Matrice ridotta

sia $A \in Mat_{n \times m}$, si scrive A_{ij} la matrice ottenuta eliminando da A la riga i e la colonna j, quindi $A_{ij} \in Mat_{(n-1)\times(m-1)}$

Determinante

sia $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{R})$ una matrice quadrata, si definisce determinante di A:

- se $n=1$ allora $A=[a]$, $\det(A)=\det([a])=a$
- se $n>1$ $\det(A)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A_{ij})$ fissata una i o una j

osservazioni

- se A ha una riga o una colonna di soli 0, allora $\det(A)=0$
- $\det(A)=\det(A^t)$

Teorema di Binet

ipotesi

- sia $A \in Mat_{n \times n}$
- sia $B \in Mat_{n \times n}$

tesi

$det(AB) = det(A)det(B) = det(BA)$

Conseguenza Binet: Teorema di invertibilità

enunciato

$A \in GL_n(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow det(A) \neq 0$

dimostrazione

$\Longrightarrow$

$A \in GL_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \exists A^{-1} : AA^{-1} = I, \ det(I) = 1 \Rightarrow det(AA^{-1}) = det(A)det(A^{-1}) = det(I) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow det(A^{-1}) = \dfrac{1}{det(A)}$, che vale se $det(A) \neq 0$

Cofattore

data la matrice A, si dice matrice dei cofattori di A la matrice

$cof(A) = [c_{ij}]$, con $c_{ij} = (-1)^{i+j} det(A_{ij})$

Invertire una matrice con i cofattori

1) calcolo $cof(A)$

2) calcolo $cof(A)^T$

3) $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} cof(A)^T$