Lezione 12 – Matrici rappresentative

Mappe

sia V un $\mathbb{K}$-spazio con dimensione n e base $\mathcal{V}=\{\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_n\}$

sappiamo che V è isomorfo a $\mathbb{K}^n$, costruiamo un isomorfismo esplicito

$$\varphi_{\mathcal{V}}: V \to \mathbb{K}^n, \text{ dato } \underline{v}\in V: \underline{v}=x_1\underline{v}_1+\dots+x_n\underline{v}_n, \ \varphi_{\mathcal{V}}(\underline{v})=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

si osserva che $\varphi_{\mathcal{V}}$ è lineare e ammette inversa lineare

$$\varphi_{\mathcal{V}}^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=x_1\underline{v}_1+\dots+x_n\underline{v}_n=\underline{v}$$

Matrice rappresentativa

siano:

- V e W due $\mathbb{K}$-spazi
- $\mathcal{V}=\{\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_n\}$ e $\mathcal{W}=\{\underline{w}_1,\dots,\underline{w}_m\}$ basi di V e W ($\dim(V)=n$, $\dim(W)=m$)
- $f: V\to W$ un'app. lineare

si definisce matrice rappresentativa di f la matrice ${}_{\mathcal{W}}M_{\mathcal{V}}(f)=[k_{ij}]$

gli elementi k_{ij} sono ricavati dalla comb. lineare

$$f(\underline{v}_j)=k_1\underline{w}_1+\dots+k_n\underline{w}_m \quad \text{con } 1\le j\le n$$

Teorema: costruzione dell'immagine

ipotesi

- siano V e W due $\mathbb{K}$-spazi finitamente generati
- sia $f: V \longrightarrow W$ un'app. lineare
- sia ${}_{w}M_{v}(f)$ la matrice rappresentativa di f
- sia $\underline{v} \in V : \underline{v} = x_1 \underline{v}_1 + \dots + \underline{v}_n x_n$
- sia $\underline{w} = f(\underline{v}) = y_1 \underline{w}_1 + \dots + y_n \underline{w}_n$

tesi

${}_{w}M_{v}(f) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ dalla matrice rappresentativa ottengo l'immagine

osservazioni

date le mappe $\varphi V: V \longrightarrow \mathbb{K}^n$ e $\varphi W: W \longrightarrow \mathbb{K}^m$ allora $(*)$ è commutativo

$(*)$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi V"'] & W \arrow[d, "\varphi W"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "{}_{w}M_{v}(f)"'] & \mathbb{K}^m \end{tikzcd} \implies \begin{tikzcd} V & W \arrow[l, "f^{-1}"'] \\ \mathbb{K}^n \arrow[u, "\varphi V^{-1}"] & \mathbb{K}^m \arrow[l, "{}_{v}M_{w}(f)"] \arrow[u, "\varphi W^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

Insieme hom

siano V e W due $\mathbb{K}$-spazi, si definisce l'insieme

$$hom(V, W) = \{f : V \rightarrow W : f \text{ è un'app. lineare}\}$$

Teorema: isomorfismo di hom

enunciato

siano V e W due $\mathbb{K}$-spazi tali che $dim(V) = n$ e $dim(W) = m$, siano $v = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ base di V e $w = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m\}$ base di W, allora:

- $hom(V, W)$ è un $\mathbb{K}$-spazio, $dim(hom(V, W)) = n \cdot m$
- $\exists$ isomorfismo $\phi : hom(V, W) \rightarrow Mat_{n \times m}(\mathbb{K})$

ϕ associa a un'app. lineare la matrice rappresentativa rispetto a v e w

ne consegue che fissate delle basi la mat. rappresentativa è unica

Matrice del cambio di base

sia V uno spazio su $\mathbb{K}$, si definisce matrice del cambio di base da v a w la matrice rappresentativa ${}_w M_v(id)$

valgono: ${}_l M_v(f) = {}_l M_h(id)\, {}_h M_k(f)\, {}_k M_v(id)$ e ${}_h M_k(id) = ({}_k M_h(id))^{-1}$

Proprietà matrici rappresentative

sia $f: V \longrightarrow W$ rappresentata da una matrice $M \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$, allora:

- $\dim(V) = n$
- $\dim(W) = m$
- $\dim(\operatorname{Im}(f)) = rk(M)$
- $\dim(\ker(f)) = n - rk(M)$
- ogni matrice che rappresenta f anche con basi diverse avrà stesso numero di righe, colonne e rango