Lezione 9

Spazi vettoriali

sia $(\mathbb{K}, +_{\mathbb{K}}, \cdot_{\mathbb{K}})$ un campo, sia $(V, +_V)$ un gruppo abeliano

V si dice spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ se esiste la funzione

$\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ $[(k, \underline{v}) \to k\underline{v}]$ t.c valgono:

- $\forall h, k \in \mathbb{K}, \forall \underline{v} \in V \quad (h +_{\mathbb{K}} k) \cdot \underline{v} = h \cdot \underline{v} +_V k \cdot \underline{v}$
- $\forall k \in \mathbb{K}, \forall \underline{v}, \underline{u} \in V \quad (\underline{v} +_V \underline{u}) \cdot k = k \cdot \underline{v} +_V k \cdot \underline{v}$
- $\forall h, k \in \mathbb{K}, \forall \underline{v} \in V \quad (h \cdot_{\mathbb{K}} k) \cdot \underline{v} = h \cdot (k \cdot \underline{v})$
- $\forall \underline{v} \in V$, sia $1_{\mathbb{K}}$ neutro di $\cdot_{\mathbb{K}}$ $1_{\mathbb{K}} \cdot \underline{v} = \underline{v}$

gli elementi di V sono detti vettori, gli elementi di $\mathbb{K}$ scalari

se $\mathbb{K}$ è un campo:

- $\mathbb{K}^n$ è uno spazio vettoriale
- $Mat_{n \times m}(\mathbb{K})$ è uno spazio vettoriale
- $\mathbb{K}[X], \mathbb{K}_{\leq n}[X], \mathbb{K}_{=n}[X]$ sono spazi vettoriali

Proprietà spazi vettoriali

siano V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, $0_{\mathbb{K}}$ elem. neutro di $+_{\mathbb{K}}$, $\underline{0}_V$ elem. neutro di $+_V$, allora valgono:

- $0_{\mathbb{K}} \underline{v} = \underline{0}_v \quad \forall \underline{v} \in V$,
- $k \underline{0}_v = \underline{0}_v \quad \forall k \in \mathbb{K}$
- $k \underline{0}_v = k(\underline{0}_v + \underline{0}_v) = k\underline{0}_v + k\underline{0}_v \quad \forall k \in \mathbb{K}$

Sottospazi vettoriali

sia $U \subseteq V$, si dice che U è sottospazio vettoriale di V se valgono:

- $\forall \underline{u}_1, \underline{u}_2 \in U$, $\underline{u}_1 + \underline{u}_2 \in U$ (U preserva la somma)
- $\forall \underline{u} \in U$, $\forall k \in \mathbb{K}$, $k\underline{u} \in U$ (U preserva il prodotto scalare)

si osserva che U sottospazio vettoriale di $V \Longrightarrow \underline{0}_v \in U$

Somma di sottospazi vettoriali

siano V e U due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale X

si definisce la somma tra V e U

$$V+U = \{ \underline{x} \in X : \exists \underline{v} \in V, \exists \underline{u} \in U : \underline{x} = \underline{v} + \underline{u} \} \subseteq V \cup U$$

$V+U$ è un sottospazio di X

Teorema: l'intersezione di due sottospazi è un sottospazio

ipotesi: sia V un $\mathbb{K}$ spazio, siano U e T due sottospazi di V

tesi: $U \cap T$ è un sottospazio di V

dimostrazione

si dimostra mostrando che vale la definizione di sottospazio

1. $\underline{0}_V \in U \cap T$

per ipotesi U e T sono sottospazi quindi $\underline{0}_V \in U$ e $\underline{0}_V \in T \Rightarrow \underline{0}_V \in U \cap T$

2. $\forall a, b \in U \cap T \quad a+b \in U \cap T$

se $a, b \in U \cap T$ allora $a, b \in U$ e $a, b \in T$, per ipotesi U e T sono sottospa=zi quindi $a+b \in U$ e $a+b \in T \Rightarrow a+b \in U \cap T$

3. $\forall \underline{v} \in U \cap T, \forall k \in \mathbb{K} \quad k\underline{v} \in U \cap T$

se $\underline{v} \in U \cap T$ allora $\underline{v} \in U$ e $\underline{v} \in T$, per ipotesi U e T sono sottospazi quindi $k\underline{v} \in U$ e $k\underline{v} \in T \Rightarrow k\underline{v} \in U \cap T$

osservazioni

$U \cup T$ non è sempre un sottospazio