Lezione 11

Funzioni continue

sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$ di accumulazione per A

Continuità in un punto x_0

- f si dice continua in x_0 se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- f si dice continua in x_0 da destra/sinistra se $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$
  $(x \to x_0^-)$

Continuità sull'intervallo

f è continua su A se è continua in tutti i punti di A

f è continua su $[a, b]$ se è continua su (a, b) e continua su a da dx e su b da sx

Osservazioni

- f è continua in x_0 se $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$
- se $x_0 \in A$ è di accumulazione per A allora f è continua in x_0

Teorema 1

ipotesi: siano $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue in $x_0 \in A$

tesi: $f+g$, $f-g$, fg e $\frac{f}{g}$ (se $g(x_0) \neq 0$) sono continue in x_0

Teorema 2

ipotesi:

- sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- sia $g: f(A) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non costante in $U(f(x_0))$
- sia $x_0 \in A$
- sia f continua in x_0 e g continua in $f(x_0)$

tesi: $f \circ g$ è continua in x_0

Teorema di continuità delle funzioni elementari

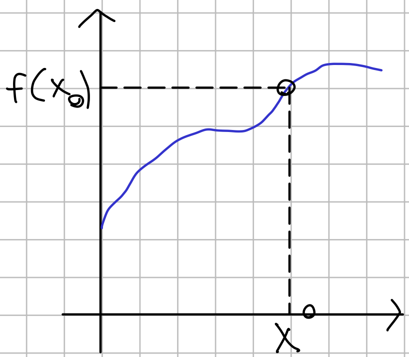
enunciato

tutte le funzioni elementari del tipo x^{α}, α^x $(\alpha > 0)$, $\log_{\alpha} x$ $(\alpha > 0, \alpha \neq 1)$, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\tan x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$ sono continue nei rispettivi insiemi di definizione

Classificazione discontinuità

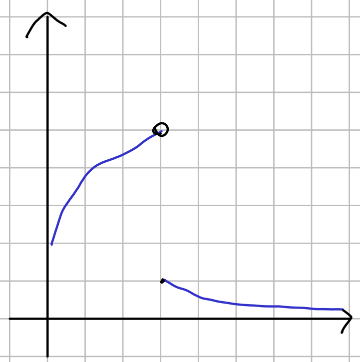
discontinuità eliminabile

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$$



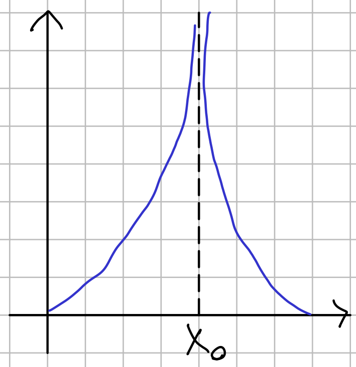
discontinuità di tipo salto / 1° specie

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$ entrambi finiti



discontinuità di 2° specie

$$\lim_{x \to x_0^{(\pm)}} f(x) = \begin{cases} \nexists \\ \pm\infty \end{cases}$$



prolungamento per continuità

se $x_0 \notin A$ e $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l$, la funzione $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ l & x = x_0 \end{cases}$ si definisce prolungamento per continuità di f in x_0

Teorema degli zeri / di Bolzano

ipotesi: sia $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, sia f continua su $[a, b]$, sia $f(a) f(b) < 0$

tesi: $\exists x_0 \in (a, b) : f(x_0) = 0$

Corollario

ipotesi:

sia $f:(A,B)\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con $A\in\mathbb{R}\vee A=-\infty$ e $B\in\mathbb{R}\vee B=+\infty$, sia f continua in (A,B)

sia $\lim_{x\to A} f(x)=L_1 \begin{cases} l<0 \\ -\infty \end{cases}$, sia $\lim_{x\to B} f(x)=L_2 \begin{cases} l>0 \\ +\infty \end{cases}$

tesi: $\exists x_0\in(A,B): f(x_0)=0$

Teorema dei Valori intermedi / di Darboux

ipotesi: sia $f:[a,b]\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua su $[a,b]$

tesi: f assume in (a,b) tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$

Teorema di Weierstrass

ipotesi: sia $f:[a,b]\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua su $[a,b]$

tesi: f ammette massimo e minimo assoluti in $[a,b]$

Teorema di continuità della funzione inversa

ipotesi: sia $f: [a, b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua su $[a, b]$, sia f st. monotona

tesi: $f^{-1}: [f(a), f(b)] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua su $[f(a), f(b)]$