Lezione 11 - Applicazioni lineari

Applicazioni lineari

siano V e U due $\mathbb{K}$-spazi, sia $f : V \to U$ una funzione

f si dice applicazione lineare (o omomorfismo) se:

- $f(\underline{v}_1 +_V \underline{v}_2) = f(\underline{v}_1) +_U f(\underline{v}_2) \quad \forall \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$ (f preserva la somma)
- $f(k\underline{v}) = k f(\underline{v}) \quad \forall k \in \mathbb{K}, \forall \underline{v} \in V$ (f preserva il prodotto per lo scalare)

Proposizione: $f(\underline{0}_V) = \underline{0}_W$

sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare, allora $f(\underline{0}_V) = \underline{0}_W$

dimostrazione

per definizione di omomorfismo, $\forall k \in \mathbb{K}$ $f(k\underline{v}) = k f(\underline{v})$, se $k = 0_{\mathbb{K}}$:

$f(\underline{0}_V) = f(0_{\mathbb{K}}\underline{v}) = 0_{\mathbb{K}} f(\underline{v}) = \underline{0}_W$

$v = \{v_1, \dots, v_n\}$ $\quad f(v_1) = w_1 \ \dots \ f(v_n) = w_n \quad w = \{w_1, \dots, w_n\}$

Teorema di esistenza e unicità di un'applicazione lineare fissata una base

ipotesi

siano V e W due $\mathbb{K}$-spazi, sia $\mathcal{V}=\{v_1,\dots,v_n\}$ una base di V, siano $w_1,\dots,w_n \in W$

tesi:

$\exists!\, f: V \to W$ applicazione lineare t.c: $f(v_i)=w_i \quad \forall i=1,\dots,n$

dimostrazione

- Unicità

sia $\underline{v} \in V = \langle \mathcal{V} \rangle$ allora la scrittura $\underline{v}=k_1v_1+\dots+k_nv_n$ è unica

costruiamo $f(\underline{v})=f(k_1v_1+\dots+k_nv_n)=k_1f(v_1)+\dots+k_nf(v_n)=k_1w_1+\dots+k_nw_n \quad (*)$

la $*$ è unica perchè $\underline{v}=k_1v_1+\dots+k_nv_n$ è unica

- esistenza

si mostra che $*$ è lineare e quindi preservi somma e prodotto scalare

  - addizione

siano $\underline{v}=k_1v_1+\dots+k_nv_n$ e $\underline{u}=k'_1v_1+\dots+k'_nv_n$ allora:

$f(\underline{v}+\underline{u})=f(k_1v_1+\dots+k_nv_n+k'_1v_1+\dots+k'_nv_n)=f(v_1(k_1+k'_1)+\dots+v_n(k_n+k'_n))=$

$=w_1(k_1+k'_1)+\dots+w_n(k_n+k'_n)=f(\underline{v})+f(\underline{u})$

  - prodotto scalare

sia $\underline{v_i}=0v_1+\dots+kv_i+\dots+0v_n \Rightarrow f(k\underline{v_i})=k\underline{w_i}$

Teorema di linearità della composizione e dell'inversa

enunciato

siano f e g due app. lineari

- se f e g sono componibili allora $g \circ f$ è lineare
- se f è invertibile, f^{-1} è lineare

Immagine e nucleo

sia $f: V \to W$ un'app. lineare, allora si definiscono due insiemi:

- immagine di f: $\mathrm{Im}(f) = \{\underline{w} \in W : \exists \underline{v} \in V : f(\underline{v}) = \underline{w}\} \subset W$
- nucleo di f: $\ker(f) = \{\underline{v} \in V : f(\underline{v}) = \underline{0}_w\} \subset V$

si osserva che $\underline{0}_w \in \mathrm{Im}(f)$ e $\underline{0}_v \in \ker(f)$

Teorema: il nucleo è un sottospazio del dominio

ipotesi: sia $f: V \to W$ un'applicazione lineare

tesi: $\ker(f)$ è un sottospazio di V

Teorema: l'immagine è un sottospazio del codominio

ipotesi: sia $f: V \to W$ un'applicazione lineare

tesi: $\operatorname{Im}(f)$ è un sottospazio di W

Teorema di nullità più rango

ipotesi:

siano V e W due $\mathbb{K}$-spazi, sia $f: V \to W$ un'applicazione lineare

tesi:

$$\dim(V) = \dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f))$$

Iniettività, suriettività e biettività

sia $f: V \to W$ un'applicazione lineare, f si dice:

- iniettiva se $f(\underline{v}_1) = f(\underline{v}_2) \implies \underline{v}_1 = \underline{v}_2 \quad \forall \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$
- suriettiva se $\forall \underline{v} \in V \ \exists \underline{w} \in W : f(\underline{v}) = \underline{w}$
- biettiva se è iniettiva e suriettiva

Teorema: relazione tra iniettività e ker e tra suriettività e Im

enunciato

sia $f: V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare, f è:

- iniettiva $\Longleftrightarrow \ker(f) = \{\underline{0}_V\}$
- suriettiva $\Longleftrightarrow \operatorname{Im}(f) = W \quad (\Leftrightarrow \dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim(W))$

dimostrazione

- f iniettiva $\Rightarrow \ker(f) = \{\underline{0}_V\}$

sia $\ker(f) = \{\underline{0}_V, \underline{v}\}$ t.c. $\underline{v} \neq \underline{0}_V$ allora $\underline{0}_W = f(\underline{0}_V) = f(\underline{v})$ ma f è iniettiva $\Rightarrow$

$\Rightarrow \perp \Rightarrow \ker(f) = \{\underline{0}_V\}$

- $\ker(f) = \{\underline{0}_V\} \Rightarrow f$ iniettiva

sia f t.c. $\ker(f) = \{\underline{0}_V\}$ allora se $f(\underline{v}_1) = f(\underline{v}_2) \Leftrightarrow f(\underline{v}_1) - f(\underline{v}_2) = \underline{0}_W \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(\underline{v}_1 - \underline{v}_2) = \underline{0}_W \Leftrightarrow \underline{v}_1 - \underline{v}_2 = \underline{0}_V \Leftrightarrow \underline{v}_1 = \underline{v}_2$

Isomorfismi

sia $f: V \longrightarrow W$ un omomorfismo, allora:

- f si dice isomorfismo se e solo se f è biettiva
- se $\exists f: V \longrightarrow W$ isomorfa, V e W si dicono isomorfi

Teorema: l'isomorfismo è una rel. d'equivalenza

enunciato

l'isomorfismo tra spazi vettoriali è una relazione d'equivalenza

Teorema: relazione tra isomorfismo e dimensione di dominio e codominio

enunciato

siano V e W due $\mathbb{K}$-spazi, allora

V e W sono isomorfi $\Leftrightarrow \dim(V)=\dim(W)$

dimostrazione

- $\Rightarrow$

sia $\mathcal{V}=\{v_1,\dots,v_n\}$ una base per V, siano $w_i \in W$ t.c.: $f(v_i)=w_i$

si mostra che $\mathcal{W}=\{w_1,\dots,w_n\}$ è una base di W quindi $n=\dim(V)=\dim(W)$

- $\{w_1,\dots,w_n\}$ sono lin. ind.

si mostra che l'unica comb. lin. è quella nulla: $\underline{0}_W=k_1w_1+\dots+k_nw_n \Leftrightarrow k_i=0$

$f(v_i)=w_i \Rightarrow \underline{0}_W=k_1f(v_1)+\dots+k=f(k_1v_1+\dots+k_nv_n) \Leftrightarrow k_i=0$ perchè $\mathcal{V}$ è una base

- $\mathcal{W}$ genera W

V e W isomorfi $\Rightarrow \exists f: V\rightarrow W$ biettiva $\Leftrightarrow \operatorname{Im}(f)=W \overset{(*)}{\Rightarrow} W=\langle w_1,\dots,w_n\rangle$

$(*)$ $\operatorname{Im}(f)=\{\underline{w}\in W: \exists\, \underline{v}\in V: f(\underline{v})=\underline{w}\}$ $\underline{w}=f(\underline{v})=f(k_1v_1+\dots+k_nv_n)=k_1f(v_1)+\dots+k_nf(v_n)=$

$=\langle f(v_1)+\dots+f(v_n)\rangle=\langle w_1,\dots,w_n\rangle$

- $\Leftarrow$

siano $\{v_1, \dots, v_r\}$ e $\{w_1, \dots, w_r\}$ basi di V e W

siano $\varphi : V \to W$ e $\psi : W \to V$ le uniche app. lin. t.c: $\varphi(v_i) = w_i$, $\psi(w_i) = v_i$

mostro che esistono $Id_V = \psi \circ \varphi : V \to V$ e $Id_W = \varphi \circ \psi : W \to W$ quindi φ e ψ sono biettive quindi sono isomorfe

$Id_V = \psi \circ \varphi(v_i) = \psi(\varphi(v_i)) = \psi(w_i) = v_i$; $Id_W = \varphi \circ \psi(w_i) = \varphi(\psi(w_i)) = \varphi(v_i) = w_i$

corollario

sia V uno spazio su $\mathbb{K}$, sia $n = \dim(V)$, allora V è isomorfo a $\mathbb{K}^n$