# Lezione 1

## Quantificatori e simboli

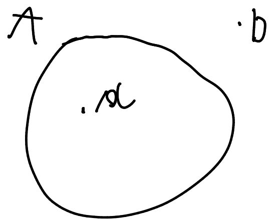
$\in$ appartiene
$\notin$ non appartiene
$\exists$ esiste (almeno uno)
$\exists!$ esiste ed è unico

$|$ : tale che
$\vee$ oppure
$\wedge$ e anche
$\forall$ per ogni

$\Rightarrow$ implica
$\Leftrightarrow$ se e solo se

## Insiemi

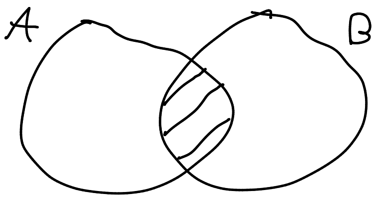
collezioni di oggetti



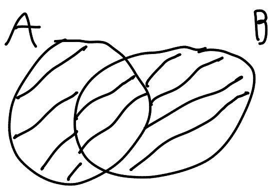

$a \in A$
$b \notin A$

## intersezione e unione

$A \cap B = \{x \in A \wedge x \in B\}$




$A \cup B = \{x \in A \vee x \in B\}$




oss: $A \cap B = B \cap A$
$A \cup B = B \cup A$

## sottoinsiemi

$A \subseteq B$ se $x \in A \Rightarrow x \in B$ o $A = \emptyset$
$A \subset B$ se $A \subseteq B$ e se $\exists y\ B ;\ y \notin B$

oss: $A \subseteq A$
$\emptyset \subseteq A$

complementari

$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$ si dice B complementare A e si può indicare con $B^c = A \setminus B$

# Lezione 3

## Definizioni

siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $M \in \mathbb{R}$

i) M si dice maggiorante (minorante) di A se $x \leq M$ $(x \geq M)$ $\forall x \in A$

ii) M si dice massimo (minimo) di A se M è maggiorante di A e se $M \in A$

iii) A si dice superiormente (inferiormente) limitato se ammette almeno un maggiorante (minorante)

iv) A si dice superiormente (inferiormente) illimitato se non ammette nessun maggiorante (minorante)

v) A si dice limitato se ammette almeno un maggiorante e un minorante

oss:

1) se $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ e A ammette un maggiorante allora ne ammette infiniti

2) se $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ e A ammette un massimo, allora questo è unico

dimostrazione: per assurdo, $\exists\, a, b : a, b$ max di $A \Rightarrow b$ è max $> b > a \Rightarrow b \geq \forall x \in A$
tuttavia anche a è max e appartiene ad A, che è assurdo

# Teorema di completezza di $\mathbb{R}$

sia $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ se $A$ è superiormente (inferiormente) limitato allora $\exists$ il più piccolo (grande) dei maggioranti (minoranti) detto estremo superiore (inferiore) di $A$, che indico con $\sup A$ ($\inf A$)

oss:

sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $A$ sup. lim., $\alpha \sup A$

- $\alpha$ è un maggiorante di $A$
- $\forall \varepsilon > 0,\ \exists y \in A : \alpha - \varepsilon < y$

# Teorema

sia $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$

- se $A$ è superiormente (inferiormente) limitato e $\sup A \in A \Rightarrow \sup A = \max A$ ($\inf A \in A \Rightarrow \inf A = \min A$)
- se $\exists \max A \Rightarrow \max A = \sup A$ ($\exists \min A \Rightarrow \min A = \inf A$)

# Radici n-esime di un numero reale

sia $A = \{x \in \mathbb{R} : x^n \leq a, x \geq a\}$ con $a \geq 0$ e $n \in \mathbb{N}$

$A$ è sup. lim. quindi $\exists \sup A = \alpha \geq 0$ indicato con il simbolo $\alpha = \sqrt[n]{a}$

# Notazione degli intervalli


$a < b$

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ intervallo aperto di estremi $a$ e $b$ esclusi

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ intervallo chiuso di estremi $a$ e $b$ inclusi


$(a;+\infty)=\{x\in\mathbb{R}: x>a\}$ intervallo aperto ill. sup. con estremo $a$

$(-\infty;a)=\{x\in\mathbb{R}: x<a\}$ intervallo aperto ill. inf. con estremo $a$

## Notazioni sup, inf, max, min

se A sup. lim. o inf. lim. scriveremo $\sup A=+\infty$ o $\inf A=-\infty$

## Valore assoluto di un numero reale

sia $a\in\mathbb{R}$, chiamiamo valore assoluto di $a$ indicato con $|a|$ la lunghezza del segmento $0$ e $a$

# Lezione 4

$$\mathbb{C}=\{a+ib,\ a,b\in\mathbb{R}\}$$

## Operazioni in $\mathbb{C}$

$\mathbb{C}$ è chiuso rispetto a $+,\cdot$

somma

$$(a_1+ib_1)+(a_2+ib_2)=(a_1+a_2)+i(b_1+b_2)$$

prodotto

$$(a_1+ib_1)\cdot(a_2+ib_2)=(a_1a_2-b_1b_2)+i(a_1b_2+a_2b_2)$$

## Proprietà di $\mathbb{C}$

$\mathbb{C}$ è un campo non ordinato perchè valgono P1-P9. In particolare:

- elemento neutro della somma: $0+i0$
- elemento neutro del prodotto: $1+i0$
- opposto di $a+ib$: $a+i(-b)$
- reciproco di $a+ib$ con $a,b\neq 0$: $\frac{a}{a^2+b^2}+i\left(-\frac{b}{a^2+b^2}\right)$

## I sottoinsiemi $\tilde{\mathbb{R}}$ e $\tilde{\mathbb{I}}$

$\tilde{\mathbb{R}}=\{a+i0,\ a\in\mathbb{R}\}\subset\mathbb{C}$

$\tilde{\mathbb{R}}$ è chiuso rispetto a $+,\cdot$

$(a_1+i0)+(a_2+i0)=(a_1+a_2)+i0$

$(a_1+i0)\cdot(a_2+i0)=(a_1a_2-0)+i(a_1\cdot 0+a_2\cdot 0)=(a_1+a_2)+i0$

si nota che $a+i0=a\in\mathbb{R}\Rightarrow\mathbb{R}\to\tilde{\mathbb{R}}$

$\tilde{\mathbb{I}}=\{0+ib,b\in\mathbb{R}\}\subset\mathbb{C}$

$\tilde{\mathbb{I}}$ è chiuso rispetto alla somma ma non al prodotto:

$(0+ib_1)+(0+ib_2)=(0+0)+i(b_1+b_2)=0+i(b_1+b_2)$

$(0+i1)\cdot(0+i1)=(0-1)+i(0-0)=-1\Rightarrow\tilde{\mathbb{I}}=0+ib=ib\Rightarrow\tilde{\mathbb{I}}=i\mathbb{R}$

inoltre si osserva che $ii=-1\Rightarrow(i)^2=-1\Rightarrow x^2+1=0$ è risolvibile in $\mathbb{C}$ con $x=\pm i,\ x\in\mathbb{C}$

# Definizioni e proprietà

**definizioni**

i) $|z| = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$ modulo di $z$

ii) $z = a + ib$, $\bar{z} = a - ib$

**proprietà**

i) $|z| = 0 \iff z = 0$

ii) $\bar{\bar{z}} = z$

iii) $z \cdot \bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$

iv) $z \neq 0$, allora $z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$ perchè $\dfrac{a}{a^2+b^2} - i\dfrac{b}{a^2+b^2} = \dfrac{a - ib}{a^2 + b^2} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$

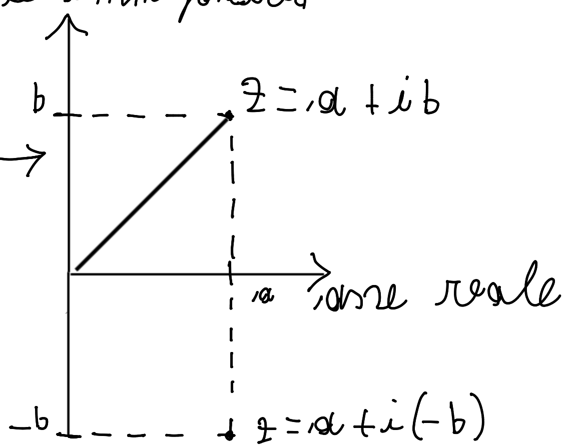
# Rappresentazione algebrica di $\mathbb{C}$

unità imm.

coefficiente della part. imm.

$$z = \underbrace{a}_{\text{parte reale}} + \underbrace{\boxed{i}\,\boxed{b}}_{\text{parte immaginaria}}$$

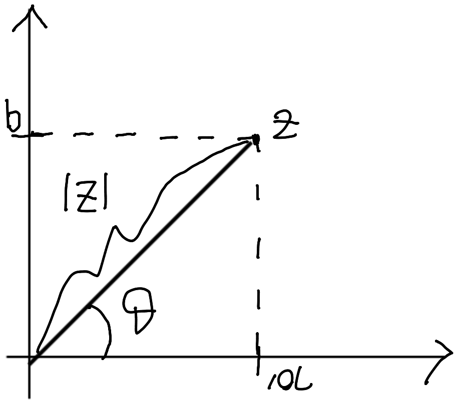
piano di Gauss →



# Rappresentazione trigonometrica di un numero complesso

$z \neq 0, \; z = a + ib$

modulo $\rho = |z|$ argomento $\theta =$ angolo




$$\boxed{z = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)}$$

come avere una circonferenza di raggio $|z|$

## prodotto in forma trigonometrica

$z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1) \quad z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)$

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 [\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 + i(\cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 + \cos\theta_2 \operatorname{sen}\theta_1)] = \rho_1 \rho_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$$

## potenza in forma trigonometrica

$$z^n = \rho^n [\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)]$$

# Radici n-esime di numeri complessi

un numero complesso $z$ è radice n-esima di $a$ se $z^n = a$.

ogni $a \neq 0$ ammette $n$ radici $z$ distinte in $\mathbb{C}$.

## dimostrazione

1) se $a \neq 0$ e $z \neq 0$:

$\alpha = \rho(\cos\vartheta + i\,\text{sen}\,\vartheta)$ e $z = R(\cos\tau + i\,\text{sen}\,\tau) \Rightarrow \rho(\cos\vartheta + i\,\text{sen}\,\vartheta) = R^n[\cos(n\tau) + i\,\text{sen}(n\tau)]$

2) $\begin{cases} R^n = \rho \\ n\tau = \vartheta + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ $\begin{cases} R = \sqrt[n]{\rho} \leftarrow \text{unico in } \mathbb{R} \\ \tau = \dfrac{\vartheta}{n} + \dfrac{2k}{n}\pi \end{cases}$

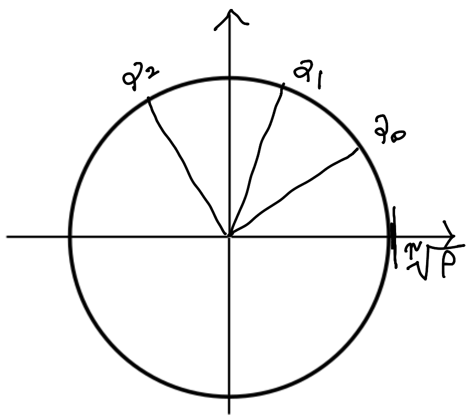
$\exists$ quindi infinite radici, ma quante distinte?

3) poichè $R = \sqrt[n]{\rho}$ è unico in $\mathbb{R}$ il modulo è comune.
per l'argomento:

$$\tau_k = \frac{\vartheta}{n} + \frac{2\pi}{n}k \Rightarrow \tau_0 = \frac{\vartheta}{n},\ \tau_1 = \frac{\vartheta}{n} + \frac{2\pi}{n}, \dots, \tau_n = \frac{\vartheta}{n} + 2\pi$$

$\tau_0$ e $\tau_n$ differiscono soltanto di $2\pi$, individuando lo stesso an

4) si ottengono quindi n radici distinte




mi sposto sulla circonferen
quando $k = n$, ritorno all

# Teorema fondamentale dell'algebra

**definizione:** sia $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$ $a_n \neq 0$, $a_i \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ si dice radice di $P$ se:

- $P(\alpha) = 0$
- $P(z) = (z-\alpha)^{\mu} Q(z)$ con $Q$ polinomio di grado $n-\mu$
- $Q(z) \neq 0$

**ipotesi:** $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$ $a_n \neq 0$, $a_i \in \mathbb{C}$

**tesi:** $P$ ammette $n$ radici in $\mathbb{C}$ con la loro molteplicità $\mu$. Inoltre, $P(z)$ si ottiene in modo unico come $P(z) = a_n (z-\alpha_1)^{\mu_1} (z-\alpha_2)^{\mu_2} \dots (z-\alpha_k)^{\mu_k}$ dove $\mu_i$ è la molteplicità di $\alpha_i$.

**corollario**

Un polinomio a coefficienti reali ammette almeno una radice reale. Inoltre se $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ è radice di $P(z)$ allora anche $\bar{\alpha}$ lo è con la stessa molteplicità. Osserviamo che un polinomio di grado dispari ha sempre una radice reale.