Lezione 6

Operazioni elementari con le funzioni

- $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$
- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Composizione di funzioni

siano $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: f(A) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ g composta f

osservazioni

- se $I(x) = x \quad \forall x \in A$ (funzione identità) allora:
  - $(I \circ f)(x) = I(f(x)) = f(x)$
  - $(f \circ I)(x) = f(I(x)) = f(x)$

- quando si compongono due funzioni $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad g: B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

  $g \circ f$ è definita su $E = \{x \in A : f(x) \in B\}$

- $g \circ f \neq f \circ g$

Composizioni di funzioni con funzioni particolari: traslazioni e simmetrie

traslazioni

siano $g(x) = x + c$, $c \in \mathbb{R}$

- $(f \circ g)(x) = f(x+c)$, $Y(f \circ g)$ si ottiene traslando $Y(f)$ di c — verso dx se $c < 0$; verso sx se $c > 0$
- $(g \circ f)(x) = f(x) + c$, $Y(g \circ f)$ si ottiene traslando $Y(f)$ di c — verso l'alto se $c > 0$; verso il basso se $c < 0$

simmetrie 1

sia $g(x) = -x$

- $(f \circ g)(x) = f(-x) = f_1(x)$, $Y(f_1)$ si ottiene simmetrizzando $Y(f)$ rispetto all'asse y
- $(g \circ f)(x) = -f(x) = f_2(x)$, $Y(f_2)$ si ottiene simmetrizzando $Y(f)$ rispetto all'asse x
- $(g \circ f \circ g) = -f(-x) = f_3(x)$, $Y(f_3)$ si ottiene simmetrizzando $Y(f)$ rispetto all'origine

simmetrie 2

sia $g(x) = |x|$

- $(f \circ g)(x) = f(|x|) = f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$

- $(g \circ f)(x) = |f(x)| = f_2(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Funzioni pari e dispari

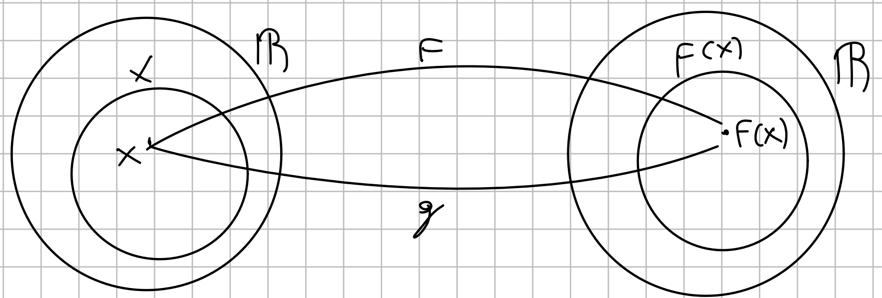
sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- f è pari se $f(-x) = f(x)$
- f è dispari se $f(-x) = -f(x)$

Funzione inversa

sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ iniettiva su A

definisco $g : f(A) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad g(y) = x : y = f(x)$



g è detta funzione inversa di f e si indica con f^{-1}

Osservazione

$f^{-1} \circ f = I$ su A $\quad f \circ f^{-1} = I$ su $f(A)$

Relazione tra grafico di f e di f^{-1}

sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ iniettiva su A e $f^{-1}: f(A) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

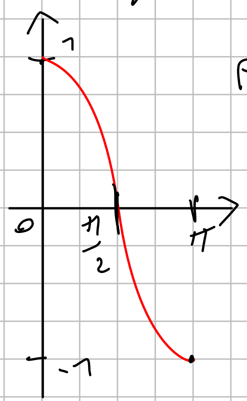
allora $\gamma(f^{-1})$ si ottiene simmetrizzando $\gamma(f)$ rispetto alla bisettrice I e III quadrante

Funzioni trigonometriche inverse

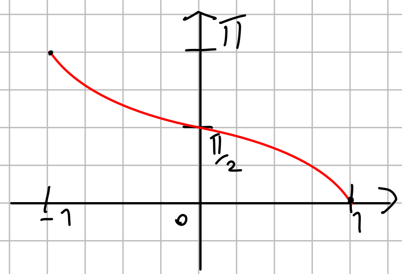
Funzione coseno

sia $f(x) = \cos x$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f non è iniettiva su $\mathbb{R}$

restringendo su $A_1 = [0; \pi]$ $\quad f: A_1 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è iniettiva su A_1



$f: [0; \pi] \to \mathbb{R}$



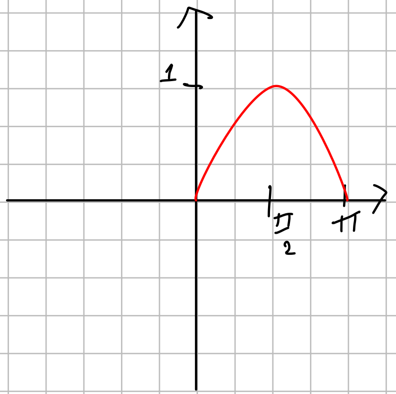
$f^{-1}: [-1; 1] \to \mathbb{R}$

funzione seno

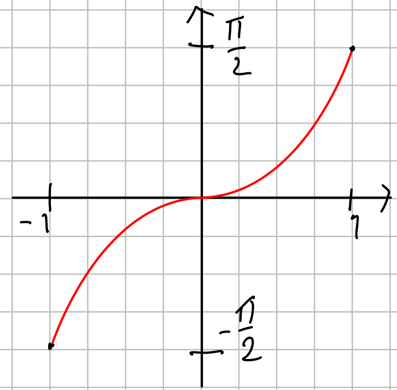
sia $f(x) = \operatorname{sen} x$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f non è iniettiva su $\mathbb{R}$

restringimento su $A_1 = [0; \pi]$, $f: A_1 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è iniettiva su A_1

$f: A_1 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \operatorname{sen} x$



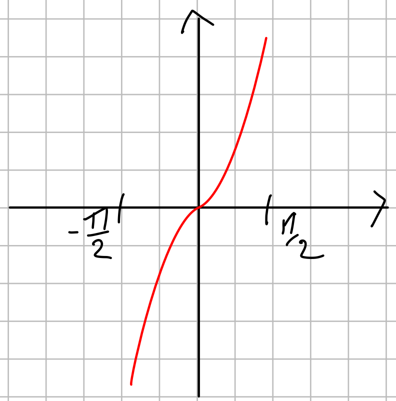
$f^{-1}: [-1; 1] \to \mathbb{R}$



funzione tangente

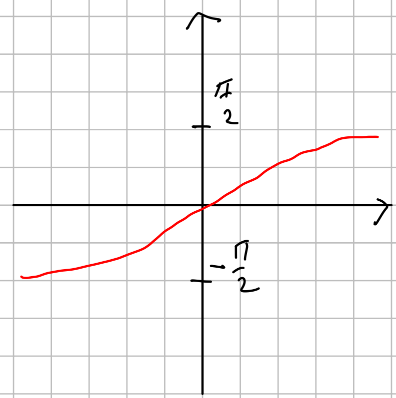
sia $f(x) = \tan x$, $f: A = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f non è iniettiva su A

restringimento su $A_1 = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $f: A_1 \subseteq \mathbb{R} \to$ è iniettiva su A_1



$f: A_1 \to \mathbb{R}$

$f(x) = \tan x$



$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$