Lezione 13 - Diagonalizzabilità

Insieme End

si definisce l'insieme degli endomorfismi di V:

$$End(V) = \{f : V \longrightarrow V \text{ t.c. } f \text{ sia un'applicazione lineare}\}$$

si osserva che $\dim(V) = \dim(V) \Rightarrow f: V \longrightarrow V \in hom(V,V) \Rightarrow hom(V,V) = End(V)$

la matrice rappresentati di $f \in End(V)$ si denota $M_v(f) = {}_vM_v(f)$

Autovettori e autovalori

sia V uno spazio su $\mathbb{K}$, sia $f \in End(V)$, sia $\underline{v} \in V \setminus \{\underline{0}\}$, allora:

- $\underline{v}$ si dice autovettore per f se $\exists \lambda \in \mathbb{K} : f(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$
- λ si dice autovalore per V

Teorema di diagonalizzabilità I

enunciato

sia V un $\mathbb{K}$-spazio, sia $f: V \longrightarrow V$ un'applicazione lineare, allora:

$M_V(f)$ è diagonale $\Leftrightarrow$ la base di V è formata solo da autovettori

$$\Downarrow$$

$$M_v(f) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Diagonalizzabilità

sia $f \in End(V)$, f si dice diagonalizzabile se esiste una base v di V tale che $M_{v}(f)$ sia diagonale

Spettro

sia $f \in End(V)$, si definisce spettro di f l'insieme degli autovalori di f

Polinomio caratteristico

sia $f \in End(V)$, sia v una base di V, sia $M_{v}(f)$ la matrice rappresentativa rispetto a v, sia I la matrice identità

si definisce polinomio caratteristico di f il polinomio

$$p_f(t) = det\left(M_{v}(f) - tI\right)$$

Osservazioni

valgono:

- $deg(p_f) = dim(V)$
- gli autovalori di f sono tutte e sole le soluzioni di $p_f(t) = 0$

Teorema di diagonalizzabilità II

enunciato

sia $f \in End(V)$, sia $\dim(V) = n$, valgono:

- $|Sol(P_f(t)=0)| = n \Rightarrow f$ è diagonalizzabile
- $|Sol(P_f(t)=0)| < n \Rightarrow f$ non è diagonalizzabile
- $P_f(t)=0$ ha alcune soluzioni $\Rightarrow$ boh

Molteplicità algebrica

sia λ un autovalore di $f \in End(V)$, per il teorema di Ruffini $(t-\lambda)$ divide $P_f(t)$ per un numero $a(\lambda)$ volte detto molteplicità algebrica

la molteplicità algebrica di λ è il numero $a(\lambda)$ t.c.

$$P_f(t) \mid (t-\lambda)^{a(\lambda)} \text{ e } P_f(t) \nmid (t-\lambda)^{a(\lambda)}$$

Autospazi

sia λ autovalore di $f \in End(V)$

si definisce l'insieme $V_\lambda = \{\underline{v} \in V : f(\underline{v}) = \lambda \underline{v}\}$ autospazio per λ

Teorema: l'autospazio è un sottospazio

enunciato

sia λ un autovalore di $f \in End(V)$, allora V_λ è sottospazio di V

dimostrazione

mostro le proprietà di sottospazio:

- $\forall \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V_\lambda \quad \underline{v}_1 + \underline{v}_2 \in V_\lambda$

$f(\underline{v}_1) = \lambda \underline{v}_1, \ f(\underline{v}_2) = \lambda \underline{v}_2 \Rightarrow f(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = \lambda \underline{v}_1 + \lambda \underline{v}_2 = \lambda(\underline{v}_1 + \underline{v}_2)$ vale per def. V_λ

- $\forall \underline{v} \in V, \forall k \in \mathbb{K} \quad k\underline{v} \in V_\lambda$

$f(\underline{v}) = \lambda \underline{v} \Rightarrow k f(\underline{v}) = k \lambda \underline{v} = \lambda(k\underline{v})$ vale per def. V_λ

Molteplicità geometrica

sia λ un autovalore di $f \in End(V)$

si definisce molteplicità geometrica di λ il numero $\gamma(\lambda) = \dim(V_\lambda)$

Teorema: relazione tra molteplicità e dimensione dello spazio

enunciato

sia λ un autovalore di $f \in End(V)$, allora $1 \leq \gamma(\lambda) \leq a(\lambda) \leq \dim(V)$

Teorema di diagonalizzabilità III

enunciato

siano $f \in End(V)$, $dim(V) = n$, $\{\lambda_1, ..., \lambda_k\}$ lo spettro di f, allora:

- f diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ esiste una base di V di soli autovettori
- f ha n autovalori distinti $\Rightarrow$ f diagonalizzabile
- f ha $m < n$ autovalori $\Rightarrow$ f non diagonalizzabile
- $a(\lambda_1) + ... + a(\lambda_k) = n \Rightarrow (f$ diagonalizzabile $\Leftrightarrow a(\lambda_i) = g(\lambda_i)\ \forall i = 1, ..., k)$
- f diagonalizzabile $\Rightarrow M_N(f)$ ha sulla diagonale i λ_i

Formule aggiuntive

$$g(\lambda) = n - rk(M_N(f) - \lambda I)$$

Schema riassuntivo diagonalizzabilità

sia $f \in End(V)$, sia $\dim(V) = n$, per stabilire se f è diagonalizzabile:

1. scelgo $\mathcal{V}$ base di V
2. calcolo $M_{\mathcal{V}}(f)$
3. calcolo $p_f(t)$
4. calcolo $\lambda_i = sol(p_f(t) = 0)$ e $a(\lambda_i)$ $\forall i = 1, \dots, k$
5. se $a(\lambda_1) + \dots + a(\lambda_k) < n \Rightarrow f$ non è diagonalizzabile
6. se $a(\lambda_1) + \dots + a(\lambda_k) = n$ allora:
   - 6.1 se $a(\lambda_i) = 1$ $\forall i \Rightarrow f$ è diagonalizzabile
   - 6.2 se $a(\lambda_i) \neq 1$ $\forall i$ calcolo $g(\lambda_i)$
   - 6.3 se $a(\lambda_i) \neq g(\lambda_i) \Rightarrow f$ non è diagonalizzabile
   - 6.4 se $a(\lambda_i) = g(\lambda_i)$ $\forall i = 1, \dots, k \Rightarrow f$ è diagonalizzabile