第二篇　集合论

主要包括如下内容：

集合论基础

二元关系

函数

第三章　集合论基础

本章主要介绍如下内容：

　基本概念及集合的表示方法

　集合间的关系

　特殊集合

　集合的运算

　包含排斥原理

3-1 基本概念

1. 集合与元素

集合是个最基本的概念。

集合：是由确定的对象(客体)构成的集体。用大写的英文字母表示。

这里所谓“确定”是指：论域内任何客体，要么属于这个集合，要么不属于这个集合，是唯一确定的。

元素：集合中的对象，称之为元素。

$\in$：表示元素与集合的属于关系。

例如，N表示自然数集合，$2\in N$，而1.5不属于N写成$\neg(1.5\in N)$，或写成 $1.5\notin N$。

2. 有限集合与无限集合

这里对有限集合与无限集合只给出朴素的定义，以后再给出严格的形式定义。

有限集合：元素是有限个的集合。

如果A是有限集合，用|A|表示A中元素个数。例如，A={1,2,3}, 则|A|=3。

无限集合：元素是无限个的集合。

对无限集合的所谓‘大小’的讨论，以后再进行。

3. 集合的表示方法

列举法：将集合中的元素一一列出，写在大括号内。

例如，N={1,2,3,4,……} A={a,b,c,d}

描述法：用句子(或谓词公式)描述元素 的属性。

例如，B={x| x是偶数}

C={x|x是实数且2≤x≤5}

一般地，A={x|P(x)},

其中P(x)是描述元素x的特性的谓词公式，如果论域内客体a使得P(a)为真，则a∈A，否则a∉A。

4. 说明

(1)集合中的元素间次序是无关紧要的，但是必须是可以区分的，即是不同的。例如A={a,b,c,a}，B={c,b,a,}，则A与B是一样的。

(2)对集合中的元素无任何限制，例如令

A={人，石头，1， B}, B={Φ,{Φ}}

(3)本书中常用的几个集合符号的约定：

自然数集合N= {1,2,3,……}

整数集合I，实数集合R，有理数集合Q

(4)集合中的元素也可以是集合，下面的集合的含义不同：

如 a: 张书记

{a}: 党支部(只有一个书记)

{{a}}: 分党委(只有一个支部)

{{{a}}}: 党委 (只有一个分党委)

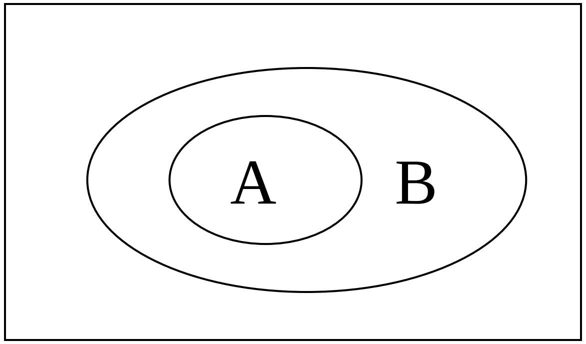
{{{{a}}}}: 市党委(只有一个党委)

3-2 集合间的关系

一. 被包含关系(子集) $\subseteq$

1.定义：A、B是集合，如果A中元素都是B中元素，则称B包含A，A包含于B，也称A是B的子集。记作A$\subseteq$B。

文氏图表示如右下图。



例如，N是自然数集合，R是实数集合，则N$\subseteq$R

谓词定义：

$$A\subseteq B\Leftrightarrow\forall x(x\in A\rightarrow x\in B)$$

2. 性质：

(1)有自反性，对任何集合A有$A \subseteq A$。

(2)有传递性，对任何集合A、B、C，有$A \subseteq B$且$B \subseteq C$，则$A \subseteq C$。

(3)有反对称性，对任何集合A、B，有$A \subseteq B$且$B \subseteq A$，则$A=B$。

二. 相等关系

1. 定义：A、B是集合，如果它们的元素完全相同，则称A与B相等。记作A=B。

定理：A=B，当且仅当$A\subseteq B$且$B\subseteq A$。

证明：**充分性**，已知$A\subseteq B$且$B\subseteq A$，假设$A\neq B$，则至少有一个元素a,使得$a\in A$而$a\notin B$；或者$a\in B$而$a\notin A$。如果$a\in A$而$a\notin B$，则与$A\subseteq B$矛盾。如果$a\in B$而$a\notin A$，则与$B\subseteq A$矛盾。所以A=B。

必要性显然成立，因为如果A=B，则必有$A\subseteq B$且$B\subseteq A$。

谓词定义：

$A=B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

$\Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \forall x(x \in B \rightarrow x \in A)$

$\Leftrightarrow \forall x((x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A))$

$\Leftrightarrow \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$

2. 性质

(1)有自反性，对任何集合A，有A=A。

(2)有传递性，对任何集合A、B、C，如果有A=B且 B=C ，则A=C。

(3)有对称性，对任何集合A、B，如果有A=B，则B=A。

三. 真被包含关系(真子集) $\subset$

1. 定义：A、B是集合，如果$A\subseteq B$且$A\neq B$，则称B真包含A，A真包含于B，也称A是B的真子集。记作$A\subset B$。

谓词定义：$A\subset B \Leftrightarrow A\subseteq B\wedge A\neq B$

$\Leftrightarrow\forall x(x\in A\rightarrow x\in B)\wedge\neg\forall x(x\in A\leftrightarrow x\in B)$

$\Leftrightarrow\forall x(x\in A\rightarrow x\in B)\wedge$

$(\neg\forall x(x\in A\rightarrow x\in B)\vee\neg\forall x(x\in B\rightarrow x\in A))$

$\Leftrightarrow(\forall x(x\in A\rightarrow x\in B)\wedge\neg\forall x(x\in A\rightarrow x\in B))$

$\vee(\forall x(x\in A\rightarrow x\in B)\wedge\neg\forall x(x\in B\rightarrow x\in A))$

$\Leftrightarrow\forall x(x\in A\rightarrow x\in B)\wedge\exists x(x\in B\wedge x\notin A)$

2. 性质

有传递性，对任何集合A、B、C，如果有

$A\subset B$且 $B\subset C$，则$A\subset C$。

练习题：设$A=\{a,\{a\},\{a,b\},\{\{a,b\},c\}\}$判断下面命题的真值。

(1) $\{a\}\in A$ (2) $\neg(\{a\}\subseteq A)$

(3) $c\in A$ (4) $\{a\}\subseteq\{\{a,b\},c\}$

(5) $\{\{a\}\}\subseteq A$ (6) $\{a,b\}\in\{\{a,b\},c\}$

(7) $\{\{a,b\}\}\subseteq A$ (8) $\{a,b\}\subseteq\{\{a,b\},c\}$

(9) $\{c\}\subseteq\{\{a,b\},c\}$ (10) $(\{c\}\subseteq A)\rightarrow(a\in\Phi)$

3-3 特殊集合

一. 全集 E

定义：包含所讨论的所有集合的集合，称之为全集，记作E。

实际上，就是论域。

它的文氏图如右图。

由于讨论的问题不同，全集也不同。所以全集不唯一。例如，若讨论数，可以把实数集看成全集。若讨论人，可以把人类看成全集。

由于论域内任何客体x都属于E，所以$x\in E$为永真式。所以需要用永真式定义E。

$$E=\{x|\ P(x)\vee\neg P(x)\}$$

性质：对于任何集合A，都有$A\subseteq E$。

二. 空集 Φ

定义：没有元素的集合，称之为空集，记作Φ。因为论域内如何客体$x\in\Phi$是矛盾式，所以要用一个矛盾式定义Φ。

$$\Phi=\{x|\ P(x)\wedge\neg P(x)\}$$

性质：

1.对于任何集合A，都有$\Phi\subseteq A$。

因为$\forall x(x\in\Phi\rightarrow x\in A)$为永真式，所以$\Phi\subseteq A$。

2.空集是唯一的。

证明 假设有两个空集Φ_1、Φ_2，则

因为Φ_1是空集，则由性质1得 $\Phi_1 \subseteq \Phi_2$。

因为Φ_2是空集，则由性质1得 $\Phi_2 \subseteq \Phi_1$。

所以$\Phi_1=\Phi_2$。

三. 集合的幂集(Power Set)

定义: A是集合，由A的所有子集构成的集合，称之为A的幂集。记作P(A)或2^A。

$$P(A)=\{B \mid B \subseteq A\}$$

例如，

A	P(A)
Φ	$\{\Phi\}$
$\{a\}$	$\{\Phi,\{a\}\}$
$\{a,b\}$	$\{\Phi,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$

A ={a,b,c} 则

P(A)= {Φ,{a},{b},{c},{a,b},{a,c},{b,c},{a,b,c}}

$|P(A)| = C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3$

性质:

1.给定有限集合A，如果|A|=n, 则|P(A)|=2^n。

证明：因为A有n个元素，故P(A)中元素个数为

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots\cdots + C_n^n$$

而

$$(x+y)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1}y + C_n^2 x^{n-2}y^2 + \cdots + C_n^n y^n$$

令x=y=1时得

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots\cdots + C_n^n$$

所以|P(A)|= 2^n $|2^A| = 2^{|A|} = 2^n$

幂集元素的编码：

$A=\{a,b,c\}$ 则

$P(A)=\{\Phi,\{c\},\{b\},\{b,c\},\{a\},\{a,c\},\{a,b\},\{a,b,c\}\}$

A的八个子集分别表示成：$B_0,B_1,B_2,B_3,B_4,B_5,B_6,B_7$

再将它们的下标写成二进制形式得:B_{000} ,B_{001},B_{010},B_{011}, B_{100},B_{101},B_{110},B_{111},

Φ	{ c}	{ b }	{b,c}	{a}	{a,c}	{a,b}	{a,b,c}
B_{000}	B_{001}	B_{010}	B_{011}	B_{100}	B_{101}	B_{110}	B_{111}
B_0	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7

子集B_{ijk}编码的写法：　　$A=\{a,b,c\}$

i、j、k的确定：　　$B_{i\,j\,k}\subseteq A$,

如果$a\in B_{ijk}$, 则 i=1; $b\in B_{ijk}$, 则 j=1; $c\in B_{ijk}$, 则 k=1;否则为0。

如 $A=\{a,b,c,d\}$ 子集 $B_9=B_{1001}=\{a,d\}$　$\{a,c,d\}=B_{1011}=B_{11}$

作业86页(4) (7)

练习 P86 (7) 设A={Φ}， B=P(P(A))

P(A)= {Φ,{Φ}}

在求P(P(A))时，一些同学对集合{Φ,{Φ}}难理解，实际上你就将{Φ,{Φ}}中的元素分别看成

Φ=a ,{Φ}=b，于是{Φ,{Φ}}={a,b}

$B=P(P(A))=P(\{a,b\}) =\{B_0, B_1 , B_2 , B_3 \}=\{B_{00}, B_{01},B_{10} ,B_{11}\}$

$=\{\Phi, \{b\}, \{a\}, \{a,b\}\}$

然后再将a,b代回即可

$B=P(P(A))=P(\{\Phi,\{\Phi\}\})=\{\Phi,\{\Phi\} ,\{\{\Phi\}\}, \{\Phi,\{\Phi\}\}\}$

以后熟悉后就可以直接写出。

a) $\Phi \in B \quad \Phi \subseteq B$

b) $\{\Phi\} \in B \quad \{\Phi\} \subseteq B$

c) $\{\{\Phi\}\} \in B \quad \{\{\Phi\}\} \subseteq B$

a)、b)、c)中命题均为真。

3-4 集合的运算

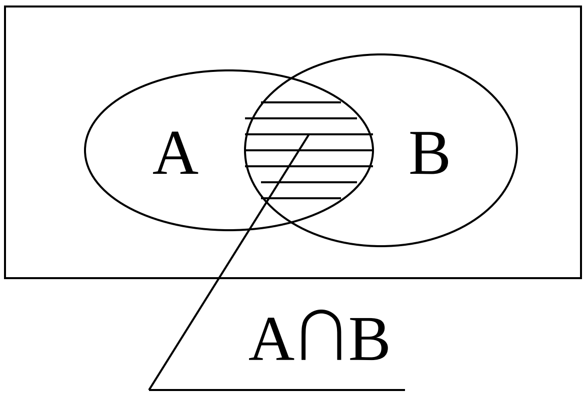
介绍五种运算：∩ ∪ - ~ ⊕

一. 交运算∩

1.定义：A、B是集合，由既属于A，也属于B的元素构成的集合 ,称之为A与B的交集,记作A∩B。

例如A={1,2,3} B={2,3,4}

A∩B={2,3}



谓词定义：

$A \cap B=\{x|x \in A \wedge x \in B\}$

$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$

如果A∩B=Φ，则称A与B不相交。

2.性质

(1)**幂等律** 对任何集合A，有$A \cap A=A$。

(2)**交换律** 对任何集合A、B，有$A \cap B=B \cap A$。

(3)**结合律** 对任何集合A、B、C，有

$(A \cap B) \cap C=A \cap (B \cap C)$。

(4)**同一律** 对任何集合A，有$A \cap E=A$。

(5)**零律** 对任何集合A，有$A \cap \Phi=\Phi$。

(6) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B=A$。

前5个公式高中都学过，下面只证明(6)。

证明： $A\cap B=A \Leftrightarrow \forall x(x\in A\cap B \leftrightarrow x\in A)$

$\Leftrightarrow \forall x((x\in A\cap B \rightarrow x\in A)\wedge(x\in A\rightarrow x\in A\cap B))$

$\Leftrightarrow \forall x((x\notin A\cap B\vee x\in A)\wedge(x\notin A\vee x\in A\cap B))$

$\Leftrightarrow \forall x((\neg(x\in A\wedge x\in B)\vee x\in A)\wedge$

$\quad (x\notin A\vee(x\in A\wedge x\in B))$

$\Leftrightarrow \forall x(((x\notin A\vee x\notin B)\vee x\in A)\wedge$

$\quad (x\notin A\vee(x\in A\wedge x\in B)))$

$\Leftrightarrow \forall x(T\wedge(T\wedge (x\notin A\vee x\in B)))$

$\Leftrightarrow \forall x(x\notin A\vee x\in B)$

$\Leftrightarrow \forall x(x\in A\rightarrow x\in B)$

$\Leftrightarrow A\subseteq B$

二. 并运算∪

1.定义： A、B是集合，由或属于A，或属于B的元素构成的集合 ,称之为A与B的并集,记作A∪B。

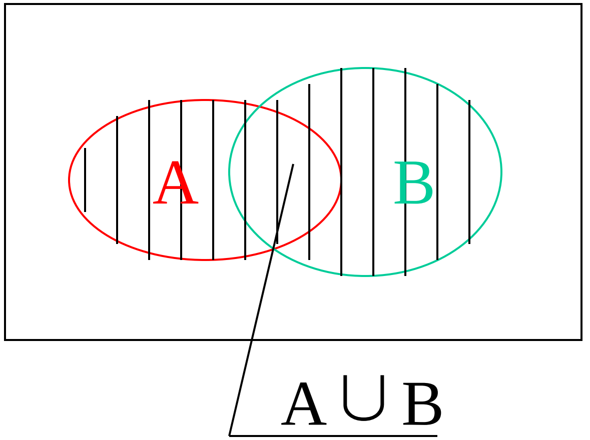
例如A={1,2,3} B={2,3,4}

A∪B={1,2,3,4}

谓词定义：

$A\cup B=\{x|x\in A\vee x\in B\}$

$x\in A\cup B \Leftrightarrow x\in A\vee x\in B$



2.性质

(1)幂等律 对任何集合A，有A∪A=A。

(2)交换律 对任何集合A、B，有A∪B=B∪A。

(3)结合律 对任何集合A、B、C，有(A∪B)∪C=A∪(B∪C)。

(4)同一律 对任何集合A，有$A \cup \Phi = A$。

(5)零律 对任何集合A，有$A \cup E = E$ 。

(6)分配律 对任何集合A、B、C，有

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$。

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$。

(7)吸收律 对任何集合A、B，有

$A \cup (A \cap B) = A \qquad A \cap (A \cup B) = A$。

证明 $A \cup (A \cap B) = (A \cap E) \cup (A \cap B)$ (同一)

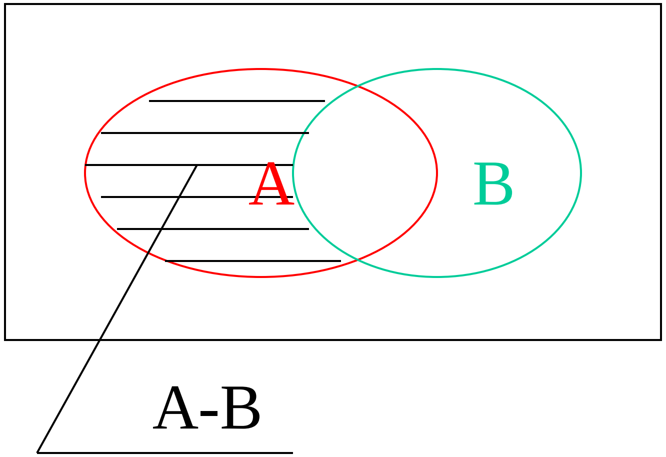
$= A \cap (E \cup B)$ (分配)

$= A \cap E = A$ (零律) (同一)

(8)$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$。

三. 差运算-（相对补集）

1.定义：A、B是集合，由属于A，而不属于B的元素构成的集合 ,称之为A与B的差集,或B对A的相对补集，记作A-B。



例如A={1,2,3} B={2,3,4}

A-B={1}

谓词定义：

$A-B=\{x|x\in A\wedge x\notin B\}$

$x\in A-B \Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B$

2.性质

设A、B、C是任意集合，则

(1) $A-\Phi=A$　　(2) $\Phi-A=\Phi$

(3) $A-A=\Phi$　　(4) $A-B\subseteq A$

(5)$A \subseteq B \Leftrightarrow A-B=\Phi$

(6)$(A-B)-C=(A-C)-(B-C)$

证明：任取$x \in (A-C)-(B-C)$

$\Leftrightarrow x \in (A-C) \wedge x \notin (B-C)$

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin C) \wedge \neg(x \in B \wedge x \notin C)$

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin C) \wedge (x \notin B \vee x \in C)$

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin C \wedge x \notin B) \vee$

$(x \in A \wedge x \notin C \wedge x \in C)$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin C \wedge x \notin B$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C$

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \wedge x \notin C$

$\Leftrightarrow x \in A-B \wedge x \notin C \Leftrightarrow x \in (A-B)-C$

所以 $(A-B)-C=(A-C)-(B-C)$

(7) $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$

注意:这不是分配律

(8) $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

证明：任取 $x\in A-(B\cup C)$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin(B\cup C)$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge\neg(x\in B\vee x\in C)$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge(x\notin B\wedge x\notin C)$

$\Leftrightarrow (x\in A\wedge x\notin B)\wedge(x\in A\wedge x\notin C)$

$\Leftrightarrow x\in A-B\wedge x\in A-C$

$\Leftrightarrow x\in(A-B)\cap(A-C)$

所以 $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C))$

(9) $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$

(10) 但∪对- 是不可分配的，如 $A\cup(A-B)=A$

而 $(A\cup A)-(A\cup B)=\Phi$

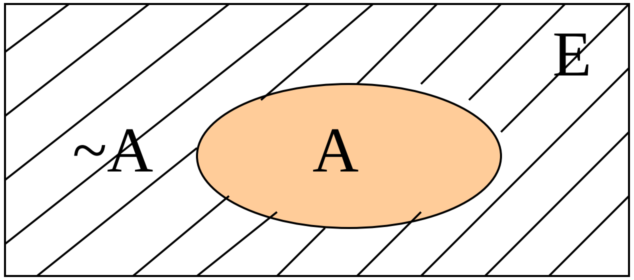
四. 绝对补集 ~

1.定义： A是集合,由不属于A的元素构成的集合，称之为A的绝对补集,记作~A。

实际上~A=E-A。

例如，E={1,2,3,4}

A={2,3},~A={1,4}



谓词定义：

$$\sim A = E-A=\{x|x\in E\wedge x\notin A\}$$

$$= \{x|x\notin A\}$$

$$x\in \sim A \Leftrightarrow x\notin A$$

2.性质

设A、B、C是任意集合，则

(1) $\sim E=\Phi$　(2) $\sim\Phi=E$　(3) $\sim(\sim A)=A$

(4) $A\cap\sim A=\Phi$　(5) $A\cup\sim A=E$　(6) $A-B=A\cap\sim B$

(7) $\sim(A\cap B)=\sim A\cup\sim B$ (8) $\sim(A\cup B)=\sim A\cap\sim B$

这两个公式称之为底-摩根定律。

证明(7)：任取 $x\in\sim(A\cap B)$

$x\in\sim(A\cap B)$

$\Leftrightarrow x\notin A\cap B \Leftrightarrow \neg(x\in A\wedge x\in B)$

$\Leftrightarrow (x\notin A\vee x\notin B) \Leftrightarrow x\in\sim A\vee x\in\sim B$

$\Leftrightarrow x\in\sim A\cup\sim B$ $\therefore \sim(A\cap B)=\sim A\cup\sim B$

(9) $A\subseteq B \Leftrightarrow \sim B\subseteq\sim A$

证明： $A\subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x\in A\rightarrow x\in B)$

$\Leftrightarrow \forall x(x\notin B\rightarrow x\notin A) \Leftrightarrow \forall x(x\in\sim B\rightarrow x\in\sim A)$

$\Leftrightarrow \sim B\subseteq\sim A$

⑽ $\sim A=B$ 当且仅当$A\cup B=E$且 $A\cap B=\Phi$

证明： $A\cup B=E\wedge A\cap B=\Phi$

$\Leftrightarrow\forall x(x\in A\cup B\leftrightarrow x\in E)\wedge$ $(P\leftrightarrow T\Leftrightarrow P)$

$\forall x(x\in A\cap B\leftrightarrow x\in \Phi)$ $(P\leftrightarrow F\Leftrightarrow\neg P)$

$\Leftrightarrow\forall x(x\in A\cup B\leftrightarrow T)\wedge\forall x(x\in A\cap B\leftrightarrow F)$

$\Leftrightarrow\forall x(x\in A\cup B\wedge\neg(x\in A\cap B))$

$\Leftrightarrow\forall x((x\in A\vee x\in B)\wedge\neg(x\in A\wedge x\in B))$

$\Leftrightarrow\forall x((x\in A\vee x\in B)\wedge(x\notin A\vee x\notin B))$

$\Leftrightarrow\forall x((x\notin A\rightarrow x\in B)\wedge(x\in B\rightarrow x\notin A))$

$\Leftrightarrow\forall x((x\in\sim A\rightarrow x\in B)\wedge(x\in B\rightarrow x\in\sim A))$

$\Leftrightarrow\forall x((x\in\sim A\leftrightarrow x\in B)$

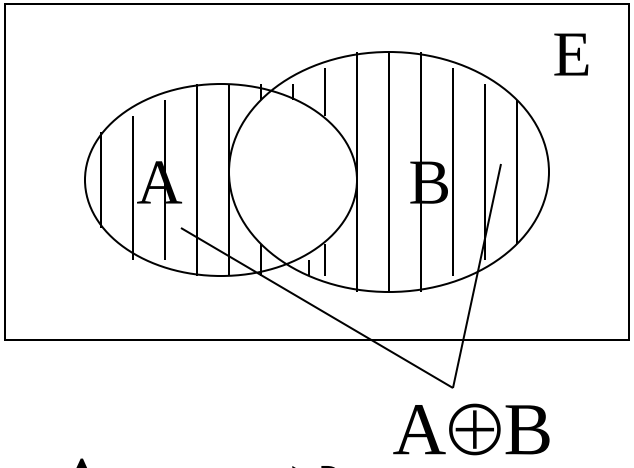
$\Leftrightarrow\sim A=B$

五. 对称差⊕

1.定义：A、B是集合,由属于A而不属于B,或者属于B而不属于A的元素构成的集合,称之为A与B的对称差,记作A⊕B。

例如A={1,2,3} B={2,3,4}

A⊕B={1,4}



谓词定义：

$$A \oplus B=(A-B)\cup(B-A)$$

$$=\{x \mid (x\in A \wedge x\notin B)\vee(x\in B\wedge x\notin A)\}$$

$$A\oplus B=(A\cup B)-(A\cap B)$$

2.性质

(1) 交换律 对任何集合A、B，有$A\oplus B=B\oplus A$。

(2) 结合律 对任何集合A、B、C，有

$(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$。

此式证明较繁，教材里有证明，这里从略。

(3) 同一律 对任何集合A，有$A\oplus\Phi=A$。

(4) 对任何集合A，有$A\oplus A=\Phi$。

(5)∩对⊕可分配 $A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$

证明： $(A\cap B)\oplus(A\cap C)$

$=((A\cap B)\cup(A\cap C))-((A\cap B)\cap(A\cap C))$

$=(A\cap(B\cup C))-(A\cap B\cap C)$

$=A\cap((B\cup C)-(B\cap C))$ (∩对-分配)

$=A\cap(B\oplus C)$

- 但是∪对⊕不可分配， 举反例：

$A\cup(A\oplus B)=A\cup B$ ，而

$(A\cup A)\oplus(A\cup B)=A\oplus(A\cup B)=(A\cup B)-A$

$A\cup(A\oplus B)\neq(A\cup A)\oplus(A\cup B)$

本节掌握：

- 各个运算的谓词定义。
- 运算的性质的证明和应用。

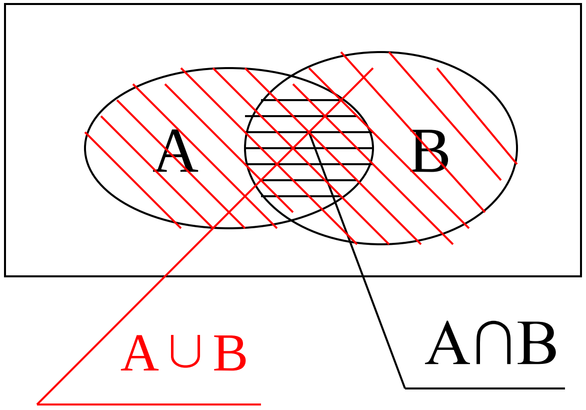
作业：

第94页⑶d)（4）（5)b)（6）（7)c)（9）

3-5. 包含排斥原理

这节主要解决集合的计数问题。例如有A、B两个商店,A店经营1000种商品，B店经营1200种商品，其中有100种商品两个商店都经营，问两个商店共经营多少种商品?

显然 $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$



如果有ABC三个有限集合，则

$$|A\cup B\cup C|=|A\cup B|+|C|-|(A\cup B)\cap C|$$

$$=|A|+|B|-|A\cap B|+|C|-|(A\cap C)\cup(B\cap C)|$$

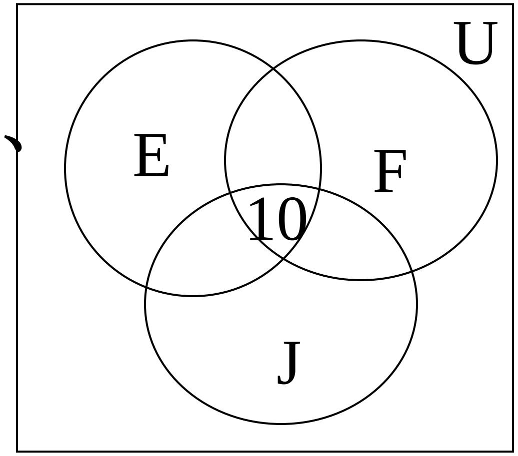
$$=|A|+|B|-|A\cap B|+|C|-(|A\cap C|+|B\cap C|-|A\cap B\cap C|)$$

$$=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$

一般地，有n个有限集合$A_1, A_2, \ldots A_n$,则

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{1\le i\prec j\le n}|A_i \cap A_j| + \sum_{1\le i\prec j\prec k\le n}|A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^{n-1}\left|\bigcap_{i=1}^{n}|A_i|\right|$$

例1 某个研究所有170名职工，其中120人会英语，80人会法语，60人会日语，50人会英语和法语，25人会英语和日语，30人会法语和日语，10人会英语、日语和法语。问有多少人不会这三种语言？



解:令U为全集，E、F、J分别为会英语、法语和日语人的集合。|U|=170

|E|=120 |F|=80 |J|=60 |E∩F|=50

|E∩J|=25 |F∩J|=30 |E∩F∩J|=10

|E∪F∪J|=|E|+|F|+|J|-|E∩F|-|E∩J|-|F∩J|+|E∩F∩J|

= 120＋80＋60－50－25－30＋10＝165

|U-(E∪F∪J)|=170-165=5 即有5人不会这三种语言。

例2.求1到1000之间不能被5、6、8整除的数的个数。

解.设全集 E＝{x| x是1到1000的整数} |E|=1000

A_5、 A_6、 A_8是E的子集并分别表示可被5、6、8整除的数的集合。$\lfloor x \rfloor$ 表示小于或等于x的最大整数。

LCM(x,y):表示x,y两个数的最小公倍数。

(Least Common Multiple)

$$|A_5| = \left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor = 200$$

$$|A_6| = \left\lfloor \frac{1000}{6} \right\rfloor = 166$$

$$|A_8| = \left\lfloor \frac{1000}{8} \right\rfloor = 125$$

$$|A5 \cap A6| = \left\lfloor \frac{1000}{LCM(5,6)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1000}{30} \right\rfloor = 33$$

$$|A_5 \cap A_8| = \left\lfloor \frac{1000}{LCM(5,8)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1000}{40} \right\rfloor = 25$$

$$|A_6 \cap A_8| = \left\lfloor \frac{1000}{LCM(6,8)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1000}{24} \right\rfloor = 41$$

$$|A_5 \cap A_6 \cap A_8| = \left\lfloor \frac{1000}{LCM(5,6,8)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1000}{120} \right\rfloor = 8$$

不能被5、6、8整除的数的集合为～$(A_5 \cup A_6 \cup A_8)$

$$|\sim(A_5 \cup A_6 \cup A_8)| = |E| - |A_5 \cup A_6 \cup A_8| = |E| - (|A_5| + |A_6| + |A_8| - |A_5 \cap A_6| - |A_5 \cap A_8| - |A_6 \cap A_8| + |A_5 \cap A_6 \cap A_8|)$$

$$= 1000 - (200 + 166 + 125 - 33 - 25 - 41 + 8) = 600$$

例3.对24名科技人员掌握外语的情况进行调查结果如下：

英、日、德、法四种外语中，每个人至少会一种；

会英、日、德、法语的人数分别是13、5、10、9人；

同时会英、日语的有2人；

同时会英、法语的有4人；

同时会德、法语的有4人；

同时会英、德语的有4人；

会日语的人不会德语，也不会法语；

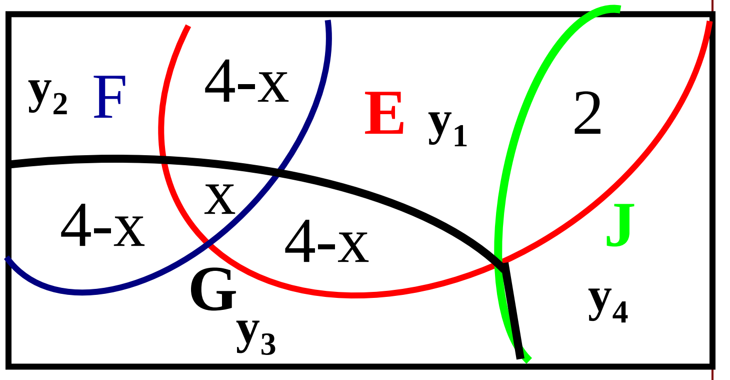
问这24人中，只会一种外语的人各是多少人？

同时会英、法、德三种语言的人有多少人？

解：设全集为U，E,F,G,J分别表示会英、法、德、日语人的集合。 $|U|=24$　$|E\cap F|=|G\cap F|=|E\cap G|=4$

又设 $|E\cap F\cap G|=x$ 只会英、法、德、日一种外语的人分别是y_1, y_2, y_3, y_4。　于是可以画出文氏图及方程如下：

$$\begin{cases} y_1+2(4-x)+x+2=13 \\ y_2+2(4-x)+x=9 \\ y_3+2(4-x)+x=10 \\ y_4+2=5 \\ y_1+y_2+y_3+y_4+3(4-x)+x+2=24 \end{cases}$$



解得： $y_1=4$， $y_2=2$， $y_3=3$， $y_4=3$ $x=1$

- **作业： P100 (4) b)**

本章小结：

1.掌握集合间三种关系的定义、谓词定义、证明方法。

2.掌握三个特殊集合，会求集合的幂集。

3.掌握集合的五种运算定义、计算方法及性质。

4.会用包含排斥原理解决集合计数问题.