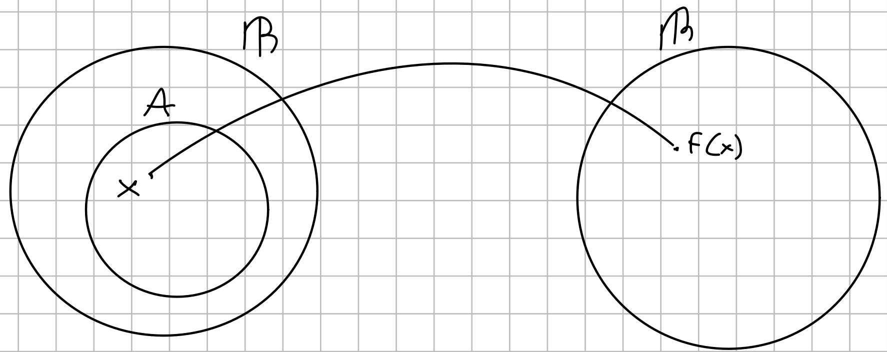
Lezione 5

Funzioni reali di variabile reale

siano A e B due insiemi, si definisce funzione una legge che associa ad ogni elemento di A uno e un solo elemento di B.

Una funzione reale di variabile reale associa ad ogni elemento $x \in A \subseteq \mathbb{R}$ un elemento in $\mathbb{R}$:

$f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



A: insieme di definizione/dominio di f

x: variabile indipendente

se è definita soltanto f, $A = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ ha significato in } f(x)\}$

definizioni:

- $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ punti del piano

- $F(A) = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in A : y = F(x)\}$ immagine di A tramite F
- $\gamma(F) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in A,\ y = F(x)\}$ grafico di F

Successioni di numeri reali

funzioni definite solo su IN o sottoinsiemi

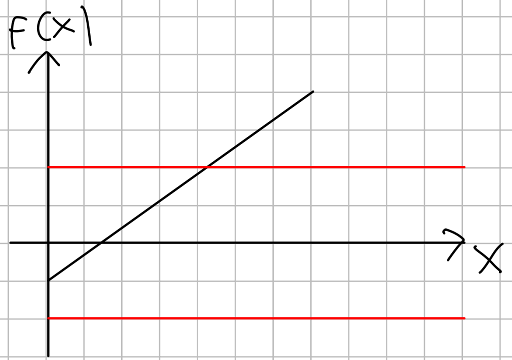
$F: \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad F(n) = a_n \quad$ es. $a_n = \frac{1}{n}$

Funzioni iniettive

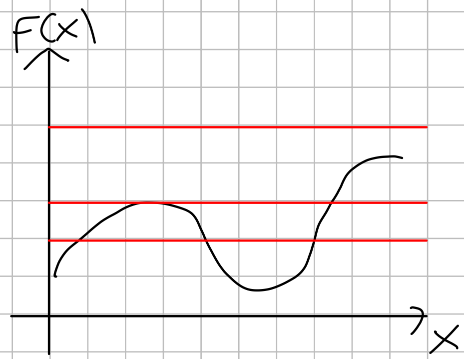
F si dice iniettiva su A se

- $\forall x, z \in A : x \neq z \Rightarrow F(x) \neq F(z)$

$(\forall x, z \in A : F(x) = F(z) \Rightarrow x = z)$



iniettiva
no intersezioni



NON iniettiva
≥1 intersezioni

Funzioni monotone

- f si dice monotona strettamente crescente (decrescente) su A se $\forall x, z \in A$, $x < z \Rightarrow f(x) < f(z)$ $\left(f(x) > f(z)\right)$

- f si dice monotona crescente (decrescente) su A se $\forall x, z \in A$, $x < z \Rightarrow f(x) \leq f(z)$ $\left(f(x) \geq f(z)\right)$

Teorema di relazione tra iniettività e monotonia

ipotesi: sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strettamente monotona su A

tesi: f è iniettiva su A

dimostrazione:
se f è monotona strettamente crescente su A:
$x, z \in A$, $x \neq z$, $x < z$, $f(x) < f(z) \Rightarrow f(x) \neq f(z)$ dunque f è iniettiva

Funzioni limitate e illimitate

- f si dice limitata superiormente (inferiormente) se $f(A)$ è superiormente (inferiormente) limitato

- f si dice illimitata superiormente (inferiormente) se $f(A)$ è superiormente (inferiormente) illimitato

$$\sup_A f = \sup_{x \in A} f = \sup f(A) \qquad \inf_A f = \inf_{x \in A} f = \inf f(A)$$

- f si dice limitata su A se f è superiormente e inferiormente limitata su A

Massimi e minimi di funzioni

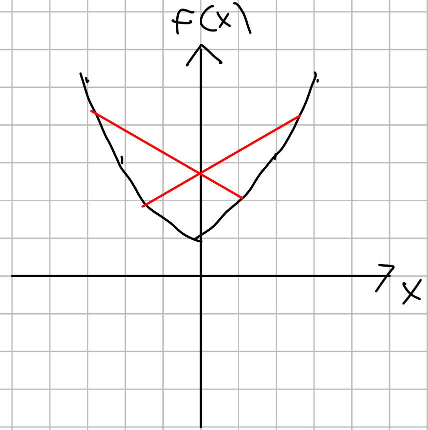
- f ammette massimo assoluto su A se $\exists x \in A : \forall z \in A, f(x) > f(z)$
  x è detto punto di massimo assoluto; $f(x) = \max f(A)$ è detto massimo assoluto
- f ammette minimo assoluto su A se $\exists x \in A : \forall z \in A, f(x) < f(z)$
  x è detto punto di minimo assoluto; $f(x) = \min f(A)$ è detto minimo assoluto

f ammette sempre $\sup_A f$ e $\inf_A f$, ma non $\max_A f$ e $\min_A f$

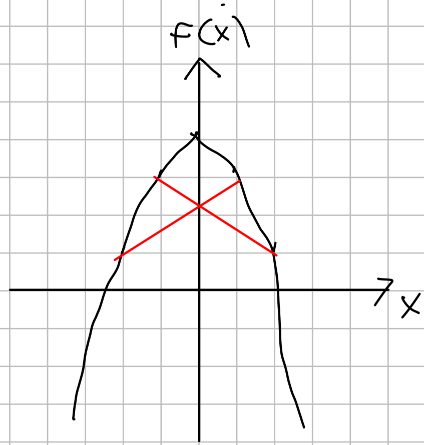
Funzioni concave e convesse

sia $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con I intervallo di $\mathbb{R}$

f si dice convessa (concava) in I se $\forall x, z \in I, x < z$ allora il segmento che unisce $(x, f(x))$ e $(z, f(z))$ si trova sopra (sotto) $\gamma(f)$ ristretto a $[x, z]$



convessa



concava

Segno e zeri di una funzione

- f si dice positiva (non negativa) in A se $f(x)>0$ $(f(x)\geq 0)$ $\forall x \in A$
- f si dice negativa (non positiva) in A se $f(x)<0$ $(f(x)\leq 0)$ $\forall x \in A$
- $\forall x_0 \in A$! $f(x_0)=0$ si chiama zero di f su A