# Lezione 18

## Serie di Taylor

### notazione

- se $f$ è derivabile $k$ volte su $I \subseteq \mathbb{R}$ si scrive $f \in C^k(I)$
- se $f$ è derivabile infinite volte su $I \subseteq \mathbb{R}$ si scrive $f \in C^\infty(I)$

### introduzione

se $f \in C^\infty(-R, R)$ $R > 0$ e $\exists \alpha_n : f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$, allora valgono:

- $x = 0 \Rightarrow f(0) = \alpha_0$
- $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \alpha_n x^{n-1}$, $f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)\, \alpha_n x^{n-k}$
- $x = 0 \Rightarrow f'(0) = \alpha_1$, $f^{(k)}(0) = k(k-1)\dots(k-k+1)\alpha_k = k!\,\alpha_k \Rightarrow \alpha_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

conclusione

nel caso generale $f \in C^{\infty}(x_0 - R, x_0 + R)$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ allora

$f(x) = S_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$ $S$ è chiamata serie di Taylor centrata

in $x_0$ e associata ad $f$.

## Teorema di sviluppabilità in serie di Taylor

ipotesi: sia $f \in C^{\infty}(x_0 - R, x_0 + R)$, esista $M > 0$: $|f^{(n)}(x)| \leq M \quad \forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$

tesi: $f$ è sviluppabile in serie di Taylor centrata in $x_0$