Lezione 9

Successioni numeriche

sia $a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

a_n si dice successione numerica ed è una funzione in $\mathbb{N}$

definizioni:

- a_n si dice limitata se $\exists M \in \mathbb{R} \geq 0 : |a_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- a_n si dice monotona st. crescente (decrescente) se
  $a_n < a_{n+1} \qquad (a_n > a_{n+1}) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$
- a_n si dice monotona crescente (decrescente) se
  $a_n \leq a_{n+1} \qquad (a_n \geq a_{n+1}) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

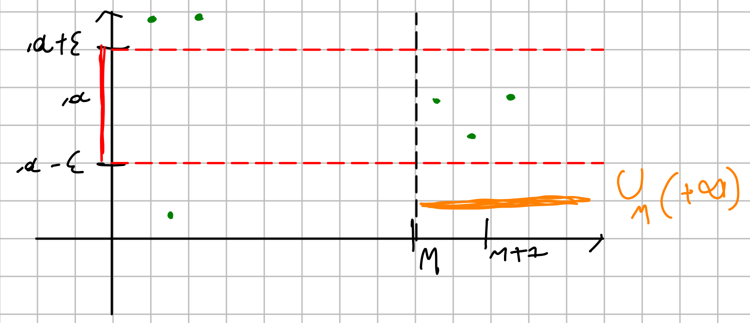
Limite di una successione

sia a_n una successione, $a \in \mathbb{R}$ si dice limite di a_n se

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists M \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon \ \forall n > M$ ovvero $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$

$\forall V_\varepsilon(a) \ \exists U_M(+\infty) : \forall n \in U_M(+\infty) \Rightarrow a_n \in V_\varepsilon(a)$

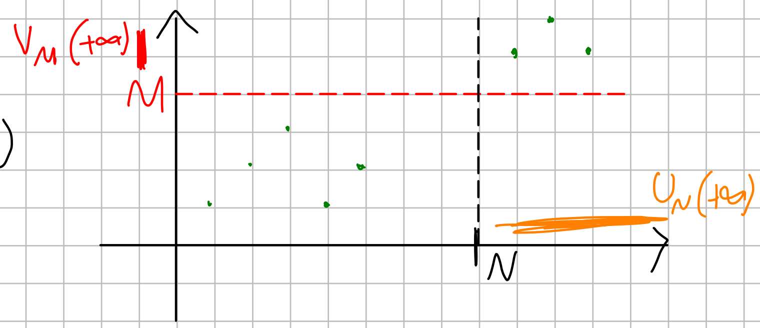
si indica con $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a$ oppure $a_n \longrightarrow a$



limite a $\pm\infty$

a_n ha limite $a = \pm$ si scrive

$\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ se $\forall M > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : a_n > M \ \forall n > N$



$\forall V_M(+\infty) \ \exists U_N(+\infty) : \forall n \in V_M(+\infty) \Rightarrow a_n \in U_M(+\infty)$

$\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = -\infty$ se $\forall M > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : a_n < -M \ \forall n > N$

$\forall V_M(-\infty) \ \exists U_N(-\infty) : \forall n \in V_M(-\infty) \Rightarrow a_n \in U_M(-\infty)$

Successioni divergenti e convergenti

definizioni:

i) se $\lim_{n \to +\infty} a_n = a$, a_n si dice convergente

ii) se $\lim_{n \to +\infty} a_n = \pm\infty$, a_n si dice divergente

a) se a_n è divergente o convergente si dice regolare

b) se a_n non è regolare si dice irregolare o oscillante

Limiti per eccesso e difetto

definizione:

si dice che a_n converge per eccesso (difetto) e si scrive $\lim_{n \to +\infty} a_n = a^+ \; (a^-)$ se

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists M : \forall n > M$ si ha $a < a_n < a + \varepsilon \quad (a_n \in U_\varepsilon^+(a))$

$$\left(a - \varepsilon < a_n < a \quad (a_n \in U_\varepsilon^-(a)) \right)$$

Teorema 1: Unicità del limite di successioni convergenti

ipotesi: sia a_n una successione convergente

tesi: a_n ammette un unico limite su $\mathbb{R}$

Teorema 2: Unicità del limite di successioni divergenti

ipotesi: sia a_n una successione

tesi:

i) se a_n è convergente non può essere divergente a $\pm\infty$

ii) se a_n è divergente a $\pm\infty$ non può essere convergente

iii) se a_n è divergente a $+\infty$ non può essere divergente a $-\infty$

conseguenza teoremi 1 e 2: se una successione è regolare allora il suo limite è unico

Teorema 3: serie convergenti limitate

ipotesi: sia a_n una successione convergente

tesi: a_n è limitata

Teorema 4: serie divergenti illimitate

ipotesi: sia a_n una successione divergente

tesi:

- se a_n diverge a $+\infty$ è illimitata superiormente
- se a_n diverge a $-\infty$ è illimitata inferiormente

Successioni infinitesime e infinite

definizioni:

- a_n si dice infinitesima se $a_n \longrightarrow 0$
- a_n si dice infinita se $a_n \rightarrow \pm\infty$

Teorema 5

enunciato: $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} |a_n| = 0$

Teorema 6: successioni monotone regolari

ipotesi: sia a_n una successione monotona crescente/decrescente

tesi:

i) se a_n è monotona crescente allora $\exists \lim_{n \to +\infty} = \sup a_n = \begin{cases} \alpha \in \mathbb{R} \\ +\infty \end{cases}$

ii) se a_n è monotona decrescente allora $\exists \lim_{n \to +\infty} = \inf a_n = \begin{cases} \alpha \in \mathbb{R} \\ -\infty \end{cases}$

Teorema 7: confronto (carabinieri)

ipotesi:

siano a_n, b_n, c_n tre successioni tali che

$a_n \le b_n \le c_n$ def. e $\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} c_n = l$

tesi:

$\lim_{n \to +\infty} b_n = l$

Teorema 8: permanenza del segno

ipotesi: sia a_n una successione convergente ad $a \in \mathbb{R}$:

tesi:

i) se $a_n \to a > 0$ (o $+\infty$), allora a_n è def. strettamente positiva

$\exists n_0 : a_n > n_0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

ii) se $a_n \to a < 0$ (o $-\infty$), allora a_n è def. strettamente negativa

$\exists n_0 : a_n < n_0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

Teorema 9

ipotesi: siano a_n e b_n due successioni tali che $a_n \geq b_n$ def.

tesi: $\lim_{n \to +\infty} a_n \geq \lim_{n \to +\infty} b_n$

Algebra dei limiti

- $[a+b] \to a+b$
- $[ab] \to ab$
- $\left[\frac{a}{b}\right] \to \frac{a}{b}$ con $a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

  $b \in b_n \neq 0$ def.
- $[a \cdot (\pm\infty)] \to \pm\infty$ con $a \in \mathbb{R},\ a > 0$
- $[a \cdot (\pm\infty)] \to \mp\infty$ con $a \in \mathbb{R},\ a < 0$
- $[a \pm \infty] \to \pm\infty$
- $[\pm\infty \pm\infty] \to \pm\infty$
- $[\pm\infty \cdot (-\infty)] \to -\infty$
- $\left[\frac{a}{\pm\infty}\right] \to 0$ con $a \in \mathbb{R}$
- $\left[\frac{\pm\infty}{0^+}\right] \to \pm\infty$
- $\left[\frac{\pm\infty}{0^-}\right] \to \mp\infty$
- $\left[\frac{a}{0^\pm}\right] \to \pm\infty$, con $a \in \mathbb{R},\ a > 0$
- $\left[\frac{a}{0^\pm}\right] \to \mp\infty$ con $a \in \mathbb{R},\ a < 0$
- $\left[\frac{\pm\infty}{b}\right] \to \pm\infty$ con $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b > 0$
- $\left[\frac{\pm\infty}{b}\right] \to \mp\infty$ con $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b < 0$

Forme di indecisione dei limiti

le forme di indecisione non hanno soluzione unica e vanno valutate caso per caso trasformando la successione

1) $[+\infty - \infty]$ $\quad a_n \to +\infty \quad b_n \to -\infty \quad a_n + b_n \to ?$

2) $[0 \cdot \infty]$ $\quad a_n \to 0 \quad b_n \to \pm\infty \quad a_n b_n \to ?$

3) $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ $\quad a_n \to \infty \quad b_n \to \infty \quad \frac{a_n}{b_n} \to ?$

4) $\left[\frac{0}{0}\right]$ $\quad a_n \to 0 \quad b_n \to 0 \quad \frac{a_n}{b_n} \to ?$

5) $[1^\infty]$ $\quad a_n \to 1 \quad b_n \to \pm\infty \quad a_n^{b_n} \to ?$

Limiti fondamentali

1) se $a_n \to a > 0$ e $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$

$a_n^\alpha \to a^\alpha$

2) se $a_n \to 0^+$ e $\alpha > 0, \alpha \neq 1$

$a_n^{\alpha} \to 0^+$

3) $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \to +\infty} a^{\frac{1}{n}}$ $a > 0$

$a_n \to 1$

4) $$\lim_{n \to +\infty} n^{\alpha} = \begin{cases} +\infty & \alpha > 0 \\ 1 & \alpha = 0 \\ 0^+ & \alpha < 0 \end{cases}$$

5) $$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \to +\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$$

6) $$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n^b} = \lim_{n \to +\infty} n^{\frac{b}{n}} = 1 \quad \forall b \in \mathbb{R}$$

7) $$\lim_{n \to +\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & a > 1 \\ 1 & a = 1 \\ 0 & -1 < a < 1 \\ \text{irr.} & a \leq -1 \end{cases}$$

Criteri del rapporto e della radice ennesima di successioni

criterio del rapporto

siano a_n una successione def. positiva e $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ una successione regolare

$$\text{se } \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} l > 1, \text{ allora } a_n \to +\infty \\ 0 \leq l < 1, \text{ allora } a_n \to 0^+ \end{cases}$$

criterio della radice n-esima

siano a_n una successione def. positiva, $\sqrt[n]{a_n}$ una successione regolare

$$\text{se } \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} l > 1, \text{ allora } a_n \to +\infty \\ 0 \leq l < 1, \text{ allora } a_n \to 0^+ \end{cases}$$

Numero di Nepero

siano $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ e $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

osserviamo che:

i) $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ii) $a_{n-1} \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1}$ (a_n è monotona crescente, b_n è monotona decrescente

iii) a_n è sup. lim., b_n è inf. lim.

iv) $\sup a_n = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \inf b_n$

a_n è monotona crescente $\Rightarrow a_n$ è sup. lim. $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = \sup a_n = a$

b_n è monotona decrescente $\Rightarrow b_n$ è inf. lim $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} b_n = \inf b_n = b$

proviamo che $a = b$

poichè $a_n \leq b_n \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n \leq \lim_{n\to+\infty} b_n$ per assurdo $a \neq b \Rightarrow a < b \Rightarrow b - a > 0$ quindi $a_n - b_n = 0$

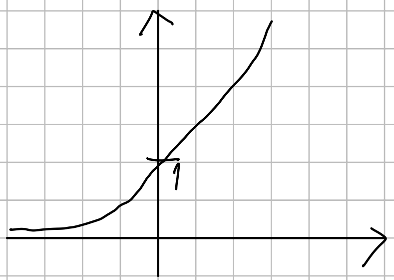
$$a_n - b_n = \underset{\downarrow \atop 0}{\frac{1}{n}} \underset{\downarrow \atop a}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to 0$$ ma $b - a > 0$ e $b_n - a_n \to 0$ assurdo

$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e^-$ $\quad b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \to e^+$ $\quad e = 2,718$ approssimato con diversi valori di n

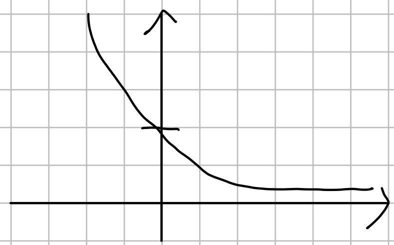
Funzione esponenziale

$f(x) = a^x$

$a > 1$



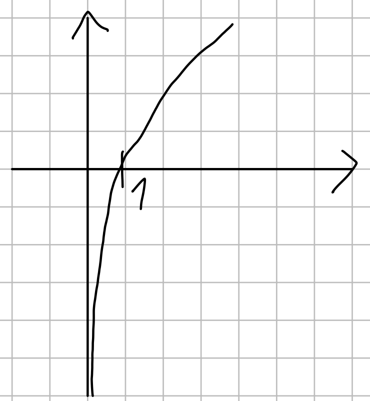
$0 < a < 1$



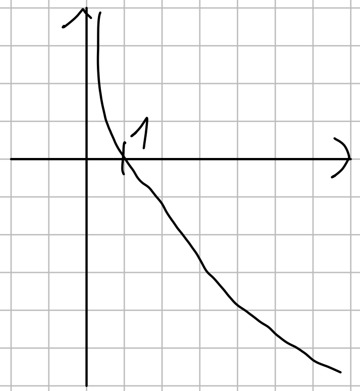
Funzione logaritmo

$f(x) = \log_a x \quad a>0, a\neq 1, x>0$ inversa esponenziale

$a>1$



$0<a<1$



Proprietà logaritmi

1) $a^{\log_a x} = x \quad \forall x>0$

2) $\log_a a^x = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

3) $\log_a x_1 x_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2 \quad \forall x_1, x_2 > 0$

4) $\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2 \quad \forall x_1, x_2 > 0$

5) $\log_a x^q = q \log_a x \quad \forall x>0$

6) $\log_a x = -\log_{\frac{1}{a}} x \quad \forall x>0$

7) $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a} \quad \forall x>0 \,;\, a, b \neq 1 \,;\, a, b>0$

Confronto tra infiniti

siano a_n e b_n due successioni infinite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} \pm\infty & a_n \text{ è infinito di ordine superiore rispetto a } b_n \\ 0 & b_n \text{ è infinito di ordine superiore rispetto a } a_n \\ l \in \mathbb{R} \neq 0 & a_n \text{ e } b_n \text{ sono infinite dello stesso ordine} \\ \nexists \lim & a_n \text{ e } b_n \text{ non sono confrontabili} \end{cases}$$

tra a^n e b^n è di ordine superiore chi ha base maggiore

tra n^a e n^b è di ordine superiore chi ha esponente maggiore

$\log_a n$ e $\log_b n$ sono dello stesso ordine

Confronto tra infinitesimi

siano a_n e b_n due successioni infinitesime

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} \pm\infty & b_n \text{ è infinitesimo di ordine superiore rispetto a } a_n \\ 0 & a_n \text{ è infinitesimo di ordine superiore rispetto a } b_n \\ l \in \mathbb{R} \neq 0 & a_n \text{ e } b_n \text{ sono infinitesimi dello stesso ordine} \\ \nexists \lim & a_n \text{ e } b_n \text{ non sono confrontabili} \end{cases}$$

Simboli di Landau

o "o piccolo"

dati a_n e b_n def. non nulli si dice che $a_n = o(b_n)$ se $\frac{a_n}{b_n} \to 0$

Proprietà di o

1) $\frac{o(a_n)}{a_n} \to a_n$

2) $a_n = o(1) \Leftrightarrow a_n$ è infinitesimo

3) se a_n e b_n sono infiniti e a_n è infinito di ordine superiore, allora $a_n = o(b_n)$

4) i) $\lim_{n\to+\infty} (a_n + o(a_n)) = \lim_{n\to+\infty} a_n \left(1 + \frac{o(a_n)}{a_n}\right) = \lim_{n\to+\infty} a_n$

ii) $\lim_{n\to+\infty} \left[(a_n + o(a_n))(b_n + o(b_n)) \right] = \lim_{n\to+\infty} a_n b_n$

iii) $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n + o(a_n)}{b_n + o(b_n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}$

5) $c \cdot o(a_n) = o(a_n)$, con $c \neq 0$

6) i) $o(a_n) \cdot o(b_n) = o(a_n \cdot b_n)$

ii) $a_n\, o(b_n) = o(a_n b_n)$

7) $\lim_{n\to+\infty} a_n = l \in \mathbb{R} \iff a_n = l + o(1)$

se una successione converge questa è pari al suo limite + una successione infinitesima

8) $o(a_n) \pm o(a_n) = o(a_n)$

9) se $a_n = o(b_n)$ allora $o(a_n) + o(b_n) = o(b_n)$

limiti notevoli e sviluppi al primo ordine

sia ε_n infinitesima

1) $\dfrac{\operatorname{sen} \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \to 1$ $\qquad \operatorname{sen} \varepsilon_n = \varepsilon_n + o(\varepsilon_n)$

2) $\dfrac{\tan \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \to 1$ $\qquad \tan \varepsilon_n = \varepsilon_n + o(\varepsilon_n)$

3) $\dfrac{\cos \varepsilon_n - 1}{\varepsilon_n^2} \to -\dfrac{1}{2}$ $\qquad \cos \varepsilon_n = -\dfrac{1}{2}\varepsilon_n^2 + 1 + o(\varepsilon_n^2)$

4) $\dfrac{\arctan \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \to 1$ $\qquad \arctan \varepsilon_n = \varepsilon_n + o(\varepsilon_n)$

5) $\dfrac{\log(\varepsilon_n + 1)}{\varepsilon_n} \to 1$ $\qquad \log(\varepsilon_n + 1) = \varepsilon_n + o(\varepsilon_n)$

6) $\frac{e^{\varepsilon_n}-1}{\varepsilon_n} \to 1 \qquad e^{\varepsilon_n} = \varepsilon_n + 1 + o(\varepsilon_n)$

7) $\frac{a^{\varepsilon_n}-1}{\varepsilon_n} \to \log a \qquad a^{\varepsilon_n} = \varepsilon_n \log a + 1 + o(\varepsilon_n)$

8) $\frac{(1+\varepsilon_n)^{\alpha}-1}{\varepsilon_n} \to \alpha \qquad (1+\varepsilon_n)^{\alpha} = \varepsilon_n \alpha + 1 + o(\varepsilon_n)$

$\sim$ asintotico

a_n si dice asintotica di b_n e si indica con $a_n \sim b_n$ se $\frac{a_n}{b_n} \to 1$

proprietà di $\sim$

1) se $a_n \sim \alpha_n$, $b_n \sim \beta_n$ e $c_n \sim \gamma_n$ allora $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n b_n}{c_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n \beta_n}{\gamma_n}$ NO SOMME

3° simbolo di Landau "O grande"

$a_n = O(b_n)$ se $\exists C > 0 : |a_n| \le C|b_n|$

4° simbolo di Landau "Ω grande"

$a_n = \Omega(b_n)$ se $\exists c > 0 : |a_n| \ge c|b_n|$

5° Simbolo di Landau

$a_n = \Theta(b_n)$ se $\exists C, c > 0 : c|b_n| \leq |a_n| \leq C|b_n|$

Teorema relazione simboli di Landau e limiti

ipotesi: siano a_n e b_n due successioni e sia $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell$

tesi:

- $\ell < +\infty \Rightarrow a_n = O(b_n)$
- $\ell > 0 \Rightarrow a_n = \Omega(b_n)$
- $0 < \ell < +\infty \Rightarrow a_n = \Theta(b_n)$