Numeri naturali: definiti con assiomi

<u>assiomi di Peano:</u>

A1) $\exists$ un numero naturale

A2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists$ un successore $\in \mathbb{N}$

A3) $a, b \in \mathbb{N}$: $a \neq b \Rightarrow a$ e b hanno successore diverso

A4) 1 non è successore di nessun $\mathbb{N}$

A5) $\forall A$ che contiene 1 e tutti i successori dei propri elementi, $A \subseteq \mathbb{N}$

$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ <u>NO 0</u>

$\mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \dots\}$

$\mathbb{N} \cup \{0\}$ è chiuso rispetto a $+$, $\cdot$

Proprietà:

P1) prop. commutativa della somma

$a + b = b + a$

P2) prop. associativa della somma

$a + (b + c) = c + (a + b)$

P3) 0 elemento neutro della somma

$a + 0 = a$

P4) prop. commutativa del prodotto

$a \cdot b = b \cdot a$

p 5) prop. associativa del prodotto

$$a \cdot (b \cdot c) = c \cdot (a \cdot b)$$

p 6) elemento neutro del prodotto

$$a \cdot 1 = a$$

p 7) prop. distributiva della somma rispetto al prodotto

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

numeri pari $= \{2n, n \in \mathbb{N}\}$

numeri dispari $= \{2n+1, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \vee \{2n-1, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$

Numeri interi

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$ $+n \rightsquigarrow n \Rightarrow \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

$= \{0\} \cup \{\pm n, n \in \mathbb{N}\}$

p 8) $\exists$ elemento opposto della somma: $\forall a \in \mathbb{Z} \, \exists b \in \mathbb{Z} : b : a + b = 0 \quad b = -a$

grazie a p1 – p8:

$$-(-a) = a$$

$$-(a) b = -(a b)$$

$$(-a)(-b) = a b$$

$$a + c = b + c \Rightarrow a = b$$

$\mathbb{Z}$ è chiuso rispetto a $+, \cdot, -$
differenza:
$a - b = a + (-b)$

Numeri razionali

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$$

rappresentazione dei numeri razionali

1) relazione di equivalenza

$$\frac{m}{n} = \frac{km}{kn} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

ogni rel. di eq. di $\mathbb{Q}$ ha un rappresentante detto **frazione ridotta ai minimi termini**:

$$q = \pm \frac{m}{n}, \ m \in \mathbb{N} \cup \{0\}, n \in \mathbb{N}, \ MCD(m,n) = 1$$

$\mathbb{Q}$ è chiuso rispetto a $+, \cdot, -, :$
divisione:

$$\frac{p}{q} : \frac{m}{n} = \frac{np}{mq}$$

p9) $\exists$ elem. reciproco di α

$\forall \alpha \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}\ \exists \beta \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}: \alpha\beta = \beta\alpha = 1 \qquad \beta = \frac{1}{\alpha}$

$\mathbb{Q}$ è un campo definito da p1 – p9 e dalle sue operazioni

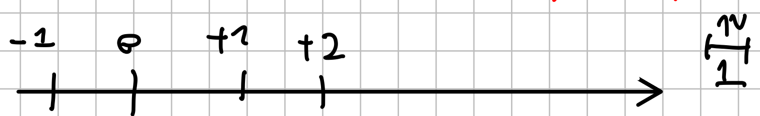
2) rappresentazione decimale

q — rap. dec. finita

q — rap. dec. infinita periodica

NO unicità rappresentazione: $0,\bar{9} = \frac{1}{1} = 1$

3) rappresentazione grafica



retta orientata
con origine e unità di misura

relazione d'ordine

$p, q \in \mathbb{Q}$ $\quad p \leq q \Rightarrow p$ precede q o coincide

$p \geq q \Rightarrow q$ segue q o coincide

! $>$ e $<$ non sono rel. d'ord.

dunque $\mathbb{Q}$ è un campo ordinato con le seguenti proprietà:

c1) $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$

(2) $a \le b,\ c > 0 \Rightarrow a/c \le b/c$

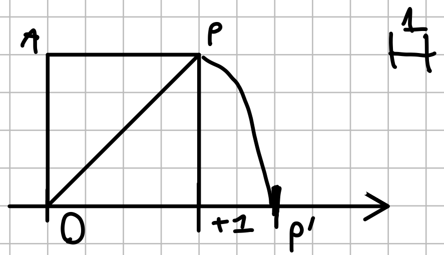
(3) $a \le b,\ c < 0 \Rightarrow a/c \ge b/c$

proprietà di densità

$\mathbb{Q}$ è denso: $\forall p, q \in \mathbb{Q}\ \exists r \in \mathbb{Q} : p < r < q$

la retta $\mathbb{Q}$ non è continua

Dimostrazione:

1) 

$\exists q \in \mathbb{Q}$: q rappresenti P'? NO

2) $(\overline{OP})^2 = (\overline{OP'})^2 = 1^2 + 1^2 = 2$

3) per assurdo $\exists q \in \mathbb{Q} : q^2 = 2$ dunque:

$\exists \frac{m}{n} = q : \left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2 \Rightarrow \frac{m^2}{n^2} = 2 \Rightarrow m^2 = 2n^2 \Rightarrow m$ è pari $\Rightarrow m = 2k \Rightarrow 4k^2 = 2n^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow n^2 = 2k^2 \Rightarrow n^2$ è pari $\Rightarrow \frac{m}{n}$ non è rid. di min. term.

Numeri irrazionali $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{R}$

insieme degli allineamenti decimali non periodici (es. π)

rappresentazione: $c_0, c_1 c_2 c_3 \dots$ $c_0 \in \mathbb{N}$ $c_1 \in \{0, 1, 2, 3 \dots 9\}$

Numeri reali

$\mathbb{R}$
- allineamenti decimali finiti
- allineamenti decimali infiniti periodici
- allineamenti decimali infiniti non periodici

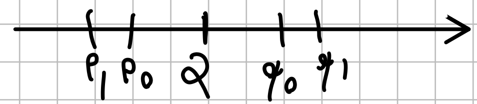
$\mathbb{R}$ è
- continuo sulla retta: $\forall r \in \mathbb{R}, \exists$ punto P sulla retta
- ordinato (rel. d'ordine)
- denso
- $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$ in quanto $\forall r \in \mathbb{Q}\ \exists p, q \in \mathbb{R} : p \leq r \leq q$
- valgono P1 - P9 e valgono $+, \cdot, -, :$ che lo rendono un campo

approssimazione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{Q}$

possibile perchè $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$

	$\mathbb{Q}$		$\mathbb{Q}\setminus\mathbb{R}$		$\mathbb{Q}$		errore
$p_0 =$	q_0	$<$	α	$<$	$q+1$	$= q_0$	$0 \leq E \leq 1$
$p_1 =$	$q_0 + \frac{q_1}{10}$	$<$	α	$<$	$q + \frac{q_1+1}{10}$	$= q_1$	$0 \leq E \leq \frac{1}{10}$

$\alpha = q_0, q_1 q_2 q_3 \dots \quad \alpha \in \mathbb{R}$



numerabilità di $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$

un insieme si dice numerabile se può essere messo in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$

$\mathbb{Q}$ è numerabile

$\mathbb{R}$ non è numerabile