Lezione 15

Primitive

Definizione

sia $f: I \subseteq \mathbb{R}$, si dice che $F: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è primitiva di f se:

i) F è derivabile in I

ii) $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$

Teorema

ipotesi: sia F una primitiva di f

tesi

i) tutte le funzioni $G(x) = F(x) + c$ sono primitive di f

ii) ogni primitiva G di f è del tipo $G(x) = F(x) + c$

Proprietà di Darboux

ipotesi

- sia g derivabile in $[a, b]$
- sia $y_0 \in (g'(a), g'(b)) \vee y_0 \in (g'(b), g'(a))$
- sia $g'(a) < g'(b) \vee g'(a) > g'(b)$

tesi

$\exists x_0 \in (a, b) : g'(x_0) = y_0$ (le derivate hanno la prop. dei valori intermedi)

Conseguenza

se $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ha una discontinuità di tipo salto allora f non ammette primitiva

Teorema

ipotesi: sia $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sia f continua su I

tesi: f ammette primitiva su I

Integrale indefinito

definizione

sia $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continua su I

l'insieme di tutte le primitive di f su I viene chiamato integrale indefinito e si indica col simbolo

$$\int f(x)\,dx$$

integrali immediati

- $\int 1\,dx = x + c$
- $\int x^{\alpha}\,dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad \alpha \neq -1$
- $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \log|x| + c$
- $\int e^{x}\,dx = e^{x} + c$
- $\int a^{x}\,dx = \dfrac{a^{x}}{\log a} + c$
- $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + c$
- $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + c$
- $\int \dfrac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + c$
- $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} x + c$
- $\int -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos x + c$

proprietà di linearità degli integrali indefiniti

- $\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx$
- $\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

integrale composta $ax+b$

sia $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua su I, sia $a \neq 0$, sia $\int f(x)\,dx = F(x) + c$ su I

$$\int f(\alpha x+b)\,dx = \frac{F(\alpha x+b)}{\alpha} + c$$

integrali quasi immediati

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \Rightarrow \int f'(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = f(g(x)) + c$$

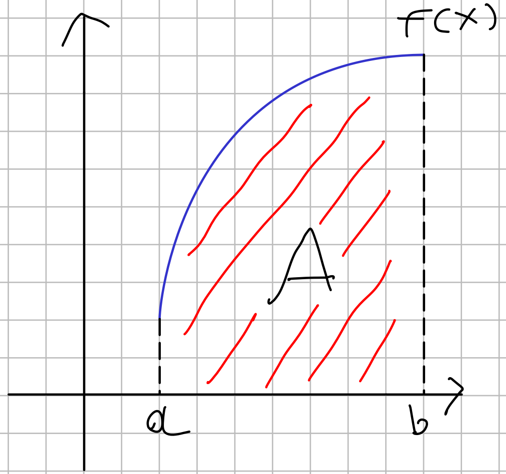
- $\int e^{f(x)} \cdot f'(x)\,dx = e^{f(x)} + c$
- $\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}\,dx = \arctan(f(x)) + c$
- $\int [f(x)]^{\alpha} \cdot f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$

$$\cdot \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + c$$

Integrale definito

Calcolo di aree sotto una curva

come si calcola l'area sottesa al grafico di f?



1.

si definisce partizione di $[a,b]$ su un insieme di punti x_i con $i=0,1,\dots,n$ tali che $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$

2.

si consideri $f:[a,b]\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ limitata su $[a,b]$ e una partizione P_n di $[a,b]$, poniamo: $m_i=\text{Inf } f(x)\ x\in[x_{i-1},x_i]$ e $M_i=\text{Sup } f(x)\ x\in[x_{i-1},x_i]$

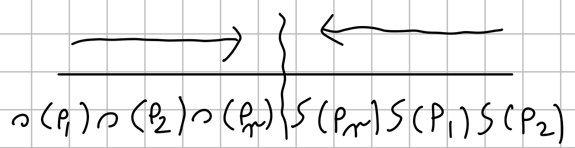
si definiscono somma parziale inferiore/superiore:

$$s(P_n,f)=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1}) \qquad S(P_n,f)=\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1})$$

3.

si ha che $A\le S(P_n,f)$ e $A\ge s(P_n,f) \Rightarrow s(P_n,f)\le A\le S(P_n,f)$

$$B_1=\{s(P_n,f)\}\subseteq\mathbb{R} \qquad B_2=\{S(P_n,f)\}\subseteq\mathbb{R}$$



$$\text{Sup } B_1=\lim_{n\to+\infty} s(P_n) \qquad \text{Inf } B_2=\lim_{n\to+\infty} S(P_n)$$

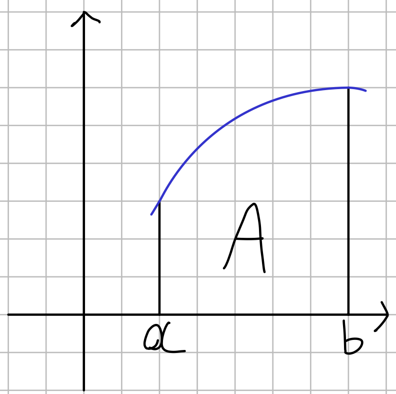
definizione

sia $f:[a,b]\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ limitata su $[a,b]$

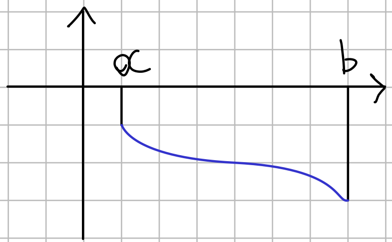
f si dice integrabile secondo Riemann su $[a,b]$ se $\text{Sup } B_1=\text{Inf } B_2$

e si scrive $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

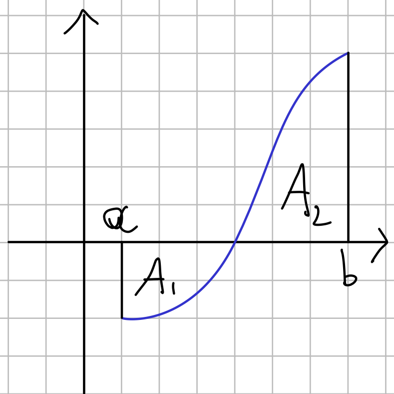
Interpretazione geometrica



$f(x) \geq 0$ su $[a, b]$ $\int_a^b f(x)\,dx = A$



$f(x) \leq 0$ su $[a, b]$ $\int_a^b f(x)\,dx = -A$



$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2$$

$$A_1 + A_2 = \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Teorema di integrabilità delle funzioni continue

ipotesi: sia f continua su $[a, b]$

tesi: f è r-integrabile su $[a, b]$

Corollario teorema di integrabilità delle funzioni continue

ipotesi

sia f continua su $[a, b]$ tranne un numero finito di punti in cui ammette discontinuità di tipo eliminabile

tesi: f è r-integrabile su $[a, b]$

Proprietà dell'integrale definito

1) $$\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx$$

2) $$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

3) $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$

4) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

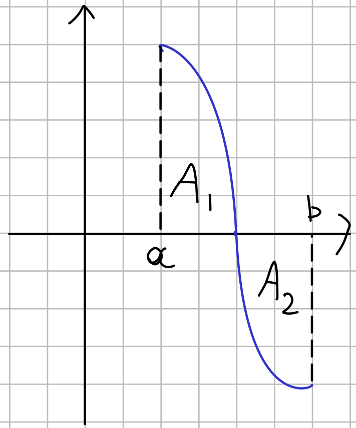
5) $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

6) sia $a < b \Rightarrow \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

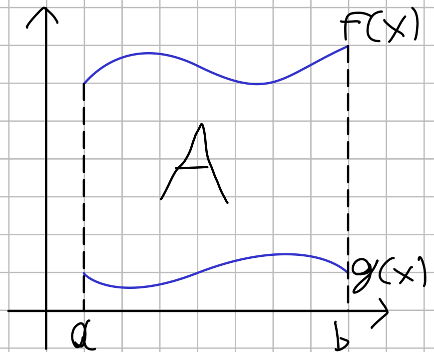
7) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ con f r-integrabile su $[a,b]$, $[a,c]$, $[c,b]$

8) f pari, $a>0 \Rightarrow \int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

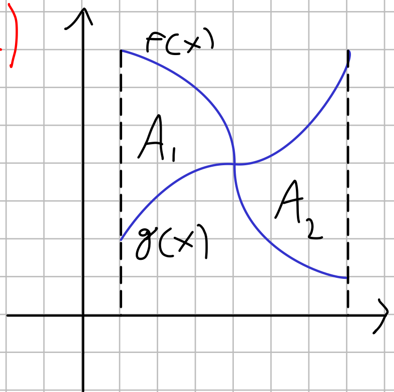
9) f dispari, $a>0 \Rightarrow \int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$

10) 

$$A_1 + A_2 = \int_a^b |f(x)|$$

11) 

$$A = \int_a^b f(x) - \int_a^b g(x) = \int_a^b \left[f(x) - g(x) \right]$$

12) 

$$A_1 + A_2 = \int_a^b |f(x) - g(x)|$$

13) $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$$

Teorema della media integrabile

ipotesi: sia f continua su $[a,b]$

tesi: $\exists z \in [a,b]: \int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\cdot f(z) \Rightarrow \boxed{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx} = f(z)$

media integrale

dimostrazione

f continua su $[a,b]$ per ipotesi $\Rightarrow$ (t. Weierstrass) $\exists x_0, x_1: f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$

definisco $m = f(x_0) = \operatorname{Min} f(x)$, $M = f(x_1) = \operatorname{Max} f(x)$

segue:

$$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx \Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a) \Rightarrow m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_0) \leq y_0 \leq f(x_1) \Rightarrow (\text{p. Darboux})\ \exists z \in [x_0, x_1] \subset [a,b] : f(z) = y_0 \Rightarrow f(z) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Teorema fondamentale del calcolo integrale

introduzione: funzione integrale

sia f continua su $[a,b]$ fisso due estremi dell'intervallo a e $x \in [a,b]$

definisco $F:[a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ $\quad F(a)=0$

F è funzione integrale di f su $[a,b]$

ipotesi: sia f continua su $[a,b]$

tesi

- $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ è derivabile su $[a,b]$
- $F'(x) = f(x)\ \forall x \in [a,b] \Rightarrow F(x)$ è primitiva di $f(x)$

dimostrazione

sia $x_0 \in (a,b)$

h sufficientemente piccolo $\Rightarrow x_0 + h \in (a,b)$

considero il rapporto incrementale di F centrato in x_0:

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_a^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt\right] = \frac{1}{h}\left[\int_a^{x_0} f(t)\,dt + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt\right] = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt$$

$\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt$ è la media integrale di f su $[x_0, x_0+h]$ per $h>0$

$[x_0+h, x_0]$ per $h<0 = -\frac{1}{h}\int_{x_0+h}^{x_0} f(t)\,dt$

quindi per t. media integrale $\exists z \in [x_0, x_0+h] : f(z) = \frac{1}{h}\int_{h}^{x_0+h} f(t)\,dt$

$$F'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} f(z) = \lim_{z\to x_0} f(z) = f(x_0)$$

Teorema formula fondamentale del calcolo integrale

ipotesi: sia f continua su $[a,b]$, sia G una primitiva di f su $[a,b]$

tesi: $\int_a^b f(x)\,dx = G(b)-G(a)$

dimostrazione

da t. fondamentale del calcolo integrale: $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ è una primitiva di f su $[a,b]$

data G un'altra primitiva di f, vale: $F(x)=G(x)+c$ *

a * si sostituisce:

i) $x=a \Rightarrow F(a)=G(a)+c \quad F(a)=\int_a^a f(t)\,dt=0 \Rightarrow G(a)+c=0 \Rightarrow c=-G(a)$

ii) $x=b \Rightarrow F(b)=G(b)+c \Rightarrow F(b)=G(b)-G(a) \quad \boxed{F(b)=\int_a^b f(t)\,dt=G(b)-G(a)}$

Metodi di integrazione

Integrazione per parti

$$[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x) \Rightarrow f(x)\cdot g(x)=\int f'(x)\cdot g(x)\,dx+\int f(x)\cdot g'(x)\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\int f'(x)\cdot g(x)\,dx=f(x)\cdot g(x)-\int f(x)\cdot g'(x)}$$

Integrazione per sostituzione

sia f continua su $[a, b]$, sia $g: [\alpha, \beta] \longrightarrow [a, b]$

siano g e g' continue su $[\alpha, \beta]$, valga $g(\alpha) = a$ e $g(\beta) = b$

allora $\int_{\alpha}^{\beta} f(g(t)) \cdot g'(t)\, dt = \int_{a}^{b} f(x)\, dx$

OSS. 1

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t)) \cdot g'(t)\, dt \Rightarrow x = g(t),\ g' > 0 \vee g' < 0,\ \alpha = g^{-1}(a) \quad \beta = g^{-1}(b)$$

OSS. 2 (sostituzione negli integrali definiti)

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx = \left[\int_{\alpha}^{\beta} f(g(t)) \cdot g'(t)\, dt\right]_{t = g^{-1}(x)}$$

Integrazione di funzioni fratte

sia $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, possono verificarsi tre casi

$\deg P(x) \geq \deg Q(x)$

si divide $P(x)$ per $Q(x)$ e si ottiene il quoziente $S(x)$ e il resto $R(x)$

$$P(x) = S(x) \cdot Q(x) + R(x) \Rightarrow \int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{S(x) \cdot Q(x) + R(x)}{Q(x)}dx = \int S(x)dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}dx$$

$\deg P(x) < \deg Q(x)$

se $Q(x)$ accetta radici tutte distinte:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{A_0}{x-x_0}dx + \int \frac{A_1}{x-x_1}dx + \ldots + \int \frac{A_n}{x-x_n}dx$$

se $Q(x)$ accetta radici non distinte:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{A_0}{x-x_0}dx + \int \frac{A_1}{(x-x_0)^{\mu}} + \ldots + \int \frac{A_n}{x-x_n}$$ dove μ è la molteplicità

se $Q(x)$ non ha radici:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx \rightsquigarrow \int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}dx$$

Integrali impropri (o generalizzati)

su $(a, b]$ (o $[a, b)$)

sia f continua su $(a, b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{k \to a^+} \int_k^b f(x)\,dx$$ con $a < k < b$, può valere:

- $l \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ è integrabile in senso improprio su $(a, b]$ ed è convergente ad l
- $\pm\infty \Rightarrow f$ è integrale in senso improprio su $(a, b]$ ed è divergente a $\pm\infty$
- $\nexists \Rightarrow f$ non è integrabile in senso improprio su $(a, b]$

su $[a, +\infty)$ (o $(-\infty, b]$)

sia f continua su $[a, +\infty)$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{k \to +\infty} \int_a^k f(x)\,dx$$ con $k > a$, può valere:

- $l \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ è integrabile in senso improprio su $[a, +\infty)$ ed è convergente ad l

- $\pm\infty \Rightarrow f$ è integrabile in senso improprio su $[a, +\infty)$ ed è divergente a $\pm\infty$

- $\nexists \Rightarrow f$ non è integrabile in senso improprio su $[a, +\infty)$

Proprietà degli integrali impropri

se $f(x) \geq 0$ (≤ 0) e continua $\forall x \in I \Rightarrow$ l'integrale improprio $\int_I f(x)\,dx$ $\exists$ sempre

Casi generalizzati utili

1) $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}$ converge a $\frac{1}{1-\alpha} \Leftrightarrow \alpha < 1$

2) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ converge a $\frac{1}{1-\alpha} \Leftrightarrow \alpha > 1$

3) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^b}\,dx$ converge $\Leftrightarrow$ $\alpha > 1, \forall b$; $\alpha = 1, b > 1$

4) $\int_0^{1/2} \frac{1}{x^\alpha |\log x|^b}\,dx$ converge $\Leftrightarrow$ $\alpha < 1, \forall b$; $\alpha = 1, b > 1$

Criteri del confronto per integrali impropri

criterio base

siano f e g continue su I, sia $f(x) \geq 0$ $\forall x \in I$, sia $0 \leq f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in I$

- $\int_I f(x)\,dx$ divergente $\Rightarrow \int_I g(x)\,dx$ divergente
- $\int_I g(x)\,dx$ convergente $\Rightarrow \int_I f(x)\,dx$ convergente

criterio del confronto asintotico

siano f e g continue su I, siano $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ $\forall x \in I$
sia $f(x) \sim g(x)$ per $x \to p$ con p estremo problematico di I

allora $\int_I f(x)\,dx$ è convergente/divergente $\Leftrightarrow \int_I g(x)\,dx$ è convergente/divergente

criterio della convergenza assoluta

sia f continua su I

allora $\int_I |f(x)|\,dx$ converge $\Rightarrow \int_I f(x)\,dx$ converge