Lezione 10

Limiti di funzioni

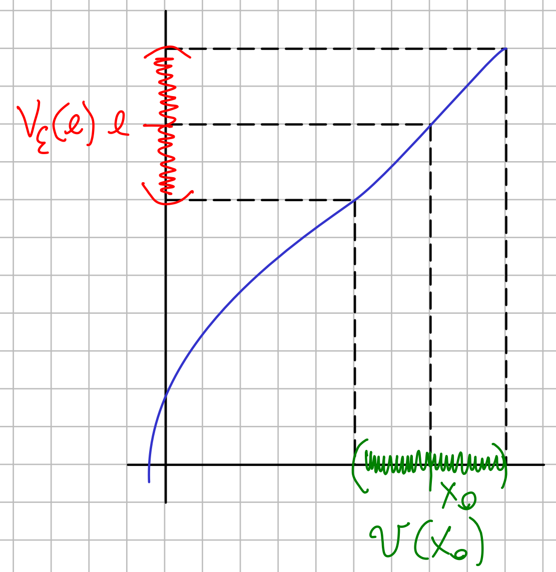
sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sia p punto di accumulazione di A

$L = \pm\infty \vee L \in \mathbb{R}$ si definisce limite di $f(x)$ e si scrive $\lim_{x \to p} f(x) = L$ se

$$\forall V_\varepsilon(L)\ \exists U_\delta(p) : f(x) \in V_\varepsilon(L)\ \forall x \in U_\delta(p) \cap A \setminus \{p\}$$

limite finito tendente a un valore finito

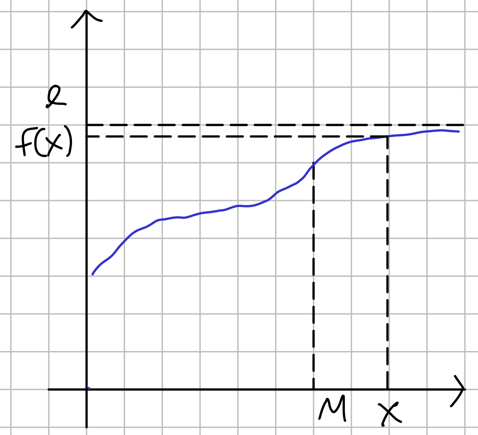
$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ se $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$



limite finito tendente ad infinito

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \quad \text{se} \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists M > 0 : \left| f(x) - \ell \right| < \varepsilon \quad \forall x > M$$

$$(\forall x < -M)$$



Limite destro e sinistro

sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sia x_0 di accumulazione per A, sia $L = \pm\infty \vee L \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to x_0^{\pm}} f(x) = L \quad \text{se} \quad \forall V_\varepsilon(L) \; \exists U_{\delta\pm}(x_0) : f(x) \in V_\varepsilon(L) \; \forall x \in U_{\delta\pm}(x_0) \cap A \setminus \{x_0\}$$

Teorema legame limiti di funzioni e di successioni

ipotesi: sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sia p di accumulazione per A, sia $L = \pm\infty \vee L \in \mathbb{R}$

tesi:

$\lim_{x \to p} f(x) = L \Longleftrightarrow \forall$ successione x_n, con $x_n \in A$ e $x_n \longrightarrow p$ si ha $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = L$

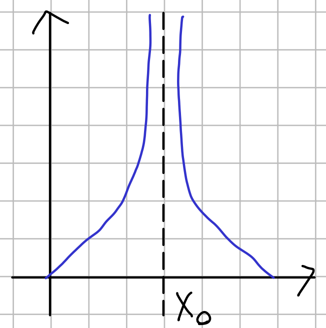
osservazione:

i teoremi visti sui limiti di successioni valgono anche per i limiti di funzioni

Asintoti verticali e orizzontali

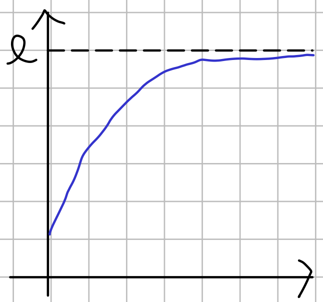
asintoto verticale

se $\lim_{x \to x_0^{(\pm)}} f(x) = \pm\infty$ con $x \in \mathbb{R}$ allora x_0 si definisce asintoto verticale



asintoto orizzontale

se $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ allora l si definisce asintoto orizzontale a $\pm\infty$



Teorema di composizione dei limiti

tesi:

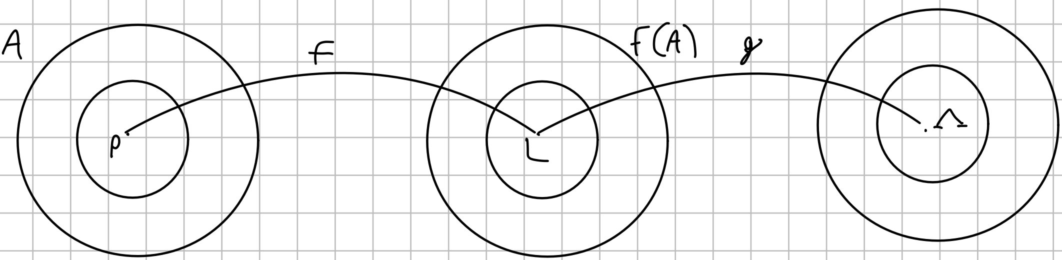
sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, sia $g: f(A) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

sia p di accumulazione per A, ed L di accumulazione per $f(A)$

sia $\lim\limits_{x \to p} f(x) = L$, con $f(x) \neq L$ in $V(p) \cap A \setminus \{p\}$

sia $\lim\limits_{y \to L} g(y) = \Lambda$

ipotesi: $\lim\limits_{x \to p} g\left(f(x)\right) = \Lambda$



Funzione $[f(x)]^{g(x)}$

la funzione $h(x)=[f(x)]^{g(x)}$ non è composta

$D=D(f(x))\cap D(g(f(x)))$ $\quad f(x)>0\ \forall f(x)>0$, con $g(x)>0$

Asintoti obliqui

$y=mx+q$ è asintoto obliquo di $f: A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ se esistono finiti i limiti

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x},\ m\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \qquad q=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-mx],\ q\in\mathbb{R}$$

infatti $f(x)=mx+q+o(1)$

Limiti notevoli

sia $f(x)$ infinitesima per $x\to p$, $p=\pm\infty \vee p\in\mathbb{R}$

- $\displaystyle\lim_{x\to p}\frac{\operatorname{sen} f(x)}{f(x)}=1$

- $\displaystyle\lim_{x\to p}\frac{\tan f(x)}{f(x)}=1$

- $$\lim_{x \to p} \frac{\arctan f(x)}{f(x)} = 1$$

- $$\lim_{x \to p} \frac{\cos f(x) - 1}{(f(x))^2} = -\frac{1}{2}$$

- $$\lim_{x \to p} \frac{e^{f(x)} - 1}{f(x)} = 1$$

- $$\lim_{x \to p} \frac{\log(1 + f(x))}{f(x)} = 1$$

- $$\lim_{x \to p} \frac{(1 + f(x))^{\alpha} - 1}{f(x)} = \alpha$$

- $$\lim_{x \to p} \left(1 + f(x)\right)^{\frac{1}{f(x)}}$$