Lezione 12

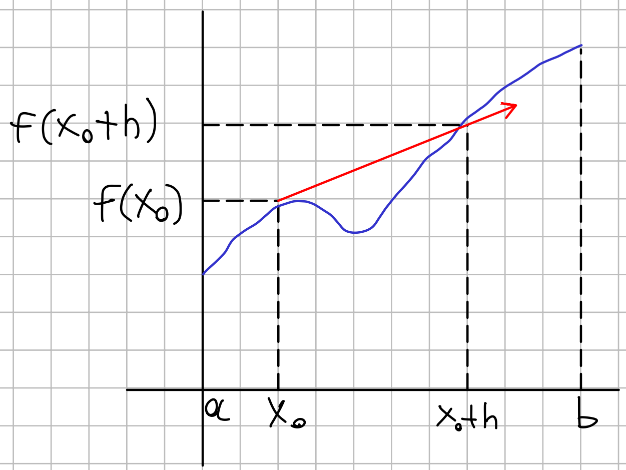
Derivate

introduzione

sia $f:(a,b)$, sia $x_0 \in (a,b)$, sia $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : x_0 + h \in (a,b)$

si definisce rapporto incrementale centrato in x_0 con incremento h:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ = coefficiente della retta passante per $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0+h, f(x_0+h))$

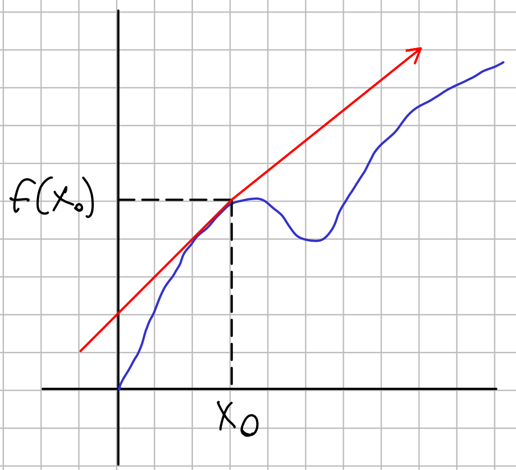
definizione

sia $f : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \to$; sia $x_0 \in (a, b)$

f si dice derivabile in x_0 se esiste finito $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

$$= \left(\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)$$

si indica col simbolo $f'(x_0)$ "derivata prima di f in x_0"



$f'(x_0) = m$ della retta tangente al grafico di $f(x)$ con equazione

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Teorema relazione tra derivabilità e continuità

ipotesi: sia $f:(a,b) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sia $x_0 \in (a,b)$, sia f derivabile in x_0

tesi: f è continua in x_0

dimostrazione:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \left[f(x) - f(x_0) + f(x_0) \right] = \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0) + f(x_0) \right] = \lim_{x \to x_0} f(x_0)$$

osservazione: f continua in $x_0 \not\Rightarrow f$ derivabile in x_0 (controesempio $f(x)=|x|$)

Derivata destra e sinistra

sia $f:(a,b) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sia $x_0 \in (a,b)$, sia f derivabile in x_0

f si dice derivabile a destra/sinistra se esiste finito

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'_+(x_0) \qquad \left(\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \right)$$

$$(h \to 0^-) \qquad \left(f'_-(x_0) \right) \qquad (x \to x_0^-)$$

Derivabilità

i) f è derivabile in $x_0 \iff$ esistono $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ e sono uguali

ii) se $f:[a,b)$ allora f è derivabile se esiste finito $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

iii) se $f:(a,b]$ allora f è derivabile se esiste finito $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

in generale $f: I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è derivabile su I se f è derivabile $\forall x_0\in I$

Punti di non derivabilità

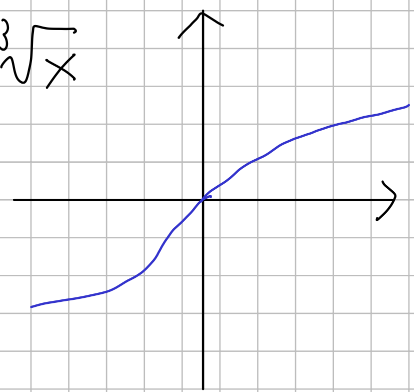
Punto di flesso a tangente verticale

sia $f: I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, sia $x_0\in I$

x_0 si dice punto a tangente verticale se

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \pm\infty$$

$f(x)=\sqrt[3]{x}$



($h\to 0^+$ se x_0 è estremo destro di I)

($h\to 0^-$ se x_0 è estremo sinistro di I)

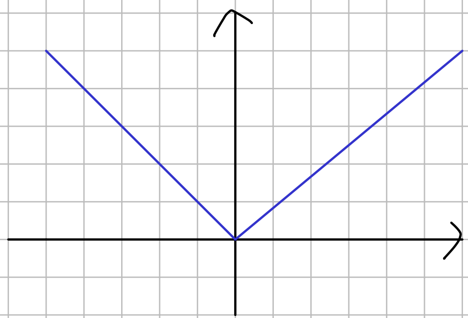
punto angolare

sia $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sia $x_0 \in I$

f si dice punto angolare se vale almeno una tra:

i) $\exists f'_+(x_0)$ e $\exists f'_-(x_0)$ con $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$

ii) $\exists f'_{\pm}(x_0)$ e $\nexists f'_{\mp}(x_0)$

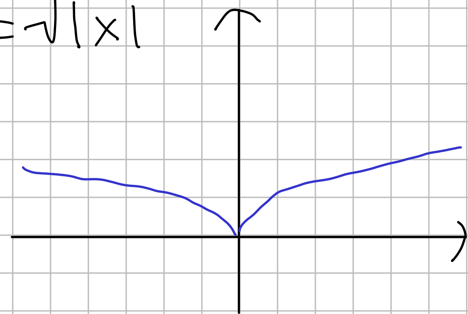


$f(x) = |x|$

punto cuspidale

sia $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sia $x_0 \in I$

$f(x) = \sqrt{|x|}$



x_0 è punto cuspidale se vale

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \pm\infty \quad e \quad \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \mp\infty$$

Derivate funzioni elementari

- $f(x) = k$, $f'(x) = 0$ con $A = \mathbb{R}$, $A' = \mathbb{R}$
- $f(x) = x^{\alpha}$, $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ con $A =$ dipende da α, $A' =$ dipende da $\alpha - 1$
- $f(x) = e^{x}$, $f'(x) = e^{x}$ con $A = \mathbb{R}$, $A' = \mathbb{R}$
- $f(x) = a^{x}$, $f'(x) = a^{x} \log a$ con $A = \mathbb{R}$, $A' = \mathbb{R}$
- $f(x) = \log x$, $f'(x) = \frac{1}{x}$ con $A = (0, +\infty)$, $A' = (0, +\infty)$
- $f(x) = \log_a x$, $f'(x) = \frac{1}{x \log a}$ con $A = (0, +\infty)$, $A' = (0, +\infty)$
- $f(x) = \operatorname{sen} x$, $f'(x) = \cos x$ con $A = \mathbb{R}$, $A' = \mathbb{R}$
- $f(x) = \cos x$, $f'(x) = -\operatorname{sen} x$ con $A = \mathbb{R}$, $A' = \mathbb{R}$
- $f(x) = \tan x$, $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ con $A = x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $A' = x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

- $f(x) = \arcsen x$, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ con $A = [-1, 1]$, $A' = (-1, 1)$

- $f(x) = \arccos x$, $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ con $A = [-1, 1]$, $A' = (-1, 1)$

- $f(x) = \arctan x$, $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ con $A = \mathbb{R}$, $A' = \mathbb{R}$

Operazioni con le derivate

siano f e g derivabili in I, sia $x \in I$

- $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

- $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$ con $g(x) \neq 0$

- $(k f(x))' = k f'(x)$

- $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}$

derivata della composta

sia $f:(a,b)\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, sia $x_0\in(a,b)$, sia f derivabile in x_0, sia f non costante in $U(x_0)$, sia $g:(a,b)\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivabile in $f(x_0)$

$g\circ f$ è derivabile in x_0 e vale $(f\circ g)'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$

Teorema di deravibilità della funzione inversa

ipotesi

- sia $f:[a,b]\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, continua e invertibile su $[a,b]$
- sia f derivabile in $x_0\in[a,b]$ con $f'(x_0)\neq 0$

tesi: f^{-1} è derivabile in $y_0=f(x_0)$ e vale $(f^{-1})'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$

Teorema

ipotesi:

- sia $f: (a, b) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- sia $x_0 \in (a, b)$,
- sia f continua in
- sia f derivabile in $(a, b) \setminus \{x_0\}$

tesi: $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Derivate successive

sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia $f': A' \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

si chiama derivata seconda di f' la funzione $(f')'$ con $A'' = \{x \in A' \cap f''(A)\}$

la notazione $f^{(n)}$ indica la derivata n-esima $f^0 = f$, $f^{(1)} = f'$