Lezione 19

Funzioni periodiche

Una funzione $f(x)$ si dice periodica di periodo $T>0$ se

$f(x+T) = f(x) \Rightarrow f(x+2T) = f(x+T+T) = f(x)$, si osserva:

- se f è T-periodica $\Rightarrow g(x) = f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)$ è 2π periodica, infatti

$$g(x+2\pi) = f\left(\frac{T}{2\pi}(x+2\pi)\right) = f\left(\frac{T}{2\pi}x+T\right) = f\left(\frac{T}{2\pi}x\right) = g(x)$$

- $sen(x)$ e $cos(x)$ sono 2π periodiche, così anche $sen(nx)$ e $cos(nx)$

Serie di Fourier

definizione

si definisce serie di Fourier $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n cos(nx) + b_n sen(nx)\right]$

se $f(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n cos(nx) + b_n sen(nx)\right]$ allora f è 2π periodica

Determinare i coefficienti

osservazioni

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos mx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \pi & n = m \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \cdot \cos mx \, dx = 0 \quad \forall n, m \in \mathbb{R}$$

a_0

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\,dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx)\,dx\right] = a_0 \pi \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

a_n

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cdot \cos mx \, dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos mx \, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \cdot \cos mx \, dx\right] =$$

$$= a_m \pi \Rightarrow a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos mx \, dx$$

b_n

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \operatorname{sen} mx \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \operatorname{sen} mx \, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} mx \, dx \right] =$$

$$= b_m \pi \Rightarrow b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} mx$$

Funzioni continue a tratti

sia $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, f si dice continua a tratti se è continua in tutti i punti di $[a, b]$ tranne al più un numero n finito di punti in cui ha discontinuità di tipo salto o eliminabile

Teorema

ipotesi: sia f 2π periodica e continua a tratti su un intervallo T

tesi

la serie di Fourier associata converge $\forall x \in T$ e vale

$$L = \begin{cases} f(x) & \forall x \text{ in cui } f \text{ è continua} \\ \dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2} & \forall x \text{ in cui } f \text{ è discontinua} \end{cases}$$

osservazioni

f pari $\Rightarrow b_n = 0$, $a_n = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$

f dispari $\Rightarrow a_n = 0$, $b_n = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx$

Identità di Parseval

sia f 2π periodica e continua a tratti su $T \Rightarrow \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx = \dfrac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$