Lezione 14

Teorema di De L'Hopital

ipotesi:

- siano $f, g : [a, b] \setminus \{x_0\} \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $x_0 \in [a, b]$
- siano f e g derivabili in $[a, b] \setminus \{x_0\}$
- valgano $\lim_{x \to x_0^{(\pm)}} f(x) = 0 \vee \pm\infty$ e $\lim_{x \to x_0^{(\pm)}} g(x) = 0 \vee \pm\infty$
- siano $g(x)$ e $g'(x) \neq 0$ in $[a, b] \setminus \{x_0\}$
- esista $\lim_{x \to x_0^{(\pm)}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

tesi: $\lim_{x \to x_0^{(\pm)}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0^{(\pm)}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Polinomio di Taylor

sia f derivabile n volte in x_0, allora chiamo polinomio di Taylor di grado n associato ad f centrato in x_0

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x_0) \frac{(x-x_0)^k}{k!}$$

Teorema di Taylor

ipotesi:

- sia f derivabile n volte in x_0
- sia $P_n(x_0)$ il polinomio di Taylor associato ad f centrato in x_0

tesi

$f(x) = P_n(x) + R(x)$ con $R(x)$ resto n-esimo in forma di Peano o di Lagrange

se $x_0 = 0$ si chiama anche formula di Mclaurin

resto in forma di Peano

$$R_n(x) = o(x-x_0)^n$$

resto in forma di Lagrange

sia f derivabile $n+1$ volte in $V(x_0)$

$$R_n(x_0)=f^{(n+1)}\cdot z\,\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Natura di un punto con polinomio di Taylor

sia $f: I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, con $x_0\in I$ punto stazionario di f

per stabilire la natura di x_0 occorre studiare l'incremento di $f(x)-f(x_0)$ al variare di x. se $f(x)-f(x_0)\geq 0$ (≤ 0) allora x_0 è un punto di minimo (massimo).

utilizzando la formula di Taylor, se $f^{(n)}(x_0)\neq 0$ allora

n pari: $f^{(n)}(x_0)<0 \Rightarrow x_0$ max; $f^{(n)}(x_0)>0 \Rightarrow x_0$ min

n dispari $\Rightarrow x_0$ non è punto max/min