第四章作业题

你的综合得分为：**30分**，你完成了全部互评

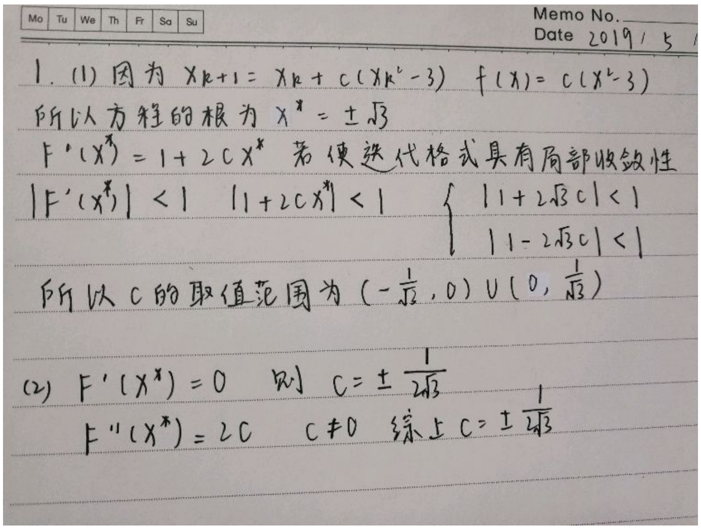
1 （10分）

1. 设 $F(x)=x+c(x^2-3)$，构造迭代格式 $x_{k+1}=F(x_k)$，$k=0,1,2,\cdots$，

(1) 求使迭代格式具有局部收敛性的参数 c 的取值范围。

(2) 求使该迭代格式具有尽可能高的收敛阶的参数 c 的值。

回答：



Mo Tu We Th Fr Sa Su   Memo No.
Date 2019 / 5 /

1.(1) 因为 $x_{k+1}=x_k+c(x_k^2-3)$ $f(x)=c(x^2-3)$

所以方程的根为 $x^*=\pm\sqrt{3}$

$F'(x^*)=1+2cx^*$ 若使迭代格式具有局部收敛性

$|F'(x^*)|<1$ $|1+2cx^*|<1$ $\begin{cases}|1+2\sqrt{3}c|<1\\ |1-2\sqrt{3}c|<1\end{cases}$

所以 c 的取值范围为 $(-\frac{1}{\sqrt{3}},0)\cup(0,\frac{1}{\sqrt{3}})$

(2) $F'(x^*)=0$ 则 $c=\pm\frac{1}{2\sqrt{3}}$

$F''(x^*)=2c$ $c\neq0$ 综上 $c=\pm\frac{1}{2\sqrt{3}}$

互评模块 (该阶段只有在互评阶段开放后才可使用)

解：方程 $x=F(x)$ 的根为 $\alpha_1=-\sqrt{3},\alpha_2=\sqrt{3}$，…………………………… (3 分)

函数 $F(x)$ 在根附近具有连续一阶导数，

又 $F'(x)=1+2cx$，解 $|F'(-\sqrt{3})|=|1-2\sqrt{3}c|<1$ 得 $0<c<\frac{1}{\sqrt{3}}$；

解 $|F'(\sqrt{3})|=|1+2\sqrt{3}c|<1$ 得 $-\frac{1}{\sqrt{3}}<c<0$.

从而使迭代 $x_{k+1}=F(x_k)$ 具有局部收敛性，应 $|c|<\frac{1}{\sqrt{3}}$，且 $c\neq0$.……… (8 分)

令 $F'(-\sqrt{3})=1-2\sqrt{3}c=0$ 得 $c=\frac{1}{2\sqrt{3}}$；

令 $F'(\sqrt{3})=1+2\sqrt{3}c=0$ 得 $c=-\frac{1}{2\sqrt{3}}$.

这时 $F''(x)=2c\neq0$ 为平方收敛.

故当 c 取 $\pm\frac{1}{2\sqrt{3}}$ 时，这个迭代格式是平方收敛的. …………………… (10 分)

你的得分：10

该题得分：10

整体评价：

student1：6
student2：1
student3：很好
student4：对
student5：棒棒

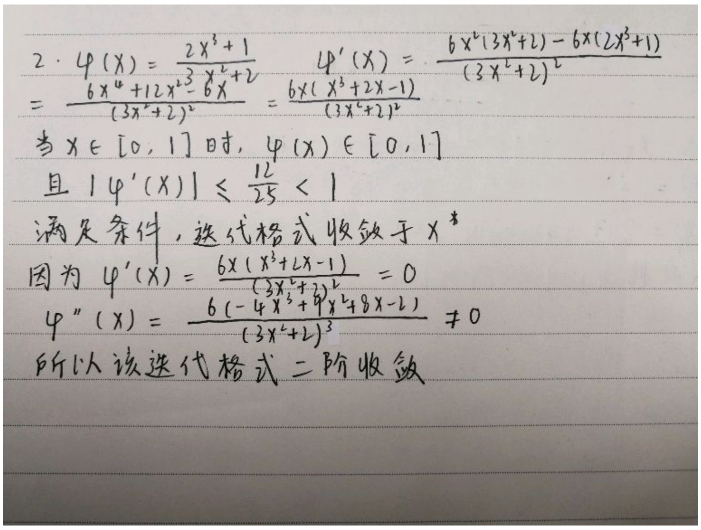
2 （10分）

2. 已知方程 $x^3+2x-1=0$ 在 $[0,1]$ 上有唯一实根 x^*，证明对任意初值 $x_0\in[0,1]$，迭代格式

$$x_{k+1}=\frac{2x_k^3+1}{3x_k^2+2},\quad k=0,1,\cdots$$

均收敛于 x^*，并分析该迭代格式的收敛阶。

回答：



2. $\varphi(x)=\frac{2x^3+1}{3x^2+2}$ $\quad \varphi'(x)=\frac{6x^2(3x^2+2)-6x(2x^3+1)}{(3x^2+2)^2}$

$=\frac{6x^4+12x^2-6x}{(3x^2+2)^2}=\frac{6x(x^3+2x-1)}{(3x^2+2)^2}$

当 $x\in[0,1]$ 时，$\varphi(x)\in[0,1]$

且 $|\varphi'(x)|\leq\frac{12}{25}<1$

满足条件，迭代格式收敛于 x^*

因为 $\varphi'(x)=\frac{6x(x^3+2x-1)}{(3x^2+2)^2}=0$

$\varphi''(x)=\frac{6(-4x^3+9x^2+8x-2)}{(3x^2+2)^3}\neq 0$

所以该迭代格式二阶收敛

互评模块 (该阶段只有在互评阶段开放后才可使用)

解：记 $\varphi(x)=\frac{2x^3+1}{3x^2+2}$，则原方程改写为 $x=\varphi(x)$。

对 $\varphi(x)$ 求导得 $\varphi'(x)=\frac{6x(x^3+2x-1)}{(3x^2+2)^2}$。…………………………………… (3 分)

当 $x\in[0,1]$ 时，容易验证 $|\varphi'(x)|<1$，且 $\varphi'(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，则存在 L 满足 $|\varphi'(x)|\leq L<1$，

又 $0\leq\varphi(x)\leq\frac{2x^2+1}{3x^2+2}<1$，

所以对任意 $x_0\in[0,1]$，迭代格式收敛于方程 $[0,1]$ 中的根。…………… (8 分)

又 $\varphi'(x^*)=0$，$\varphi''(x^*)\neq 0$，所以迭代为 2 阶收敛。……………………… (10 分)

你的得分：10

该题得分：10

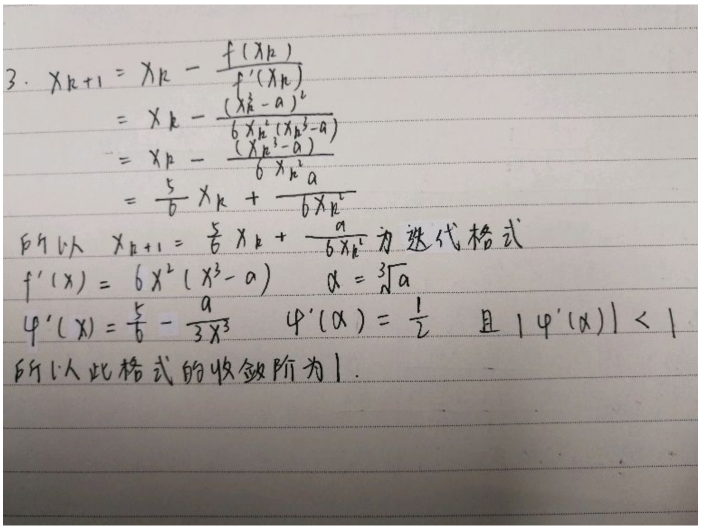
整体评价：

student1：6
student2：1
student3：很好
student4：对
student5：棒棒

3 （10分）

3. 设函数 $f(x)=(x^3-a)^2$，是建立求解方程 $f(x)=0$ 根的牛顿迭代格式，并说明此格式的收敛阶。

回答:


3. $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

$= x_k - \frac{(x_k^3-a)^2}{6x_k^2(x_k^3-a)}$

$= x_k - \frac{(x_k^3-a)}{6x_k^2 a}$

$= \frac{5}{6}x_k + \frac{}{6x_k^2}$

所以 $x_{k+1} = \frac{5}{6}x_k + \frac{a}{6x_k^2}$ 为迭代格式

$f'(x) = 6x^2(x^3-a)$ $\alpha = \sqrt[3]{a}$

$\varphi'(x) = \frac{5}{6} - \frac{a}{3x^3}$ $\varphi'(\alpha) = \frac{1}{2}$ 且 $|\varphi'(\alpha)| < 1$

所以此格式的收敛阶为1.

互评模块 (该阶段只有在互评阶段开放后才可使用)

解：将 $f(x)=(x^3-a)^2$，$f'(x)=6(x^3-a)x^2$ 代入牛顿迭代格式

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

有 $x_{k+1}=x_k-\frac{(x_k^3-a)^2}{6(x_k^3-a)x_k^2}=\frac{5}{6}x_k+\frac{a}{6x_k^2}$，…………………………………（5 分）

迭代函数 $\varphi(x)=\frac{5}{6}x+\frac{a}{6x^2}$，$\varphi'(x)=\frac{5}{6}-\frac{a}{3x^3}$，

又 $f(x)=0$ 的根 $x^*=\sqrt[3]{a}$，$\varphi'(\sqrt[3]{a})=0.5<1\neq 0$，

所以牛顿迭代法为线性收敛。 …………………………（10 分）

你的得分：10

该题得分：10

整体评价:

student1：6
student2：1
student3：很好
student4：对
student5：棒棒