Lezione 8 – Sistemi lineari

Sistemi lineari

un sistema lineare è una collezione di h equazioni lineari (1° grado)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k}x_k = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2k}x_k = b_2 \\ \vdots \\ a_{h1}x_1 + a_{h2}x_2 + \dots + a_{hk}x_k = b_h \end{cases}$$

si chiamano:

- coefficienti i termini della i-esima equazione per il coefficiente x_j
- termini noti i termini b_i

i coefficienti possono essere scritti in una matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{h1} & a_{h2} & \dots & a_{hk} \end{bmatrix}$$

$A \in Mat_{h \times k}(\mathbb{R})$ con h numero di equazioni, k numero di incognite i termini noti formano un vettore $\underline{b} \in \mathbb{R}^h = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_h \end{pmatrix}$

accostando la matrice A al vettore $\underline{b}$ si ottiene la matrice

$M \in Mat_{h \times (k+1)}$ che aiuta a trovare la soluzione al sistema

Insieme soluzioni di sistemi

dato un sistema con k incognite si definisce l'insieme delle k-uple che rendono contemporaneamente vere le equazioni.

un sistema si dice risolubile se l'insieme delle soluzioni non è vuoto

un sistema si dice impossibile se l'insieme delle soluzioni è vuoto.

due sistemi si dicono equivalenti se hanno lo stesso insieme delle soluzioni.

Sistemi omogenei

sia $A\underline{x} = \underline{b}$ un sistema, si definisce sistema omogeneo associato $A\underline{x} = \underline{0}$

Riduzione in forma di Gauss

data una matrice posso ridurla con operazioni sulle sue righe mantenendo la soluzione del sistema lineare identica:

- moltiplicare una riga con $\alpha \in \mathbb{R}$
- sommare a una riga un'altra
- scambiare due righe

una matrice è detta in forma di Gauss se è ridotta a scalini

Pivot e rango di una matrice

sia A una matrice in forma di Gauss

si definiscono:

- pivot: primo termine non nullo in una riga di A
- rango: numero di pivot di A indicato con $rk(A)$

Teorema di Rouché Capelli I

enunciato

sia $A\underline{x}=\underline{b}$ un sistema lineare, $A\in Mat_{m\times n}$, $b\in\mathbb{R}^m$, allora:

- $A\underline{x}=\underline{b}$ è risolubile $\iff rk(A)=rk((A|b))$
- $|S|=1 \iff rk(A)=n$
- $|S|=\infty^j \iff rk(A)<n$, $j=n-rk(A)$

nota bene: n è il numero di incognite, m il numero di equazioni

Teorema di Rouché Capelli II

ipotesi

- sia $A\underline{x}=\underline{b}$ un sistema con $A\in Mat_{m\times n}$, $\underline{b}\in\mathbb{R}^n$
- sia $A\underline{x}=\underline{b}$ risolubile
- sia $\underline{v_0}\in\mathbb{R}^n$ soluzione di $A\underline{x}=\underline{b}$

tesi

$S=\{\underline{v}\in\mathbb{R}^n : \underline{v}=\underline{v_0}+\underline{w}\}$ con $\underline{w}$ soluzione del sistema omogeneo associato

Teorema di Cramer

ipotesi

- sia $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{R})$ (matrice quadrata)
- sia $A \in GL_n(\mathbb{R})$
- sia $A\underline{x} = \underline{b}$ un sistema, $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$

tesi

$A\underline{x} = \underline{b}$ ammette una sola soluzione $\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$

dimostrazione

$A \in GL_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \exists A^{-1} \Rightarrow A^{-1}A\underline{x} = \underline{b}A^{-1} \Rightarrow \underline{x} = A^{-1}\underline{b}$ è soluzione unica perché A^{-1} è unica

Metodo di Cramer

dal precedente, se $A\underline{x} = \underline{b}$ ha una sola soluzione essa è

$\underline{x} = \dfrac{\det(A_i)}{\det(A)}$ dove A_i è A con l'i-esima colonna sostituita da $\underline{b}$