipendenza lineare

n vettori $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in \mathbb{R}^n$ sono linearmente indipendenti $\Leftrightarrow$ $rk([\underline{v}_1|\dots|\underline{v}_n]) = n$

dimostrazione

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in \mathbb{R}^n$ sono lin. ind. $\Leftrightarrow$ $k_1\underline{v}_1 + \dots + k_n\underline{v}_n = \underline{0}_{\mathbb{R}^n}$ con $k_1 = \dots = k_n = 0$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $A\underline{x} = \underline{0}$ con $A = [\underline{v}_1|\dots|\underline{v}_n]$ ha una e una sola soluzione

Basi:

sia V un $\mathbb{K}$-spazio, $S \subseteq V$, allora S si dice base di V se:

- S è un sistema di generatori di V
- i vettori di S sono linearmente indipendenti

Teorema di esistenza e unicità della comb. lineare dei vettori generati da una base

enunciato

sia $S=\{\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_n\}$ una base di V, allora $\forall \underline{v}\in V \ \exists! k_1,\dots,k_n \in \mathbb{K} : \underline{v}=\sum_{i=1}^{n} k_i \underline{v}_i$

dimostrazione

- esistenza

$\{\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_n\}$ sono generatori $\forall \underline{v}\in V$ quindi per definizione $\exists k_1,\dots,k_n : \underline{v}=\sum_{i=1}^{n} k_i \underline{v}_i$

- unicità

per assurdo $\exists \underline{w}\in V : \underline{w}=s_1\underline{v}_1+\dots+s_n\underline{v}_n=t_1\underline{v}_1+\dots+t_n\underline{v}_n$, con $s_i\neq t_i$

1. $s_1\underline{v}_1+\dots+s_n\underline{v}_n=t_1\underline{v}_1+\dots+t_2\underline{v}_n$

$\Downarrow$

2. $(s_1-t_1)\underline{v}_1+\dots+(s_n-t_n)\underline{v}_n=\underline{0}$ $(*)$

$\Downarrow$

3. $s_i\neq t_i \Rightarrow (s_i-t_i)\neq 0 \Rightarrow$ la $(*)$ è una comb. lineare nulla non banale

$\Downarrow$

4. $\{\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_n\}$ non sono lin. ind. $\Rightarrow \perp$

Completamento della base

sia V uno spazio finitamente generato, dato $r=\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_r\}$ $\underline{v}_i\in V$ con $\underline{v}_i$ linearmente indipendenti allora vale una delle due:

- r è una base quindi $\{\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_n\}$ è un sistema di generatori
- r non è una base quindi $\exists \underline{v}_{r+1},\dots,\underline{v}_n : r\cup\{\underline{v}_{r+1},\dots,\underline{v}_n\}$ è una base

Estrazione di una base

sia V uno spazio, dato $K = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k\}$ $\underline{v}_i \in V$ sistema di generatori allora vale una delle due:

- K è una base quindi $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k\}$ sono linearmente indipendenti
- K non è una base quindi $\exists Y \subset K : Y$ è una base, con $|Y| < |K|$

si osserva che se $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ sono linearmente indipendenti e $\dim(V) = n$ allora $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ è una base per V

Basi canoniche

spazio $\mathbb{R}^n$

si dice base canonica di $\mathbb{R}^n$ $S = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n\}$ con $\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

Spazio $Mat_{n \times m}(\mathbb{K})$

si definisce una matrice $E_{ij} \in Mat_{n \times m}(\mathbb{K})$ come

$$E_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{all'entrata } e_{ij} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

l'insieme $\{E_{ij} : i \in \{1, 2, \dots, n\}, j \in \{1, 2, \dots, m\}\}$ si dice base canonica di $Mat_{n \times m}(\mathbb{K})$

Spazio $\mathbb{K}[x]_{\leq d}$

sia $p_i(x) = x^{i-1} \in \mathbb{K}[x]_{\leq d}$, $\{p_1(x), p_2(x), \dots, p_{d+1}(x)\}$ si dice base canonica di $\mathbb{K}[x]_{\leq d}$

spazio $\mathbb{K}[x]$

sia $p_i(x) = x^{i-1} \in \mathbb{K}[x]$ allora $Q(x) = \sum_{i=0}^{deg\,a} q_i\, x^i = \sum_{i=0}^{deg\,a} q_i\, p_{i-1}(x) \quad \forall i \in \mathbb{Z}$

l'insieme infinito $\{p_1(x), p_2(x), \dots, p_i(x), p_{i+1}(x), \dots\}$ è base canonica di $\mathbb{K}[x]$

Teorema della base

enunciato

sia V uno spazio, sia S una base per V con n elementi, allora tutte le basi di V hanno n elementi

Dimensione

si dice dimensione di uno spazio V e si scrive $\dim(V)$ il numero di elementi della base

Teorema: dimensione del sottospazio

ipotesi: sia V uno spazio finitamente generato, sia U sottospazio di V

tesi

- $\dim(U) \leq \dim(V)$
- $\dim(U) = \dim(V) \Rightarrow U = V$

Rango di una matrice (2° def.)

sia $M \in Mat_{n \times m}(\mathbb{K})$, si chiama rango di M e si scrive $rk(M)$ la dimensione dello spazio generato dalle sue colonne/righe

si osserva $rk(A) = rk(A^T)$

Teorema di invarianza del rango per matrici Gauss-equivalenti

enunciato

sia A una matrice, $\tilde{A}$ la sua forma Gaussiana, allora $rk(A) = rk(\tilde{A})$

Teorema: Soluzioni del sistema omogeneo formano un sottospazio di $\mathbb{R}^n$

enunciato

sia $A\underline{x} = 0$ un sistema omogeneo in n incognite allora $Sol(A|0)$ è sottospazio di $\mathbb{R}^n$

dimostrazione

dati $v, w \in W$ soluzioni del sistema si verificano:

1. $v + w \in W$

$A(v+w) = Av + Aw = 0 + 0 = 0$

2. $kv \in W \quad \forall k \in \mathbb{K}$

$A(kv) = k(Av) = k0 = 0$

Formula di Grassman

sia V uno spazio, siano U e W due sottospazi di V finitamente generati

allora vale $\dim(U) + \dim(W) = \dim(U \cap W) + \dim(U + W)$