Insiemi

definizione

un insieme è una collezione di oggetti (elementi). L'appartenenza di un elemento a un insieme è sempre decidibile.

$\emptyset$ = insieme vuoto

linguaggi

dato un insieme L si definisce linguaggio l'insieme delle stringhe finite costruibili con i simboli in L.

insieme delle parti

dato un insieme I si definisce insieme delle parti l'insieme dei sottoinsiemi di I $P(I)=\{T : T \subseteq I\}$

operazioni

siano S e T due insiemi, si definiscono le seguenti operazioni:

- $S \cup T = \{x : x \in S \vee x \in T\}$
- $S \cap T = \{x : x \in S \wedge x \in T\}$

- $S \setminus T = \{x : x \in S \wedge x \notin T\}$

Coppie ordinate e prodotto cartesiano

siano A e B due insiemi, si definiscono:

- coppia ordinata

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\} \subseteq P(A \cup B) \in P(P(A \cup B)) \quad , \text{con} \quad a \in A, b \in B$$

- prodotto cartesiano

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\} \quad \text{nota} \quad A^n = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$$

Relazioni tra insiemi

definizione

dati due insiemi A e B si definisce relazione R il sottoinsieme $R \subseteq A \times B$

se $a \in A$ e $b \in B$ sono in relazione si scrive aRb

relazioni d'equivalenza e d'ordine, totali e parziali

sia $R \subseteq A \times A$ una relazione, allora essa si dice:

- riflessiva $\iff a \underset{R}{\sim} a \quad \forall a \in A$
- simmetrica $\iff a \underset{R}{\sim} b \Rightarrow b \underset{R}{\sim} a \quad \forall a, b \in A$
- antisimmetrica $\iff a \underset{R}{\sim} b , b \underset{R}{\sim} a \Rightarrow a = b \quad \forall a, b \in A$

- transitiva $\iff a \underset{R}{\sim} b,\ b \underset{R}{\sim} c \Rightarrow a \underset{R}{\sim} c \quad \forall a,b,c \in A$

R si dice:

- relazione d'equivalenza se è rifl., simm., trans. e si scrive $\sim$
- relazione d'ordine se è rifl., antisimm., trans.

sia $R \subseteq X \times X$, si dice relazione totale se $\forall a,b \in X \quad aRb \vee bRa$

Teorema c.l. di equivalenza

ipotesi: sia A un insieme, sia $R \subseteq A^2$ una rel. d'equivalenza

tesi: $A = \bigcup_{a \in A} [a] = \amalg$ e cl. di equivalenza distinte hanno $\cap$ vuota

Funzioni

definizione

una relazione $R \subseteq A \times B$ si chiama funzione se $\forall a \in A \ \exists! \ b \in B : aRb$

una funzione R si annota con $R : A \longrightarrow B$, se aRb si scrive $R(a) = b$

si chiamano:

- A dominio
- B codominio
- $R(A) = \{ b \in B : \exists a \in A \ R(a) = b \}$ insieme immagine
- dato $R(a) = b$, b è immagine di a tramite R; a è controimmagine

funzioni iniettive, suriettive e biettive

sia $F : A \rightarrow B$ una funzione, F si dice:

- iniettiva se $F(a) = F(b) \Rightarrow a = b$
- suriettiva se $\forall b \in B \ \exists a \in A : F(a) = b$
- biettiva se è sia iniettiva che suriettiva

Composizione di funzioni

siano $F: A \longrightarrow B$ e $G: B \longrightarrow C$ viene detta composizione di F e G

$$(F \circ G)(a) = F(G(a)) \quad \forall a \in A$$

la composizione è associativa

inversa delle funzioni

dato l'insieme A, la funzione $id_A: A \rightarrow A$ $id_A(a) = a$ $\forall a \in A$ è detta funzione identità.

sia $F: B \rightarrow C$ una funzione e $id_B: B \rightarrow B$ e $id_C: C \rightarrow C$ due funzioni identità allora $F \circ id_B = F$ e $id_C \circ F = F$

sia $G: C \rightarrow D$, se $G \circ F = id_B$ allora G si dice inversa a sinistra di F e G inversa a destra di F.

Teorema dell'esistenza dell'inversa

ipotesi: sia $F: A \rightarrow B$ biettiva

tesi: $\exists G: B \rightarrow A : F \circ G = id_B \wedge G \circ F = id_A$