Polinomi

sia K un campo, definiamo i polinomi a coefficienti in K

$$K[X] = \left\{ \sum_{i=0}^{l} a_i X^i : i \in \mathbb{N}, a_i \in K \right\}$$

grado è il massimo esponente di X con coefficiente non nullo

Somma e prodotto

sia K un campo e $P, Q \in K[X]$ due polinomi

$$P(X) = \sum_{i=0}^{l} p_i X^i \qquad Q(X) = \sum_{i=0}^{m} q_i X^i$$

sui polinomi si definiscono le operazioni $+, \cdot$ come segue

$$+ : K[X] \times K[X] \longrightarrow K[X] \qquad \cdot : K[X] \times K[X] \longrightarrow K[X]$$

$$P(X) + Q(X) = (p_0 + q_0) X^0 + (p_1 + q_1) X^1 + \dots = \sum_{i=0}^{\max(l,m)} (p_i + q_i) X^i$$

$$P(X) \cdot Q(X) = p_0 \cdot q_0 + (p_0 \cdot q_1 + p_1 \cdot q_0) X^1 + (p_2 \cdot q_0 + p_0 \cdot q_2 + p_1 \cdot q_1) X^1 + \dots = \sum_{i=0}^{\max(l,m)} \left(\sum_{j=0}^{i} p_i \cdot q_{i-j} \right) X^i$$

si osserva che $(K[X], +, \cdot)$ è un anello

Teorema divisibilità polinomi

enunciato

siano $P(x), S(x) \in K[x]$, allora $\exists Q(x), R(x) : S(x) = P(x)Q(x) + R(x)$

se $\deg(P(x)) > 0 \Rightarrow 0 \leq \deg(R(x)) < \deg(P(x))$

se $\deg(P(x)) = 0 \Rightarrow \deg(R(x)) = 0$

divisibilità

si dice che P divide S e si scrive $P|S$ se $\exists Q(x) \in K[x] : S(x) = P(x)Q(x)$

Teorema di Ruffini

ipotesi: sia K un campo, sia $\alpha \in K$, sia $S(x) \in K[x]$

tesi: $S(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \exists Q(x) \in K[x] : S(x) = Q(x)(x - \alpha)$

dimostrazione

$S(x) = (x - \alpha)Q(x) + R(x)$, $0 = \deg R(x) < \deg(x - \alpha) = 1 \Rightarrow S(x) = (x - \alpha)Q(x) + \beta, \beta \in K$

$S(\alpha) = 0 \Leftrightarrow S(\alpha) = (\alpha - \alpha)Q(\alpha) + \beta = 0$ quindi $S(x) = Q(x)(x - \alpha) \Leftrightarrow \beta = 0$

Teorema fondamentale dell'algebra

enunciato

sia $P(x) \in \mathbb{C}[x]$, allora $p(x)$ ammette sempre una radice inoltre

$p(x) = \lambda (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_d)$, $\gamma \in \mathbb{C}$, $d = \deg p(x)$