Serie numeriche

sia a_n una successione si definiscono

somma parziale: $S_n = \sum_{n=1}^{k} a_n$

serie numeriche: $\lim_{k \to +\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

la serie può essere uguale a:

- $S \in \mathbb{R} \Rightarrow$ la serie a_n converge e la somma è S
- $\pm\infty \Rightarrow$ la serie a_n diverge e vale $\pm\infty$
- $\nexists \Rightarrow$ la serie è oscillante o indeterminata

Teorema serie convergenti hanno termine generale tendente a 0

ipotesi: sia $\sum a_n$ convergente

tesi: $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$

Teorema carattere delle serie a termine generale di segno costante

ipotesi: sia $a_n \geq 0$ ($o \leq 0$) def.

tesi: $\sum a_n$ non è oscillante

Criteri per determinare il carattere di una serie

Criterio del confronto per serie a termini di segno costante

siano a_n e b_n tali che $0 \leq a_n \leq b_n \; \forall n \in \mathbb{N}$, vale.

- $\sum a_n$ divergente $\Rightarrow \sum b_n$ divergente
- $\sum b_n$ convergente $\Rightarrow \sum a_n$ convergente

Criterio del confronto asintotico per serie a segno costante

siano a_n e b_n tali che $a_n > 0$, $b_n > 0$, $a_n \sim b_n$, vale:

$\sum a_n$ e $\sum b_n$ hanno lo stesso carattere

Criterio della radice n-esima per serie

sia $a_n \geq 0$, sia $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = L \geq 0$, vale:

- $L \in [0,1) \Rightarrow \sum a_n$ converge
- $L > 1 \Rightarrow \sum a_n$ diverge
- $L = 1 \Rightarrow$ il criterio non da informazioni

Criterio del rapporto per serie

sia $a_n > 0$, sia $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L > 0$, vale:

- $L \in [0,1) \Rightarrow \sum a_n$ converge
- $L > 1 \Rightarrow \sum a_n$ diverge
- $L = 1 \Rightarrow$ il criterio non da informazioni

Criterio di Leibeniz

sia $a_n \geq 0$, sia $a_{n+1} \leq a_n$ $\forall n$ (monot. dec.), sia $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$, vale:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \text{ converge}$$

detta S la somma della serie $\sum (-1) a_n$ viene stimata come

$$|S_n - S| < |(-1)^{n+1} a_{n+1}| = |a_{n+1}|$$

Criterio di convergenza assoluta per serie

si dice che $\sum a_n$ converge assolutamente se $\sum |a_n|$ converge

$$\sum |a_n| \text{ converge} \Rightarrow \sum a_n \text{ converge}$$

Legame tra serie e integrali impropri su $[1, +\infty)$

sia $\sum_{n=k}^{\infty} f(n)$ con $f(n) > 0$, continua e monotona dec. su $[1, +\infty)$, vale:

$$\sum_{n=k}^{\infty} f(n) \text{ converge/diverge} \iff \int_k^{+\infty} f(x)\,dx \text{ converge/diverge}$$

Serie note

Serie armonica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ , diverge}$$

armonica generalizzata 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

i) $\alpha > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, converge

ii) $\alpha \leq 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ diverge

armonica generalizzata 2

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha} \log^{b} n} \text{ , converge} \iff \begin{array}{ll} \alpha > 1 & \forall b \\ \alpha = 1 & b > 1 \end{array}$$

Serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$$ q: ragione della serie

- converge a $\frac{1}{1-q}$ per $-1<q<1$
- diverge a $+\infty$ per $q \geq 1$
- indeterminata per $q \leq -1$

Serie telescopica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$ converge a 1