Lezione 5

Insieme $\mathbb{R}^n$

sia $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$, si definisce $\mathbb{R}^n$ l'insieme di n-uple reali

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R} \ \forall i = 1, 2, \dots, n \right\}$$

si indica con $\underline{x}$ l'elemento $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ e viene chiamato vettore

Somma su $\mathbb{R}^n$

la somma su $\mathbb{R}^n$ è definita come $+_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} +_{\mathbb{R}^n} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

$(\mathbb{R}^n, +_{\mathbb{R}^n})$ è un gruppo abeliano

Matrici

definizione

una matrice è una collezione di m vettori in $\mathbb{R}^n$ e si può annotare con

$$A = [\alpha_{(1)} | \alpha_2 | \dots | \alpha_{(m)}]$$ dove $\alpha_{(i)} \in \mathbb{R}^n$ è la colonna i

insieme di matrici

l'insieme delle matrici con n righe e m colonne è

$$Mat_{n \times m}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \dots & \alpha_{2m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nm} \end{bmatrix} : \alpha_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

α_{ij} è chiamato entrata della matrice a riga i e colonna j

$M = [m_{ij}]$ indica una matrice le cui entrate sono m_{11}, m_{12}, etc...

Tipi di matrici

una matrice si dice:

- quadrata se ha lo stesso numero di righe e colonne ($Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$)
- diagonale se è quadrata e $a_{ij}=0 \ \forall i\neq j$
- triangolare inferiore se $a_{ij}=0 \quad \forall i<j$
- triangolare superiore se $a_{ij}=0 \quad \forall i>j$

Matrice trasposta, simmetrica e antisimmetrica

date le matrici $A\in Mat_{n\times m}(\mathbb{R})$, $A=[a_{ij}]$ e $B\in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B=[b_{ij}]$

B si dice trasposta di A se $a_{ij}=b_{ji}$ e si scrive $A^T=B$

inoltre una matrice quadrata $A\in Mat_{n\times n}$ si dice:

- simmetrica se $a_{ij}=a_{ji}$ cioè $A^T=A$
- antisimmetrica se $a_{ij}=-a_{ij}$ cioè $A^T=-A$

Somma di matrici

su $Mat_{n \times m}$ è definita la somma $+ : Mat_{n\times m} \times Mat_{n\times m} \longrightarrow Mat_{n\times m}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1m}+b_{1m} \\ a_{21}+b_{21} & \dots & a_{2m}+b_{2m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & \dots & a_{nm}+b_{nm} \end{bmatrix}$$

se $A, B, C \in Mat_{n\times n}$

$A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, $C = [c_{ij}]$

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

si osserva che si sommano solo matrici con le stesse dimensioni

$(Mat_{n\times m}, +)$ è un gruppo abeliano

Prodotto tra matrici

sia $A \in Mat_{n\times m}$ e $B \in Mat_{m\times h}$ allora si definisce $A \cdot B \in Mat_{n\times h} = [c_{ij}]$ come

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{jk}$$

si osserva:

- $(Mat_{n\times m}, \cdot)$ è un monoide non commutativo
- $(Mat_{n\times m}, +, \cdot)$ è un anello

Matrice invertibile

sia $A \in Mat_{n \times n}$ una matrice quadrata, si dice invertibile se

$\exists B \in Mat_{n \times n} : A \cdot B = B \cdot A = I$, B si dice inversa di A e si scrive $A^{-1} = B$

l'insieme delle matrici quadrate che ammettono inversa si scrivono

$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in Mat_{n \times n} : \exists A^{-1}\}$

si osserva che $A \in GL(n, \mathbb{R}) \Longrightarrow A^{-1} \in GL(n, \mathbb{R})$ e $(A^{-1})^{-1} = A$

Traccia di una matrice

sia $n \in \mathbb{N}$, $C \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K})$, si definisce traccia di C il numero

$$tr(C) = c_{11} + c_{22} + c_{33} + \dots + c_{nn} = \sum_{i,i=1}^{n} c_{ii}$$

si osserva:

- $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$
- $tr(K \cdot A) = K \cdot tr(A)$