Fisica

Gabriele Fioco

a.a. 2024-2025

Indice

1 Cinematica

Un **punto materiale** è un oggetto che ha una massa ma non ha dimensioni, la cui posizione è descritta da un vettore in $\mathbb{R}^3$.

1.1 Traiettoria

La **traiettoria** è il percorso che compie un punto materiale nel tempo, descritta dalla legge oraria nella funzione 1.1

$$\vec{x} : [t_0, t] \to \mathbb{R}^3 \tag{1.1}$$

La funzione 1.1 vale finchè il punto non subisce interazioni con altri corpi. Il dominio della funzione $[t_0, t]$ è l'intervallo di tempo in cui si osserva il movimento, il codominio è lo spazio tridimensionale rappresentato da $\mathbb{R}^3$, che indicheremo con le coordinate $(x, y, z) = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$.

Lo spazio percorso lungo la traiettoria è una grandezza fisica misurata, espressa dimensionalmente come una lunghezza $[L]$ in unità fisiche (es. metri).

1.2 Velocità e accelerazione

La **velocità** descrive quanto rapidamente varia la misura di un punto in funzione del tempo. Considerato un punto che si muove tra due punti $x(t_2)$ e $x(t_1)$ in un tempo $t_2 - t_1$ con $t_2 > t_1$ la velocità media è così data

$$\hat{v}_{\text{media}} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} \tag{1.2}$$

Geometricamente la velocità è il rapporto incrementale della traiettoria. Siamo interessati al calcolo della **velocità istantanea** che si ottiene quando $\delta\hat{x} \to 0$ e $\delta t \to 0$. Quindi la velocità istantanea è la derivata della traiettoria rispetto al tempo.

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} = \frac{d}{dt}\vec{x}(t) = \frac{d}{dt}(x, y, z) = \frac{d}{dt}(\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z) = \frac{d}{dt}\hat{i}x + \frac{d}{dt}\hat{j}y + \frac{d}{dt}\hat{k}z \tag{1.3}$$

Dimensionalmente la velocità è $[v] = \frac{[L]}{[T]}$ dove L è una lunghezza e T un tempo.

Similmente l'**accelerazione media** è data da

$$\vec{a} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} \tag{1.4}$$

L'**accelerazione istantanea** è la derivata rispetto alla velocità

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d^2 x}{dt} \tag{1.5}$$

Dimensionalmente l'accelerazione è $[a] = \frac{[L]}{[T^2]}$.

1.3 Moto rettilineo uniforme e uniformemente accelerato

Data un'accelerazione generica a ci si chiede quale posizione x assume al tempo t, quindi si vuole la traiettoria. Ricordando che l'accelerazione è la derivata della velocità, che è a sua volta la derivata della traiettoria, si può integrare due volte rispetto a t. Si ottiene l'equazione 1.6

$$\vec{x}(t) = \frac{1}{2} a t^2 + bt + c \tag{1.6}$$

Si osserva che b e c rappresentano rispettivamente la velocità iniziale e la posizione iniziale che indicheremo con $\vec{v}_0$ e $\vec{x}_0$. L'equazione 1.6 si riscrive

$$\vec{x}(t) = \frac{1}{2} \vec{a} t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{x}_0 \tag{1.7}$$

Ora ci si chiede se si può esprimere questo moto senza usare il tempo. Derivando l'equazione 1.7 si ottiene $\vec{v}(t) = \vec{a}t + \vec{v}_0$, quindi

$$t = \frac{\vec{v}(t) - \vec{v}_0}{a} \tag{1.8}$$

Sostituendo la 1.8 nella 1.7 si ottiene la relazione tra posizione, velocità e accelerazione senza riferimenti al tempo

$$2\vec{a}(\vec{x}(t) - \vec{x}_0) = \vec{v}(t)^2 - \vec{v}_0^2 \tag{1.9}$$

1.4 Moto circolare uniforme

Il moto circolare uniforme è il moto di un punto che si muove su una traiettoria di raggio R con velocità costante.

Su un piano a due dimensioni la traiettoria è definita, nelle sue componenti, come:

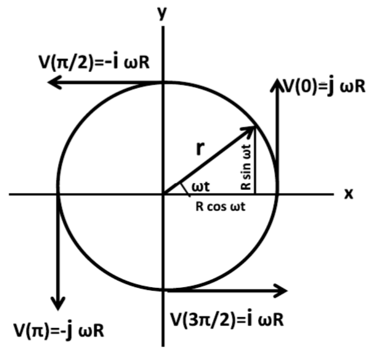

Figura 1.1: Moto circolare uniforme

$$\begin{cases} x(t) = R\cos(\omega t) \\ y(t) = R\sin(\omega t) \end{cases} \tag{1.10}$$

In forma vettoriale:

$$\vec{x}(t) = \hat{i}R\cos(\omega t) + \hat{j}\sin(\omega t) \tag{1.11}$$

Si osserva che il punto ritorna al punto di inizio in un tempo T, detto periodo, quando l'angolo $\omega T = 2\pi$, dunque $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ dove $f = \frac{1}{T}$ è detta frequenza. Il periodo rappresenta il tempo per fare un giro, la frequenza il numero di giri effettuati in un secondo, ω definita come $\omega = \frac{\theta}{t}$ è detta velocità angolare e rappresenta i radianti passati al secondo.

Derivando la 1.11 rispetto a t si ottiene la velocità:

$$\vec{v}(t) = -\hat{i}\omega R\sin(\omega t) + \hat{j}\omega\cos(\omega t) \tag{1.12}$$

Calcolando il modulo della velocità:

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \omega R \tag{1.13}$$

v è detta velocità tangenziale ed è sempre tangente alla circonferenza.

Derivando la 1.12 si ottiene l'accelerazione:

$$\vec{a}(t) = -\omega^2 R\hat{i}\cos(\omega t) - \omega^2 R\hat{j}\sin(\omega t) = -\omega^2 R(\hat{i}\cos(\omega t) + \hat{j}\sin(\omega t)) = -\omega^2 R \tag{1.14}$$

Calcolando il modulo dell'accelerazione:

$$|a| = a = \omega^2 R = \frac{v^2}{R} \tag{1.15}$$

a è detta accelerazione centripeta ed indica che il punto è diretto verso il centro.

1.5 Moto parabolico

Il **moto parabolico** è un moto in uno spazio 2D, rappresentante un proiettile, composto da due componenti: un moto rettilineo in orizzontale e un moto rettilineo uniformemente accelerato in verticale. Quest'ultimo tipicamente utilizza l'accelerazione gravitazionale, indicata con $g = -9,8 m/s^2$.

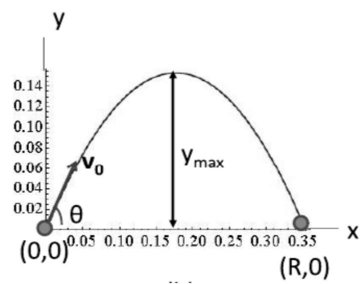

Figura 1.2: Moto parabolico, R è la gittata e y_{max} l'altezza massima

Le due componenti sono:

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos(\Theta) t \\ y(t) = v_0 \sin(\Theta) t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \tag{1.16}$$

Derivando si ottiene la **velocità**:

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos(\Theta) \\ v_y(t) = v_0 \sin(\Theta) t - g t \end{cases} \tag{1.17}$$

L'**accelerazione** è fissata a g, come da definizione.

Risolvendo la 1.16 per t si ottiene:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\theta} \tag{1.18}$$

Sostituendo in $y(t)$:

$$y(x) = y_0 + x \tan\theta - \frac{g}{2(v_0 \cos\theta)^2} x^2 \tag{1.19}$$

Tempo totale Il tempo totale t_f si ottiene quando $y(t) = 0$, si calcola:

$$t_f = \frac{2 v_0 \sin\theta}{g} \tag{1.20}$$

Gittata Per trovare la gittata x_f si calcola la componente orizzontale al tempo totale, cioè $x(t_f)$ e si ottiene:

Si osservano diversi comportamenti nella gittata:

- La gittata massima si ottiene quando $sen(2\theta) = 1$ ovvero quando $2\theta = 90\,\text{deg}$ ovvero quando $\theta = 45\,\text{deg}$.
- Per $\theta < 45\,\text{deg}$ allora la gittata diminuisce.
- Per $\theta > 45\,\text{deg}$ la gittata diminuisce, aumenta la velocità verticale ma diminuisce quella orizzontale.
- Il moto parabolico è simmetrico, quindi angoli simmetrici hanno stessa gittata.

$$x_f = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g} \tag{1.21}$$

Altezza massima L'altezza massima (x_M, y_M) si raggiunge quando $t = t_f/2 = t_M$, a causa della simmetria del moto parabolico. Quindi si calcolano le componenti come $x(t_M)$ e $y(t_M)$ e si ottiene:

$$x_M = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{2g} v_0^2 \tag{1.22}$$

$$y_M = \frac{v_0^2 \sin^2(2\theta)}{2g} v_0^2 \tag{1.23}$$

L'altezza massima si può ottenere anche imponendo la componente della velocità verticale pari a 0.

Velocità all'impatto La velocità all'impatto rimane $v_0 \cos\theta$ nella componente orizzontale, mentre è $v_x(t_f)$ nella sua componente verticale:

$$v_x(t_f) = 2v_0 \sin\theta \tag{1.24}$$

1.6 Moto armonico

Il **moto armonico** è un moto oscillatorio di un punto Q definito a partire da un punto P che si muove di moto circolare uniforme su una circonferenza, considerando la sua proiezione Q sul diametro della circonferenza (ovvero su un asse cartesiano).

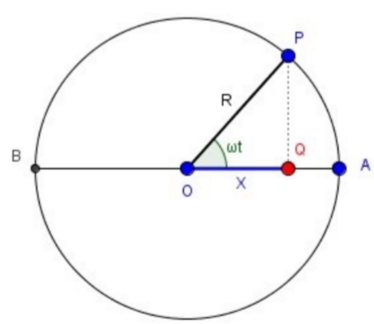

Figura 1.3: Moto parabolico

Dal moto circolare uniforme, si sa che la posizione della proiezione di P, ovvero Q, è data da:

$$x(t) = R\cos(\omega t) \tag{1.25}$$

Da cui si deriva

- Velocità:

$$v(t) = -R\omega\sin(\omega t) \tag{1.26}$$

- Accelerazione:

$$a(t) = -R\omega^2\cos(\omega t) = -\omega^2 x(t) \tag{1.27}$$

ω è detta **pulsazione** del moto.

Se Q parte da un punto diverso si individuato da un angolo ϕ, detto **fase**, allora:

$$\begin{aligned} x(t) &= R\cos(\omega t + \phi) \\ v(t) &= -R\sin(\omega t + \phi) \\ a(t) &= -R\sin(\omega t + \phi) \end{aligned} \tag{1.28}$$

2 Dinamica del punto materiale

Prima legge di Newton (o legge dell'inerzia) Se un corpo non ha nessuna forza, manterrà la sua velocità"

Seconda legge di Newton Se un corpo ha accelerazione $a = [m/s^2]$ e massa $m = [kg]$ allora necessità di una forza

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{2.1}$$

per raggiungerla. Dimensionalmente la forza F è data da $[kgm/s^2]$ che si indicherà con $[N]$ (Newton).

Terza legge di Newton Dati due corpi 1 e 2 che esercitano reciprocamente delle forze, queste sono uguali e contrarie

$$F_{12} = -F_{21} \tag{2.2}$$

Per capire l'esempio, Newton cita:

«Ad ogni azione corrisponde una reazione pari e contraria. Se qualcuno spinge una pietra col dito, anche il suo dito viene spinto dalla pietra. Se un cavallo tira una pietra legata ad una fune, anche il cavallo è tirato ugualmente verso la pietra: infatti la fune distesa tra le due parti, per lo stesso tentativo di allentarsi, spingerà il cavallo verso la pietra e la pietra verso il cavallo; e di tanto impedirà l'avanzare dell'uno di quanto promuoverà l'avanzare dell'altro.

Se un qualche corpo, urtando in un altro corpo, in qualche modo avrà mutato con la sua forza il moto dell'altro, a sua volta, a causa della forza contraria, subirà un medesimo mutamento del proprio moto in senso opposto. A queste azioni corrispondono uguali mutamenti, non di velocità, ma di moto. I mutamenti delle velocità, infatti, effettuati allo stesso modo in direzioni contrarie, in quanto i moti sono modificati in uguale misura, sono inversamente proporzionali ai corpi.»

> ***TIP:*** tutte le forze che agiscono su un corpo sono forze da contatte, ad eccezione della forza di gravità.

Le leggi di Newton, in generale, introducono un importante concetto: la forza F causa il moto, la massa m di un corpo determina quanto il corpo si oppone a tale moto.

Forza risultante Se F_1 e F_2 formano un angolo θ, allora la risultante è:

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\theta} \tag{2.3}$$

2.1 Attrito radente

L'attrito radente si manifesta per oggetti solidi che strisciano su superfici solide. Vi sono due tipologie di attrito:

- Attrito statico: si oppone al movimento del corpo, produce una forza ugualmente contraria a quella applicata. Il massimo di forza applicate è dato da $F_s = u_sN$ dove u_s è detto coefficiente d'attrito e N è la forza normale.
- Attrito dinamico: l'oggetto inizia a muoversi quando viene applicata una forza maggiore a F_s. A questo punto la forza contraria dell'attritto cambia, e diventa $F_k = u_kN$ dove u_k è detto coefficiente di attrito dinamico.

2.2 Piano inclinato

Una massa m è posta su un piano inclinato a un angolo θ.

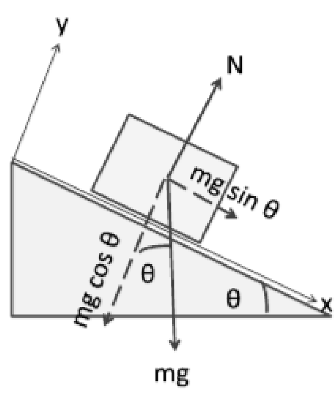

Figura 2.1: Piano inclinato

Per modellare il problema, gli assi x e y sono posti rispettivamente in maniera parallela e perpendicolare rispetto al piano. In questo modo la posizione sull'asse y del corpo non varia, ma cambia soltanto quella su x.

Equazioni di base La forza normale del piano è associata alla componente verticale. Si danno le equazioni:

$$ma_x = mg \sin \theta \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} N &= ma_y + mg \cos \theta \\ ma_y &= N - mg \cos \theta \end{aligned} \tag{2.5}$$

poichè la componente verticale è bilanciata dalla forza peso, l'equazione 2.5 diventa $ma_y = 0$. Nell'equazione 2.4 si può semplificare la massa, ottenendo:

$$a_x = g \sin \theta \tag{2.6}$$

Quindi il corpo scivolerà sul piano a un'accelerazione $g \sin \theta$.

Velocità in funzione della posizione Dall'equazione del moto $x(t) = \frac{1}{2} a_x t^2$ si ottiene la velocità $v_x(t) = a_x t$, dunque $t = \frac{v_x}{a_x}$, dunque $x = \frac{v_x^2}{2a_x}$, che permette di calcolare la velocità in funzione della posizione:

$$v_x = \sqrt{2xa_x} = \sqrt{2xg \sin \theta} \tag{2.7}$$

Piano inclinato con attrito Aggiungendo un attrito al piano, l'equazione della componente verticale resta $N = mg \cos \theta$. Quella orizzontale diventa:

$$ma_x = mg \sin \theta - f \tag{2.8}$$

f varia, a seconda che sia attrito statico o dinamico. Sia θ^* il massimo angolo tale che il corpo non abbia accelerazione, ovvero l'angolo in cui si manifestra l'attrito statico, dato $F_s = u_s N$ con $N = mg \cos \theta$ si ottiene:

$$a_x = mg \sin \theta^* = u_s mg \cos \theta^* \tag{2.9}$$

dividendo per mg:

$$\begin{aligned} \sin \theta^* &= u_s \cos \theta^* \\ u_s &= \tan \theta^* \end{aligned} \tag{2.10}$$

quando $\theta > \theta^*$ allora si manifesta l'attrito dinamico, e l'equazione diventa:

$$\begin{aligned} mg \sin \theta - u_k mg \cos \theta &= ma_x \\ a_x &= g(\sin \theta - u_k \cos \theta) \end{aligned} \tag{2.11}$$

2.3 Pendolo semplice

Una massa m è appesa a una fune di lunghezza L che oscilla attorno a un punto fisso.

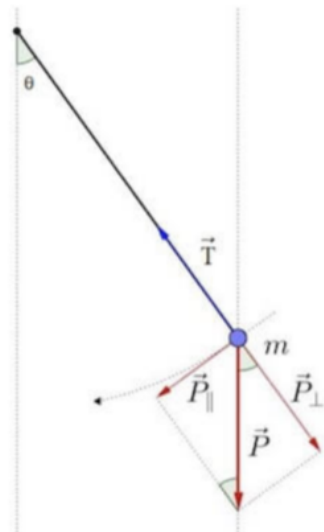

Figura 2.2: Pendolo semplice

Si sceglie come riferimento per l'asse y l'asse coincidente con la direzione della fune, e come asse x l'asse ortogonale a y

Sul punto agiscono la forza peso $P = mg$ verso il basso e la tensione della fune T. Sull'asse orizzontale appare solo la forza peso:

$$P_x = mg \sin \theta \tag{2.12}$$

Analizzando il triangolo rettangolo che ha per ipotenusa la fune L e per cateto orizzontale l'ampiezza x allora:

$$x = L \sin \theta \tag{2.13}$$

da cui:

$$\sin \theta = \frac{x}{L} \tag{2.14}$$

riscrivendo la 2.12:

$$P_x = mg \frac{x}{L} \tag{2.15}$$

applicando ils econdo principio della dinamica:

$$ma = -mg\frac{x}{L} \tag{2.16}$$

ovvero:

$$a = -g\frac{x}{L} \tag{2.17}$$

ricordando che $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$:

$$a = -g\omega^2 \tag{2.18}$$

ricordando inoltre che $w = 2\pi T$, allora si ottiene il periodo:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{2.19}$$

dunque per piccole oscillazioni il pendolo si comporta come un oscillatore armonico di periodo T.

2.4 Gravitazione

Dati due corpi a una distanza r l'equazione di gravitazione universale descrive l'attrazione tra i due:

$$\vec{F}_{12} = \vec{F}21 = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}$$

G è la costante di gravitazione universale.

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} Nm^2 kg^{-2}$$

3 Lavoro ed energia

3.1 Lavoro

Si definisce lavoro elementare W di una forza $\vec{F}$ associata a uno spostamento $d\vec{s}$ la forma differenziale data dal prodotto scalare tra $\vec{F}$ e ds:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} \tag{3.1}$$

L'unità di misura del lavoro è $[Nm] = [J]$ detta Joule.

Data una forza F che cambia rispetto al tempo, il lavoro totale svolto tra x_1 e x_2 è l'integrale di F tra x_1 e x_2:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx \tag{3.2}$$

Il lavoro si misura come $[L] = [FL] = [Nm]$ cioè Newton per metro, definito come Joule J.

3.2 Energia cinetica

Si definisce energia cinetica la quantità:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \tag{3.3}$$

L'unità di misura dell'energia cinetica è il Joule.

Se un corpo di massa m modifica la velocità da v_i a v_f allora varia l'energia cinetica:

$$\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 \tag{3.4}$$

3.3 Teorema dell'energia cinetica

Il teorema del lavoro e dell'energia cinetica afferma che il lavoro svolto dalla forza risultante su un corpo è uguale alla differenza nell'energia cinetica, ovvero:

$$W = \Delta K \tag{3.5}$$

3.3.1 Dimostrazione

Per dimostrarlo si ricorda che:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \tag{3.6}$$

applicando il secondo principio della dinamica, sostituendo $a = F/m$:

$$v^2 = v_0^2 + 2\frac{F}{m}d \tag{3.7}$$

con $d = (x_1 - x_2)$ distanza percorsa. Portando la forza da una parte e ciò che riguarda la particella dall'altra:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_2^2 = Fd \tag{3.8}$$

sostituendo:

$$K_1 - K_2 = L \tag{3.9}$$

3.4 Energia potenziale

Una forza si dice conservatica se dipende solo dalla posizione nello spazio del punto materiale.

Si definisce variazione dell'energia potenziale U il lavoro svolto dalla forza conservativa cambiata di segno:

$$\Delta U = -W \tag{3.10}$$

Sostituendo al lavoro la definizione generale per una forza variabile:

$$\Delta U = -\int_{x_1}^{x_2} F(x)dx \tag{3.11}$$

3.5 Energia meccanica

Si definisce energia meccanica E la somma dell'energia potenziale U e dell'energia cinetica K:

$$E = U + K \tag{3.12}$$

3.6 Principio di conservazione dell'energia meccanica

Il principio di conservazione dell'energia meccanica afferma che in un sistema in cui agiscono solo forze conservative allora l'energia meccanica si conserva, ovvero:

$$K_i + U_i = K_f + U_f \tag{3.13}$$

Il significato è che dato un corpo sotto l'effetto di una forza $F(x)$ che accelera e decelera, vi è un valore:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(x) \tag{3.14}$$

che non cambia mai. Ad esempio, nel caso della gravità $U = -mgy$, e quindi:

$$E_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2 = E_2 \tag{3.15}$$

3.6.1 Dimostrazione

Dal teorema dell'energia cinetica nella 3.5 e dalla definizione di energia potenziale nella 3.10, si ottiene:

$$\Delta K = -\Delta U \tag{3.16}$$

ovvero:

$$K_f - K_i = -U_f + U_i \tag{3.17}$$

spostando i termini:

$$K_f + U_f = K_i + U_i \tag{3.18}$$

4 Dinamica traslazionale

4.1 Sistemi di punti materiali

Un sistema di punti materiali è una collezione di $n > 1$ punti materiali. Questo tipo ha 6 variabili indipendenti: 3 per descrivere la posizione del punto in (x, y, z) e tre per descriverne la rotazione attorno agli assi.

Sul sistema di punti materiai agiscono molte forze, interne ed esterne. Sulla particella i la somma delle interazioni interne ed esterne è:

$$F_i = m_i \frac{d^2}{d^2 t} \vec{r}_i \tag{4.1}$$

la terza legge di Newton permette di eliminare le forze interne, in quanto uguali e contrarie, e considerare solo la somma delle forze esterne:

$$\vec{F} = M \frac{d^2}{d^2 t} \vec{r}_{CM} \tag{4.2}$$

con $M = \sum_i m_i$ massa totale del sistema e $\vec{r}_{CM}$ vettore del centro di massa, definito come media pesata dei vettori posizionali di ciascuno dei punti materiali del sistema:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} \tag{4.3}$$

4.2 Potenza

Si definisce potenza il lavoro svolto in una certa unità di tempo, ovvero la derivata del lavoro rispetto al tempo:

$$P = \frac{dL}{dt} \tag{4.4}$$

L'unità di misura è $[P] = [Js] = [W]$ detta Watt.

4.3 Quantità di moto

Si definisce quantità di moto $\vec{p}$ il prodotto scalare tra la massa e la velocià:

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{4.5}$$

La seconda legge di Newton si può riscrivere definendola come la derivata della quantità di moto rispetot al tempo:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{4.6}$$

4.4 Impulso e teorema dell'impulso

Si definisce impulso I di una forza F in un lasso di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ la grandezza:

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt \tag{4.7}$$

Il teorema dell'impulso afferma che l'impulso di una forza in un lasso di tempo è uguale alla variazione della quantità di moto in quel lasso di tempo:

$$\vec{I} = \Delta\vec{p} \tag{4.8}$$

4.5 Principio di conservazione della quantità di moto

Il principio di conservazione della quantità di moto afferma che se la forza risultante su un corpo è uguale a 0, allora la quantità di moto si conserva. Quindi:

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f \tag{4.9}$$

4.5.1 Dimostrazione

Dalla nuova definizione di forza nella 4.6 allora se $\vec{F} = 0$ anche la variazione della quantità di moto è nulla.

4.6 Urti

Dati due corpi che si scontrano, vi sono due possibilità:

- Urti anelastici: l'energia cinetica non si conserva. In pratica, i due corpi continuano a muoversi assieme alla stessa velocità.
- Urti elastici: l'energia cinetica si conserva.

Si considerino due corpi di massa m_1 e m_2 con velocità v_1 e v_2 prima dell'urto e velocità v_1' e v_2' dopo l'urto. In entrambi i casi vale la legge di conservazione del momento, quindi:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2' \tag{4.10}$$

Urti anelastici Negli urti anelastici i due corpi, dopo l'urto, hanno una velocità comune $v' = v_1' = v_2'$, quindi:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = v'(m_1 + m_2) \tag{4.11}$$

Di conseguenza:

$$v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \tag{4.12}$$

Urti elastici Negli urti elastici invece si conserva l'energia cinetica, quindi:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 (v_1')^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2')^2 \tag{4.13}$$

La 4.13 assieme alla 4.10 ha soluzioni:

$$\begin{aligned} v_1' &= v_1 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} + v_2 \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \\ v_2' &= v_2 \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} + v_1 \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \end{aligned} \tag{4.14}$$

5 Dinamica rotazionale

Un sistema di punti oltre a traslare può ruotare attorno a un punto O detto polo.

5.1 Corpi rigidi

Un corpo rigido è un sistema di punti materiali in cui le distanze tra ogni coppia di punti non cambia. Quindi il centro di massa è in una posizione immutabile.

Un corpo rigido con infiniti punti materiali è trattato come un insieme di volumi dV, la cui somma da il volume del corpo:

$$V = \int_V dV \tag{5.1}$$

ogni volumetto ha una massa dm, quindi la massa totale è:

$$M = \int dm \tag{5.2}$$

ogni volumetto ha densità:

$$\rho = \frac{dm}{dV} \tag{5.3}$$

quindi:

$$M = \int_V dV \tag{5.4}$$

Nn corpo rigido si dice omogeneo se ρ è costante. Vale:

$$M = \rho \int_V dV \tag{5.5}$$

Il centro di massa dunque è:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int_V \vec{r} \rho dV}{M} \tag{5.6}$$

se è omogeneo:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{V} \int_V \vec{r} dV \tag{5.7}$$

5.2 Rotazione con un'accelerazione costante

Sia P un punto in un corpo rigido distante r dal centro a un angolo θ dall'asse x. Se il corpo sta ruotando allora P si muove sulla circonferenza di raggio r. La distanza percorso in un certo spostamento di angolo θ è:

$$s = \theta r \tag{5.8}$$

derivando:

$$\frac{d}{dt} s = r \frac{d}{dt} \theta \tag{5.9}$$

si ricorda che la velocità angolare è la derivata dell'angolo percorso:

$$\omega = \frac{d}{dt} \theta \tag{5.10}$$

quindi a sinistra appare la velocità tangenziale:

$$v_T = \frac{d}{dt} s = r\omega \tag{5.11}$$

inoltre l'accelerazione angolare è:

$$\alpha = \frac{d}{dt} \omega = \frac{d^2}{dt^2} \theta \tag{5.12}$$

similmente l'accelerazione centripeta è:

$$a_r = \frac{v^2}{r} \tag{5.13}$$

utilizzando33 le equazioni del moto dalla cinematica:

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega &= \omega_0 + \alpha t \\ \omega^2 &= \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \end{aligned} \tag{5.14}$$

Momento di inerzia Dato un punto materiale di massa m che ruota s una circonferenza di raggio r posto sull piano O_{xy} intorno all'origine degli assi, si definisce momento di inerzia la tendenza del punto materiale ad opporsi alla rotazione ed è espresso dalla relazione:

$$I = mr^2 \tag{5.15}$$

5.3 Momento torcente

Il momento torcente $\vec{\tau}$ è l'equivalente rotazionale delle forza, ed è definito come il prodotto vettoriale tra la posizione $\vec{r}$ su cui è applicata la forza F (braccio della forza) e la forza stessa:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{5.16}$$

Il modulo è $\tau = rF\sin(\theta)$ con θ angolo compreso tra $\vec{r}$ e $\vec{F}$; la direzione è perpendicolare al piano individuato da $\vec{r}$ e $\vec{F}$; il verso si ottiene con la regola della mano destra.

5.4 Momento di inerzia

Il momento di inerzia I è l'equivalente rotazionale della messa, cioè descrive quanto il corpo si oppone alla rotazione. Dato un punto che ruota a una distanza r da un polo O si definisce il momento di inerzia come il prodotto tra la sua massa m ed r:

$$I = mr^2 \tag{5.17}$$

Inerzia in un sistema di punti materiali In un sistema di punti materiali l'inerzia è data dalla somma dell'inerzia dei punti.

Inerzia in un corpo rigido Il momento di inerzia in un corpo rigido è dato dalla somma del momento di inerzia dei volumetti, ovvero:

$$I = \int_V r^2 dm \tag{5.18}$$

Teorema di Huygens-Steiner Il teorema di Huygens-Steiner enuncia:

$$I = I_c + md^2 \tag{5.19}$$

Dove I_c è il momento di inerzia rispetto all'asse parallelo dato passante per il centro di massa, e d^2 è la distanza tra i due assi paralleli.

5.5 Momento angolare

Il momento angolare $\vec{L}$ è l'equivalente rotazionale della quantità di moto. Si definisce come il prodotto vettoriale tra il vettore $\vec{r}$ che congiunge il polo con la posizione del punto materiale e la quantità di moto:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \tag{5.20}$$

Il modulo è $L = rp\sin(\theta)$ con θ angolo compreso tra i vettori $\vec{r}$ e $\vec{p}$; la direzione è perpendicolare al piano individuato dai vettori $\vec{r}$ e $\vec{p}$; il verso si ottiene con la regola della mano destra.

Si osserva che derivando la 5.20 rispetto al tempo si ottiene:

$$\vec{\tau} = I\vec{\alpha} \tag{5.21}$$

Infatti il momento torcente $\vec{\tau}$ lega il momento di inerzia (l'equivalente della massa) all'accelerazione α ed è ciò che causa un aumento del momento angolare.

Momento angolare in un sistema di punti materiali In un sistema di punti materiali il momento angolare è dato dalla somma del momento angolare di tutti i punti del sistema.

Momento angolare nei corpi rigidi Nei corpi rigido il momento angolare è definito sulla componente del momento angoalre lungo la direzione dell'asse di rotazione $\vec{L}_z$:

$$\vec{L}_z = I\vec{\omega} \tag{5.22}$$

derivandola si ottiene la legge del moto rotatorio:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = -\vec{v}_O \times M\vec{v}_{CM} + \tau \tag{5.23}$$

5.6 Energia e lavoro nel moto rotazione

Il lavoro è definito come:

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} M d\theta \tag{5.24}$$

L'energia cinetica è definita come:

$$E = \frac{1}{2} I_z \omega^2 \tag{5.25}$$

Il teorema dell'energia cinetica:

$$W = \Delta E = \frac{1}{2} I_z (\omega_f^2 - \omega_i^2) \tag{5.26}$$

5.7 Moto di puro rotolamento

Il moto di puro rotolamento combina un moto di traslazione dal centro di massa con velocità v_{CM} e un moto rotatorio attorno al centro di massa con velocità angolare ω. Poichè vi è rotoalemtno puro vale $\vec{v}_C = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{r} = 0$ dove C è il punto di contatto, che è fermo rispetto al piano.

Le forza agenti sul corpo sono una forza esterna F, la forza di attrito f, il peso mg con la relativa reazione normale N.

Valgono:

$$\begin{aligned}
&\text{Asse x :} && F - f = ma_{CM} \\
&\text{Asse y :} && N - mg = 0 \\
&\text{Relazione tra accelerazione lineare e angolare :} && a_{CM} = \alpha r \\
&\text{Momento torcente rispetto al centro di massa :} && \tau = I\alpha \\
&\text{Espressione per l'accelerazione angolare :} && \alpha = \frac{\tau}{I} \\
&\text{Relazione con l'accelerazione del centro di massa :} && a_{CM} = \alpha r \\
&\text{Somma delle forze esterne :} && rF = I\alpha \\
&\text{Momento torcente totale :} && a_{CM} = \frac{r^2 F}{I_{CM} + mR^2} \\
&\text{Accelerazione finale :} && a_{CM} = F \frac{1}{m(a + \frac{I_{CM}}{mR^2}} \\
&\text{Forza massima prima dello slittamento :} && F \leq \mu_s mg(1 + \frac{mR^2}{I})
\end{aligned} \tag{5.27}$$

A Vettori

Un vettore è caratterizzato da:

- Modulo: quanto è lungo
- Direzione: l'angolo del vettore relativo a un certo asse, solitamente l'asse x.
- Verso

A.1 Versori

Si definiscono versori quei vettori che in uno spazio $\mathbb{R}^3$ puntano ai tre assi: $\hat{i} = (1, 0, 0), \hat{j} = (0, 1, 0), \hat{k} = (0, 0, 1)$. Ogni vettore si può scrivere come $\vec{v} = \hat{i}V_x + \hat{j}V_y + \hat{k}V_z$ dove V_x, V_y, V_z

sono detti componenti.

In un spazio a due dimensioni vale:

$$V_x = |V| \cos(\theta) \tag{A.1}$$

$$V_y = |V| \sin(\theta) \tag{A.2}$$

Facendo le inverse:

$$|V| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} \tag{A.3}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{V_x}{V_y} \tag{A.4}$$

A.2 Somma di vettori

Dati due vettori $\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{R}^k$, si calcola $\vec{v} + \vec{u}$ come segue:

- Date le componenti: siano $\vec{v} = (v_1, \cdots, v_k), \vec{u} = (u_1, \cdots, u_k)$ allora si sommano le singole componenti $\vec{v} + \vec{u} = (v_1 + u_1, \cdots, v_k + u_k)$.
- Dati i moduli e l'angolo θ tra i due vettori: si applica il teorema del coseno, e si calcola $|\vec{v} + \vec{u}| = \sqrt{|\vec{v}|^2 + |\vec{u}|^2 + |\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \cos\theta}$

Per la somma di vettori valgono la proprietà commutativa, la proprietà associativa, l'esistenza dell'elemento neutro e l'esistenza dell'elemento opposto.

A.3 Prodotto vettoriale

Dati due vettori $\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{R}^k$, l'operazione di moltiplicazione $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è calcolata per $\vec{v} \times \vec{u}$ come segue:

- Il modulo è $|\vec{v} \times \vec{u}| = |\vec{v}| \cdot |vecu| \cdot \sin\theta$
- La direzione è la direzione ortagonale che contiene i vettori $\vec{v}$ e $\vec{u}$

B Media MOG

Si calcola la media dei coefficienti c_1 e c_2:

$$c = \frac{c_1 + c_2}{2}$$

poi si calcola la media degli esponenti e_1 e e_2:

$$e = \frac{e_1 + e_2}{2}$$

si analizza la media dei coefficienti:

- se la somma è pari allora il risultato è c^e
- se la somma è dispari allora si pone $e = e - 0.5$ e il risultato è $3 \cdot c^e$