Linguaggi formali e automi

Gabriele Fioco

a.a. 2023-2024

Contents

1 Concetti di base sui linguaggi

1.1 Alfabeti, parole e insiemi di parole

Si danno le seguenti definizioni:

- Alfabeto: insieme finito di simboli, denotato con: $\Sigma = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$.
- Parola su Σ: sequenza finita di simboli appartenenti a Σ. Una parola formata dallo stesso simbolo n volte si può scrivere come $a^n, a \in \Sigma$.
- Parola vuota: parola non contenente nessun simbolo indicata col simbolo ε.
- Lunghezza di una parola: sia W una parola, si denota con $|W|$ la sua lunghezza.
- Σ^*: insieme delle parole su Σ compresa ε.
- Σ^+: insieme delle parole su Σ esclusa ε. Vale $\Sigma^+ = \Sigma^* \backslash \{\varepsilon\}$.

1.2 Prodotto di giustapposizione tra parole

Date le parole $x = x_1...x_n$ e $y = y_1...y_m$ si dice prodotto di x, y la parola $x \cdot y = x_1...x_n y_1...y_m$.

Il prodotto ha le seguenti proprietà:

- Chiuso rispetto a Σ^*.
- Vale la proprietà ssociativa: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z), \forall x, y, z \in \Sigma^*$.
- Ammette elemento neutro e: $e = \epsilon$
- $|x \cdot y| = |x| + |y|$

Dunque $(\Sigma^*, \cdot)$ forma un monoide.

1.3 Prefisso e suffisso

Date $x, y \in \Sigma^*$ si definiscono:

- Prefisso: x è prefisso di y quando $y = x \cdot z$ per qualche $z \in \Sigma^*$
- Suffisso: x è suffisso di y quando $y = z \cdot x$ per qualche $z \in \Sigma^*$
- Fattore: x è fattore di y quando $y = z \cdot x \cdot w$ per qualche $z, w \in \Sigma^*$

Si osserva che data $x \in \Sigma^*$, le parole x e ε sono contemporaneamente prefisso, suffisso e fattore di x.

1.4 Linguaggi

Un linguaggio L sull'alfabeto Σ è un qualunque sottoinsieme di Σ^*. Ovvero $L \subseteq \Sigma^*$. L può avere quantità di parole finita o infinita.

Un linguaggio infinito del tipo $L = \{\varepsilon, a, aa, ..., a^n, ...\}$ si può scrivere anche $L = \{a^n : n \in \mathbb{N}\}$ dove $a^0 = \varepsilon$ oppure $L = \Sigma^* = \{a\}^* = a^*$

Casi particolari di linguaggi sono:

- Linguaggio vuoto: $L = \emptyset$.
- Liguaggio della parola vuota: $L = \{\varepsilon\}$.

1.5 Operazioni sui linguaggi

Siano $A, B, L \subseteq \Sigma^*$ tre linguaggi si possono effettuare due tipi di operazioni: insiemistiche e tipiche dei linguaggi formali.

Le operazioni insiemistiche sono:

- Unione: $A \cup B = \{w \in \Sigma^* : w \in A \vee w \in B\}$
- Intersezione: $A \cap B = \{w \in \Sigma^* : w \in A \wedge w \in B\}$
- Complemento: $L^c = \{w \in \Sigma^* : w \notin L\}$

Si nota che le operazioni di unione e intersezioni di due linguaggi finiti danno un linguaggio finito, viceversa l'operazione di complemento su un linguaggio finito da un linguaggio infinito.

Le operazioni tipiche dei linguaggi formali sono:

- Prodotto: $A \cdot B = \{xy \in \Sigma^* : x \in A \wedge y \in B\}$
- Potenza: la potenza è definita ricorsivamente:

$$L^k = \begin{cases} \{\varepsilon\} & \text{se } k = 0 \\ L \cdot L^{k-1} & \text{se } k > 0 \end{cases}$$

- Chiusura di Kleene, di due tipi:
  - $L^* = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup \ ... \ \cup L^k \cup \ ... = \bigcup_{k=0}^{\infty} L^k$
  - $L^+ = L^1 \cup L^2 \cup \ ... \ \cup L^k \cup \ ... = \bigcup_{k=1}^{\infty} L^k$

Con la chiusura di Kleene si può definire formalmente $\Sigma^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} \Sigma^k$. Infatti si osserva che Σ^k è composto dalle parole di lunghezza k componibili con Σ.

1.6 Codici

Un linguaggio L è un codice quando ogni parola in L^+ è decomponibile in un unico modo come prodotto di parole in L. Se ogni parola di L non è prefisso di altre parole di L, allora L si dice codice prefisso.

I codici prefissi sono importanti perchè ammettono un algoritmo di decodifica istantaneo.

2 Linguaggi ricorsivi e ricorsivamente enumerabili

2.1 Costruire un linguaggio

Un linguaggio L può essere costruito con due metodi:

- Estensivo: $L = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$ solo se L è finito.
- Intensivo: $L = \{w \in \Sigma^* : P(w) = 1\}$ per L infinito (ma anche finito).

Nel metodo intensivo P esprime cosa debba soddisfare w per appartenere ad L. Dunque ad ogni L è associato un problema di decisione P_L, bisogna infatti decidere se $P(w)$ sia vero o falso.

P_L è così definito:

- input: $w \in \Sigma^*$;
- output: 1 o 0 a seconda che $P(w)$ sia vero/falso.

Se w appartiene ad L allora w soddisfa P, viceversa non soddisfa P. Siamo interessati a sapere se P_L ammette una soluzione automatica e quindi trovare quella migliore.

Se L ammette un sistema formale questo può essere di due tipi:

- Sistema riconoscitivo: si stabilisce se $w \in L$.
- Sistema generativo: si generano le parole di L.

2.2 Riconoscitori

Un sistema riconoscitivo rappresenta un linguaggio $L \subseteq \Sigma^*$ utilizzando un algoritmo. Questo prende in ingresso uan parola $w \in \Sigma^*$ e da in uscita 1 se $w \in L$, 0 se $w \notin L$.

L'algoritmo quindi calcola la funzione X_L caratteristica di L definita come segue:

$$X_L(w) = \begin{cases} 1 \text{ se } w \in L \\ 0 \text{ se } w \notin L \end{cases}$$

2.3 Procedure e algoritmi

Un programma presenta due connotazioni: dal punto di vista sintattico è una parola binaria $w \in \{0,1\}^*$ rappresentante il codice ASCII delle istruzioni; dal punto di vista semantico è una procedura. La funzione $F_w : \{0,1\}^* \to \{0,1\}$ è la semantica del programma.

Si definisce procedura una sequenza finita di istruzioni che generano dei passi di calcolo che possono terminare dando un risultato.

Data una procedura rappresentata dal codice ASCII w, considerando per semplicità un input $x \in \{0,1\}^*$ si denotata con $F_w(x)$ il risultato della procedura su input x e si usa la notazione:

- $F_w(x) \uparrow$: w su input x non termina.
- $F_w(x) \downarrow$: w su input x termina.
- $F_w(x) = 1$: w su input x da risultato 1
- $F_w(x) = 0$: w su input x da risultato 0

Si osserva che:

- l'input è una parola binaria $x \in \{0,1\}^*$;
- dal punto di vista sintattico anche $w \in \{0,1\}^*$, quindi w può essere un input per un altro programma.

Un algoritmo è una procedura che termina su qualsiasi input.

2.4 Linguaggi ricorsivi

Un linguaggio L è detto ricorsivo quando esiste un algoritmo w tale che:

$$F_w(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \in L \\ 0 \text{ se } x \notin L \end{cases}$$

Dunque l'algoritmo w calcola la funzione caratteristica X_L di L e termina sempre, permettendo di sapere per ogni x se essa appartiene o meno ad L.

Inoltre se L è ricorsivo:

- Il problema di decisione P_L è detto decidibile.
- L ammette un sistema riconoscitivo, si può dire se una parola appartiene o meno al linguaggio.

2.5 Linguaggi ricorsivamente enumerabili

Un linguaggio L è ricorsivamente enumerabile quando esiste una procedura w tale che:

$$F_w(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in L \\ \uparrow & \text{se } x \notin L \end{cases}$$

Se L è ricorsivamente enumerabile allora:

- Il problema P_L è detto semidecidibile.
- L ammette un sistema generativo, se ne possono elencare le parole.

2.6 Teorema di inclusione dei linguaggi ricorsivi nei ricorsivamente enumerabili

2.6.1 Enunciato

Se L è un linguaggio ricorsivo, allora L è un linguaggio ricorsivamente enumerabile.

2.6.2 Osservazioni

Se L ammette un sistema riconoscitivo allora ammette un sistema generativo.

2.6.3 Dimostrazione

Per ipotesi L è ricorsivo quindi ammette un algoritmo $A(x)$. Per definizione un linguaggio è ricorsivamente enumerabile quando ammette una procedura. Mostro quindi una procedura $P(x)$ per L.

Procedura $P(x)$:

```
y = A(x)

if (y = 1) {
    return 1
}

loop
```

Recupero il risultato dell'algoritmo $A(x)$ che darà sempre 1 o 0. Se il risultato è 1 allora $x \in L$ e ritorno 1, se il risultato è 0 allora $x \notin L$ e vado in loop.

2.7 Teorema: il linguaggio complemento di un linguaggio ricorsivo è ricorsivo

2.7.1 Enunciato

Se L è ricorsivo allora L^C è ricorsivo.

2.7.2 Dimostrazione

Per ipotesi L è ricorsivo quindi ammette un algoritmo $A(x)$. Devo costruire un algoritmo $A'(x)$ per L^C.

$A'(x)$:

```
return 1 - A(x);
```

3 Problema dell'arresto

3.1 Interpreti

Un interprete è un programma u che prende in input la coppia (programma, dato) e da in uscita il risultato dell'esecuzione del programma sul dato. La funzione che ne rappresenta il comportamento è:

$$F_u(w\$x) = \begin{cases} F_w(x) \text{ se } w \text{ è un programma} \\ \perp \text{ altrimenti} \end{cases}$$

L'interprete è un programma sempre costruibile.

3.2 Linguaggio dell'arresto ristretto

Dato un programma w e un dato x ci si chiede se $F_w(x)\downarrow$. Questo problema è descritto dal linguaggio dell'arresto che si può dimostrare essere indecidibile. Per fare ciò però va prima costruito il linguaggio dell'arresto ristretto.

Il linguaggio dell'arresto ristretto si descrive come $D = \{x \in \{0,1\}^* : F_u(x\$x)\downarrow\}$. Quindi sono quei programmi che su input uguali a se stessi terminano l'esecuzione.

Si può definire il complemento di D come $D^C = \{x \in \{0,1\}^* : F_u(x\$x)\uparrow\}$

3.3 Teorema: il linguaggio dell'arresto ristretto è ricorsivamente enumerabile ma non ricorsivo

3.3.1 Enunciato

Il linguaggio dell'arresto ristretto è ricorsivamente enumerabile ma non è ricorsivo. Per dimostrarlo si mostrano i tre punti:

1) D è ricorsivamente enumerabile.
2) D non è ricorsivo.
3) D^C non è ricorsivamente enumerabile.

3.3.2 Dimostrazione 1

Per dimostrare che D sia ricorsivamente enumerabile bisogna esibirne una procedura.

Procedura $RICNUM(x \in \{0,1\}^*)$:

```
y = F_u(x$x)
return 1
```

L'interprete F_u esegue il programma x su sè stesso (definizione di linguaggio dell'arresto ristretto). Se termina ritorna 1, altrimenti rimane in loop.

3.3.3 Dimostrazione 2

Si assume per assurdo che D sia ricorsivo. Quindi esiste un algoritmo $ASSURDOA(x)$ per D.

Algoritmo $ASSURDOA(x)$:

```
if (x \in D)  {
    return 1 - F_u(x$x)
} else {
    return 0
}
```

Il codice precedente che codifica $ASSURDOA$ viene chiamato e.

Si passa in input ad $ASSURDOA$ la parola e stessa. Quindi $ASSURDOA(e) = F_e(e) = F_u(e\$e)(\star)$. Si considerano due casi: $e \in D$ e $e \notin D$.

Se $e \in D$ allora $F_u(e\$e)\downarrow = \{0,1\}$. Per la $\star$ risulta $ASSURDOA(e) = F_u(e\$e) = 1 - F_u(e\$e)$ che è una contraddizione, infatti per $F_u(e\$e) = 1$ risulta $1 = 0$; er $F_u(e\$e) = 0$ risulta $0 = 1$.

Se $e \notin D$ allora $F_u(e\$e) \uparrow$. Per la $\star$ vale $ASSURDOA(e) = F_e(e) = 0$. Ma $F_e(e) \uparrow$ quindi si ottiene $\uparrow = 0$ che è una contraddizione.

Entrambi casi sono assurdi e si conclude che e non esiste cioè non posso creare l'algoritmo riconoscitivo per D.

3.3.4 Dimostrazione 3

Si assume per assurdo che D^C sia ricorsivamente enumerabile. Quindi esiste una procedura z per D^C; inoltre D è stato dimostrato essere ricorsivamente enumerabile quindi esiste una procedura y per D.

Per definizione di procedura:

- z termina se $x \in D^C$, va in loop se $x \notin D^C$;
- y termina se $x \in D$, va in loop se $x \notin D$.

Dunque data una parola w questa si può dare in input a y e a z: se y termina w è in D; se z termina allora w non è in D^C e quindi è in D. Abbiamo quindi appena creato un algoritmo per D che è stato dimostrato non essere ricorsivo, quindi è assurdo, quindi \$D^C non è ricorsivamente enumerabile. Si scrive il codice di questo algoritmo.

Algoritmo $ASSURDOB(x)$:

```
k = 1; // numero di passi
while (z(x) non termina in k passi AND y(x) non termina in k passi) {
    k = k + 1
}

if (ha terminato y) {
    return 1
} else {
    return 0
}
```

3.4 Linguaggio dell'arresto

Il linguaggio dell'arresto si definisce come $A = \{w\$x \in \{0,1\}^* : F_w(x) \downarrow\} = \{w\$x\imath\{0,1\}^* : F_u(w\$x)\}$

3.5 Teorema: il linguaggio dell'arresto non è ricorsivo

3.5.1 Enunciato

A non è ricorsivo.

Di conseguenza il problema dell'arresto è indecidibile.

3.5.2 Dimostrazione

Per assurdo A sia ricorsivo quindi ammette algoritmo $ASSURDOC$. Se questo algoritmo esiste allora termina con input $x\$x$.

$ASSURDOC(x)$:

```
if (x$x \in A) {
    return 1
} else {
    return 0
}
```

Ma ASSURDOC è un algoritmo per D che si è dimostrato essere ricosivamente enumerabile. Quindi è assurdo, quindi A non ammette un algoritmo e quindi non è ricorsivo.

3.6 Risultati più importanti della teoria della calcolabilità

Dalle precedenti trattazioni sui linguaggi ricorsivi e ricorsivamente enumerabili e sul problema dell'arresto si può concludere che:

- Esiste un linguaggio ricorsivamente enumerabile ma non ricorsivo.
- Esiste un linguaggio nè ricorsivo nè ricorsivamente enumerabile.

Queste conclusioni forniscono degli importanti risultati teorici:

- Non è possibile verificare per via automatica la correttezza semantica dei programmi.
- Non è possibile verificare per via automatica l'equivalenza di due programmi.
- Non è possibile verificare per via automatica la terminazione di un programma (il problema dell'arresto non è decidibile).
- Ci sono teoremi matematici non dimostrabili.

4 Grammatiche

4.1 Definizione

Una grammatica è una quadrupla $G =< \Sigma, M, S, P >$ dove:

- Σ insieme finito di simboli terminali (alfabeto)
- M insieme finito dei metasimboli (le variabili)
- $S \in M$: assioma o simbolo di partenza
- P: insieme finito delle regole di produzione

Si osserva che deve valere $\Sigma \cap M = \emptyset$.

4.2 Regola di produzione

Una regola di produzione è un elemento della forma $\alpha \to \beta$ dove $\alpha \in (\Sigma \cup M)^+, \beta \in (\Sigma \cup M)^*$.

Una regola di produzone si dice dipendente dal contesto se è in formato $\alpha \setminus \{S\} \to \beta$.

4.2.1 Passo di derivazione

Si dice che w è derivabile da z in un passo e si scrive $z \Rightarrow w$ quando dati $z = x\alpha y$ e $w = x\beta y$ vale $(\alpha \to \beta) \in P$.

Ovvero da $x\alpha y \Rightarrow x\beta y$ grazie a $\alpha \to \beta$.

4.2.2 Derivazione in zero o più passi

w si dice derivabile da z in zero o più passi e si scrive $z \Rightarrow^* w$ quando $w = z$ oppure $\exists k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\ \exists w_1, w_2, ..., w_k : z \Rightarrow w_1 \Rightarrow w_2 \Rightarrow ... \Rightarrow w_k = w$

4.3 Grammatiche come generatori di linguaggi

Le grammatiche generano linguaggi. Il linguaggio L generato da una grammatica G si scrive $L(G) = \{w \in \Sigma^* : S \Rightarrow^* w\}$.

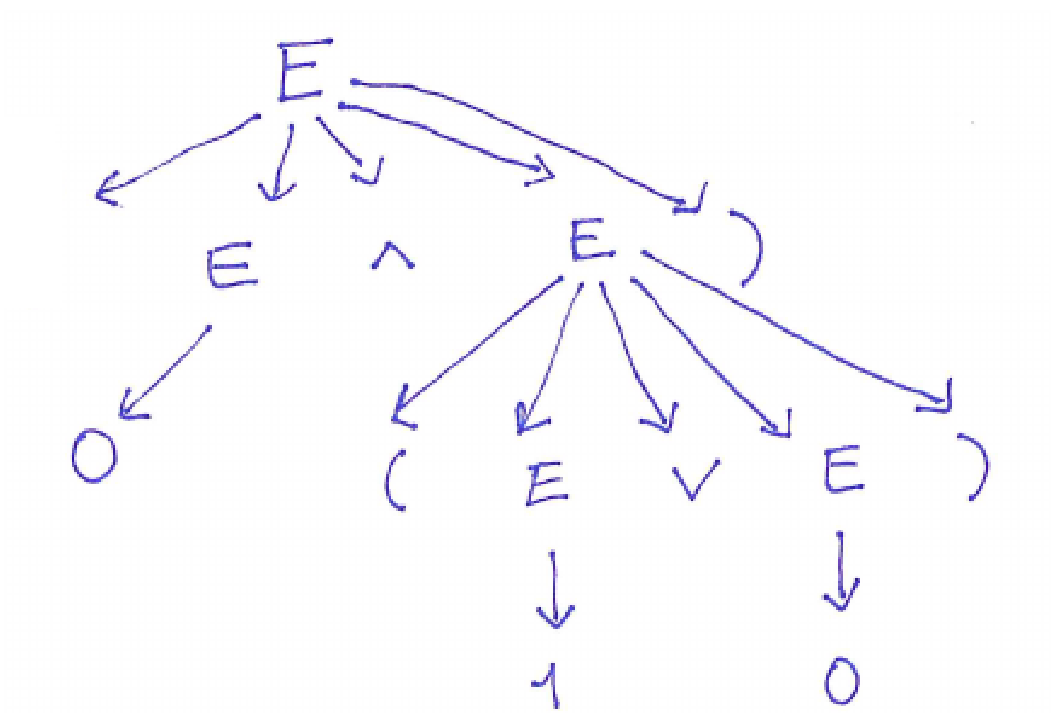
Osservazioni:

- Un linguaggio può ammettere più grammatiche che lo generano.
- Due grammatiche G_1 e G_2 si dicono equivalenti se $L(G_1) = L(G_2)$.
- È possibile individuare per un dato linguaggio la grammatica migliore.

4.4 Albero di derivazione

Dato un linguaggio L generato da una grammatica G e una parola $w \in L$, si può disegnare un albero di derviazione per w che segue 4 regole:

1. Radice = assioma
2. Nodi interni = variabili
3. Foglie = simboli
4. È ammesso il sottoalbero con radice A e foglie $B_1, ..., B_k$ solo se $A \to B_1 ... B_k$ è una regola di G



{

width = 250px }

Si osserva che per avere un albero did erivazioen una grammatica deve essere di tipo 2.

4.5 Teorema: le grammatiche generano linguaggi ricorsivamente enumerabili

4.5.1 Enunciato

Un linguaggio L è ricorsivamente enumerabile $\iff$ L è generato da una grammatica G

5 Classificazione di Chomsky

5.1 Grammatiche di tipo k

Data una grammatica $G =< \Sigma, M, S, P >$ essa si può classificare come:

- Tipo 0: nessun vincolo sulle regole. Qualsiasi grammatica è di tipo 0.
- Tipo 1: ogni regola $\alpha \to \beta$ è tale che $|\beta| \geq |\alpha|$; è ammessa la regola $S \to \varepsilon$ solo se S non compare a destra di nessun'altra regola.
- Tipo 2: ogni regola $\alpha \to \beta$ è tale che $\alpha \in M$.
- Tipo 3: ogni regola è del tipo $A \to \sigma B$, $A \to \sigma$ o $A \to \varepsilon$ dove $A, B \in M$ e $\sigma \in \Sigma$

All'aumentare dei vincoli una grammatica diventa più semplice, infatti un tipo 0 senza vincoli può avere regole arbitrariamente complesse a differenza di un tipo 3.

5.2 Linguaggi di tipo k e insiemi R_k

Un linguaggio si dice di tipo k se ammette G di tipo k che lo genera. Si definisce l'insieme dei linguaggi di tipo k, $R_k = \{L \subseteq \Sigma^* : L \text{ è di tipo } k\}$. I linguaggi in R_k si chiamano:

- R_0: linguaggi ricorsivamente enumerabili
- R_1: linguaggi dipendenti dal contesto/ricorsivi
- R_2: linguaggi liberi dal contesto
- R_3: linguaggi regolari

Un linguaggio di tipo R_k è anche di tipo R_{k-1} ovvero $R_3 \subseteq R_2 \subseteq R_1 \subseteq R_0$. Il teorema successivo dimostra che l'inclusione è propria.

Si osservano due fatti:

- Se L è di tipo k allora anche $L \cap \{\varepsilon\}$ è di tipo k. Data G di tipo k che genera L si può costruire G' di tipo k cambiando l'assioma S con S' e introducendo le regole $S' \to S$ e $S' \to \varepsilon$.
- Se G è una grammatica di tipo $k = 2$ o $k = 3$, allora posso ottenere una grammatica G' equivalente di tipo k che rispetta l'assioma (S).

5.3 Teorema sugli R_k

5.3.1 Enunciato

$R_3 \subset R_2 \subset R_1 \subset R_0$

Ovvero una grammatica di tipo k è anche di tipo $k-1$ ed esistono linguaggi di tipo k che non sono di tipo $k+1$ (l'inclusione è propria).

5.3.2 Dimostrazione: $\exists L_2 \in R_2$ ma $L_2 \notin R_3$

Dato $L_2 = \{a^n b^n : n > 0\}$ è generato dalla grammatica $G =< \{a, b\}, \{S, B, C\}, \{S \rightarrow aSb, S \rightarrow ab\}, S >$ che è di tipo 2.

Si dimostrerà più avanti con gli automi a stati finiti che L_2 non ammette grammatica di tipo 3.

5.3.3 Dimostrazione: $\exists L_1 \in R_1$ ma $L_1 \notin R_2$

Dato $L_1 = \{a^n b^n c^n : n > 0\}$ è generato dalla grammatica $G =< \{a, b, c\}, \{S\}, \{S \rightarrow aSBC, S \rightarrow aBC, CB \rightarrow BC, aB \rightarrow ab, bB \rightarrow bb, bC \rightarrow bc, cC \rightarrow cc\}$ che è di tipo 1.

Si dimostrerà più avanti che $L_1 \notin R_2$ perchè non soddisfa il pumping lemma per i linguaggi di tipo 2.

5.3.4 Dimostrazione: $\exists L_0 \in R_0$ ma $L_0 \notin R_1$

$L_0 = D = \{x \in \{0, 1\}^* : F_u(x\$x) \downarrow\}$

Abbiamo dimostrato che $L_0 = D$ (il linguaggio dell'arresto ristretto) è ricorsivamente enumerabile ma non ricorsivo. Si può dimostrare che i linguaggi in R_1 sono ricorsivi quindi $D \notin R_1$.

5.4 Grafo di derivazione

Data una grammatica $G =< \Sigma, M, S, P >$ si definisce grafo di derivazione per una parola $x \in Sigma^*$ la tupla $GR(x) =< V_x, E_x >$ con:

- $V_x = \{y \in (\Sigma \cup M)^* : |y| \leq |x|\}$ (vertici)
- $E_x = \{(y, y') : y \Rightarrow^* y'\}$ (archi)

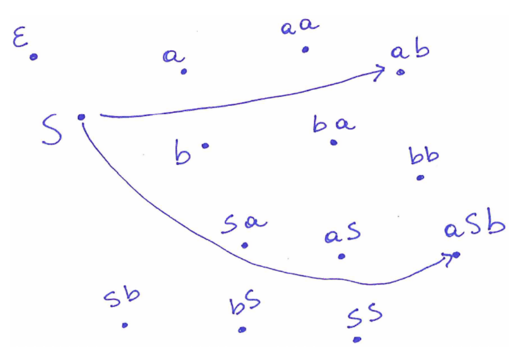


Figure 1: Esempio di grafo di derivazione

Si può creare un algoritmo per stabilire se x appartiene a L:

Algoritmo $W(x)$:

```
COSTRUISCI_GR(x)

if (esiste un cammino dall'assioma a $x$ nel grafo) {
    return 1
} else {
    return 0
}
```

Dunque il problema della generazione di x diventa cercare un cammino nel grafo di x.

5.5 Teorema: i linguaggi in R_1 sono ricorsivi

5.5.1 Enunciato

Sia L un linguaggio, se $L \in R_1$ allora L è un linguaggio ricorsivo.

5.5.2 Dimostrazione (TODO)

5.6 Forme equivalenti per il tipo 3 (TODO)

Una grammatica $G =< \Sigma, M, S, P >$ per L è di tipo 3 per definizione se vale la (i), che è equivalente a (ii) e (iii):

- (i) ogni regola di produzione è del tipo $A \to \sigma B$, $A \to \sigma$ o $A \to \varepsilon$ con $A, B \in M$ e $\sigma \in \Sigma$.
- (ii) ogni regola di produzione è del tipo $A \to \sigma B$ o $A \to \varepsilon$ con $A, B \in M$ e $\sigma \in \Sigma$.
- (iii) ogni regola di produzione è del tipo $A \to \sigma B$ o $A \to \sigma$ con $A, B \in M$ e $\sigma \in \Sigma$. Solo se $\varepsilon \notin L$.

Si può passare da (i) a (ii) eliminando le regole del tipo $A \to \sigma$ attraverso questi passi:

1. Introduco una nuova variabile $x \in M$.
2. Introduco la regola $x \to \varepsilon$
3. Ogni regola del tipo $A \to \sigma$ si trasforma in $A \to \sigma x$

Si può assare da (i) a (iii) eliminando le regole del tipo $A \to \varepsilon$ attraverso questi passi:

1. Per ogni regola del tipo $A \to \sigma B$ con $(B \to \varepsilon) \in P$ introduco una regola $A \to \sigma$.
2. Elimino ogni regola del tipo $A \to \varepsilon$.

6 Automi a stati finiti

6.1 Introduzione

Concettualmente un automa a stati finiti può essere visto come un sistema che modella un robot che si muove su una griglia. Il robot è telecomandato da segnali che ne indicano la direzione.

Le postazioni nella griglia sono i possibili stati dell'automa; i segnali (N, S, E, O) inviati all'automa sono gli input. La posizione prossima del robot dipende dalla posizione attuale e dal simbolo inviato. Un percorso sulla griglia diventa una parola.

Per noi gli automi sono riconoscitori di linguaggi formali di tipo 3. Un automa a stati finiti A ha $w \in \Sigma^*$ in input e un bit $x \in \{0, 1\}$ in uscita che indica se w è rifiutata o accettata.

A si trova in un particolare stato in un dato istante t. Inizialmente si trova in uno stato iniziale fissato q_0.

In funzione del simbolo letto e dello stato attuale A cambia stato. Si definisce la funzione $\delta(q, \sigma) =$ stato prossimo di A essendo in q e leggendo sigma

Una volta letta l'intera parola w, A raggiunge uno stato p. L'uscita dipende da p. Si definisce la funzione di uscita $\lambda(p) = \{0, 1\}$.

6.2 Definizione

Un automa a stati è una tupla $A =< \Sigma, Q, \delta, q_0, \lambda/F >$ dove:

- Σ: alfabeto di input
- Q: insieme degli stati
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$: funzione di transizione
- $q_0 \in Q$: stato iniziale
- λ oppure $F \subseteq Q$:
    - $\lambda : Q \to \{0, 1\}$: funzione di uscita
    - F: stati finali o accettanti

Se Q è finito A si dice a stati finiti.

Si osserva che:

- Da λ posso avere F. Definisco $F = \{q \in Q : \lambda(q) = 1\}$.
- Da F posso avere λ. Definisco $\lambda : Q \to \{0, 1\}$ come:

$$\lambda(q) = \begin{cases} 1 \text{ se } q \in F \\ 0 \text{ se } q \notin F \end{cases}$$

6.3 Rappresentare la funzione di transizione

Posso rappresentare la funzione di transizione δ per un'automa A in forma tabellare o con un diagramma degli stati.

La funzione δ in formata bellare si può rappresentare come segue, mettendo sulle righe gli stati Q e sulle colonne i valori dell'alfabeto Σ.

δ	σ_1	σ_2	...	σ_j	...	σ_h
q_0						
q_1						
...						
q_i				$\delta(q_i, \sigma_j)$		
...						
q_k						

6.4 Diagramma di transizione degli stati

Si può disegnare un diagramma di transizione degli stati che descrive A e δ. Il diagramma comprende i seguenti elementi:

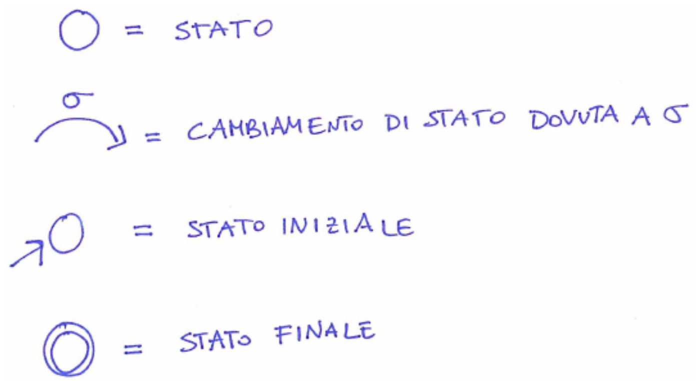


Figure 2: Elementi di un diagramma di transizione degli stati

6.5 Funzione di transizione sulle parole

Si può introdurre una funzione di transizione sulle parole chiamata δ^*.

$\delta^* : Q \times \Sigma^* \to Q$, definita induttivamente:

$$\delta^* = \begin{cases} \delta^*(q, \varepsilon) = q \\ \delta^*(q, w\sigma) = \delta(\delta^*(q, w), \sigma) \text{ con } w \in \Sigma^*, \sigma \in \Sigma \end{cases}$$

6.6 Linguaggio riconosciuto da un automa

Gli automi a stati finiti sono riconoscitori di linguaggi: una parola è accettata se partendo dallo stato iniziale induce un cammino verso uno stato finale.

Un linguaggio riconosciuto da un automa A è formalmente definito come $L(A) = \{w \in \Sigma^* : \delta^*(q_0, w) \in F\} = \{w \in \Sigma^* : \gamma(\delta^*(q_0, w)) = 1\}$

6.7 Stati particolari

Dai due stati $q, p \in Q$ si definisce:

- Stato trappola: q si dice stato trappola se valgono:
  - $\forall \sigma \in \Sigma \ (\delta(q, \sigma) = q)$
  - $q \notin F$
- Stato osservabile: p si dice stato osservabile se $\exists w \in \Sigma^* \ (\delta^*(q_0, w) = p)$
- Stati indistinguibili: q e p si dicono stati indistinguibili se $\forall w \in \Sigma^* \ \gamma(\delta^*(q, w)) = \gamma(\delta^*(p, w))$. Si denota con $q \approx p$
- Stati distinguibili: q e p si dicono stati distinguibili se $\exists w \in \Sigma^* \ \gamma(\delta^*(q, w)) \neq \gamma(\delta^*(p, w))$. Si denota con $q \not\approx p$.

6.8 Relazione di indistinguibilità su Q

Data la relazione di indistinguibilità denotata precedentemente $\approx$, è una relazione binaria su Q di equivalenza, infatti valgono:

- Riflessiva: $\forall q \in Q,\ q \approx q$
- Simmetrica: $\forall q, q' \in Q,\ q \approx q' \implies q' \approx q$
- Transitiva: $\forall q, q', q'' \in Q,\ q \approx q' \wedge q' \approx q'' \implies q \approx q''$

Pertanto $\approx$ induce una partizione in classi c_i su Q:

- $\forall i c_i, \neq \emptyset$
- $\forall i, j : i \neq j,\ c_i \cap c_j = \emptyset$
- $\bigcup\limits_i c_i = Q$

Una classe di equivalenza che contiene q si denota con $[q]_\approx$.

6.9 Automa equivalente

Sia $A =< \Sigma, Q, q_o, \delta, F >$ un automa.

Posso costruire un automa equivalente $A_\approx =< \Sigma, Q_\approx, [q_0]_\approx, \delta_\approx, F_\approx >$ dove:

- $Q_\approx$: contiene le classi di equivalenza degli stati
- $F_\approx = \{[q]_\approx : q \in F\}$
- $\delta_\approx : Q_\approx \times \Sigma \to Q_\approx$ con $\delta_\approx([q]_\approx, \sigma) = [\delta(q, \sigma)]_\approx$

7 Sintesi di automi

Dato un linguaggio L si vuole ricavare un automa A per L. Ci si chiede com'è fatto l'automa massimo e come ricavarne l'automa minimo (il nostro obiettivo).

7.1 Definizione e costruzione dell'automa massimo

L'automa massimo per L è l'automa col maggior numero di stati, si denota con G_L.

Per costruirlo definisco $G_L =< \Sigma^*, \Sigma, [\varepsilon], \delta_{G_L}, F_{G_L} >$, dove:

- $F_{G_L} = \{[w] \in Q : w \in L\}$
- $\delta_{G_L}([w], \sigma) = [w\sigma]$

L'idea per ottenere l'automa massimo è raggiungere uno stato sempre diverso per ogni parola in input, ovvero $\forall w, w' \in \Sigma^* \delta^*(q_0, w) \neq \delta^*(q_0, w')$ $(Q = \Sigma^*)$. Per non perdere stati tutti gli elementi di Q devono essere osservabili: $\forall q \in Q \exists w : q = \delta^*(q_0, w)$

La struttura dell'automa massimo è la stessa per ogni L ma cambiano gli stati finali. L'automa massimo ha infiniti stati.

7.2 Definizione e costruzione dell'automa minimo

L'automa minimo per L è l'automa col minor numero di stati che genera L. Si denota con M_L.

Per ottenere l'automa minimo si possono utilizzare due tecniche:

- Si usa l'automa massimo G_L
- Si usa un generico automa A per L a stati finiti

7.3 Teorema: l'automa massimo equivalente per L è l'automa minimo per L

7.3.1 Enunciato

Sia L un linguaggio, allora $G_{L\approx} = M_L$

7.3.2 Dimostrazione (TODO)

7.4 Teorema di irriducibilità di un automa con soli stati osservabili e distinguibili

7.4.1 Enunciato

Sia A un automa a stati finiti per L t.c:

- Gli stati di A siano tutti osservabili
- Gli stati di A siano tutti distinguibili

Allora A è l'automa minimo per L.

7.4.2 Corollario

Dato un'automa generico A per L, se A ha tutti stati osservabili allora $A_{\approx} = M_L$.

7.4.3 Dimostrazione (TODO)

7.5 Algoritmi di sintesi ottima di automi

Per sintetizzare un'automa A per un linguaggio L esistono due tecniche:

1. Se ho A a stati finiti per L elimino gli stati non osservabili e costruisco $A_{\equiv} = M_L$
2. Se non ho A per L costruisco G_L automa massimo e poi $G_{L\equiv} = M_L$

Algoritmi:

1. Si possono confrontare gli stati seguendo un'ordine casuale perchè gli stati sono finiti.
2. Devo applicare un algoritmo sui confronti ben preciso perchè gli stati sono infiniti. Algoritmo per $G_{L\equiv}$:
   - Si parte dalla radice e si visitano i nodi (stati) in ampiezza (ovvero si controllano i nodi sullo stesso livello).
   - Si confronta il nodo attuale con i nodi precedentemente visitati verificando se i nodi sono indistinguibili oppure no.
   - Sia $[w\sigma]$ ($w \in \Sigma^*$ e $\sigma \in \Sigma$), il nodo attuale. Se $[w\sigma]$ è indistinguibile dal nodo $[x]$ allora:
     - Cancello $[w\sigma]$ e il relativo sottoalbero
     - Resta pendente l'arco uscente da $[w]$ etichettato con σ, che si ridireziona verso $[x]$.

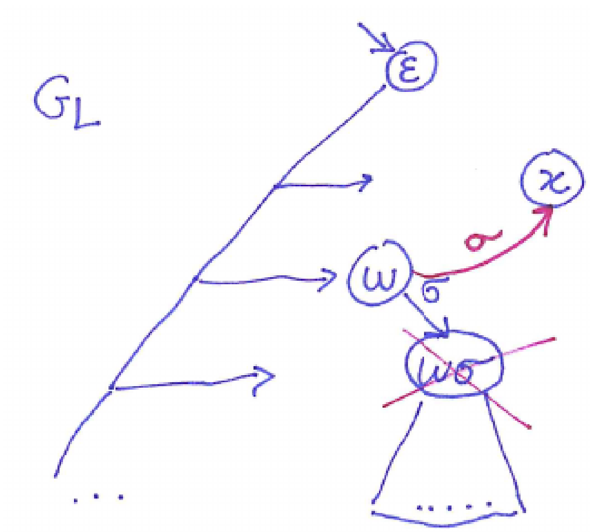


Figure 3: Algoritmo per G_L

Si osserva che:

- Lo stato iniziale resta $[\varepsilon]$
- Gli stati finali sono i sopravvissuti etichettati con parole di L

7.6 Teorema: un automa a stati finiti riconosce un linguaggio di tipo 3

7.6.1 Enunciato

Un linguaggio L è generato da una grammatica G di tipo 3 $\leftrightarrow$ L è riconosciuto da un automa A a stati finiti.

7.6.2 Corollario: linguaggio in R_2 ma non in R_3

Si può ora dimostrare che esiste un linguaggio $L \in R_2$ ma $L \notin R_3$. In particolare $L = \{a^n b^m\}$.

L'automa $G_{L\approx}$ ha infiniti stati, quindi L non ammette un automa a stati finiti, quindi non è di tipo 3.

7.6.3 Dimostrazione $\Leftarrow$ (dall'automa a stati finiti alla grammatico di tipo 3) (TODO CORRETTEZZA)

Dall'automa $A =< \Sigma, Q, q_o, \delta, F >$ costruisco una grammatica di tipo 3 $G =< T, V, S, P >$ con:

- $T = \Sigma$
- $V = Q$
- $S = q_o$

- Gli elementi di P sono i q tali che:
  - $q \to \varepsilon \iff q \in F$
  - $q \to \sigma P \iff \delta(q, \sigma) = P$

Si mostra ora che questa costruzione è corretta.

7.6.4 Dimostrazione $\Rightarrow$ (dalla grammatica di tipo 3 all'automa a stati finiti)

Inverto la costruzione precedente, che si è dimostrato essere equivalente.

Dalla grammatica di tipo 3 $G =< \Sigma, M, S, P >$ costruisco l'automa $A =< T, Q, q_o, \delta, F >$ con:

- $T = \Sigma$
- $Q = M$
- $q_0 = S$
- δ definita come: $\delta(A, \sigma) = B \iff A \to \sigma B$
- $F = \{A : A \to \varepsilon \in P\} >$

8 Automi a stati finiti non deterministici

8.1 Definizione

Un automa a stati finiti non deterministico (NFA) è una tupla $A =< \Sigma, Q, \delta, q_0, F >$ con:

- Σ: alfabeto finito di input
- Q: insieme degli stati
- $R : Q \times \Sigma \times Q \to \{0, 1\}$: relazione di transizione definita come:

$$R(q, \sigma, P) = \begin{cases} 1 \text{ se } q \to^{\sigma} P \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

- $q_0 \in Q$: stato iniziale
- $F \subseteq Q$: insieme degli stati finali o accettanti

Un automa a stati finiti $A =< \Sigma, Q, \delta, q_o, \lambda/F >$ è un particolare caso di NFA detto automa a stati finiti deterministico (DFA) in cui R è una funzione $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ ed ogni parola induce un singolo cammino. Viceversa in un NFA una parola w in input ad A potrebbe portare a più cammini differenti.

8.2 Linguaggio riconosciuto da NFA

Dato un A di tipo NFA una parola è accettata da A se esiste un cammino che porta a uno stato finale. Il linguaggio riconosciuto è dato dalle parole che rispettano il criterio di accettazione.

Con un DFA riconosco una parola; con un NFA riconosco testi che contengono una certa parola.

Si denota con $L(DFA)$ le classi dei linguaggi riconosciuti da DFA; si denota con $L(NFA)$ la classe dei linguaggi riconosciuti da NFA.

8.3 Teorema: ogni linguaggio riconosciuto da un NFA è riconosciuto da un DFA equivalente

8.3.1 Enunciato

Per ogni L riconosciuto da un automa NFA esiste un automa DFA equivalente che lo riconosce.

8.3.2 Corollario

$R_3 = L(DFA) = L(NFA)$

8.3.3 Dimostrazione (da NFA a DFA)

Dato un NFA $A =< \Sigma, Q, q_o, R, F >$ costruisco il DFA equivalente $A' =< \Sigma, 2^Q, \{q_o\}, \delta_R, F' >$ con

- 2^Q insieme dei sottoinsiemi di Q.
- $\delta_R : 2^Q \times \Sigma \to 2^Q$ definita come $\delta_R(x, \sigma) = \bigcup\{p \in Q : R(q, \sigma, P) = 1\}$
- $F' = \{y \in 2^Q : y \cap F \neq \emptyset\}$

9 Espressioni regolari

9.1 Definizione

Un'espressione regolare su Σ si definisce induttivamente come:

- Base: $\emptyset$, ε, $\sigma \in \Sigma$ sono espressioni regolari
- Passo: siano p e q espressioni regolari, allora $(p + q)$, $(p \cdot q)$ e (p^*) sono espressioni regolari.

Un espressione regolare denota un linguaggio induttivamente:

- Base: $\emptyset$ denota il linguaggio $\emptyset$; ε denota il linguaggio $\{\varepsilon\}$; σ denota il linguaggio $\{\varepsilon\}$
- Passo: siano p e q espressioni regolari che denotano rispettivamente i linguaggi L_p e L_q, allora:
  - $p + q$ denota il linguaggio $L_p \cup L_q$
  - $p \cdot q$ denota il linguaggio $L_p \cdot L_q$
  - p^* denota il linguaggio L_p^*

9.2 Teorema di Kleene

9.2.1 Enunciato

Un linguaggio L è denotato da un'espressione regolare $\iff$ L è riconosciuto da un DFA

9.2.2 Dimostrazione $\Rightarrow$ (dall'espressione regolare al DFA) (TODO)

9.2.3 Dimostrazione $\Leftarrow$ (dal DFA all'espressione regolare)

Dato un DFA $A =< \Sigma, Q, q_o, \delta, F >$ con $Q = \{q_0, ..., q_k\}$ posso associargli i seguenti DFA:

- $A_0 =< \Sigma, Q, q_0, \delta, F >$

- ...
- $A_k =< \Sigma, Q, q_k, \delta, F >$

Ogni DFA A_i riconosce un linguaggio denotato dall'espressione regolare $X_i = \sum \sigma X_j [+\varepsilon]$ tale che:

- $\delta(q_i, \sigma) = q_j$
- si inserisce $[+\varepsilon] \iff q_i \in F$

Dunque $L(A) = L(A_0) = X_0$

Gli x_i danno un sistema di $k+1$ equazioni e $k + 1 incognite$.

$$\begin{cases} x_0 = \sum \sigma X_j [+\varepsilon] \\ \dots \\ x_k = \sum \sigma X_j [+\varepsilon] \end{cases}$$

Il sistema si risolve impostando equazioni del tipo $x = Ax + B$, la cui soluzione è $x = A^* B$. Se $\varepsilon \in A$ allora la soluzione è unica; se $\varepsilon \notin A$ allora è la soluzione minima.

9.3 Chiusura dei linguaggi regolari

I linguaggi regolari sono chiusi rispetto alle operazioni complemento, $+ = \cup$, $\cdot$ e $*$

10 Grammatiche ambigue

10.1 Definizione

Una grammatica G di tipo 2 è detta ambigua se genera una parola che ammette due alberi di derivazione. G è detta non ambigua se ogni parola generata da G ammette un solo albero di derivazione.

10.2 Linguaggi interamente ambigui

Un linguaggio si dice interamente ambiguo se ammette soltanto grammatiche ambigue.

10.3 Teorema: tutti i linguaggi regolari non sono interamente ambigui

10.3.1 Enunciato

Un linguaggio regolare non può essere interamente ambiguo.

10.3.2 Dimostrazione

Ad ogni linguaggio regolare associo un DFA; da un DFA associo una grammatica di tipo 3 non ambigua. Una grammatica 3 non è ambigua perchè è sempre associata un'unica derivazione leftmost.

11 Forme normali per linguaggi di tipo 2

Sia $G =< \Sigma, M, S, P >$ una grammatica di tipo 2. Allora essa può essere in forma normale di Chomsky o in forma normale di Greibach.

11.1 Forma normale di Chomsky

Una grammatica di tipo 2 si dice in forma normale di Chomsky (FNC) se le sue regole di produzione sono del tipo $A \to BC$ o $A \to \sigma$ con $A, B, C \in M$ e $\sigma \in \Sigma$.

11.2 Forma normale di Greibach

Una grammatica di tipo 2 si dice in forma normale di Greibach (FNG) se le sue regole di produzione sono del tipo $A \to \sigma W$ con $\sigma \in \Sigma$, $W \in M^*$.

12 Riconoscitori a pila

12.1 Introduzione

Si vuole dare un riconoscitore per i linguaggi di tipo 2. Useremo delle pile, delle strutture LIFO (Last In First Out).

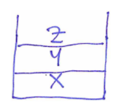


Figure 4: Notazione per una pila: z è il simbolo più in alto; x è il simbolo in fondo.

Sia P una pila, si possono effettuare operazioni di modifica e di interrogazione di P:

- PUSH: inserisco un elemento in cima. $P = \text{PUSH}(X, P) = XP$
- POP: estraggo l'elemento in cima alla pila

$$P = \text{POP}(P) = \begin{cases} P \text{ se } P = XW \\ \perp \text{ se } P = \varepsilon \end{cases}$$

- TOP: leggo l'elemento in cima alla pila

$$\text{TOP}(P) = \begin{cases} X \text{ se } P = XW \\ \perp \text{ se } P = \varepsilon \end{cases}$$

- ISEMPTY: chiedo se la pila è vuota

$$\text{ISEMPTY}(P) = \begin{cases} 1 \text{ se } P = \varepsilon \\ 0 \text{ se } P \neq \varepsilon \end{cases}$$

12.2 Definizione

Un riconoscitore a pila è una tupla $A =< \Sigma, K, S, \delta >$ con:

- Σ: alfabeto di input
- K: alfabeto della pila
- S: simbolo iniziale della pila
- $\delta : K \times \Sigma \to 2^{K^*}$: funzione di evoluzione della pila

La scrittura $\delta(x, \sigma) = \{w_1, ..., w_s\}$ indica che

1. $x \in K$ è l'elemento letto dalla cima della pila (TOP);
2. $\sigma \in Sigma$ è letto in input;
3. x viene cancellato dalla pila (POP);
4. viene scelto non deterministicamente un $w_i \in K^*$ da inserire nella pila (PUSH).

Si definisce configurazione di una pila la situazione PILA · INPUT.

Si introduce la notazione di passo di computazione: configurazione $\vdash$ configurazione successiva. La notazione $\vdash^*$ indica zero o più passi di computazione. Vale $xw \cdot \sigma w \vdash \alpha w \cdot w \iff \alpha \in \delta(x, \sigma)$.

12.3 Linguaggio riconosciuto da una pila

Una parola x si dice accettata da un riconoscitore a pila A se vale $S \cdot x \vdash \varepsilon \cdot \varepsilon$. Ovvero se dalla configurazione iniziale dello stato $S \cdot x$ arrivo alla pila vuota. Si osserva che la parola$x$ è un insieme di simboli $x_1, ..., x_n$, dunque per riconoscerla consiste nel leggere $x_1, ..., x_n$ ad ogni passo.

Il linguaggio L riconosciuto da una pila A è dato da $L(A) = \{x \in \Sigma^* : S \cdot x \vdash^* \varepsilon \cdot \varepsilon\}$

12.4 Grafo di computazione

Un grafo di computazione del riconoscitore a pila rappresenta graficamente i passi di computazione per riconoscere una parola $x = \{x_1, ..., x_n\} \in \Sigma$. Si può vedere come un albero che ha:

- Radice: la pila col simbolo $S \in K$ iniziale
- Archi: i simboli in input $x_i \in x$
- Vertici: le pile P_i ottenute come $P_{i-1} \cdot x_{i-1} \vdash P_i \cdot x_i$

Se nel grafo di computazione arrivo alla pila vuota allora x è riconosciuta.

12.5 Teorema: i riconoscitori a pila riconoscono i linguaggi di tipo 2

12.5.1 Enunciato

Un linguaggio L è generato da una grammatica G di tipo 2 $\iff$ L è riconosciuto da un riconoscitore a pila.

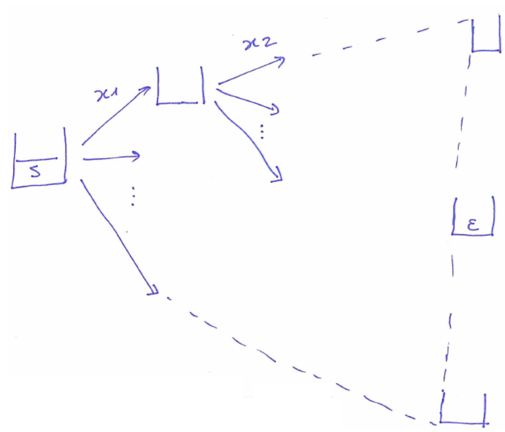


Figure 5: Grafo di computazione

12.5.2 Dimostrazione $\Rightarrow$ (da grammatica di tipo 2 a riconoscitore a pila)

Data una grammatica di tipo 2 G la trasformo in una grammatica $G' =< T, V, S_{G'}, P >$ in forma normale di Greibach. Costruisco poi il riconoscitore a pila $A =< \Sigma, K, S, \delta >$ con:

- $\Sigma = T$
- $K = V$
- $S = S_{G'}$
- $\delta(x, \sigma) = \{w : x \to \sigma w \in P\}$

12.5.3 Dimostrazione $\Leftarrow$ (da riconoscitore a pila a grammatica di tipo 2)

Dato un riconoscitore a pila $A =< \Sigma, K, S_A, \delta >$ costruisco una grammatica di tipo 2 $G =< T, V, S_G, P >$ con:

- $T = \Sigma$
- $V = K$
- $S_G = S_A$
- P contiene le regole $x \to \sigma w \iff w \in \delta(x, \sigma)$

12.6 Teorema: i linguaggi regolari ammettono un riconoscitore a pila

12.6.1 Enunciato

Un linguaggio regolare ammette un riconoscitore a pila.

13 Pumping lemma

13.1 Introduzione

Il pumping lemma è una condizione necessaria perchè un linguaggio L sia di tipo 2. Dunque se L non rispetta il pumping lemma allora non è di tipo 2; se L rispetta il pumping lemma allora potrebbe essere di tipo 2.

13.2 Enunciato

Sia L un linguaggio di tipo 2, allora:

$\exists H > 0$ tale che $\forall z \in L : |z| > H$ esiste una scomposizione per $z = u \cdot v \cdot w \cdot x \cdot y \cdot z$ con:

- $|v \cdot x| \geq 1$
- $|v \cdot w \cdot x| \leq H$
- $\forall k \geq 0 \ u \cdot v^k \cdot w \cdot x^k \cdot y \in L$

13.3 Dimostrazione (TODO)

14 ESEMPI

14.1 Definizione induttiva di linguaggio booleano

Il linguaggio booleano E si costruisce a partire da $\Sigma = \{0, 1, \wedge, \vee, \neg, (,)\}$ ed è così definito:

1. $0, 1 \in E$
2. Siano $x, y \in E$ allora:
   - $(x \wedge y) \in E$
   - $(x \vee y) \in E$
   - $\neg x \in E$
3. Nient'altro appartiene ad E

14.2 Grammatica del linguaggio booleano

Si costruisce una grammatica G per il linguaggio booleano L:

- $\Sigma = \{0, 1, \wedge, \vee, (,)\}$
- $M = \{E\}$
- $P = \{E \to 0, E \to 1, E \to (E \wedge E), E \to (E \vee E)\}$
- E è l'assioma

14.3 Esempio di codice

$L = \{aa, ab, b\}$ allora $P = aa|ab|b|ab \in L^+$ si decompone in un solo modo nelle suddivisioni indicate da $|$ dunque L è un codice.

14.4 Codice ASCII esteso

Il codice ASCII esteso è un codice prefisso che codifica ogni carattere della tastiera in sequenze di 8 bit. Si può vedere come $C_A = \{x \in \{0, 1\}^* : |x| = 8\}$.

14.5 Grammatica del linguaggio palindromo

Data una parola $w = w_1 ... w_n$ si definisce $w^R = w_n ... w_1$. Si definisce il linguaggio $L = \{ww^R : w_i \in \{0, 1\}\}$. La grammatica di L è data da $G =< \Sigma, M, S, P >$ con:

- $\Sigma = \{0, 1\}$
- $M = \{S, A, B\}$
- $S = S$
- $P = \{S \rightarrow aSA, S \rightarrow bSB, S \rightarrow aA, B \rightarrow bB, A \rightarrow a, B \rightarrow b\}$

G è di tipo 2.