Lezione 17

Serie di potenze

definizione

si definisce serie di potenze centrata in x_0 la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$

insieme di convergenza

si definisce insieme di convergenza di una serie di potenze l'insieme $E=\{x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ converge}\}$, si osserva:

i) $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \forall x \in E$

ii) $x_0=0 \Rightarrow 0 \in E$

raggio di convergenza

si definisce raggio di convergenza di una serie di potenze il $\sup E$

Teorema insieme di convergenza

ipotesi: sia $* \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

tesi:

l'insieme di convergenza di $*$ può essere:

- $E = \{0\}$
- $E = (-R, R)$, $[-R, R)$, $(-R, R]$, $[-R, R]$ $R \in \mathbb{R}^+$
- $E = (-\infty, +\infty)$

Teorema raggio di convergenza

ipotesi: sia $* \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e R il suo raggio di convergenza

tesi

- se $\exists \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L \geq 0$
- se $\exists \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \geq 0$

$$\Longrightarrow \begin{cases} L = 0 \Rightarrow R = +\infty \\ L > 0 \Rightarrow R = \frac{1}{L} \\ L = +\infty \Rightarrow R = 0 \end{cases}$$

Serie derivata

sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ con $R>0$

si chiama serie derivata la serie ottenuta derivando termine a termine la serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

Teorema di derivazione per serie di potenze

ipotesi: sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze con $R>0$

tesi:

- la sua derivata $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n+1}$ ha lo stesso raggio di convergenza
- $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ è derivabile in $(-R, R)$ e vale $f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n x^{n-k}$

Teorema di integrazione per serie di potenze

ipotesi: sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ con $R > 0$

tesi:

- la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ ha lo stesso raggio di convergenza
- sia $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ allora $\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n \, dt$