Lezione 2

Operazioni

definizione

sia A un insieme, si definisce operazione la funzione $*: A^2 \longrightarrow A$

operazioni associative e commutative

sia $*: A^2 \longrightarrow A$ un operazione, si dice:

- associativa se $(a*b)*c = a*(b*c)$
- commutativa se $a*b = b*c$

elemento neutro

sia $*$ un operazione in A ed $e \in A$, si dice:

- e elemento neutro a sinistra se $e*a = a \ \forall a \in A$
- e elemento neutro a destra se $a*e = a \ \forall a \in A$
- e elemento neutro se è sia elem. a destra che a sinistra

inverso

sia $*$ un operazione in A, $a \in A$, e elem. neutro di A, si dice:

- $\bar{a}$ inverso a sinistra di a se $\bar{a}*a = e$
- $\bar{a}$ inverso a destra di a se $a*\bar{a} = e$

· $\bar{a}$ inverso di a se è sia inverso a destra che a sinistra, si scrive $\bar{a} = a^{-1}$

Teorema unicità elem. neutro e inverso per operazioni associative

ipotesi

· sia A un insieme

· sia $*: A^2 \to A$ un operazione associativa

· sia e elem. neutro di $*$

· sia $a \in A$ elemento che ammette inverso

tesi

1. e è l'unico elem. neutro
2. $a \in A$ ammette un unico inverso

dimostrazione

1. per assurdo $\exists e_1 \neq e_2 \in A$ elem. neutri $\Rightarrow e_1 = e_1 * e_2 = e_2 \Rightarrow \perp$
2. per assurdo $\exists a_1 \neq a_2 \in A$ elem. inversi di $a \Rightarrow a_1 = a_1 * e = a_1 * (a * a_2) =$

$= (a_1 * a) * a_2 = e * a_2 = a_2 \Rightarrow \perp$

Monoidi

un monoide $(M, *)$ è un insieme M dotato di un'operazione $*$ t.c:

- $*$ è associativa
- $*$ è dotata di elemento neutro

Gruppi

un gruppo $(G, *)$ è un insieme G dotato di un'operazione $*$ t.c:

- $*$ è associativa
- $*$ è dotata di elemento neutro
- $\forall x \in G$, x ammette inverso per $*$

un gruppo si dice abeliano o commutativo se vale anche:

- $*$ è commutativa

Anelli

un anello $(A, +, \cdot)$ è un insieme A dotato di operazioni $+, \cdot$ t.c:

- $(A, +)$ è un gruppo abeliano
- $(A, \cdot)$ è un monoide
- $\cdot$ è distributiva rispetto al $+$

un anello è commutativo se vale anche:

- $\cdot$ è commutativa

$a \in A$ si dice:

- divisore se $a \neq 0$ e $\exists b \neq 0 : a \cdot b = 0$ o $b \cdot a = 0$
- unitario o invertibile se a ammette inverso per $\cdot$

Campi

un anello $(K, +, \cdot)$ è un campo se $(K \setminus \{0\}_K, \cdot)$ è un gruppo abeliano