Lezione 13

Massimo e minimo relativi

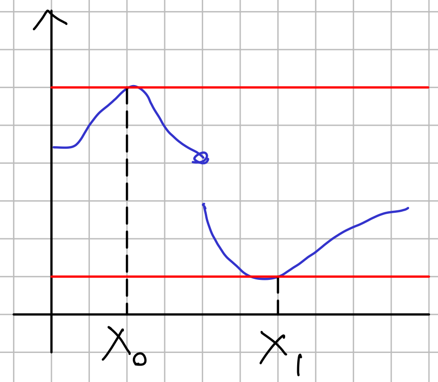
sia $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sia $x_0 \in I$

x_0 si dice di massimo/minimo relativo per f in I se

$\exists\, U_\delta(x_0) : f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in U_\delta(x_0) \cap I$
$\qquad\qquad\qquad f(x) \geq f(x_0)$

Teorema di Fermat

ipotesi



- sia $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- sia x_0 punto interno di I
- sia x_0 punto estremante di f
- sia f derivabile in x_0

tesi: $f'(x_0)=0$

dimostrazione per x_0 di minimo relativo

1.

x_0 è di minimo relativo ed interno ad I quindi $\exists \delta>0 : (x_0-\delta, x_0+\delta) \subseteq I$

nel quale vale $f(x) \geq f(x_0) \Rightarrow f(x)-f(x_0) \geq 0 \quad \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$

2.

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \begin{cases} \geq 0 & \forall x \in (x_0, x_0+\delta) \\ \leq 0 & \forall x \in (x_0-\delta, x_0) \end{cases}$$

3.

$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_+(x_0) \geq 0$ per teorema di permanenza del segno

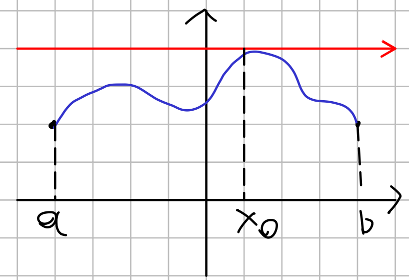
$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_-(x_0) \leq 0$ per teorema di permanenza del segno

4.

$f'(x_0)$ è derivabile in x_0, $f'_+(x_0) \geq 0$ e $f'_-(x_0) \leq 0 \Rightarrow f'(x_0)=0$

Teorema di Rolle

ipotesi



· sia $f: [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

· sia f continua su $[a, b]$

· sia f derivabile su (a, b)

· sia $f(a) = f(b)$

tesi: $\exists x_0 \in (a, b) : f'(x_0) = 0$

dimostrazione

se f è costante allora $f(x) = c \; \forall x \in [a, b]$ allora $f'(x) = 0 \; \forall x \in (a, b)$

1.

f continua in $[a, b] \Rightarrow f$ ammette max e min assoluti per T. di Weierstrass

$\Rightarrow \exists x_0, x_1 \in [a, b] : x_0$ e x_1 sono max e min assoluti

2.

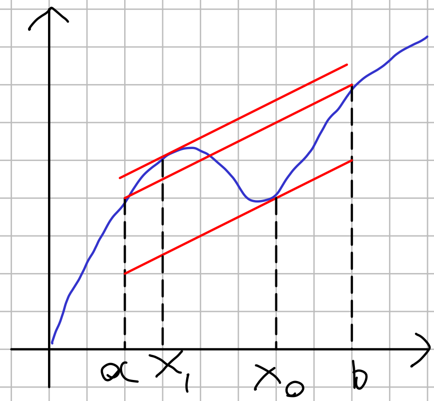
x_0 e x_1 non possono essere agli estremi altrimenti f è costante

su $[a, b] \Rightarrow x_0 \vee x_1 \in (a, b)$

3.

poichè $x_0, x_1 \in (a, b)$ vale teorema di Fermat $\Rightarrow \exists x_0 \in (a, b): f'(x_0) = 0$

Teorema di Lagrange/del valore medio



ipotesi

- sia $f: [a, b] \to \mathbb{R}$
- sia f continua in $[a, b]$
- sia f derivabile in (a, b)

tesi: $\exists x_0 \in [a, b]: f'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ $\left(f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a) \right)$

dimostrazione

1.

sia $g(x) = f(x) - \left[f(a) + \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right]$ è continua e derivabile

2.

$$g(a) = f(a) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) \right] = 0$$

$\Rightarrow g(a) = g(b)$

$$g(b) = f(b) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) \right] = 0$$

3.

applico Rolle, quindi $\exists x_0 \in (a, b) : g'(x_0) = 0$

4.

$$g'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$ se $g'(x_0) = 0 \Rightarrow f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \Rightarrow f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Teorema di Cauchy

ipotesi

- siano $f, g : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
- siano f, g continue in $[a, b]$
- siano f, g derivabili in (a, b)
- sia $g'(x_0) \neq 0$

tesi: $\exists x_0 \in (a, b) : \dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

osservazione: $g'(x_0) = 1 \Rightarrow f'(x_0) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (teorema di Lagrange)

Conseguenze teorema di Lagrange

Teorema funzioni con derivata nulla sono costanti

ipotesi

- sia f derivabile su (a, b)
- sia f continua su $[a, b]$
- sia $f'(x) = 0 \; \forall x \in (a, b)$

tesi: $f(x) = c \quad \forall x \in [a, b]$

Teorema funzioni con derivata uguale differiscono per una costante

ipotesi

- siano f e g continue su $[a, b]$
- siano f e g derivabili su (a, b)
- valga $f'(x) = g'(x)$

tesi: $f(x) = g(x) + c \quad \forall x \in (a, b)$

Teorema relazione tra monotonia e segno della derivata

ipotesi: sia f continua su $[a, b]$ e derivabile su (a, b)

tesi

- $f'(x) \geq 0 \iff$ f è monotona crescente su $[a, b]$
- $f'(x) \leq 0 \iff$ f è monotona decrescente su $[a, b]$

- $f'(x) > 0 \Rightarrow$ f è monotona strettamente crescente su $[a, b]$
- $f'(x) < 0 \Rightarrow$ f è monotona strettamente decrescente su $[a, b]$

Teorema relazione tra concavità e segno della derivata seconda

ipotesi

- sia f continua e derivabile su $[a, b]$
- sia f derivabile due volte su (a, b)

tesi:

- f è concava verso l'alto $\iff f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$
- f è concava verso il basso $\iff f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a, b)$

Punto di flesso

sia f continua e derivabile su $[a, b]$, sia f derivabile due volte su $[a, b) \setminus \{x_0\}$, $x_0 \in (a, b)$

se $\begin{cases} f'(x) \geq 0 \text{ in } [a, x_0) \\ \\ f'(x) \leq 0 \text{ in } (x_0, b] \end{cases} \Rightarrow x_0$ si dice punto di flesso $\begin{cases} \text{orizzontale se } f'(x_0)=0 \\ \text{verticale se } \nexists f'(x_0) \\ \text{obliquo se } f'(x_0) \neq 0 \end{cases}$

Prima formula dell'incremento finito

sia $f: (a, b) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sia $x_0 \in A$, sia f derivabile in x_0

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

Seconda formula dell'incremento finito

sia f derivabile in $U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$

$\forall x \in U_\delta \ \exists z : f'(z) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ovvero $f(x) = f'(z)(x - x_0) + f(x_0)$