Lezione 4

$\mathbb{C} = \{a+ib,\ a, b \in \mathbb{R}\}$

Operazioni in $\mathbb{C}$

$\mathbb{C}$ è chiuso rispetto a $+, \cdot$

somma

$$(a_1+ib_1)+(a_2+ib_2) = (a_1+a_2)+i(b_1+b_2)$$

prodotto

$$(a_1+ib_1)\cdot(a_2+ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2)+i(a_1b_2+a_2b_2)$$

Proprietà di $\mathbb{C}$

$\mathbb{C}$ è un campo non ordinato perchè valgono P1-P9. In particolare:

- elemento neutro della somma: $0+i0$
- elemento neutro del prodotto: $1+i0$
- opposto di $a+ib$: $a+i(-b)$
- reciproco di $a+ib$ con $a,b\neq 0$: $\frac{a}{a^2+b^2}+i\left(-\frac{b}{a^2+b^2}\right)$

I sottoinsiemi $\tilde{\mathbb{R}}$ e $\tilde{\mathbb{I}}$

$\tilde{\mathbb{R}}=\{a+i0,\ a\in\mathbb{R}\}\subset\mathbb{C}$

$\tilde{\mathbb{R}}$ è chiuso rispetto a $+,\cdot$

$(a_1+i0)+(a_2+i0)=(a_1+a_2)+i0$

$(a_1+i0)\cdot(a_2+i0)=(a_1a_2-0)+i(a_1\cdot 0+a_2\cdot 0)=(a_1+a_2)+i0$

si nota che $a+i0=a\in\mathbb{R}\Rightarrow\mathbb{R}\to\tilde{\mathbb{R}}$

$\tilde{\mathbb{I}}=\{0+ib,\ b\in\mathbb{R}\}\subset\mathbb{C}$

$\tilde{\mathbb{I}}$ è chiuso rispetto alla somma ma non al prodotto:

$(0+ib_1)+(0+ib_2)=(0+0)+i(b_1+b_2)=0+i(b_1+b_2)$

$(0+i1)\cdot(0+i1)=(0-1)+i(0-0)=-1\Rightarrow\tilde{\mathbb{I}}=0+ib=ib\Rightarrow\tilde{\mathbb{I}}=i\mathbb{R}$

inoltre si osserva che $ii=-1\Rightarrow(i)^2=-1\Rightarrow x^2+1=0$ è risolvibile in $\mathbb{C}$ con $x=\pm i,\ x\in\mathbb{C}$

Definizioni e proprietà

definizioni

i) $|z| = |a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$ modulo di z

ii) $z = a+ib$, $\bar{z} = a-ib$

proprietà

i) $|z| = 0 \iff z = 0$

ii) $\bar{\bar{z}} = z$

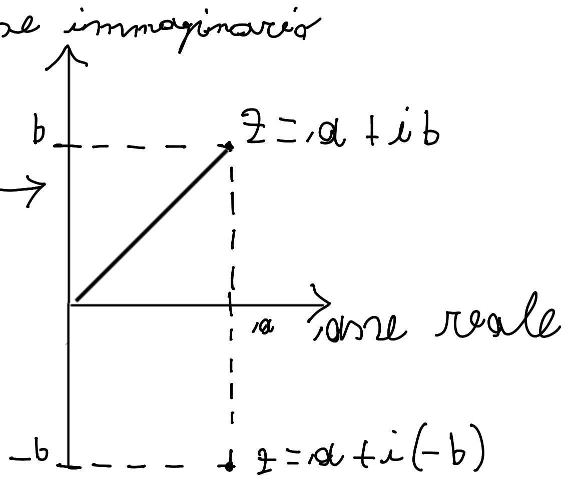
iii) $z \cdot \bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2-(ib)^2 = a^2+b^2 = |z|^2$

iv) $z \neq 0$, allora $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ perché $\frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

Rappresentazione algebrica di $\mathbb{C}$

$$z = \underbrace{a}_{\text{parte reale}} + \underbrace{\overset{\text{unità imm.}}{\boxed{i}}\,\overset{\text{coefficiente della part. imm.}}{\boxed{b}}}_{\text{parte immaginaria}}$$

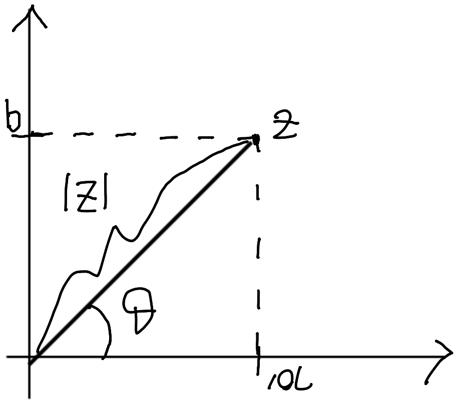
piano di Gauss →



Rappresentazione trigonometrica di un numero complesso

$z \neq 0$, $z = a + ib$

modulo $\rho = |z|$ argomento $\theta =$ angolo



$$\boxed{z = \rho(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)}$$

come avere una circonferenza di raggio $|z|$

prodotto in forma trigonometrica

$z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)$ $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)$

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2[\cos\theta_1\cos\theta_2 - \text{sen}\,\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2 + i(\cos\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2 + \cos\theta_2\,\text{sen}\,\theta_1)] = \rho_1\rho_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1+\theta_2)]$$

potenza in forma trigonometrica

$$z^n = \rho^n[\cos(n\theta) + i\,\text{sen}(n\theta)]$$

Radici n-esime di numeri complessi

un numero complesso z è radice n-esima di a se $z^n = a$.

ogni $a \neq 0$ ammette n radici z distinte in $\mathbb{C}$.

dimostrazione

1) se $a \neq 0$ e $z \neq 0$:

$\alpha = \rho(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$ e $z = R(\cos t + i\,\text{sen}\,t) \Rightarrow \rho(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) = R^n[\cos(nt) + i\,\text{sen}(nt)]$

2) $\begin{cases} R^n = \rho \\ n\,r = \theta + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ $\quad \begin{cases} R = \sqrt[n]{\rho} \leftarrow \text{unico in } \mathbb{R} \\ r = \dfrac{\theta}{n} + \dfrac{2k}{n}\pi \end{cases}$

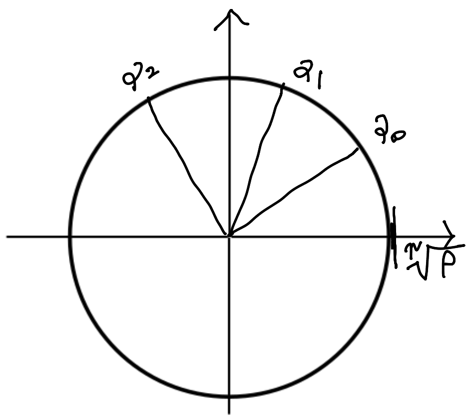
$\exists$ quindi infinite radici, ma quante distinte?

3) poichè $R = \sqrt[n]{\rho}$ è unico in $\mathbb{R}$ il modulo è comune.
per l'argomento:

$r_k = \dfrac{\theta}{n} + \dfrac{2\pi}{n}k \Rightarrow r_0 = \dfrac{\theta}{n}, r_1 = \dfrac{\theta}{n} + \dfrac{2\pi}{n}, \dots, r_n = \dfrac{\theta}{n} + 2\pi$

r_0 e r_n differiscono soltanto di 2π, individuando lo stesso an

4) si ottengono quindi n radici distinte



mi sposto sulla circonferen
quando $k = n$, ritorno all

Teorema fondamentale dell'algebra

definizione: sia $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$ $a_n \neq 0$, $a_i \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ si dice radice di P se:

- $P(\alpha) = 0$
- $P(z) = (z-\alpha)^{\mu} Q(z)$ con Q polinomio di grado $n-\mu$
- $Q(z) \neq 0$

ipotesi: $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$ $a_n \neq 0$, $a_i \in \mathbb{C}$

tesi: P ammette n radici in $\mathbb{C}$ con la loro molteplicità μ. Inoltre, $P(z)$ si ottiene in modo unico come $P(z) = a_n (z-\alpha_1)^{\mu_1} (z-\alpha_2)^{\mu_2} \dots (z-\alpha_k)^{\mu_k}$ dove μ_i è la molteplicità di α_i.

corollario

un polinomio a coefficienti reali ammette almeno una radice reale.
Inoltre se $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ è radice di $P(z)$ allora anche $\bar{\alpha}$ lo è con la stessa molteplicità. Osserviamo che un polinomio di grado dispari ha sempre una radice reale.