第四章 二元关系

二元关系是一个很重要的概念，它在很多数学领域中都有应用，在计算机科学的如下理论都离不开关系：

逻辑设计、 数据结构、 编译原理、 软件工程

数据库理论、 计算理论、 算法分析、 操作系统 等

本章主要介绍：

关系的概念及表示方法

关系的性质

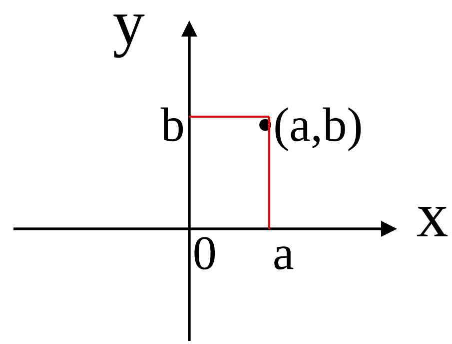
关系的运算 ：关系的复合，逆关系，关系的闭包

三种重要关系：等价关系，相容关系，次序关系

4-1 序偶与集合的笛卡尔积

“序偶”概念以前已经用过。

例如，用序偶表示平面直角坐标系中一个点(a, b)。



设x表示上衣, y表示裤子,
(x, y)可以表示一个人的着装。

一. 序偶与有序n元组

1. 定义:由两个对象x、y组成的序列称为有序二元组，也称之为序偶，记作<x, y>；称x、y分别为序偶<x, y>的第一，第二元素。

注意，序偶<x, y>与集合{x, y}不同：

序偶<x, y>：元素x和y有次序；

集合{x, y}：元素x和y的次序是无关紧要的。

2. 定义：设$\langle x, y\rangle$，$\langle u, v\rangle$是两个序偶，如果

$x=u$和$y=v$，则称$\langle x, y\rangle$和$\langle u, v\rangle$相等，

记作$\langle x, y\rangle=\langle u, v\rangle$.

3 .定义:有序3元组是一个序偶,其第一个元素也是个序偶。

有序3元组$<<a,b>, c>$可以简记成$<a,b,c>$。

但$<a,<b,c>>$不是有序3元组。

4.定义:有序n元组是一个序偶,其第一个元素本身是个有序n-1元组,记作$<<x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}>, x_n>$。且可以简记成

$<x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n>$。

5. 定义：$<x_1, x_2, \ldots, x_n>=<y_1, y_2, \ldots, y_n>$

$\Leftrightarrow (x_1=y_1) \wedge (x_2=y_2) \wedge \ldots \wedge (x_n=y_n)$

二. 集合的笛卡尔积

例如“斗兽棋”的16颗棋子:

象 狮 虎 豹 狼 狗 猫 鼠

象 狮 虎 豹 狼 狗 猫 鼠

可看成是由两种颜色的集合A和8种动物的集合B组成的。

A={红,蓝}

B={象,狮,虎,豹,狼,狗,猫,鼠}

每个棋子可以看成一个序偶，斗兽棋可记成集合A×B：

{<红,象>,<红,狮>,<红,虎>,<红,豹>,<红,狼>,<红,狗>,<红,猫>,<红,鼠>,
<蓝,象>,<蓝,狮>,<蓝,虎>,<蓝,豹>,<蓝,狼>,<蓝,狗>,<蓝,猫>,<蓝,鼠> }

1.定义:设A、B是集合，由A的元素为第一元素，B的元素为第二元素组成序偶的集合，称为A和B的笛卡尔积，记作A×B，即

$$A\times B=\{\langle x,y\rangle \mid x\in A\wedge y\in B\}$$

例1 设$A=\{0,1\}$，$B=\{a,b\}$，求$A\times B$，$B\times A$，$A\times A$。

解：$A\times B=\{\langle 0,a\rangle,\langle 0,b\rangle,\langle 1,a\rangle,\langle 1,b\rangle\}$

$B\times A=\{\langle a,0\rangle,\langle b,0\rangle,\langle a,1\rangle,\langle b,1\rangle\}$

$A\times A=\{\langle 0,0\rangle,\langle 0,1\rangle,\langle 1,0\rangle,\langle 1,1\rangle\}$

可见 $A\times B\neq B\times A$

所以，集合的笛卡尔积运算不满足交换律。

另外

$(A\times B)\times C=\{<<a,b>,c>|<a,b>\in A\times B \wedge c\in C\}$

$A\times(B\times C)=\{<a,<b,c>>|a\in A \wedge <b,c>\in B\times C\}$,

因 $<a,<b,c>>$不是有序三元组,

所以$(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C)$。

故×也不满足结合律。

2.性质

1) 如果A、B都是有限集，且$|A|=m$, $|B|=n$，则 $|A\times B|=mn$.

证明：由笛卡尔积的定义及排列组合中的乘法原理，直接推得此定理。

2) $A\times\Phi=\Phi\times B=\Phi$

3) $\times$对$\cup$和$\cap$满足分配律。

设A,B,C是任意集合，则

(1) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$;

(2) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$;

(3) $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$;

(4) $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$

证明 (1)：任取$\langle x,y\rangle\in A\times(B\cup C)$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in B\cup C\Leftrightarrow x\in A\wedge(y\in B\vee y\in C)$

$\Leftrightarrow(x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in C)$

$\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in A\times B\vee\langle x,y\rangle\in A\times C$

$\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in(A\times B)\cup(A\times C)$ 所以(1)式成立。

其余可以类似证明。

4)若$C\neq\Phi$,则

$$A\subseteq B \Leftrightarrow (A\times C\subseteq B\times C) \Leftrightarrow (C\times A\subseteq C\times B).$$

证明：必要性： 设$A\subseteq B$，求证 $A\times C\subseteq B\times C$

任取$\langle x,y\rangle\in A\times C \Leftrightarrow x\in A\wedge y\in C$

$\Rightarrow x\in B\wedge y\in C$ (因$A\subseteq B$)

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in B\times C$ 所以, $A\times C\subseteq B\times C$.

充分性： 若$C\neq\Phi$, 由$A\times C\subseteq B\times C$ 求证 $A\subseteq B$

取C中元素y, 任取 $x\in A\Rightarrow x\in A\wedge y\in C$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in A\times C$

$\Rightarrow \langle x,y\rangle\in B\times C$ (由$A\times C\subseteq B\times C$)

$\Leftrightarrow x\in B\wedge y\in C\Rightarrow x\in B$ 所以, $A\subseteq B$.

所以 $A\subseteq B\Leftrightarrow(A\times C\subseteq B\times C)$

类似可以证明 $A\subseteq B \Leftrightarrow (C\times A\subseteq C\times B)$.

5) 设A、B、C、D为非空集合，则

$A\times B\subseteq C\times D \Leftrightarrow A\subseteq C \wedge B\subseteq D$.

证明: 首先,由$A\times B\subseteq C\times D$ 证明$A\subseteq C \wedge B\subseteq D$.

任取$x\in A$，任取$y\in B$，所以

$x\in A\wedge y\in B$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in A\times B$

$\Rightarrow \langle x,y\rangle \in C\times D$ (由$A\times B\subseteq C\times D$)

$\Leftrightarrow x\in C\wedge y\in D$ 所以, $A\subseteq C \wedge B\subseteq D$.

其次, 由$A\subseteq C$，$B\subseteq D$. 证明$A\times B\subseteq C\times D$

任取$\langle x,y\rangle \in A\times B$

$\langle x,y\rangle \in A\times B \Leftrightarrow x\in A\wedge y\in B$

$\Rightarrow x\in C\wedge y\in D$ (由$A\subseteq C$，$B\subseteq D$)

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in C\times D$ 所以， $A\times B\subseteq C\times D$ 证毕.

6)约定

$(\ldots(A_1\times A_2)\times\ldots\times A_{n-1})\times A_n)=A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$

特别 $\underbrace{A\times A\times\ldots\times A}_{n个} = A^n$

设R是实数集合，则R^2表示笛卡尔坐标平面，

R^3表示三维空间，R^n表示n维空间。

3.应用

1)令A_1={x|x是学号}　A_2={x|x是姓名}　A_3={男,女}

A_4={x|x是出生日期}　A_5={x|x是班级}

A_6 ={x|x是籍贯}

则$A_1\times A_2\times A_3\times A_4\times A_5\times A_6$中一个元素：

<001，王强，男，1985.02.16，软2003-1，辽宁>

这就是学生档案数据库的一条信息，所以学生的档案就是$A_1\times A_2\times A_3\times A_4\times A_5\times A_6$的一个子集。

2) 令

A={a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p,q,r,s,t,u,v, w,x,y,z} 是英文字母表.

一个英文单词可以看成有序n元组：如

at=<a,t>, boy=<b,o,y>, data=<d,a,t,a>, computer=<c,o,m,p,u,t,e,r>

于是可以说：

$at \in A^2, boy \in A^3, data \in A^4, computer \in A^8, \ldots$

于是英文词典中的**单词集合**可以看成是

$A \cup A^2 \cup \ldots \cup A^n$ 的一个子集。

作业 第105页（2）

4-2 关系及其表示法

关系是一个非常普遍的概念，如数值的大于关系、整除关系，人类的父子关系、师生关系、同学关系等。下面讨论如何从中抽象出关系的定义和如何表示关系。

一. 例子

1. 大写英文字母与它的ASCII码的对应关系R_1:

令α={A,B,C,D,…Z}

β={41,42,43,44,…,5A}是十六进制ASCII码集合

R_1={<A,41>,<B,42>,<C,43>,...,<Z,5A>}$\subseteq\alpha\times\beta$

2.令 A ={1,2,3,4}, A中元素间的≤关系R_2：

$R_2=\{ \langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,$

$\langle 2,4\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 3,4\rangle,\langle 4,4\rangle\}\subseteq A\times A$

二. 基本概念

1.关系的定义

定义1:设A、 B 是集合，如果 $R\subseteq A\times B$，则称R是一个从A到B的二元关系。

如果 $R\subseteq A\times A$，则称R是A上的二元关系。

二元关系简称为关系。

思考题：如果|A|=m, |B|=n，则可以定义多少个从A到B的不同的关系？

答案：有2^{mn}个。因为$|A\times B|=mn$,$|P(A\times B)|=2^{mn}$, 即$A\times B$有2^{mn}个子集。

定义2:任何序偶的集合，都称之为一个二元关系。

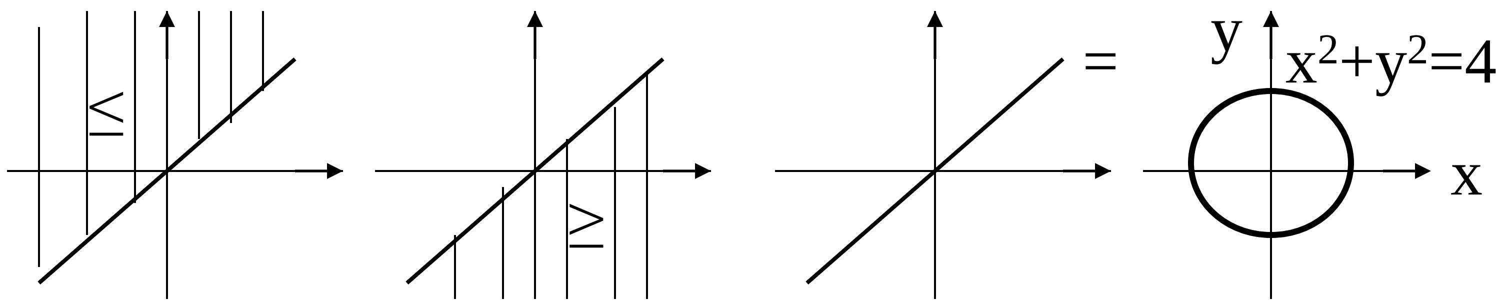
如:R={<1,a>,<书,车>,<人, 树>}

$\langle x,y\rangle \in R \Leftrightarrow xRy$ 也称之为x与y有 R 关系。

后缀表示　　中缀表示

$\langle x,y\rangle \notin R \Leftrightarrow x \not R y$ 也称之为x与y没有 R 关系。

例3. R是实数集合，R上的几个熟知的关系:



从例3中可以看出关系是序偶(点)的集合(构成线、面)。

2.关系的定义域与值域

定义域(domain)：设$R \subseteq A \times B$，由所有$<x,y> \in R$的第一个元素组成的集合，称为R的定义域，记作**dom R**，即

$$\text{dom } R=\{x \mid \exists y(<x,y> \in R)\}$$

值域(range)：设$R \subseteq A \times B$，由所有$<x,y> \in R$的第二个元素组成的集合，称为R的值域，

记作**ran R**，即

$$\text{ran } R=\{y \mid \exists x(<x,y> \in R)\}$$

上述 $R_2=\{ <1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,4>,<2,2>,<2,3>, <2,4>, <3,3>, <3,4>,<4,4>\}$

$\text{dom } R_2 =\{1,2,3,4\}$

$\text{ran } R_2 =\{1,2,3,4\}$

三. 关系的表示方法

1. 枚举法:

即将关系中所有序偶一一列举出，写在大括号内。如前的R_2 ={ <1,1>,<1,2>,<1,3>, <1,4>,<2,2>, <2,3>, <2,4>, <3,3>, <3,4>,<4,4>} 。

2. 谓词公式法:

即用谓词公式表示序偶的第一元素与第二元素间的关系。例如

$R=\{<x,y>|x<y\}$

3. 有向图法:

$R \subseteq A \times B$,用两组小圆圈(称为 结点)分别表示A和B的元素，当$<x,y> \in R$时，从x到y引一条有向弧(边)。这样得到的图形称为R的关系图。

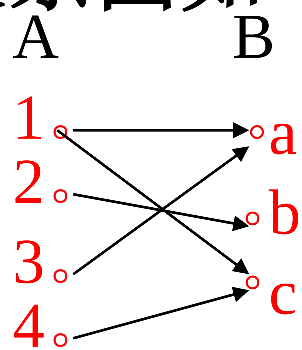
如$R \subseteq A \times A$,即R是集合A中关系时,可能有$\langle x,x\rangle \in R$,则从x到x画一条有向环(自回路)。

例 设$A=\{1,2,3,4\}$,$B=\{a,b,c\}$， $R_3 \subseteq A \times B$，

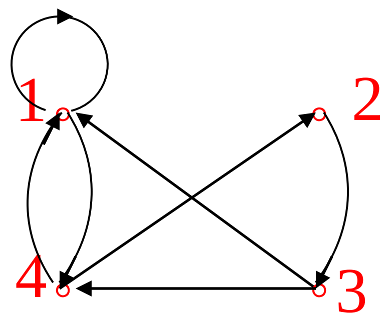
$R_3=\{ \langle 1,a\rangle,\langle 1,c\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 3,a\rangle,\langle 4,c\rangle\}$

则R_3的关系图如下：

R_3 :



R_4 :



例 设$A=\{1,2,3,4\}$, $R_4 \subseteq A \times A$，

$R_4=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 4,2\rangle\}$

则R_4的关系图如右上图。

4. 矩阵表示法：

有限集合之间的关系也可以用矩阵来表示，这种表示法便于用计算机来处理关系。

设$A=\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$，$B=\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$是个有限集，

$R \subseteq A \times B$，定义R的$m \times n$阶矩阵

$M_R=(r_{ij})_{m\times n}$，其中

$$r_{ij}=\begin{cases} 1 & 若 <a_i,b_j> \in R \\ 0 & 若 <a_i,b_j> \notin R \end{cases} \qquad (1\le i\le m, 1\le j\le n)$$

$R_3=\{ <1,a>,<1,c>,<2,b>,<3,a>,<4,c>\}$

$R_4=\{ <1,1>,<1,4>,<2,3>,<3,1>,<3,4>,<4,1>,<4,2>\}$

$$M_{R3} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} a\ b\ c \\ \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)_{4\times 3} \end{array} \qquad M_{R4} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 1\ 2\ 3\ 4 \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)_{4\times 4} \end{array}$$

四. 三个特殊关系

1.空关系Φ：

因为Φ⊆A×B，(或Φ⊆A×A)，所以Φ也是一个从A到B(或A上)的关系，称之为空关系。即无任何元素的关系，它的关系图中只有结点，无任何边；它的矩阵中全是0。

例如：A={2，3，5}，A上不同元素之间的整除关系就是空关系。

2.完全关系(全域关系)：

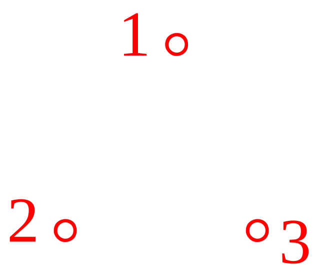
A×B(或A×A)本身也是一个从A到B(或A上) 的关系，称之为完全关系。即含有全部序偶的关系。它的矩阵中全是1。

3. A上的恒等关系I_A：

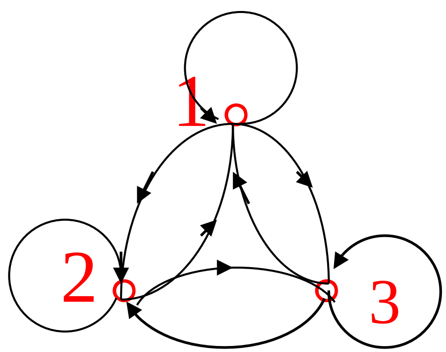
$I_A \subseteq A \times A$，且$I_A=\{<x,x>|x \in A\}$称之为A上的恒等关系。

例如A={1,2,3}, 则I_A ={<1,1>,<2,2>,<3,3>}

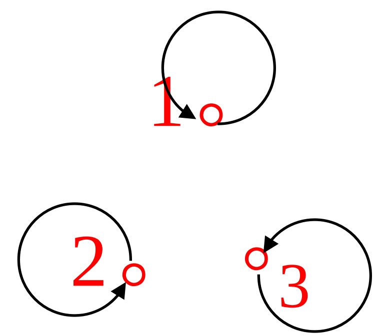
A上的Φ、完全关系A×A及I_A的关系图及矩阵如下：



Φ



A×A



I_A

$$M_\Phi=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}_{3\times3} \qquad M_{A\times A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}_{3\times3} \qquad M_{IA}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}_{3\times3}$$

五. 关系的集合运算

由于关系就是集合，所以集合的∩、∪、-、⊕和~运算对关系也适用。

例如，**A**是学生集合，**R**是**A**上的同乡关系，**S**是**A**上的同姓关系，则

R∪S：或同乡或同姓关系

R∩S：既同乡又同姓关系

R-S：同乡而不同姓关系

R⊕S：同乡而不同姓,或同姓而不同乡关系

~R：不是同乡关系, 这里 **~R=(A×A)-R**

作业 第**109**页（2)、(5)**c)d)**

4-3 关系的性质

本节将研究关系的一些性质，它们在关系的研究中起着重要的作用。这是本章最重要的一节。

本节中所讨论的关系都是集合A中的关系。

关系的性质主要有：自反性、反自反性、对称性、反对称性和传递性。

一.自反性

定义:设R是集合A中的关系，如果对于任意x∈A都有<x,x>∈R (xRx)，则称R是A中自反关系。

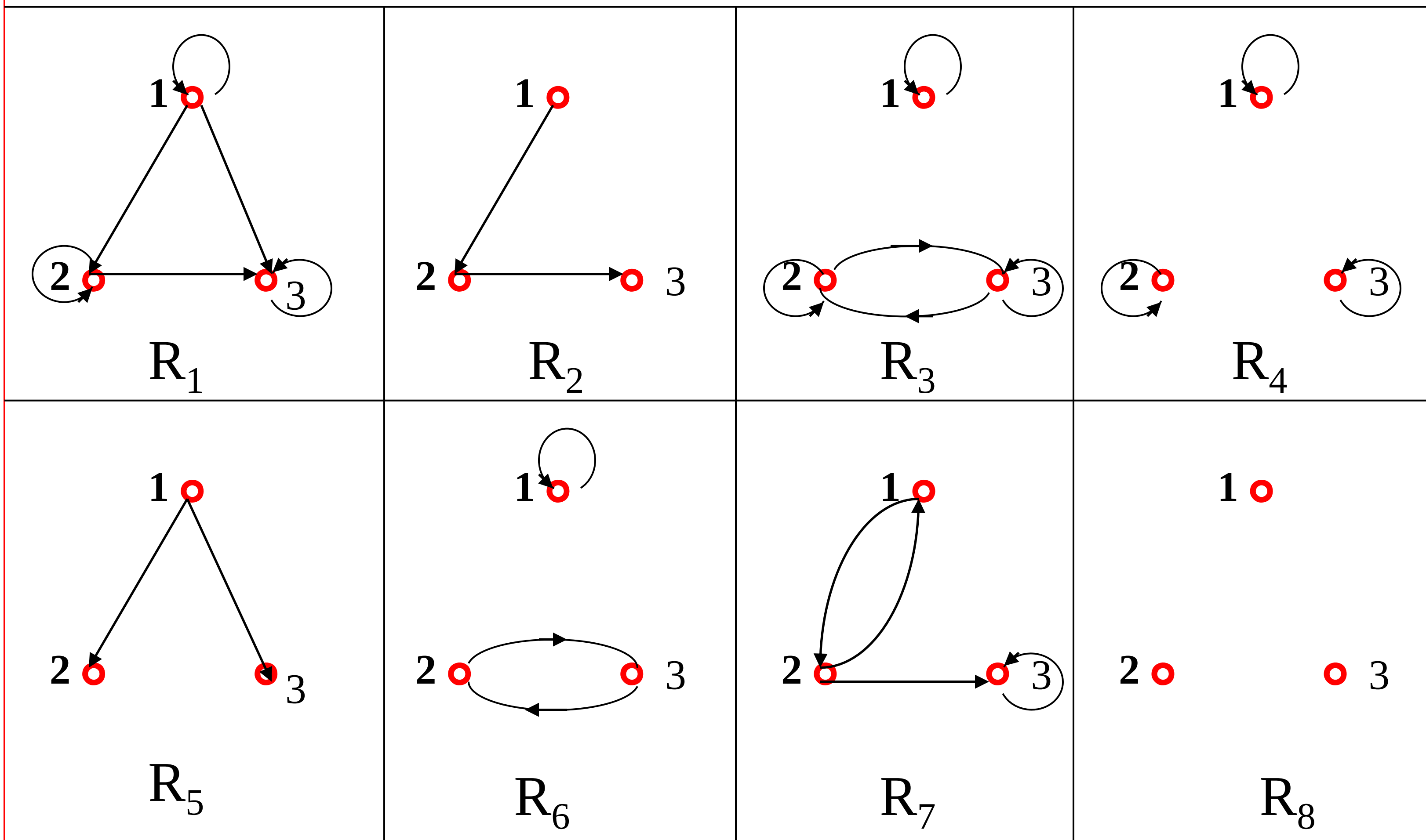
即 R是A中自反的$\Leftrightarrow \forall x(x\in A\rightarrow xRx)$

例如在实数集合中,“≤”是自反关系，因为，对任意实数x，有$x\leq x$.

从关系有向图看自反性:每个结点都有环。

从关系矩阵看自反性：主对角线都为1。

令A={1,2,3}给定A上八个关系如下：



可见这八个关系中R_1、R_3、R_4是自反的。

二.反自反性

定义：设R是集合A中的关系，如果对于任意的$x\in A$都有$\langle x,x\rangle \notin R$，则称R为A中的反自反关系。即

$$R\text{是}A\text{中反自反的}\Leftrightarrow \forall x(x\in A\rightarrow \langle x,x\rangle \notin R)$$

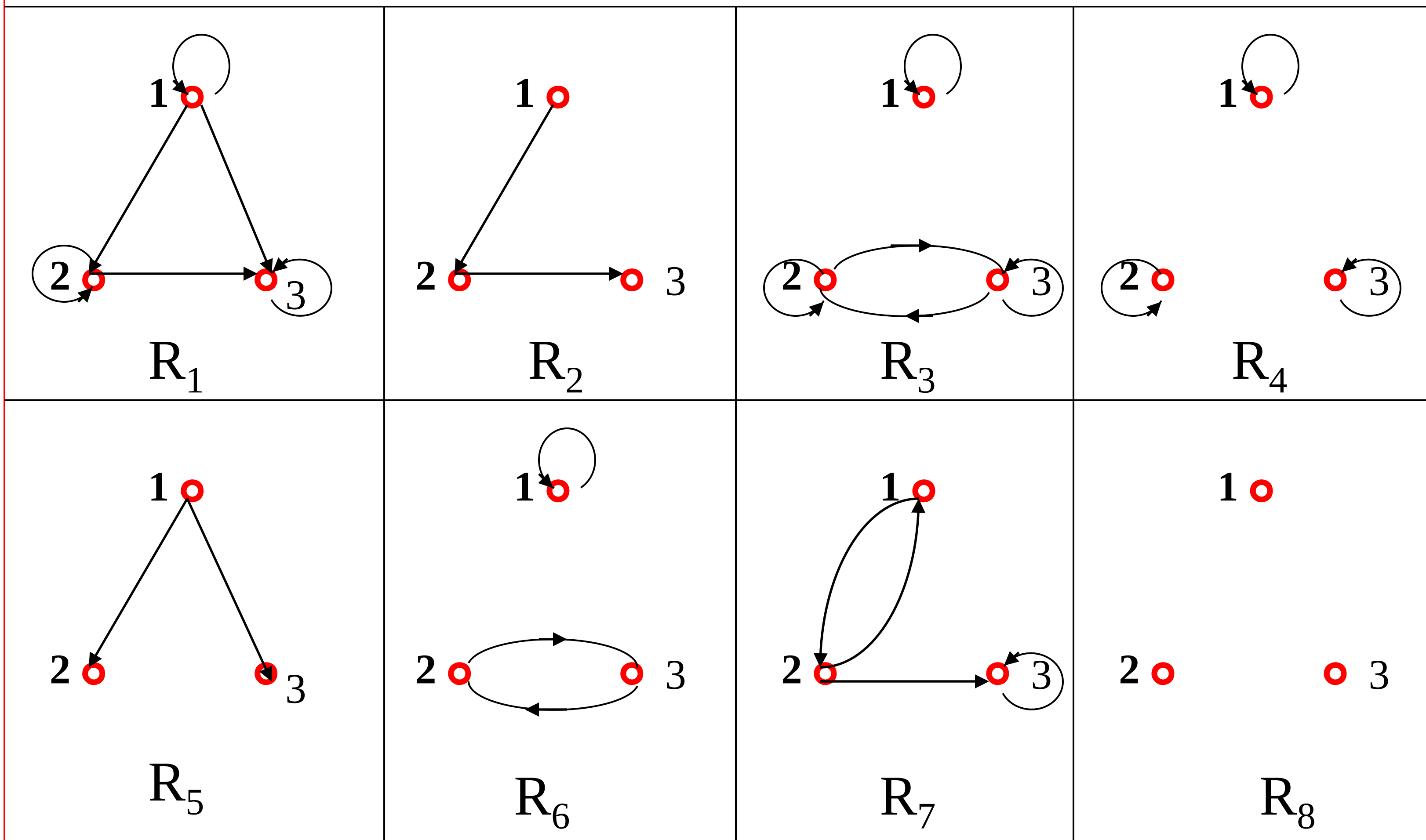
从关系有向图看反自反性:每个结点都无环。

从关系矩阵看反自反性：主对角线都为0。

如实数的大于关系>，父子关系是反自反的。

注意：一个不是自反的关系，不一定就是反自反的，如前边R_6、R_7非自反,也非反自反。

下面R_2、R_5、 R_8、均是反自反关系。



三.对称性

定义:R是集合A中关系,若对任何x, y∈A,如果有xRy,必有yRx,则称R为A中的对称关系。

R是A上对称的

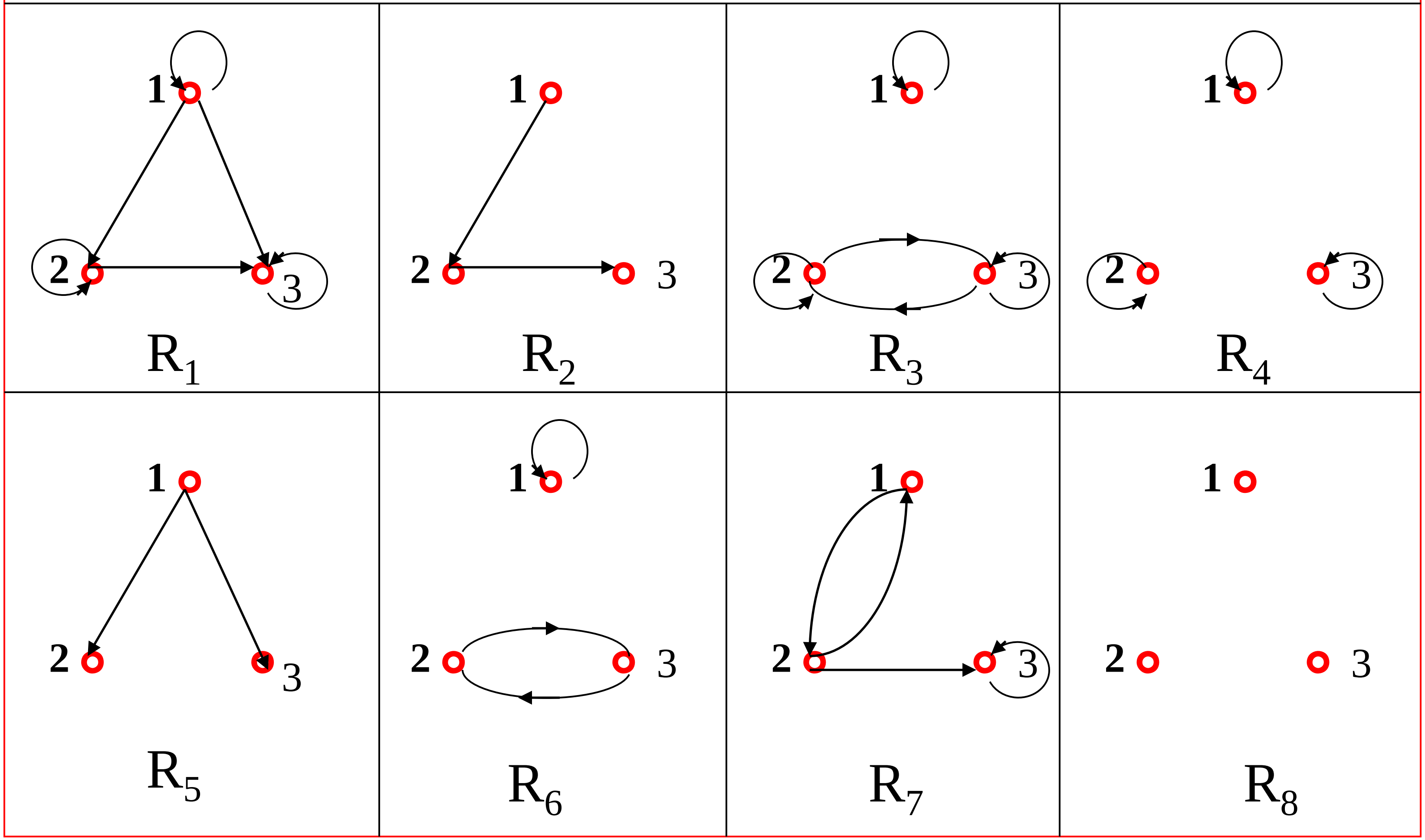
$\Leftrightarrow \forall x \forall y((x \in A \wedge y \in A \wedge xRy) \rightarrow yRx)$

从关系有向图看对称性:在两个不同的结点之间，若有边的话，则有方向相反的两条边。

从关系矩阵看对称性：以主对角线为对称的矩阵。

邻居关系是对称关系，朋友关系是对称关系。

下边R_3、R_4、 R_6 、 R_8均是对称关系。



四.反对称性

定义:设R为集合A中关系,若对任何x, y∈A,如果有xRy,和yRx,就有x=y,则称R为A中反对称关系 。

R是A上反对称的

$\Leftrightarrow \forall x \forall y((x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \wedge yRx) \rightarrow x=y)$

$\Leftrightarrow \forall x \forall y((x \in A \wedge y \in A \wedge x \neq y \wedge xRy) \rightarrow y \not R x)$ (P112)

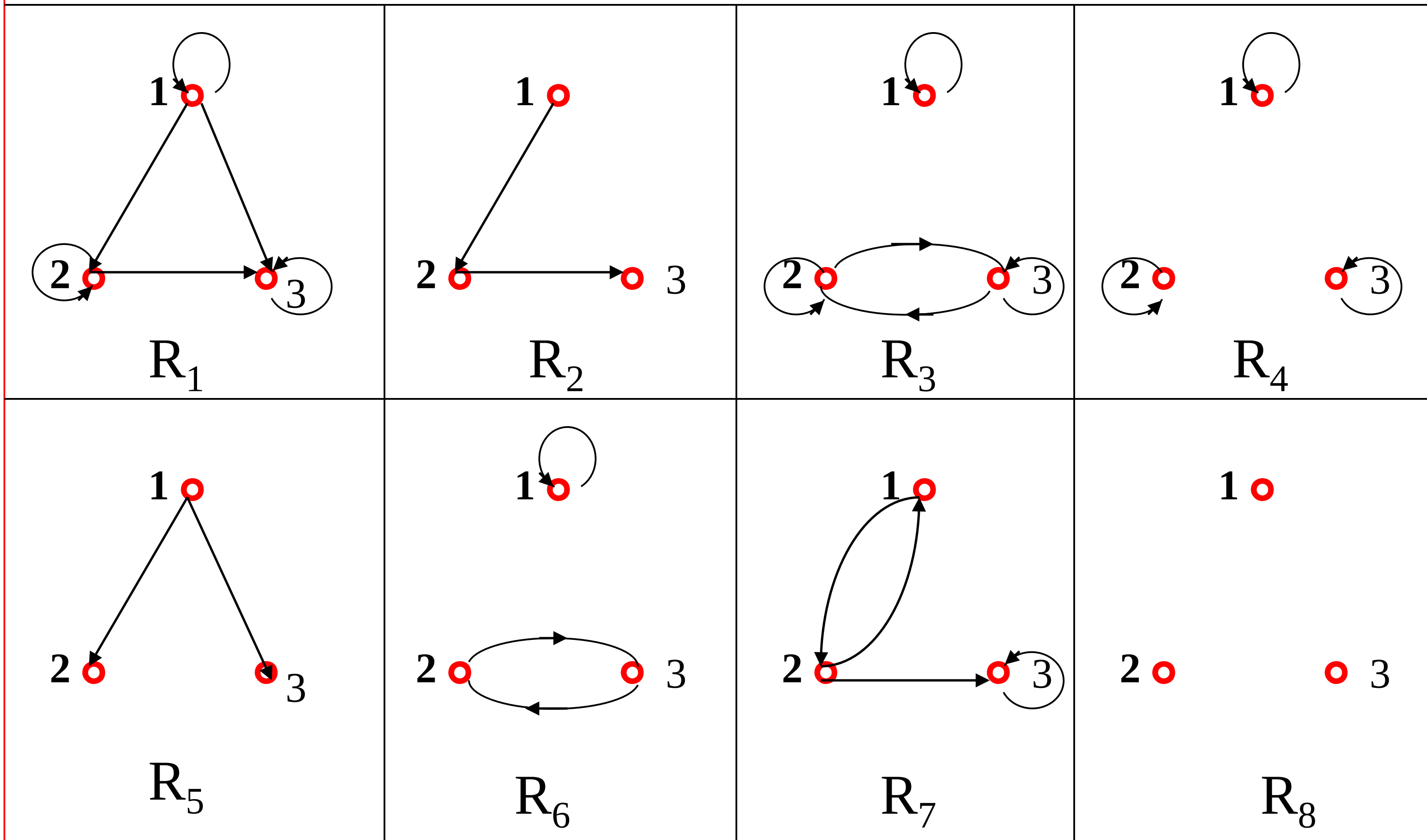
由R的关系图看反对称性：两个不同的结点之间最多有一条边。

从关系矩阵看反对称性：以主对角线为对称的两个元素中最多有一个1。

另外对称与反对称不是完全对立的，有些关系它既是对称也是反对称的，如空关系和恒等关系。

下边R_1、R_2、R_4、R_5、R_8均是反对称关系。

R_4、R_8既是对称也是反对称的。



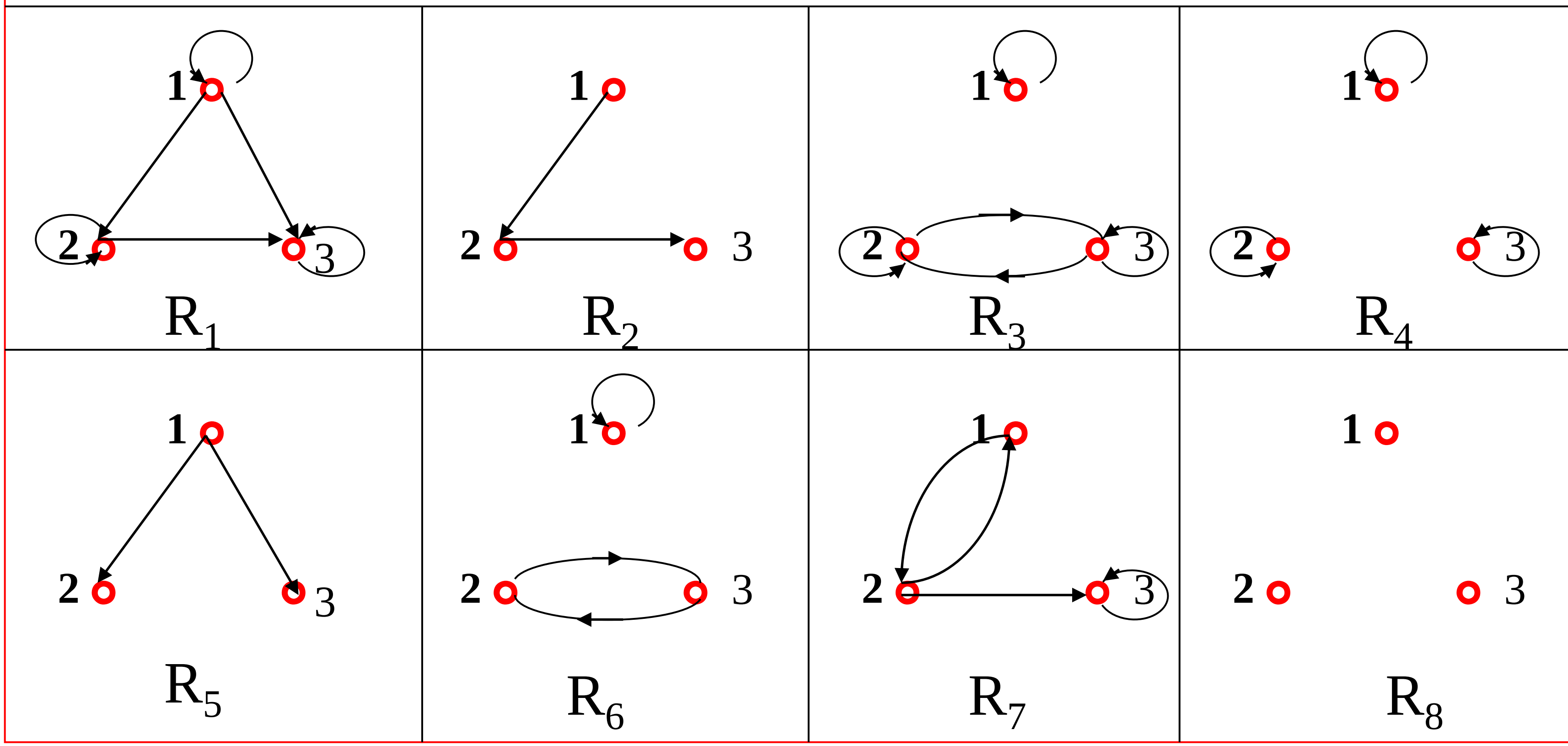
注意：对称与反对称不是完全对立的。

1.有些关系既是对称也是反对称的：　如R_4,R_8

2.有些关系只是对称的：　如R_3,R_6

3.有些关系只是反对称的：　如R_1,R_2,R_5

4.有些关系既不是对称也不是反对称的：　如R_7



五. 传递性

定义:R是A中关系，对任何x,y,z∈A,如果有xRy,和yRz,就有xRz,则称R为A中传递关系。

即R在A上传递

$\Leftrightarrow \forall x \forall y \forall z((x \in A \wedge y \in A \wedge z \in A \wedge xRy \wedge yRz) \rightarrow xRz)$

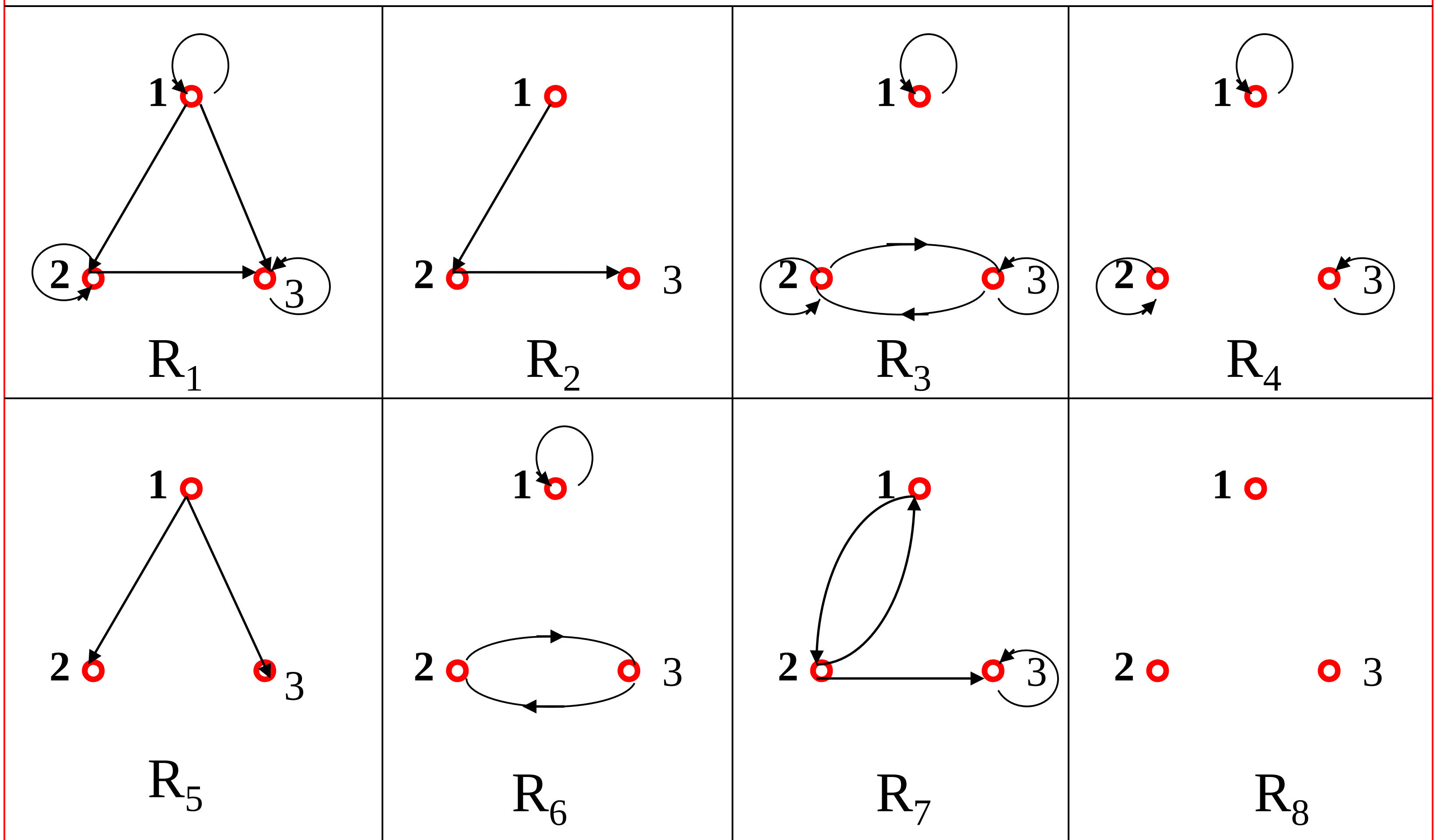
实数集中的≤、＜，集合⊆、⊂是传递的。

从关系关系图和关系矩阵中不易看清是否有传递性。有时，必须直接根据传递的定义来检查。

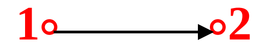
检查时要特别注意使得传递定义表达式的前件为F的时候此表达式为T，则此关系是传递的。

即若<x,y>∈R与<y,z>∈R有一个是F时(即定义的前件为假)，则R是传递的。

下边R_1、R_3、R_4、R_5、R_8均是传递的关系。



例如A={1,2},下面A中关系R是传递的.



通过带量词的公式在论域展开式说明

R在A上传递

$\Leftrightarrow \forall x \forall y \forall z((x \in A \wedge y \in A \wedge z \in A \wedge xRy \wedge yRz) \rightarrow xRz)$

$\Leftrightarrow \forall x \forall y \forall z((xRy \wedge yRz) \rightarrow xRz)$ (为了简单做些删改)

$\Leftrightarrow \forall y \forall z((1Ry \wedge yRz) \rightarrow 1Rz) \wedge \forall y \forall z((2Ry \wedge yRz) \rightarrow 2Rz)$

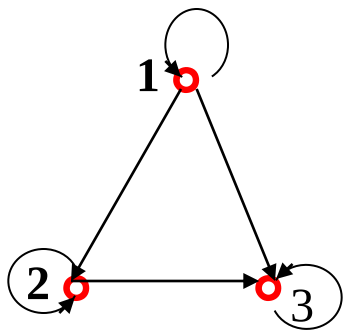
$\Leftrightarrow (\forall z((1R1 \wedge 1Rz) \rightarrow 1Rz) \wedge \forall z((1R2 \wedge 2Rz) \rightarrow 1Rz)$
$\wedge (\forall z((2R1 \wedge 1Rz) \rightarrow 2Rz) \wedge (\forall z((2R2 \wedge 2Rz) \rightarrow 2Rz))$

$\Leftrightarrow (((1R1 \wedge 1R1) \rightarrow 1R1) \wedge ((1R1 \wedge 1R2) \rightarrow 1R2)) \wedge$
$(((1R2 \wedge 2R1) \rightarrow 1R1) \wedge ((1R2 \wedge 2R2) \rightarrow 1R2)) \wedge$
$(((2R1 \wedge 1R1) \rightarrow 2R1) \wedge ((2R1 \wedge 1R2) \rightarrow 2R2)) \wedge$
$(((2R2 \wedge 2R1) \rightarrow 2R1)) \wedge ((2R2 \wedge 2R2) \rightarrow 2R2))$

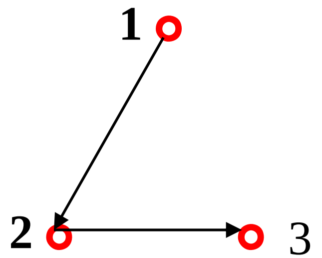
$\Leftrightarrow (((F \wedge F) \rightarrow F) \wedge ((F \wedge T) \rightarrow T)) \wedge (((T \wedge F) \rightarrow F) \wedge ((T \wedge F) \rightarrow T)) \wedge$
$(((F \wedge F) \rightarrow F) \wedge ((F \wedge T) \rightarrow F)) \wedge (((F \wedge F) \rightarrow F)) \wedge ((F \wedge F) \rightarrow F)) \Leftrightarrow T$

性质判定:	**从关系的有向图**	**从关系的矩阵**
自反性	每个结点都有环	主对角线全是1
反自反性	每个结点都无环	主对角线全是0
对称性	不同结点间如果有边,则有方向相反的两条边.	是以对角线为对称的矩阵
反对称性	不同结点间,最多有一条边.	以主对角线为对称的位置不会同时为1
传递性	如果有边<a,b>,<b,c>,则也有边<a,c>. 或者定义的前件为假.	如果$a_{ij}=1$,且$a_{jk}=1$,则$a_{ik}=1$

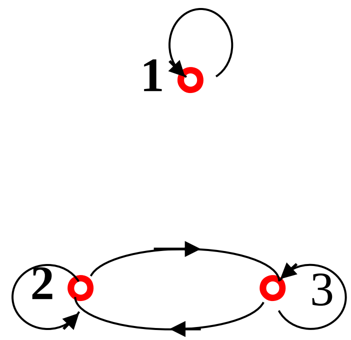
下面归纳这八个关系的性质：Y-有　N-无



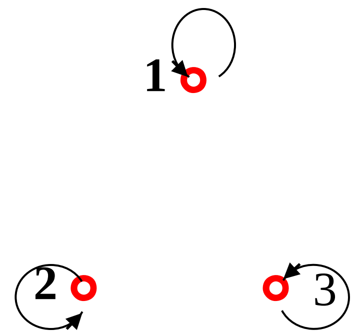
R_1



R_2

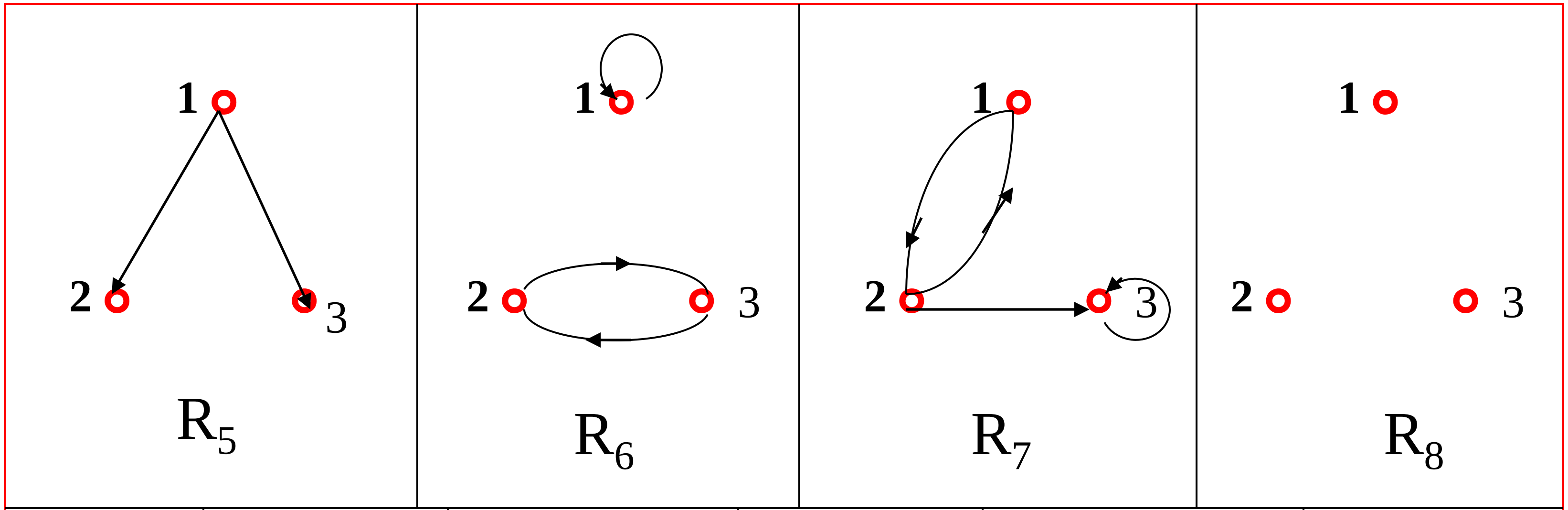


R_3



R_4

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R_1	Y	N	N	Y	Y
R_2	N	Y	N	Y	N
R_3	Y	N	Y	N	Y
R_4	Y	N	Y	Y	Y



	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R_5	N	Y	N	Y	Y
R_6	N	N	Y	N	N
R_7	N	N	N	N	N
R_8	N	Y	Y	Y	Y

Y-有　N-无

本节要求：

1.准确掌握这五个性质的定义。

2.熟练掌握五个性质的判断和证明。

R是A中自反的⇔∀x(x∈A→xRx)

R是A中反自反的⇔∀x(x∈A→<x,x>∉R)

R是A上对称的⇔∀x∀y((x∈A∧y∈A∧xRy) →yRx)

R是A上反对称的

⇔∀x∀y((x∈A∧y∈A∧xRy∧yRx) →x=y)

⇔∀x∀y((x∈A∧y∈A∧x≠y∧xRy)→y x)$\not{R}$

R在A上传递

⇔∀x∀y∀z((x∈A∧y∈A∧z∈A∧xRy∧yRz)→xRz)

上述定义表达式都是蕴涵式,所以判断关系R性质时要特别注意使得性质定义表达式的前件为F的时候此表达式为T，即R是满足此性质的。(自反和反自反性除外)

课堂练习：P113 (1)A={1,2,3},给定A中五个关系如下：

$R=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<3,3>\}$

$S=\{<1,1>,<1,2>,<2,1>,<2,2>,<3,3>\}$

$T=\{<1,1>,<1,2>,<2,2>,<2,3>\}$

Φ

A×A

判断它们的性质：**Y**表示“是”，**N**表示“否”，填下表。

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R	N	N	N	Y	Y
S	Y	N	Y	N	Y
T	N	N	N	Y	N
Φ	N	Y	Y	Y	Y
A×A	Y	N	Y	N	Y

练习1:令I是整数集合，I上关系R定义为:

R={<x,y>|x-y可被3整除}，求证R是自反、对称和传递的。

证明：(1)证自反性：任取x∈I, (要证出<x,x>∈R)

因 x-x=0, 0可被3整除,所以有<x,x>∈R, 故R自反。

(2)证对称性：任取x,y∈I,设<x,y>∈R, (要证出 <y,x>∈R)

由R定义得 x-y可被3整除， 即x-y=3n(n∈I)，

y-x=-(x-y)=-3n=3(-n)， 因-n∈I, ∴<y,x>∈R,

所以R对称。

(3)证传递性:任取x,y,z∈I,设xRy, yRz, (要证出xRz)

由R定义得 x-y=3m， y-z=3n (m.n∈I)

x-z= (x-y)+(y-z)=3m+3n=3(m+n)，因m+n∈I,

所以xRz, 所以R传递。 证毕

练习2：设R是集合A上的一个自反关系,求证：

R是对称和传递的，当且仅当

<a,b>和<a,c>在R中,则有<b,c>也在R中。

证明：必要性: 已知R是对称和传递的。

分析：结论是个蕴含式，即$<a,b>\in R \wedge <a,c>\in R \Rightarrow <b,c>\in R$

可利用“假设前件为真，推出后件为真”方法证明。

再结合已知条件：R对称、R传递。

设$<a,b>\in R$ 又$<a,c>\in R$，(要证出 $<b,c>\in R$)

因R对称的，故$<b,a>\in R$，

又已知$<a,c>\in R$ 由传递性得$<b,c>\in R$。

所以有如果<a,b>和<a,c>在R中,则有<b,c>也在R中。

充分性: 已知任意 $a,b,c\in A$， 如$<a,b>$和$<a,c>$在R中,则有$<b,c>$也在R中。

***先证R对称*:**

分析： 即任取 $a,b\in A$ 设$<a,b>\in R \Rightarrow <b,a>\in R$

应有$<?,b>\in R \wedge <?,a>\in R \Rightarrow <b,a>\in R$

而已知$<a,b>\in R$， 那么是否$<a,a>\in R$？

任取 $a,b\in A$ 设$<a,b>\in R$， **(要证出 $<b,a>\in R$)**

因R是自反的，所以$<a,a>\in R$，

由$<a,b>\in R$且$<a,a>\in R$，根据已知条件得

$<b,a>\in R$， 所以R是对称的。

***再证R传递*:**

分析：即任取 $a,b,c\in A$ 设 $<a,b>\in R \wedge <b,c>\in R$
$\Rightarrow <a,c>\in R$

应有 $<?,a>\in R \wedge <?,c>\in R \Rightarrow <a,c>\in R$

而已知 $<b,c>\in R$，那么是否 $<b,a>\in R$？

任取 $a,b,c\in A$ 设 $<a,b>\in R$，$<b,c>\in R$。(要证出 $<a,c>\in R$)

由R是对称的，得 $<b,a>\in R$，

由 $<b,a>\in R$ 且 $<b,c>\in R$，根据已知条件得

$<a,c>\in R$，所以R是传递的。

作业 第113页 (1)、(4)

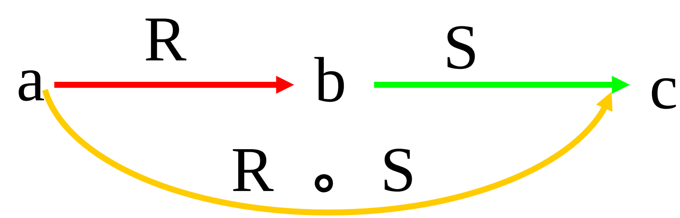
4-4 关系的复合 Composition of Relations

二元关系除了可进行集合并、交、补等运算外，还可以进行一些新的运算，先介绍由两个关系生成一种新的关系，即关系的复合运算。

例如，有3个人**a,b,c**，**A={a,b,c}**，

R是**A**上兄妹关系，

S是**A**上母子关系，



<a,b>∈R∧<b,c>∈S

a是**b**的哥哥，**b**是**a**的妹妹;

b是**c**的母亲，**c**是**b**的儿子。

则**a**和**c**间就是舅舅和外甥的关系,记作 **R∘S**，称它是**R**和**S**的复合关系。

1. 定义: 设是R从X到Y的关系，S是从Y到Z的关系，则R和S的复合关系记作R∘S 。定义为:

$$R\circ S=\{<x,z>|x\in X\wedge z\in Z\wedge\exists y(y\in Y\wedge<x,y>\in R\wedge<y,z>\in S)\}$$

显然， R∘S 是从X到Z的关系。

2. 复合关系的计算方法 (俗称过河拆桥法)

A={1,2,3} B={1,2,3.4} C={1,2,3,4,5}

$R\subseteq A\times B$ $S\subseteq B\times C$

(1)枚举法

R={<1,2>,<2,3>,<2,4>,<3,1>}

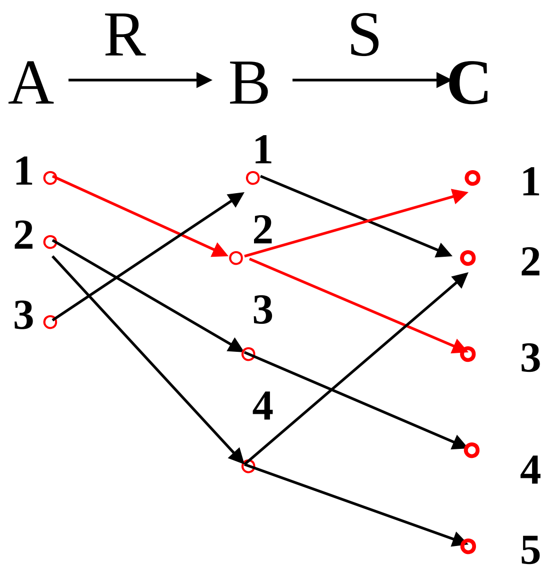
S={<1,2>,<2,1>,<2,3>,<3,4>,<4,2>,<4,5>} 则

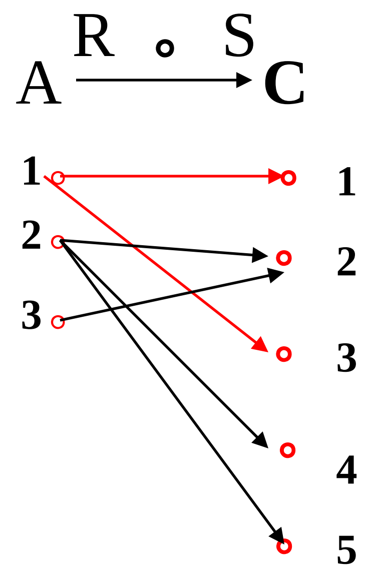
R∘S={<1,1>, <1,3>, <2,4>,<2,2>, <2,5>, <3,2> }

(2)有向图法

$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,1\rangle\}$

$S=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 4,5\rangle\}$





(3)关系矩阵法

令$A=\{a_1, a_2,\ldots, a_m\}$　$B=\{b_1, b_2,\ldots, b_n\}$

$C=\{c_1, c_2,\ldots, c_t\}$　　$R\subseteq A\times B$　$S\subseteq B\times C$

$$
\begin{bmatrix}
\langle a_1,b_1\rangle & \langle a_1,b_2\rangle & \cdots & \langle a_1,b_n\rangle \\
\langle a_2,b_1\rangle & \langle a_2,b_2\rangle & \ldots & \langle a_2,b_n\rangle \\
\vdots & \color{red}{(a_{ij})} & & \vdots \\
\langle a_m,b_1\rangle & \langle a_m,b_2\rangle & \ldots & \langle a_m,b_n\rangle
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\langle b_1,c_1\rangle & \langle b_1,c_2\rangle & \ldots & \langle b_1,c_t\rangle \\
\langle b_2,c_1\rangle & \langle b_2,c_2\rangle & \ldots & \langle b_2,c_t\rangle \\
\vdots & \color{red}{(b_{ij})} & & \vdots \\
\langle b_n,c_1\rangle & \langle b_n,c_2\rangle & \ldots & \langle b_n,c_t\rangle
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\langle a_1,c_1\rangle & \ldots & \langle a_1,c_t\rangle \\
\vdots & \color{red}{(c_{ij})} & \vdots \\
\langle a_m,c_1\rangle & \ldots & \langle a_m,c_t\rangle
\end{bmatrix}
$$

M_R $\qquad$ M_S $\qquad$ $M_{R\circ S}$

$$c_{11}=(a_{11}\wedge b_{11})\vee(a_{12}\wedge b_{21})\vee\ldots\vee(a_{1n}\wedge b_{n1})=\bigvee_{k=1}^{n}(a_{1k}\wedge b_{k1})$$

(其中∧是逻辑乘,∨是逻辑加)

$$c_{1t}=(a_{11}\wedge b_{1t})\vee(a_{12}\wedge b_{2t})\vee\ldots\vee(a_{1n}\wedge b_{nt})=\bigvee_{k=1}^{n}(a_{1k}\wedge b_{kt})$$

$$c_{ij}=(a_{i1}\wedge b_{1j})\vee(a_{i2}\wedge b_{2j})\vee\ldots\vee(a_{in}\wedge b_{nj})=\bigvee_{k=1}^{n}(a_{ik}\wedge b_{kj})$$

$$(1\le i\le m,\ 1\le j\le t)$$

上例:

$$
\begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ 0&0&1&1\\ 1&0&0&0 \end{pmatrix}_{3\times 4}
\circ
\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ 1&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&1&0&0&1 \end{pmatrix}_{4\times 5}
=
\begin{pmatrix} 1&0&1&0&0\\ 0&1&0&1&1\\ 0&1&0&0&0 \end{pmatrix}_{3\times 5}
$$

(4)谓词公式法

设I是实数集合，R和S都是I上的关系，定义如下：

$$R=\{\langle x,y\rangle \mid y=x^2+3x\}$$

$$S=\{\langle x,y\rangle \mid y=2x+3\}$$

$$x \xrightarrow{R} x^2+3x \xrightarrow{S} 2(x^2+3x)+3 = 2x^2+6x+3$$

所以 $R\circ S=\{\langle x,y\rangle \mid y=2x^2+6x+3\}$

下面做课堂练习：

课堂练习1：

给定$A=\{1,2,3\}$,A中关系R和S如下：

$R=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<3,3>\}$

$S=\{<1,1>,<1,2>,<2,1>,<2,2>,<3,3>\}$

分别求复合关系$R\circ S$，$S\circ R$，$I_A\circ R$, $R\circ I_A$。

$R\circ S=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<3,3>\}$

$S\circ R=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,1>,<2,2>,<2,3>,<3,3>\}$

$I_A=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>\}$

$I_A\circ R=R\circ I_A=R$

课堂练习2：

设F表示父亲和儿子之间的关系，M表示母亲和儿子之间的关系，S表示儿子和母亲之间的关系，D表示女儿和母亲之间的关系。问：F∘F，F∘S，D∘（D∘M）分别表示什么关系？

答：F∘F表示祖孙关系。

F∘S表示夫妻关系。

D∘（D∘M）表示外甥女和舅舅之间的关系。

三. 性质

可见关系复合运算不满足交换律，但是

1. 满足结合律：$R\subseteq A\times B$　$S\subseteq B\times C$　$T\subseteq C\times D$则

$R\circ(S\circ T)=(R\circ S)\circ T$

证明：任取$<a,d>\in R\circ(S\circ T)$

$\Leftrightarrow \exists b(b\in B\wedge <a,b>\in R\wedge <b,d>\in S\circ T)$

$\Leftrightarrow \exists b(b\in B\wedge <a,b>\in R\wedge \exists c(c\in C\wedge <b,c>\in S\wedge <c,d>\in T))$

$\Leftrightarrow \exists b\exists c(b\in B\wedge <a,b>\in R\wedge (c\in C\wedge <b,c>\in S\wedge <c,d>\in T))$

$\Leftrightarrow \exists c\exists b(c\in C\wedge (b\in B\wedge <a,b>\in R\wedge <b,c>\in S\wedge <c,d>\in T))$

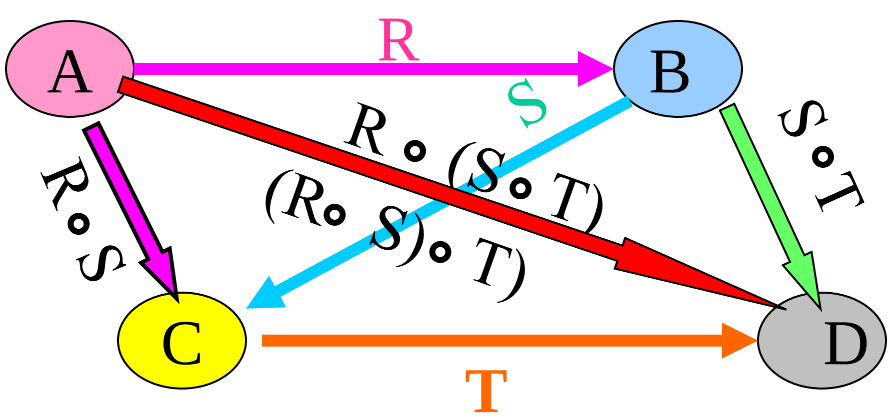
$\Leftrightarrow \exists c\ (c\in C\wedge \exists b(b\in B\wedge <a,b>\in R\wedge <b,c>\in S)\wedge <c,d>\in T)$

$\Leftrightarrow \exists c\ (c\in C\wedge <a,c>\in (R\circ S)\wedge <c,d>\in T)$

$\Leftrightarrow <a,d>\in (R\circ S)\circ T$

所以 $R\circ(S\circ T)=(R\circ S)\circ T$

可以用下图形象表示:



2. $R\subseteq A\times B \quad S\subseteq B\times C \quad T\subseteq B\times C$

(1) $R\circ(S\cup T)=(R\circ S)\cup(R\circ T)$

(2) $R\circ(S\cap T)\subseteq(R\circ S)\cap(R\circ T)$

证明(1) 任取$<a,c>\in R\circ(S\cup T)$

$\Leftrightarrow \exists b(b\in B\wedge <a,b>\in R\wedge <b,c>\in S\cup T)$

$\Leftrightarrow \exists b(b\in B\wedge <a,b>\in R\wedge (<b,c>\in S\vee <b,c>\in T))$

$\Leftrightarrow \exists b((b\in B\wedge <a,b>\in R\wedge <b,c>\in S)\vee$

$(b\in B\wedge <a,b>\in R\wedge <b,c>\in T))$

$\Leftrightarrow \exists b(b\in B\wedge <a,b>\in R\wedge <b,c>\in S)\vee$

$\exists b(b\in B\wedge <a,b>\in R\wedge <b,c>\in T)$

$\Leftrightarrow <a,c>\in R\circ S\vee <a,c>\in R\circ T$

$\Leftrightarrow <a,c>\in (R\circ S)\cup(R\circ T)$

所以$R\circ(S\cup T)=(R\circ S)\cup(R\circ T)$

证明(2) 任取$<a,c>\in R\circ(S\cap T)$

$\Leftrightarrow \exists b(b\in B \wedge <a,b>\in R \wedge <b,c>\in S\cap T)$

$\Leftrightarrow \exists b(b\in B \wedge <a,b>\in R \wedge (<b,c>\in S \wedge <b,c>\in T))$

$\Leftrightarrow \exists b((b\in B \wedge <a,b>\in R \wedge <b,c>\in S) \wedge$

$(b\in B \wedge <a,b>\in R \wedge <b,c>\in T))$

$\Rightarrow \exists b(b\in B \wedge <a,b>\in R \wedge <b,c>\in S) \wedge$

$\exists b(b\in B \wedge <a,b>\in R \wedge <b,c>\in T)$

$\Leftrightarrow <a,c>\in R\circ S \wedge <a,c>\in R\circ T$

$\Leftrightarrow <a,c>\in (R\circ S)\cap(R\circ T)$

所以 $R\circ(S\cap T)\subseteq(R\circ S)\cap(R\circ T)$

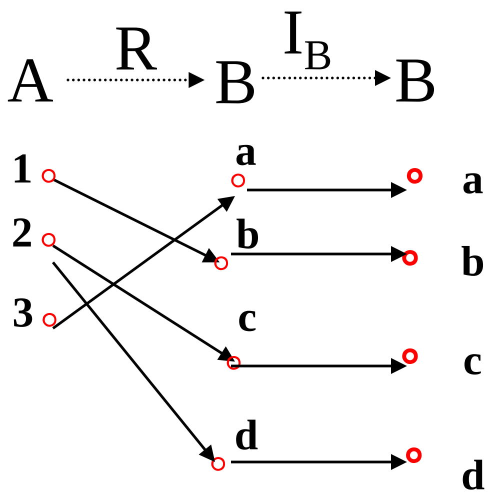
$$\exists x(A(x)\wedge B(x)) \Rightarrow \exists x A(x)\wedge \exists x B(x)$$

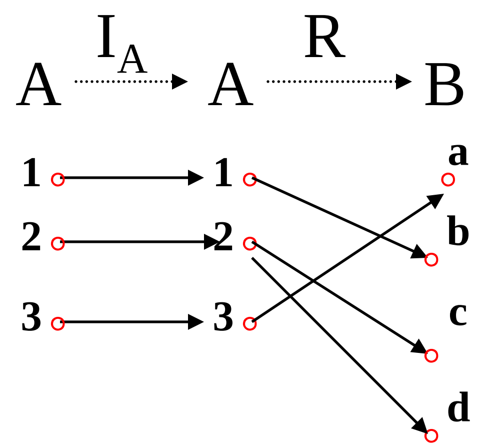
3. R是从A到B的关系，则

$$R\circ I_B = I_A\circ R = R$$

此式的证明很容易，从略。下面列举一例来验证。

令A={1,2,3}, B={a,b,c,d}





从这两个图看出它们的复合都等于R。

4. 关系的乘幂

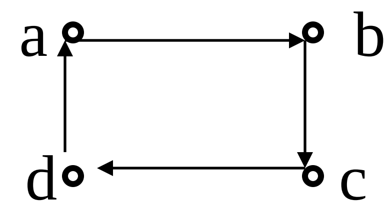
令R是A上关系，由于复合运算可结合，所以关系的复合可以写成乘幂形式。即

$$R\circ R=R^2,\quad R^2\circ R=R^{2+1}=R^3=R^{1+2}=R\circ R^2,\quad \ldots$$

一般地

$R^0=I_A$，$(R\circ R^0=R^{1+0}=R=R\circ I_A)$

R:



$R^m\circ R^n=R^{m+n}$

$(R^m)^n=R^{mn}$ (m,n为非负整数)

例如, R是A上关系，如上图所示,

$<a,c>\in R^2$, 表明从a到c有两条边的路径: $a\to b\to c$;

$<a,d>\in R^3$, 表明从a到d有三条边的路径: $a\to b\to c\to d$。...

一般的$<x,y>\in R^k$,表明在R图上有从x到y有k条边(长度为k)的路径。$(x,y\in A)$

4-5 逆关系Inverse Relation

逆关系(反关系)也是我们经常遇到的概念，例如≤与≥就是互为逆关系。

一.定义

R是从**A**到**B**的关系，如果将**R**中的所有序偶的两个元素的位置互换，得到一个从**B**到**A**的关系，称之为**R**的逆关系，记作R^C，或 R^{-1}。

$$R^C=\{<y,x>|<x,y>\in R\}$$

$$<y,x>\in R^C \Leftrightarrow <x,y>\in R$$

二. 计算方法

1. $R=\{<1,2>,<2,3>,<3,4>,<4,5>\}$

   $R^C=\{<2,1>,<3,2>,<4,3>,<5,4>\}$

2. R^C的有向图：是将R的有向图的所有边的方向颠倒一下即可。

3. R^C的矩阵 $M_{R^C} = (M_R)^T$ 即为R矩阵的转置。如

$$M_R=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&1&1\end{bmatrix}_{3\times 4} \qquad M_{R^C}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}_{4\times 3}$$

三.性质

令R、S都是从X到Y的关系，则

1. $(R^C)^C = R$
2. $(R\cup S)^C = R^C\cup S^C$
3. $(R\cap S)^C = R^C\cap S^C$
4. $(R-S)^C = R^C-S^C$

证明1.: 任取$<y,x>\in(R\cup S)^C$，则

$<y,x>\in(R\cup S)^C \Leftrightarrow <x,y>\in R\cup S$

$\Leftrightarrow <x,y>\in R \vee <x, y>\in S$

$\Leftrightarrow <y,x>\in R^C \vee <y,x>\in S^C$

$\Leftrightarrow <y,x>\in R^C\cup S^C$

所以 $(R\cup S)^C = R^C\cup S^C$，其它类似可证。

5.$(\sim R)^C=\sim R^C$

证明:任取$<y,x>\in(\sim R)^C \Leftrightarrow <x,y>\in\sim R \Leftrightarrow <x,y>\notin R$
$\Leftrightarrow <y,x>\notin R^C \Leftrightarrow <y,x>\in\sim R^C$ $\therefore$.$(\sim R)^C=\sim R^C$

6. $R\subseteq S \Leftrightarrow R^C\subseteq S^C$。

证明：充分性，已知$R^C\subseteq S^C$，则任取$<x,y>\in R$
$\Leftrightarrow <y, x>\in R^C \Rightarrow <y, x>\in S^C \Leftrightarrow <x,y>\in S$ $\therefore$ $R\subseteq S$

必要性，已知$R\subseteq S$，则任取$<y,x>\in R^C$
$\Leftrightarrow <x,y>\in R \Rightarrow <x,y>\in S \Leftrightarrow <y,x>\in S^C$ $\therefore$ $R^C\subseteq S^C$

7. 令R是从X到Y的关系，S是Y到 Z的关系，则

$(R\circ S)^C = S^C\circ R^C$ 。 (注意$\neq R^C\circ S^C$)

证明：任取$<z,x>\in(R\circ S)^C$

$\Leftrightarrow <x,z>\in R\circ S$

$\Leftrightarrow \exists y(y\in Y\wedge <x,y>\in R\wedge <y,z>\in S)$

$\Leftrightarrow \exists y(y\in Y\wedge <z,y>\in S^C\wedge <y,x>\in R^C)$

$\Leftrightarrow <z,x>\in S^C\circ R^C$ 所以$(R\circ S)^C = S^C\circ R^C$

8. R是A上关系，则

(1) R是对称的，当且仅当 $R^C = R$

(2) R是反对称的，当且仅当 $R\cap R^C\subseteq I_A$。

证明：(1) 充分性，已知 $R^C = R$ (证出R对称)

任取$x,y\in A$ 设$<x,y>\in R$,则$<y,x>\in R^C$,而$R^C = R$

所以有$<y,x>\in R$，所以R对称。

必要性，已知R 对称，(证出$R^C=R$)

先证$R^C \subseteq R$，任取$<y,x> \in R^C$,则$<x,y> \in R$,因R对称所以有$<y,x> \in R$，所以$R^C \subseteq R$。

再证$R \subseteq R^C$，任取$<x,y> \in R$, 因R对称，所以有$<y,x> \in R$，则$<x,y> \in R^C$, 所以$R \subseteq R^C$。

最后得$R^C=R$ 。

证明(2) 充分性，已知$R \cap R^C \subseteq I_A$，(证出R反对称)

任取$x,y \in A$ 设$<x,y> \in R$ 且$<y,x> \in R$,

$<x,y> \in R \wedge <y,x> \in R \Leftrightarrow <x,y> \in R \wedge <x,y> \in R^C$,

$\Leftrightarrow <x,y> \in R \cap R^C \Rightarrow <x,y> \in I_A$ (因$R \cap R^C \subseteq I_A$)

$\Rightarrow x=y$ 所以R反对称。

必要性，已知R反对称，(证出$R\cap R^C\subseteq I_A$)

任取$<x,y>\in R\cap R^C$

$<x,y>\in R\cap R^C \Leftrightarrow <x,y>\in R \wedge <x,y>\in R^C$

$\Leftrightarrow <x,y>\in R \wedge <y,x>\in R$

$\Rightarrow x=y$ (因R反对称)

$\Rightarrow <x,y>\in I_A$ 所以$R\cap R^C\subseteq I_A$。

第4-3和4-4节的要求：

熟练掌握求复合关系和逆关系的计算方法及性质。

作业：第118页⑴、⑵a)b)、⑶、⑸

4-6 关系的闭包(Closure)运算

关系的闭包是个很有用的概念，特别是传递闭包。

关系的闭包是通过关系的复合和求逆构成的一个新的关系。

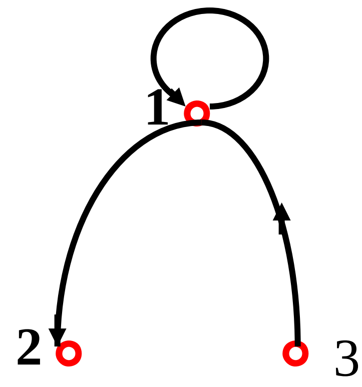
这里主要要介绍关系的

自反闭包

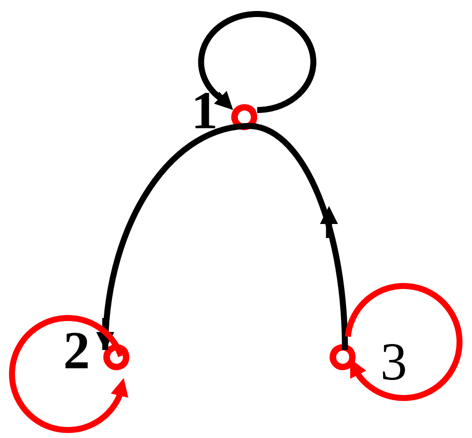
对称闭包

传递闭包

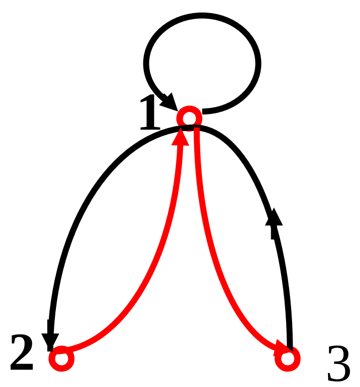
一. 例 给定 A中关系R，如图所示，分别求A上另一个关系R’，使得它是包含R的“最小的”(序偶尽量少)分别具有自反(对称、传递)性的关系。R’就分别是R的自反(对称、传递)闭包。



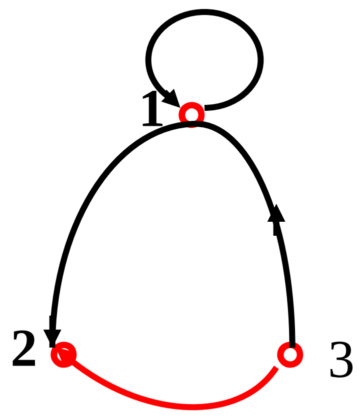
R的自反闭包：



R的对称闭包：



R的传递闭包：



二. 定义：给定 A中关系R,若A上另一个关系R’，满足：

(1)R⊆R’；

(2)R’是自反的(对称的、传递的)；

(3)R’是“最小的”，即对于任何A上自反(对称、传递)的关系R”, 如果R⊆R”, 就有R’⊆R”。

则称R’是R的自反(对称、传递)闭包。记作r(R)、(s(R) 、t(R)) (reflexive、symmetric、transitive)。

实际上r(R)、(s(R) 、t(R)) 就是包含R的“最小”的自反(对称、传递)关系。

三. 计算方法

定理1.给定 A中关系R,则 $r(R)=R\cup I_A$。

证明：令$R'=R\cup I_A$,显然R’是自反的和$R\subseteq R'$，下面证明R’是“最小的”：如果有A上自反关系R”且$R\subseteq R''$,又$I_A\subseteq R''$,所以 $R\cup I_A\subseteq R''$,即$R'\subseteq R''$。所以R’就是R的自反闭包。即$r(R)=R\cup I_A$ 。

定理2.给定 A中关系R,则 $s(R)=R\cup R^C$ 。

证明方法与1.类似。

定理3.给定 A中关系R,则 $t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup ...$ 。

证明：令$R'= R\cup R^2\cup R^3\cup ...$,

(1)显然有 $R\subseteq R'$；

(2)证R’是传递的：任取$x,y,z\in A$,设有$<x,y>\in R'$

$<y,z>\in R'$, 由R’定义得必存在整数i,j使得

$<x,y>\in R^i$, $<y,z>\in R^j$,根据关系的复合得

$<x,z>\in R^{i+j}$, 又因$R^{i+j}\subseteq R'$,所以$<x,z>\in R'$, ∴R’传递。

(3)证R’是“最小的”：如果有A上传递关系R”且

$R\subseteq R''$,（证出$R'\subseteq R''$）任取$<x,y>\in R'$,则由R’定义

得必存在整数i,使得$<x,y>\in R^i$,根据关系的复合得

A中必存在i-1个元素$e_1, e_2,\ldots,e_{i-1}$，使得 (见54页)

$<x, e_1>\in R\wedge<e_1,e_2>\in R\wedge\ldots\wedge<e_{i-1},y>\in R$。因$R\subseteq R''$,

∴有$<x, e_1>\in R''\wedge<e_1,e_2>\in R''\wedge\ldots\wedge<e_{i-1},y>\in R''$。

由于R”传递，所以有$<x,y>\in R''$。∴ $R'\subseteq R''$。

综上所述，R’就是R的传递闭包，即

$$t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots=\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$$

用上述公式计算t(R)，要计算R的无穷大次幂,好像无法实现似的。实际应用则不然，请看下例:

A={1,2,3} A中关系R_1,R_2,R_3,如下:

$R_1=\{<1,2>,<1,3>,<3,2>\}$

$R_2=\{<1,2>,<2,3>,<3,1>\}$

$R_3=\{<1,2>,<2,3>,<3,3>\}$

$R_1^2=\{<1,2>\}$ $R_1^3 = R_1^4 = \Phi$ 所以

$t(R_1)= R_1 \cup R_1^2 \cup R_1^3 = R_1$

$R_2^2=\{<1,3>,<2,1>,<3,2>\}$ $R_2^3=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>\}$

$R_2^3=I_A$, $R_2^4=R_2$ ...

$t(R_2)= R_2 \cup R_2^2 \cup R_2^3$

$R_3^2=\{<1,3>,<2,3>,<3,3>\}$ $R_3^3= R_3^2$

$t(R_3)= R_3 \cup R_3^2$

定理4.给定 A中关系R,如果A是有限集合，|A|=n 则 $t(R)=R\cup R^2\cup\ldots\cup R^n$ 。

证明：令$R'=R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$，$R''=R\cup R^2\cup\ldots\cup R^n$

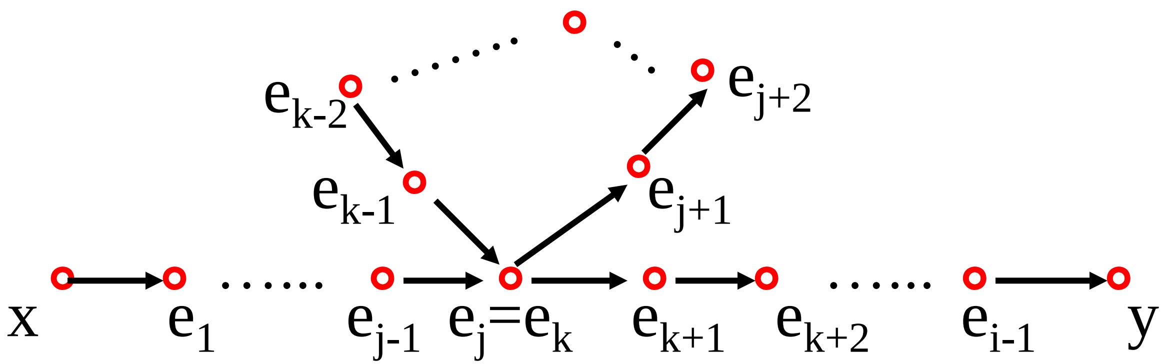
下面证明$R'=R''$，

显然有$R''\subseteq R'$。下面证明$R'\subseteq R''$：

任取$<x,y>\in R'$,由R'定义得必存在最小的正整数i 使得$<x,y>\in R^i$, (下面证明$i\le n$)如果$i>n$,

根据关系的复合得A中必存在i-1个元素$e_1, e_2,\ldots,e_{i-1}$，使得 $<x,e_1>\in R\wedge<e_1,e_2>\in R\wedge\ldots\wedge<e_{i-1},y>\in R$。

上述元素序列: $x=e_0, e_1, e_2,\ldots,e_{i-1},y=e_i$中共有i+1个元素，$i+1>n$, 而A 中只有n个元素，所以上述元素中至少有两个相同，设$e_j=e_k$ $(j<k)$，于是R的关系图中会有下面这些边：



从此图中删去回路中**k-j(k-j≥1)**条边后得

$\langle x,y\rangle \in R^{i-(k-j)}$，**i-(k-j)<i,** 与**i**是最小的矛盾。

所以**i≤n,** 所以$\langle x,y\rangle \in R''$, 于是 $R' \subseteq R''$。

最后得 $R'=R''$，所以

$t(R)=R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^n$　　　定理证毕。

求t(R)的矩阵Warshall算法：|X|=n, R⊆X×X,

令M_R=A R²的矩阵为$A^{(2)}$,… R^k的矩阵为$A^{(k)}$.故

t(R)的矩阵记作M_{R+}=A+$A^{(2)}$+…+$A^{(k)}$+…(“+”是逻辑加)

(1)置新矩阵 A :=M_R ;

(2)置 i=1;

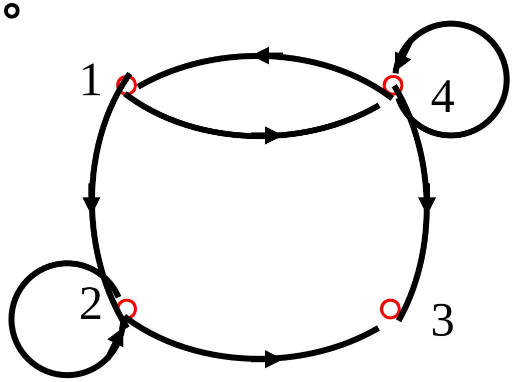
(3)对所有 j ,如果A[j,i] =1 ,则对k=1,2,…,n

A[j,k]:=A[j,k]+A[i,k]; /*第j行+第i行,送回第j行*/

(4) i加1;

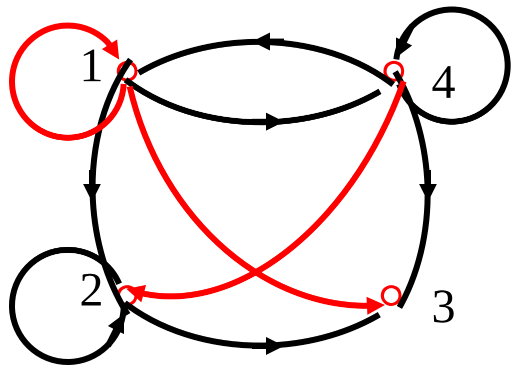
(5) 如果i≤n, 则转到步骤(3)，否则停止。

举例：令X={1,2,3,4}, X中关系R图如右图所示,用此算法求t(R)的矩阵。



要使R变成传递，需添加哪些边：

t(R) 图：



下面看看执行此算法的结果是否与这个结果一致。

i=1 (i---列, j---行)

A的初值: $A=M_R=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

A[4,1]=1

1行+4行→4行

$A=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \underline{1} & 1 & 1 \end{vmatrix}$

i=2 A[1,2]=1 ,1行+2行→1行

A[2,2]=1 ,2行+2行→2行 A不变

A[4,2]=1 ,4行+2行→4行,4行全1, A不变

$A=\begin{vmatrix} 0 & 1 & \underline{1} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \underline{1} & 1 & 1 \end{vmatrix}$

i=3 A[1,3]=1,1行+3行→1行, 3行全0, A不变

A[2,3]=1,2行+3行→2行, 3行全0, A不变

A[4,3]=1,4行+3行→4行, 3行全0, A不变

i=4 A[1,4]=1 ,1行+4行→1行

A[4,4]=1 ,4行+4行→4行 A不变,

$A=\begin{vmatrix} \underline{1} & 1 & \underline{1} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \underline{1} & 1 & 1 \end{vmatrix}$

最后 $A=M_{t(R)}$ 可见这个结果与我们前面画的图一样。

四. 性质

定理5. R是A上关系，则

(1)R是自反的，当且仅当 r(R)=R.

(2) R是对称的，当且仅当 s(R)=R.

(3) R是传递的，当且仅当 t(R)=R.

证明略，因为由闭包定义即可得。

定理6. R是A上关系，则

(1)R是自反的，则s(R)和t(R)也自反。

(2) R是对称的，则r(R)和t(R)也对称。

(3) R是传递的，则r(R)也传递。

证明: (1)因为R自反,由定理5得r(R)=R,即

$R\cup I_A=R$,　$r(s(R))=s(R)\cup I_A=(R\cup R^C)\cup I_A$

$=(R\cup I_A)\cup R^C=r(R)\cup R^C=R\cup R^C=s(R)$ ∴ s(R)自反

类似可以证明t(R)也自反。

证明(2). 证明t(R)对称:

$(t(R))^C=(R\cup R^2\cup\ldots\cup R^n\cup\ldots)^C$

$= R^C\cup(R^2)^C\cup\ldots\cup(R^n)^C\cup\ldots$

$= R^C\cup(R^C)^2\cup\ldots\cup(R^C)^n\cup\ldots$

$=R\cup R^2\cup\ldots\cup R^n\cup\ldots$ (∵R对称，∴$R^C=R$)

$=t(R)$ 所以t(R)也对称。

$(R^2)^c=(R\circ R)^c$
$=R^c\circ R^c$
$=(R^c)^2$

类似可以证明r(R)也对称。

证明(3). 证明r(R)传递:先用归纳法证明下面结论:

$(R\cup I_A)^i= I_A\cup R\cup R^2\cup\ldots\cup R^i$

①i=1时 $R\cup I_A= I_A\cup R$ 结论成立。

②假设i≤k 时结论成立，即

$(R\cup I_A)^k= I_A\cup R\cup R^2\cup\ldots\cup R^k$

③当$i=k+1$时

$(R\cup I_A)^{k+1}=(R\cup I_A)^k\circ(R\cup I_A)$

$= (I_A\cup R\cup R^2\cup\ldots\cup R^k)\circ(I_A\cup R)$

$= (I_A\cup R\cup R^2\cup\ldots\cup R^k)\cup(R\cup R^2\cup\ldots\cup R^{k+1})$

$= I_A\cup R\cup R^2\cup\ldots\cup R^k\cup R^{k+1}$

所以结论成立.

$t(r(R))=t(R\cup I_A)$

$= (R\cup I_A)\cup(R\cup I_A)^2\cup(R\cup I_A)^3\cup\ldots$

$=(I_A\cup R)\cup(I_A\cup R\cup R^2)\cup(I_A\cup R\cup R^2\cup R^3)\cup\ldots$

$= I_A\cup R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots= I_A\cup t(R)$

$= I_A\cup R$ (因为R传递$t(R)=R$)

$=r(R)$ 所以$r(R)$也传递。

定理7：设R_1、R_2是A上关系，如果$R_1 \subseteq R_2$，则

(1) $r(R_1) \subseteq r(R_2)$　(2) $s(R_1) \subseteq s(R_2)$　(3) $t(R_1) \subseteq t(R_2)$

证明(1)　$r(R_1)=I_A \cup R_1 \subseteq I_A \cup R_2 = r(R_2)$

(2)，(3)类似可证。

定理8：设R是A上关系，则

(1) $sr(R)=rs(R)$　(2) $tr(R)=rt(R)$　(3) $st(R) \subseteq ts(R)$

证明：(1) $sr(R)=r(R) \cup (r(R)^c=(R \cup I_A) \cup (R \cup I_A)^c$

$= (R \cup I_A) \cup (R^c \cup I_A{}^c) = R \cup I_A \cup R^c \cup I_A$

$= (R \cup R^c) \cup I_A = s(R) \cup I_A = rs(R)$

(2)的证明用前边证明的结论：

$(R \cup I_A)^k = I_A \cup R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^k$

很容易证明，这里从略。

(3) 因 $R\subseteq s(R)$ 由定理7得 $t(R)\subseteq ts(R)$　$st(R)\subseteq sts(R)$

因s(R)对称，有定理6得ts(R) 也对称， 由定理5得

$sts(R)=ts(R)$ 所以有$st(R)\subseteq ts(R)$ 。　　证明完毕。

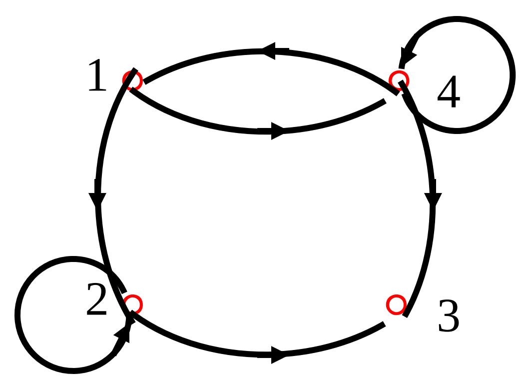
通常将t(R) 记成R^+， tr(R)记成R*， 即

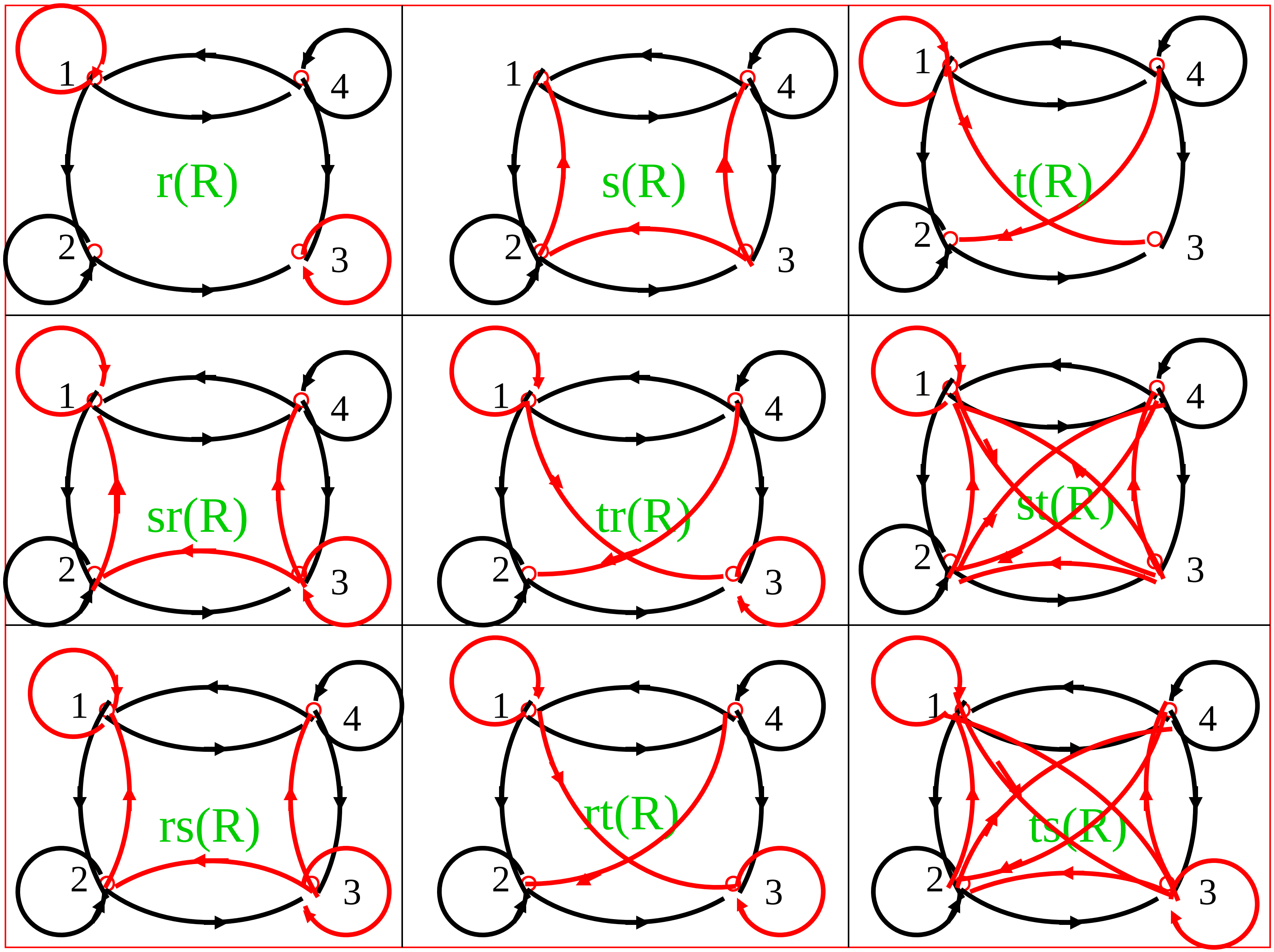
$$R^+= t(R)= R\cup R^2\cup \ldots \cup R^n\cup \ldots = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$$

$$R^*= tr(R)=rt(R) =R^0\cup R\cup R^2\cup \ldots \cup R^n\cup \ldots = \bigcup_{i=0}^{\infty} R^i$$

练习：给定A中关系R

如图所示,分别画出r(R)、s(R) 、t(R)、sr(R)、rs(R)、tr(R)、rt(R)、st(R) 、ts(R)的图。





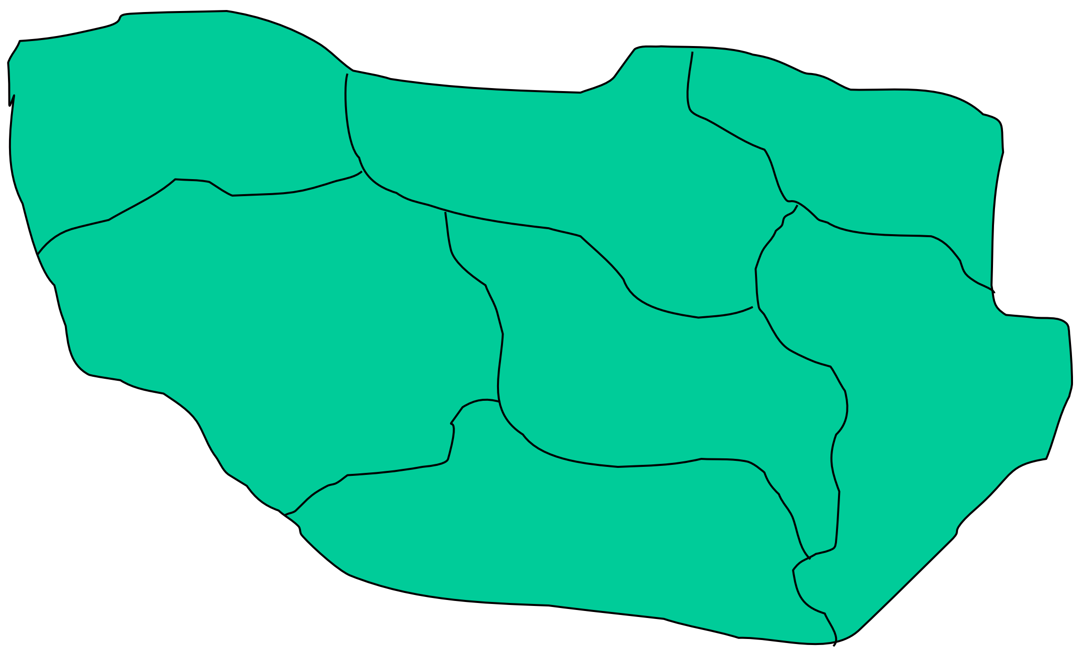
r(R)
1
2
3
4
s(R)
1
2
3
4
t(R)
1
2
3
4
sr(R)
1
2
3
4
tr(R)
1
2
3
4
st(R)
1
2
3
4
rs(R)
1
2
3
4
rt(R)
1
2
3
4
ts(R)
1
2
3
4

本节重点掌握闭包的定义、计算方法和性质。

作业 第127页 ⑴、⑸、⑺、⑻

4-7　集合的划分与覆盖
Partition and Covering of a Set

　　图书馆的图书，要分成许多类存放；学校的学生要按照专业分成许多班；一个国家按照行政区分成若干省—即对集合的元素划分。



一. 定义 设X是一个非空集合,$A=\{A_1, A_2,\dots, A_n\}$, $A_i \neq \Phi$ $A_i \subseteq X$ $(i=1,2,\dots,n)$,如果满足

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = X \quad (i=1,2,\dots, n)$$

则称A为集合X的覆盖。

设$A=\{A_1, A_2,\dots, A_n\}$是X一个覆盖, 且$A_i \cap A_j = \Phi$ $(i \neq j, 1 \leq i,j \leq n)$则称A是X的划分。每个$A_i$均称为这个划分的一个划分块(类)。

例 $X=\{1,2,3\}$, $A_1=\{\{1,2,3\}\}$, $A_2=\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$, $A_3=\{\{1,2\},\{3\}\}$, $A_4=\{\{1,2\},\{2,3\}\}$, $A_5=\{\{1\},\{3\}\}$

A_1, A_2, A_3, A_4是覆盖。 A_1, A_2, A_3也是划分。

划分,一定是覆盖；但覆盖, 不一定是划分。

二. 最小划分与最大划分

最小划分：划分块最少的划分。即只有一个划分块的划分，这个划分块就是X本身。

最大划分：划分块最多的划分。即每个划分块里只有一个元素的划分。

$X=\{1,2,3\}$,

$A_1=\{\{1,2,3\}\}$, $A_2=\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$,

其中A_1是最小划分,

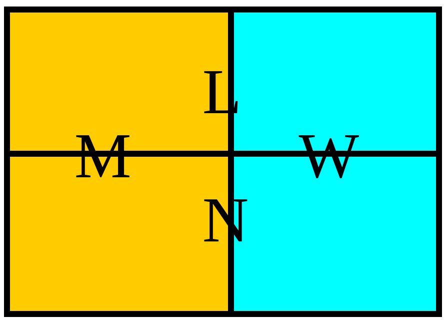
A_2是最大划分。

三. 交叉划分

例 X是东大学生集合, A和B都是X的划分:

$A=\{M,W\}, M\subseteq X,\ W\subseteq X,\ M=\{\text{男生}\}, W=\{\text{女生}\}$

$B=\{L,N\}, L\subseteq X,\ N\subseteq X,\ L=\{\text{辽宁人}\}, N=\{\text{非辽宁人}\}$



L∩M	L∩W
N∩M	N∩W

$$C=\{\underbrace{L\cap M}_{\text{辽宁男生}},\ \underbrace{L\cap W}_{\text{辽宁女生}},\ \underbrace{N\cap M}_{\text{非辽宁男生}},\ \underbrace{N\cap W}_{\text{非辽宁女生}}\}$$

称C是A和B的交叉划分。

定义：若$A=\{A_1, A_2,\ldots ,A_m\}$与$B=\{B_1,B_2,\ldots,B_n\}$都是集合X的划分,则其中所有的$A_i\cap B_j$,组成的集合C,称为C是A与B两种划分的交叉划分. (此定理的证明不讲)

证明:$\{ A_1,A_2,\ldots ,A_m\}$与$\{B_1,B_2,\ldots,B_n\}$的交叉划分是

$$C=\{A_1\cap B_1,A_1\cap B_2,\ldots,A_1\cap B_n,$$
$$A_2\cap B_1,A_2\cap B_2,\ldots,A_2\cap B_n ,\ldots,$$
$$A_m\cap B_1,A_m\cap B_2,\ldots,A_m\cap B_n\}$$

$$(A_1\cap B_1)\cup(A_1\cap B_2)\cup\ldots\cup(A_1\cap B_n)\cup$$
$$(A_2\cap B_1)\cup(A_2\cap B_2)\cup\ldots\cup(A_2\cap B_n)\cup\ldots\cup$$
$$(A_m\cap B_1)\cup(A_m\cap B_2)\cup\ldots\cup(A_m\cap B_n)$$
$$=(A_1\cap(B_1\cup B_2\cup B_3\cup\ldots B_n))\cup$$
$$(A_2\cap(B_1\cup B_2\cup B_3\cup\ldots\cup B_n))\cup\ldots\cup$$
$$(A_m\cap(B_1\cup B_2\cup B_3\cup\ldots\cup B_n))$$
$$= (A_1\cup A_2\cup A_3\cup\ldots\cup A_m)\cap(B_1\cup B_2\cup B_3\cup\ldots\cup B_n)$$
$$=X\cap X=X$$

再验证C中任意两个元素不相交：

在C中任取两个不同元素$A_i \cap B_h$和$A_j \cap B_k$,考察

$$(A_i \cap B_h) \cap (A_j \cap B_k) \quad (i=j和h=k不同时成立)$$

$$= (A_i \cap A_j) \cap (B_h \cap B_k)$$

$i = j$,$h \neq k$ $\quad (A_i \cap A_j) \cap (B_h \cap B_k) = A_i \cap \phi = \phi$

$i \neq j$,$h \neq k$ $\quad (A_i \cap A_j) \cap (B_h \cap B_k) = \phi \cap \phi = \phi$

$i \neq j$, $h = k$ $\quad (A_i \cap A_j) \cap (B_h \cap B_k) = \phi \cap B_h = \phi$

综上所述，C是X的划分。

四. 划分的加细

定义：设A={A_1, A_2,... ,A_m}与B={B_1,B_2,...,B_n}都是集合X的划分,若对于任何$A_i \in A$, 都存在 $B_j \in B$, 使得$A_i \subseteq B_j$, 则称为A是B的加细。(即A对X的划 分要比B对X的划分分得更细)

例如X={1,2,3}, A_1={{1,2,3}}, A_2={{1},{2},{3}},

A_3={{1,2},{3}}, 可见 A_2是A_1和A_3的加细。

又如上例中 A={M,W}, M={男生},W={女生}

B={L,N}, L={辽宁人},N={非辽宁人}

C={L∩M , L∩W , N∩M , N∩W }

显然C是A和B的加细。可见 交叉划分是原划分的加细。

作业：第130页 (1)

4-8 等价关系与等价类

Equivalence Relations & Equivalence Class

等价关系是很重要的关系，它是我们遇到最多的关系，例如，数值相等关系=、命题间的等价关系⇔、三角形相似∽和全等关系≌，.....

一. 等价关系

1.定义:设R是A上关系,若R是自反的、对称的和传递的，则称R是A中的等价关系。若a,b∈A，且aRb，则称a与b等价。

例子，集合A={1,2,3,4,5,6,7}, R是A上的模3同余关系，即

R={<x,y>|x-y可被3整除(或x/3与y/3的余数相同)}

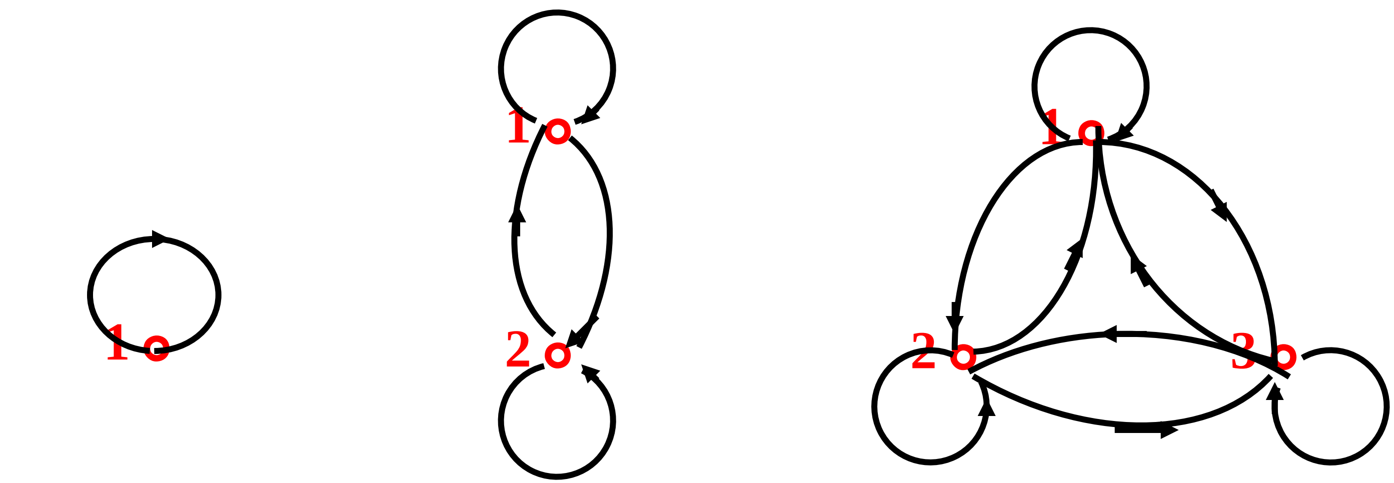
即$<x,y>\in R \Leftrightarrow x(\mathrm{mod}\ 3)=y(\mathrm{mod} 3)$

例如 $4(\mathrm{mod}\ 3)=7(\mathrm{mod} 3)$ $3(\mathrm{mod}\ 3)=6(\mathrm{mod} 3)$

$R=\{<1,1>,<1,4>,<1,7>,<2,2>,<2,5>,<3,3>,<3,6>,<4,1>,<4,4>,<4,7>,<5,2>,<5,5>,<6,3>,<6,6>,<7,1>,<7,4>,<7,7>\}$

2.等价关系的有向图

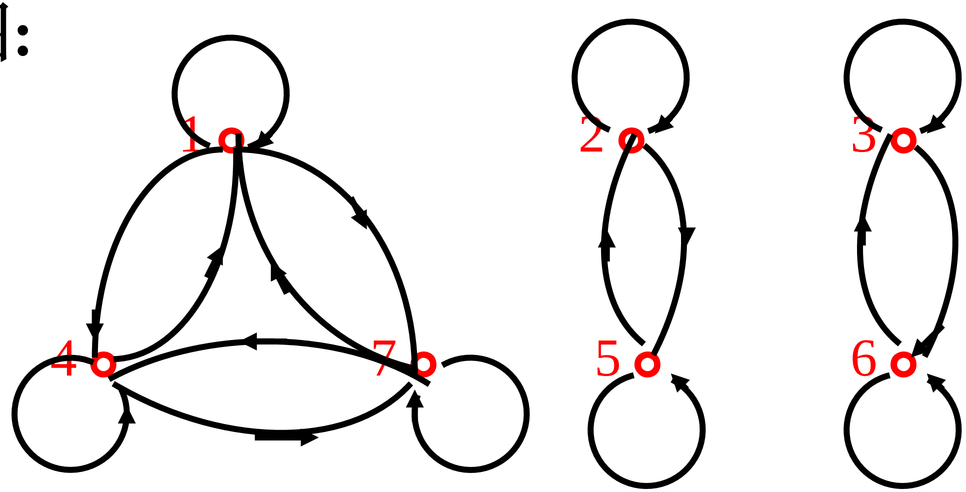
1)完全关系(全域关系A×A)图，下面分别是当A中只有1、2、3个元素时的完全关系图。



A={1} A={1,2} A={1,2,3}

2.等价关系的有向图:

上边的模3同余关系R的图:



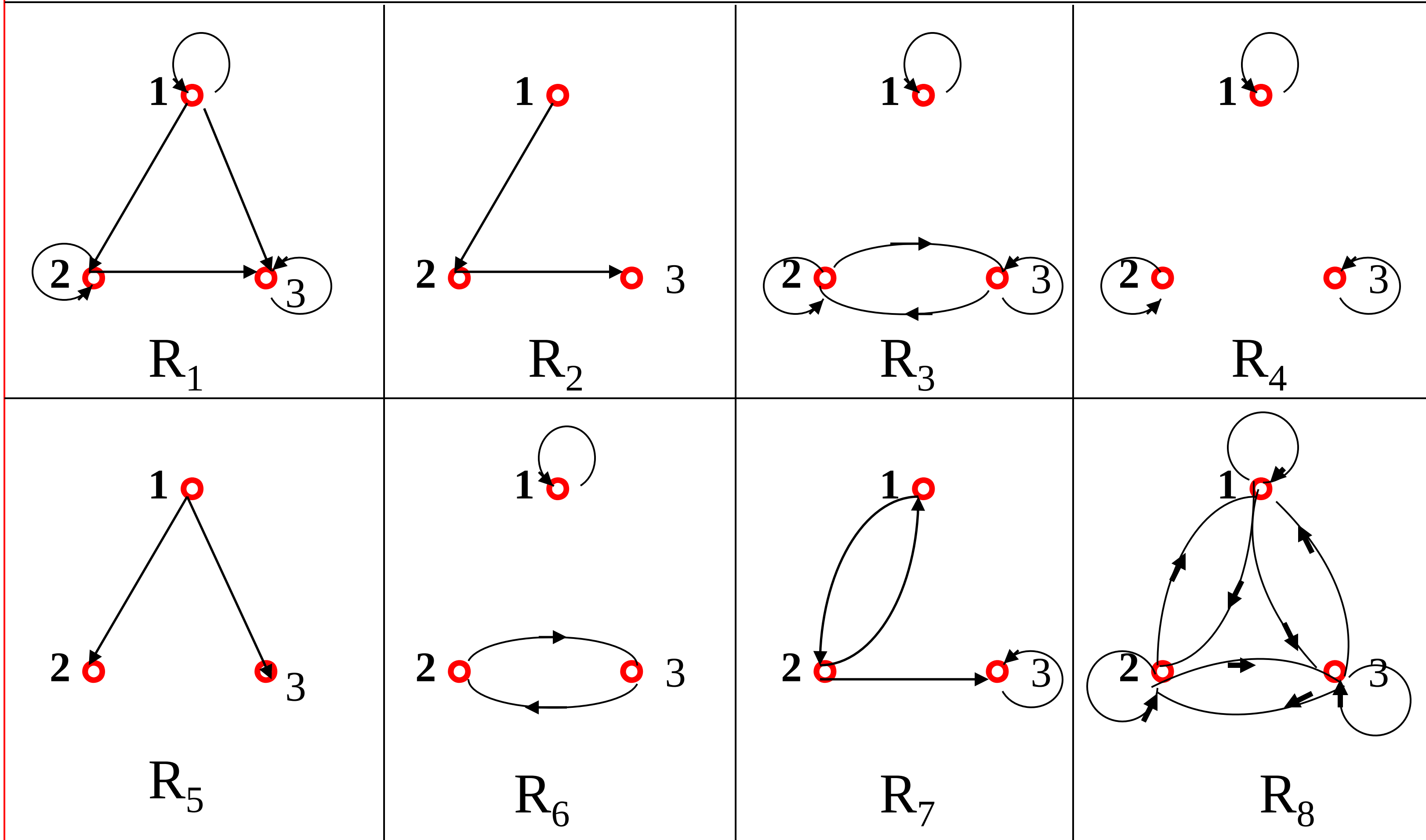
从关系图可看出，R是自反、对称、传递的关系，所以R是等价关系。

等价关系R的有向图可能由若干个独立子图(R图的一部分)构成的，每个独立子图都是完全关系图。

上述关系R图就是由三个独立的完全图构成的。

下面给出八个关系如图所示，根据等价关系有向图的特点，判断哪些是等价关系，

A={1,2,3}下面是A中关系：



思考题：A={1,2,3},可构造多少个A中不同的等价关系？可以根据等价关系有向图的特点来考虑。

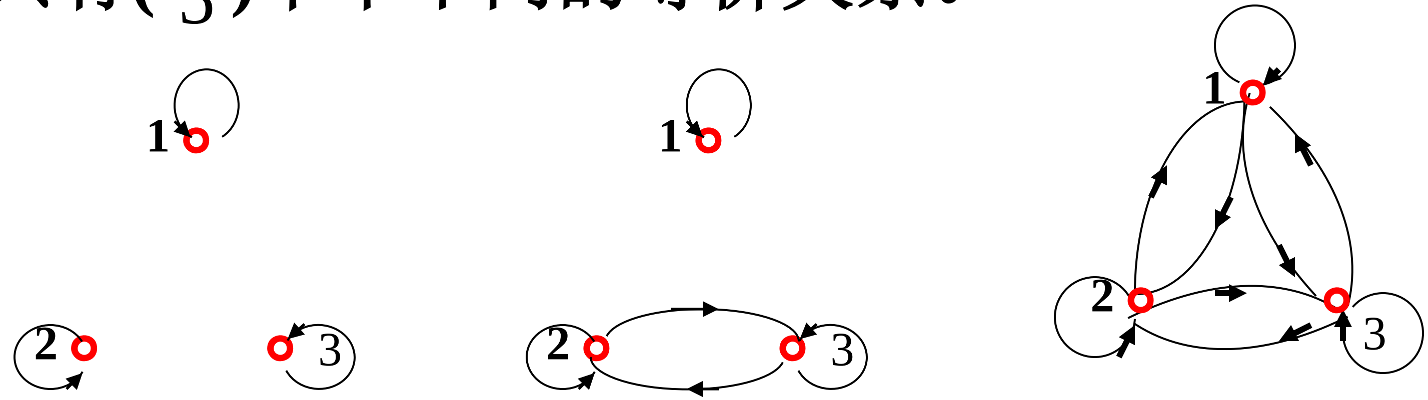
如果等价关系**R**中有

a)三个独立子图的情形，则**(** 1 **)**个等价关系 。

b)二个独立子图的情形，则**(** 3 **)**个等价关系 。

c)一个独立子图的情形，则**(** 1 **)**个等价关系 。

一共有**(** 5 **)**个中不同的等价关系。



R_4　　R_3　　R_8

二. 等价类

我们经常用等价关系对集合进行划分，得到的划分块称之为等价类。

1. 定义：R是A上的等价关系，a∈A, 由a确定的集合$[a]_R$:

$$[a]_R=\{x \mid x\in A \wedge \langle a, x\rangle \in R\}$$

称集合$[a]_R$为由a形成的R等价类。简称a等价类。

可见 $x\in [a]_R \Leftrightarrow \langle a,x\rangle \in R$

上例，A={1,2,3,4,5,6,7}, R是A上的模3同余关系，

$[1]_R=\{1,4,7\}= [4]_R = [7]_R$ ----余数为1的等价类

$[2]_R=\{2,5\}= [5]_R$ ----余数为2的等价类

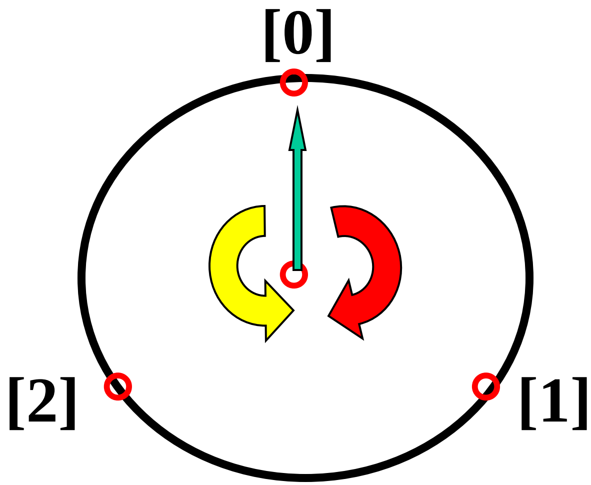
$[3]_R=\{3,6\}= [6]_R$ ----余数为0的等价类

思考题：此例为什么只有三个等价类?

下面将A上的模3同余关系，推广到整数I上模3同余关系，求各个等价类。

3-时钟代数：

{…-9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, … }



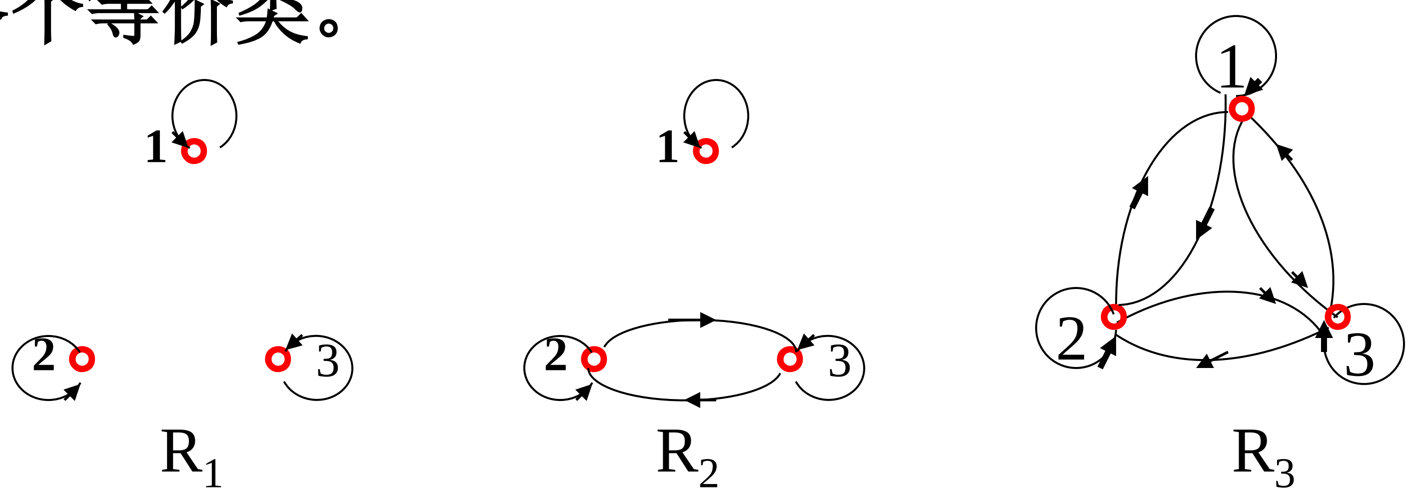
{…-7,-4,-1, 2,5, 8,11, … }

{ …-8,-5, -2,1,4,7,10, …}

2. 由等价关系图求等价类：R图中每个独立子图上的结点，构成一个等价类。

不同的等价类个数=独立子图个数。

下面三个等价关系各有几个等价类？指出对应的各个等价类。



R_1: 3个等价类，{1}, {2}, {3}

R_2: 2个等价类，{1}, {2, 3}

R_3: 1个等价类，{1, 2,3}

从上述模3同余关系例子中，可以归纳出等价类的性质：任何两个等价类要么相等，要么不相交；那么在什么情况下相等？那么在什么情况下不相交？

3.等价类性质

R是A上等价关系，任意a,b,c∈A

(1)同一个等价类中的元素，彼此有等价关系**R**。

即任意$x,y\in[a]_R$，必有$<x,y>\in R$

证明：任取$x,y\in[a]_R$，由等价类定义得，$<a,x>\in R$，$<a,y>\in R$，由R对称得，$<x,a>\in R$，又由R传递得$<x,y>\in R$。

(2) $[a]_R\cap[b]_R=\Phi$，当且仅当$<a,b>\notin R$。

证明:设$<a,b>\notin R$，假设$[a]_R\cap[b]_R\neq\Phi$，则存在$x\in[a]_R\cap[b]_R$，$\therefore x\in[a]_R\wedge x\in[b]_R$，$\therefore <a,x>\in R$，$<b,x>\in R$，由R对称得$<x,b>\in R$，由传递得$<a,b>\in R$，产生矛盾。$\therefore [a]_R\cap[b]_R=\Phi$。

若$[a]_R\cap[b]_R=\Phi$，而$<a,b>\in R$，由等价类定义得$b\in[a]_R$，$\because$为bRb，$\therefore b\in[b]_R$，$\therefore b\in[a]_R\cap[b]_R$，产生矛盾。$\therefore <a,b>\notin R$。

(3) $[a]_R=[b]_R$ 当且仅当 $\langle a,b\rangle \in R$。

证明：若$\langle a,b\rangle \in R$，则任何$x\in[a]_R$，有$\langle a, x\rangle \in R$，由对称性得$\langle b, a\rangle \in R$，再由传递性得$\langle b, x\rangle \in R$, $\therefore x\in[b]_R$，所以$[a]_R\subseteq[b]_R$。类似可证$[b]_R\subseteq[a]_R$。$\therefore$ $[a]_R=[b]_R$。

如果$[a]_R=[b]_R$，由于有**aRa**,所以$a\in[a]_R$， $a\in[b]_R$，所以有$\langle b,a\rangle \in R$，由对称性得$\langle a, b\rangle \in R$.

(4). A中任何元素a, a必属于且仅属于一个等价类。

证明：A中任何元素a, 由于有**aRa**,所以$a\in[a]_R$，如果 $a\in[b]_R$，所以有$\langle a,b\rangle \in R$. 由性质(3)得$[a]_R=[b]_R$ 。

(5). 任意两个等价类 $[a]_R$、$[b]_R$，

要么$[a]_R=[b]_R$，要么$[a]_R\cap[b]_R=\Phi$ 。

(因为要么$\langle a,b\rangle \in R$，要么$\langle a,b\rangle \notin R$。)

(6)**R的所有等价类构成的集合是A的一个划分。**

(由性质(4)(5)即得。) (这个划分称之为商集)

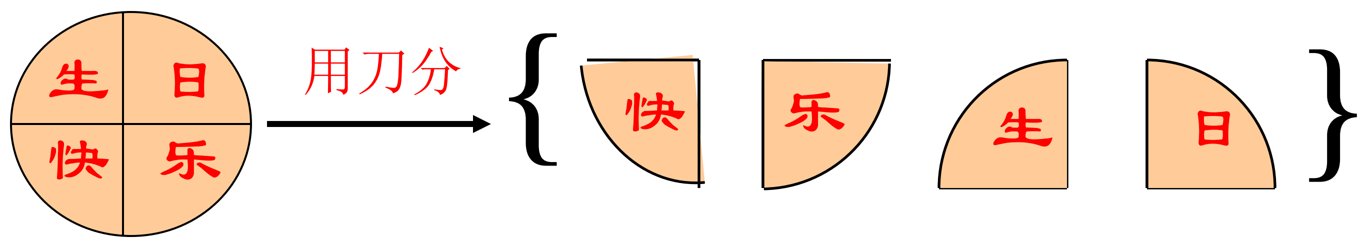
三. 商集(Quotient Sets)

“商”和除法有关，比如把一块蛋糕平均分成四份，从两种不同的角度看这件事：

从算术角度看：1用4除,每份1/4,这就是“商”,于是:

$1=1/4+1/4+1/4+1/4$

从集合角度看：



集合A用模3同余关系R划分，得到三个等价类，所以

$A \xrightarrow{\text{用R分}} \{\{1,4,7\},\{2,5\},\{3,6\}\}=\{[1]_R,[2]_R,[3]_R\}$----商集

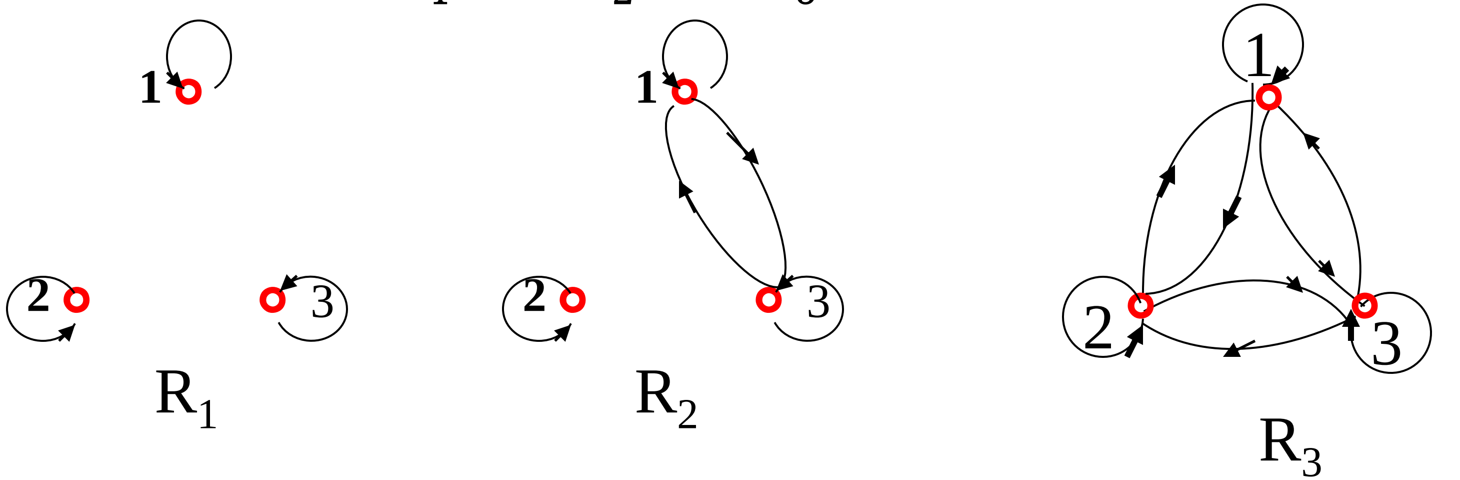
定义：R是A上等价关系，由R的所有等价类构成的集合称之为A关于R的商集。记作A/R。即

$A/R=\{[a]_R \mid a\in A\}$

例如A={1,2,3,4,5,6,7} , R上模3同余关系，则

A/R= {$[1]_R$,$[2]_R$,$[3]_R$} ={{1.4.7},{2,5},{3,6}}

练习 X={1, 2, 3}, X上关系R_1、R_2 、R_3，如下图所示。分别求出商集： X/R_1，X/R_2，X/R_3 。



X/R_1={$[1]_{R1}$, $[2]_{R1}$, $[3]_{R1}$}={{1}, {2}, {3}}

X/R_2={$[1]_{R2}$, $[2]_{R2}$}={{1, 3}, {2}}

X/R_3={$[1]_{R3}$}={{1, 2, 3}}

定理: 集合A上的等价关系R，决定了A的一个划分，该划分就是商集A/R.

证明：由等价类性质可得：

1) A/R中任意元素$[a]_R$，有$[a]_R \subseteq A$.

2) 设$[a]_R$,$[b]_R$是A/R的两个不同元素，有 $[a]_R \cap [b]_R = \Phi$

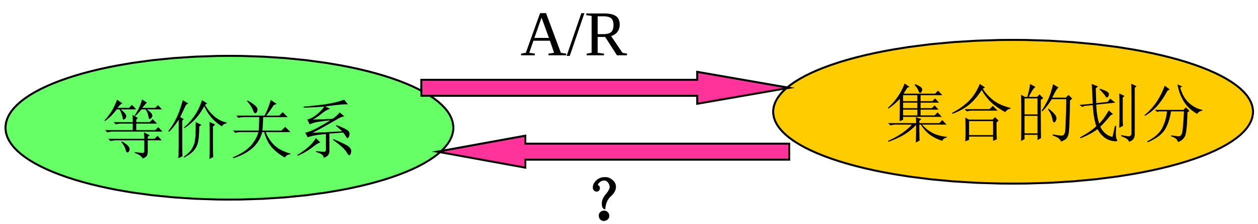
3) 因为A中每个元素都属于一个等价类，所以所有等价类的并集必等于A。

所以商集A/R是A的一个划分。

定理：设R_1和R_2是非空集合A上的等价关系，则 $A/R_1 = A/R_2$ 当且仅当 $R_1 = R_2$。

(这个定理显然成立。)

四. 由划分确定等价关系



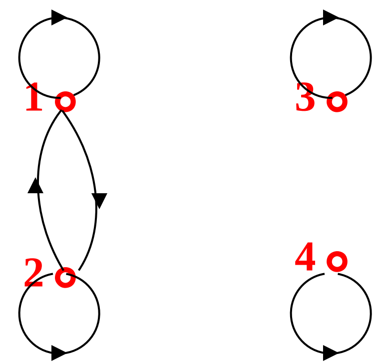
例如，X={1,2,3,4},

A={{1,2},{3},{4}}, A是X

的一个划分，求X上一个

等价关系R，使得X/R=A。

显然R的图如右图所示：



$R=\{1,2\}^2\cup\{3\}^2\cup\{4\}^2$ 。

一般地$A=\{A_1,A_2,\ldots,A_n\}$是X的一个划分，则构造一个X中的等价关系R，使得X/R=A。

$R=A_1^2\cup A_2^2\cup\ldots\cup A_n^2$ 其中$A_i^2=A_i\times A_i$ (i=1,2…n).

下面证明R是X中的等价关系。

定理：集合X的一个划分可以确定X上的一个等价关系。

证明：假设$A=\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$是X的一个划分，如下构造X 上的一个等价关系R:

$R=A_1^2 \cup A_2^2 \cup \ldots \cup A_n^2$ 其中$A_i^2 = A_i \times A_i$ $(i=1,2\ldots n)$.

1) **证R自反**：任取$a \in X$，因为A是X的划分，必存在$A_i \in A$使$a \in A_i$，于是$\langle a,a\rangle \in A_i \times A_i$，又$A_i \times A_i \subseteq R$ ∴有aRa。

2) **证R对称**：任取$a,b \in X$，设aRb，必存在$A_i \in A$使得$\langle a,b\rangle \in A_i \times A_i$，于是$a,b \in A_i$，∴bRa，R是对称的。

3) **证R传递**：任取$a,b,c \in X$，设aRb，bRc，必存在$A_i \in A$使得$\langle a,b\rangle \in A_i \times A_i$，$\langle b,c\rangle \in A_i \times A_i$，

(不可能有另一个划分块$A_k \in A$使得$\langle b,c\rangle \in A_k \times A_k$，因为如果这样，就使得，既$b \in A_i$又$b \in A_k$，与A是划分矛盾。)

于是$a,b,c \in A_i$，所以$\langle a,c\rangle \in A_i \times A_i$，又$A_i \times A_i \subseteq R$ ∴有aRc

所以R传递。**最后得R是集合X中的等价关系。**

本节重点：

等价关系概念、证明。

等价类概念、性质。

求商集。

作业：第134页

(1)、(2)、(4)、(6)、(7)

4-9 相容关系Compatibility Relation

相容关系是另一种常见关系，如朋友关系、同学关系等。

这些关系的共性是自反的、对称的。

一. 定义:给定集合X上的关系r, 若r是自反的、对称的,则r是A上相容关系。

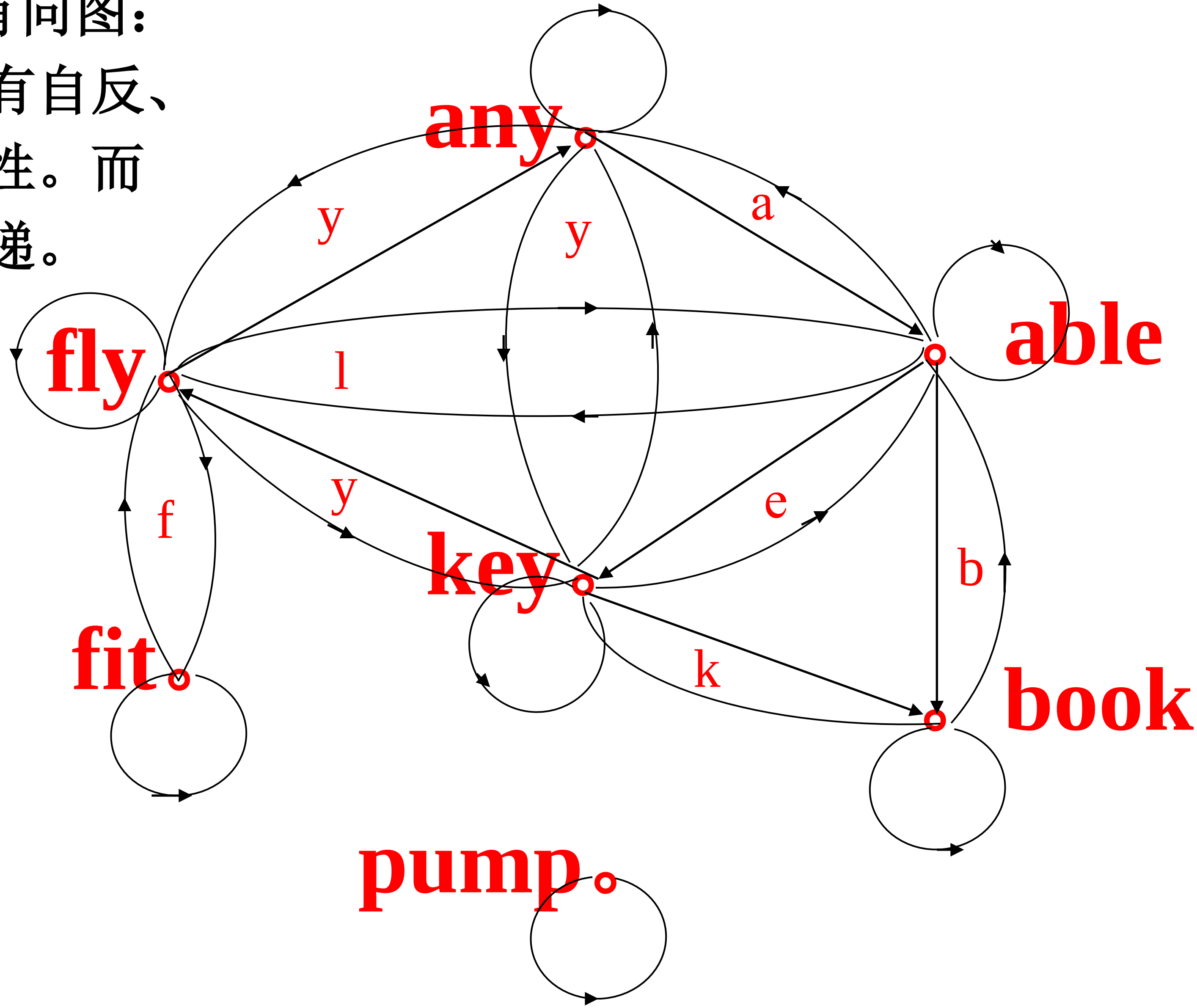
例子：X 是由一些英文单词构成的集合。

X={fly, any, able, key, book, pump, fit}, X上关系r:

r={<α,β>|α∈X,β∈X且α与β含有相同字母}

r的有向图：

看出有自反、
对称性。而
不传递。

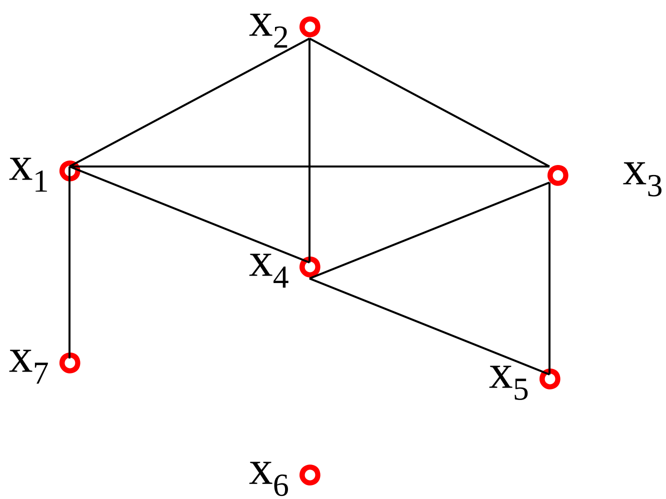


二. 简化图和简化矩阵

图的简化：(1)不画环；

(2)两条对称边用一条无向直线代替。

令**x_1=fly, x_2= any, x_3= able, x_4=key, x_5=book, x_6= pump, x_7= fit, $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$, r**的简化图为：



x_2	1					
x_3	1	1				
x_4	1	1	1			
x_5	0	0	1	1		
x_6	0	0	0	0	0	
x_7	1	0	0	0	0	0
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6

矩阵的简化：因为**r**的矩阵是对称阵且主对角线全是**1**，用下三角矩阵(不含主对角线)代替**r**的矩阵。如上图所示。

三. 相容类及最大相容类

在等价关系中讨论了等价类，这里要讨论相容类。

定义：设r是集合X上的相容关系，$C \subseteq X$,如果对于C中任意两个元素x,y有$\langle x,y\rangle \in r$,称C是r的一个**相容类**。

上例中$\{x_1,x_2\},\{x_3,x_4\},\{x_1,x_2,x_3\},\{x_2,x_3,x_4\},\{x_1,x_2, x_4\},$
$\{x_3,x_4,x_5\},\{x_1,x_3,x_4\},\{x_1,x_2,x_3,x_4\},\{x_1,x_7\},\{x_6\}$ 都是相容类。

上述相容类中，有些相容类间有真包含关系。

下面定义最大相容类。

定义：设r是集合X上的相容关系，C是r的一个相容类，如果C不能被其它相容类所真包含，则称C是一个最大相容类。

也可以说，C是一个相容类，如果C中加入任意一个新元素，就不再是相容类，C就是一个最大相容类。

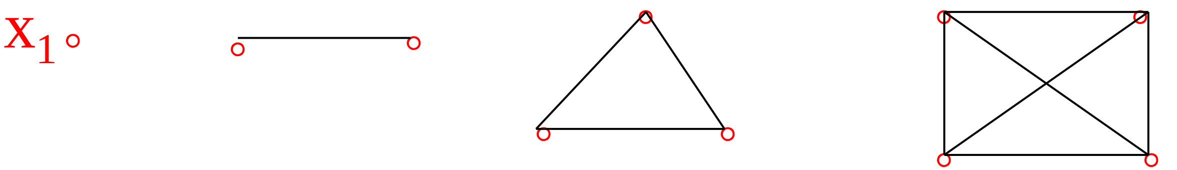
$\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$, $\{x_3, x_4, x_5\}$, $\{x_1,x_7\}$, $\{x_6\}$都是最大相容类。

从简化图找最大相容类：------找最大完全多边形。

最大完全多边形：含有结点最多的多边形中，每个结点都与其它结点相联结。

最大完全多边形的结点与边数：

结点数	1	2	3	4	N
边数	0	1	3	6	C_n^2



有**1**、**2**、**3**、**4**个结点的最大完全多边形如上图所示。

在相容关系简化图中，每个最大完全多边形的结点集合构成一个最大相容类。

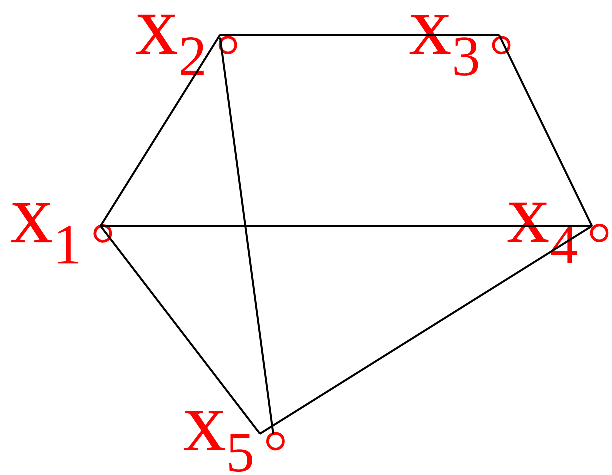
上例中最大相容类$\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$, $\{x_3, x_4, x_5\}$,$\{x_1,x_7\}$,$\{x_6\}$分别对应最大完全四、三、一、零边形。

给定X上相容关系r’, 如图所示,

r’的最大相容类:

$\{x_1,x_2,x_5\}$, $\{x_1,x_4,x_5\}$,

$\{x_2,x_3\}$, $\{x_3,x_4\}$ 。



四. 完全覆盖:

定义：r是X中的相容关系，由r的所有最大相容类为元素构成的集合，称之为r对X的完全覆盖。记作Cr(X)。

$Cr(X)=\{\{x_1,x_2,x_3,x_4\}, \{x_3, x_4, x_5\},\{x_1,x_7\},\{x_6\}\}$

$Cr'(X)=\{\{x_1,x_2,x_5\},\{x_1,x_4,x_5\},\{x_2,x_3\}, \{x_3,x_4\}\}$

五.由覆盖求相容关系

设$A=\{A_1,A_2,A_3 \ldots,A_n\}$是X的一个覆盖，求X上一个相容关系r，使得Cr(X)=A，则

$r=A_1^2\cup A_2^2\cup \ldots \cup A_n^2$ 其中$A_i^2=A_i\times A_i$ (i=1,2…n).

本节要求：

- 掌握相容关系、相容类、最大相容类概念，
- 会画相容关系简化图，根据简化图求最大相容类。
- 会求一个相容关系的完全覆盖。

作业 第139页 (2)

4-10 次序关系

次序关系也是常遇到的重要关系，例如：

数值的≤、<、≥、>关系；

集合的⊆、⊂关系；

图书馆的图书按书名的字母次序排序；

词典中的字(词)的排序；

计算机中文件按文件名排序；

程序按语句次序执行；…….

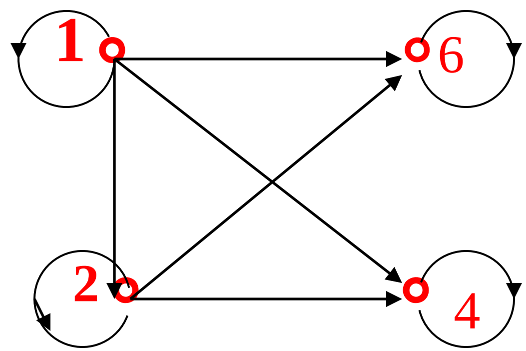
本节讨论几种次序关系。

一. 偏序关系(partial order relation)

1. 定义：R是A上自反、反对称和传递的关系，则称R是A上的偏序关系。并称<A,R>是偏序集。

例如数值的≤、≥关系和集合的⊆都是偏序关系。因为数值≤是熟知的偏序关系，所以用符号“≤”表示任意偏序关系，但要**注意!!“≤”不一定是“小于或等于”的含义**。

例1 **A={1,2,4,6}, ≤**是A中的整除关系，其关系图如右图所示，显然≤是自反、反对称和传递的，即它是个偏序。



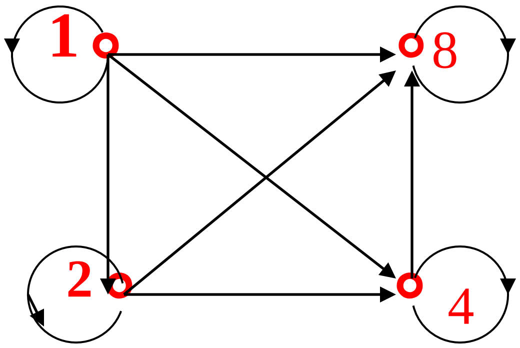
2. x与y是可比较的：<A,≤>是偏序集，**x,y∈A**，如果要么x≤y,要么y≤x, 则称x与y是可比较的。

上例中1,2,4或1,2,6间是可比较的。而4与6间是不可比较的

二. 全序(线序、链)

定义：<A,≤>是偏序集，任何x,y∈A，如果x与y都是可比较的，则称≤是全序关系(线序、链)。

例2 B={1,2,4,8},≤表示整除关系，则≤是全序关系，如图：



全序关系一定是偏序关系，但是偏序不一定是全序。

偏序关系的有向图，不能直观地反映出元素之间的次序.

所以下面介绍另外一种图---Hasse图。通过这个图，就能够清晰地反映出元素间的层次。

下面介绍Hasse图。

三. 偏序集的哈斯图(Hasse图)

<A,≤>是偏序集，x,y∈A

1.元素y盖住元素x：如果x≤y,且x≠y，且不存在z∈A,使得z≠x∧z≠y∧x≤z∧z≤y，则称元素y盖住元素x。

元素y盖住x⇔ x≤y∧x≠y∧¬∃z(z∈A∧z≠x∧z≠y∧x≤z∧ z≤y)

即元素y盖住元素x⇔不存在z∈A,使得z介于x与y之间。

上例中4没有盖住1，因为中间有个2, 1≤2≤4.

2.偏序集Hasse图的画法： 令<A,≤>是偏序集,

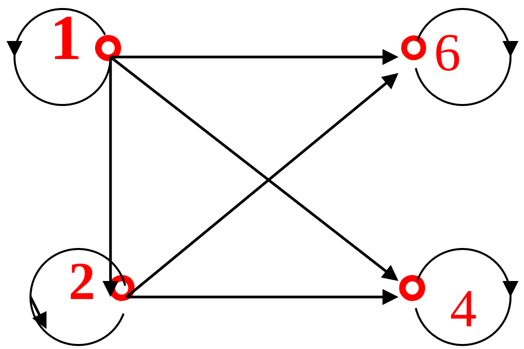
1).用“。”表示A中元素。

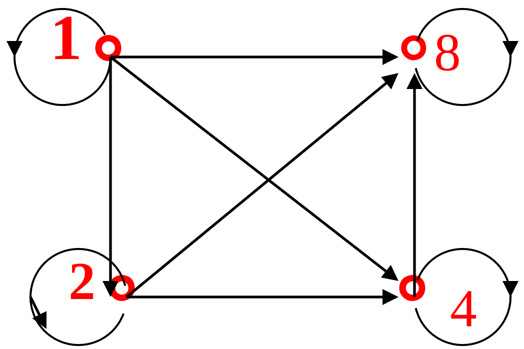
2).如果x≤y,且x≠y，则结点y要画在结点x的上方。

3). 如果x≤y,且y盖住x，x与y之间连一直线。

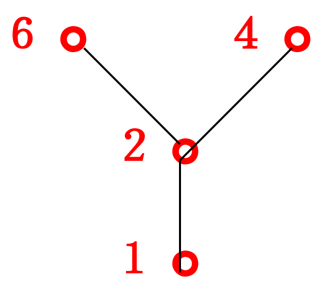
4). 一般先从最下层结点(全是射出的边与之相连(不考虑环))，逐层向上画，直到最上层结点(全是射入的边与之相连)。(采用抓两头，带中间的方法)

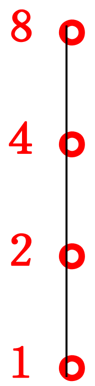
例如，前边两个例子：





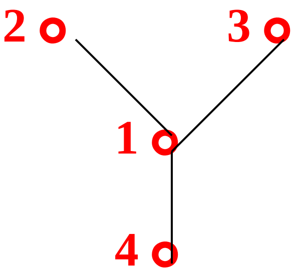
它们的Hasse图分别如下：

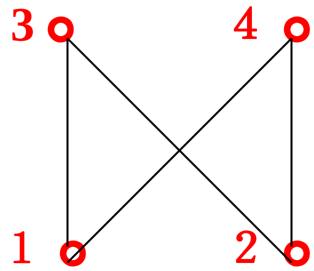


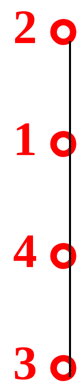


可见右图，是全序，它的Hasse图是一条直线，所以全序也叫线序，或链。是从它的Hasse图得名。

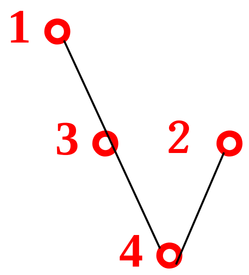
下面作课堂练习：教材第146页 (7)







全序



课堂练习：

1.C={1,2,3,6,12,24,36}，D={1,2,3,5,6,10,15,30}

$\leq$是C、D上整除关系,

分别画出$<C,\leq>$, $<D,\leq>$的 **Hasse** 图。

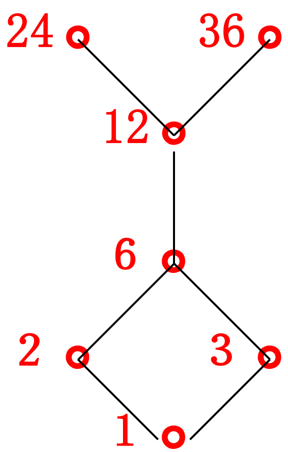
2.令A={a,b,c}，画出$<P(A),\subseteq>$的Hasse图。

练习：

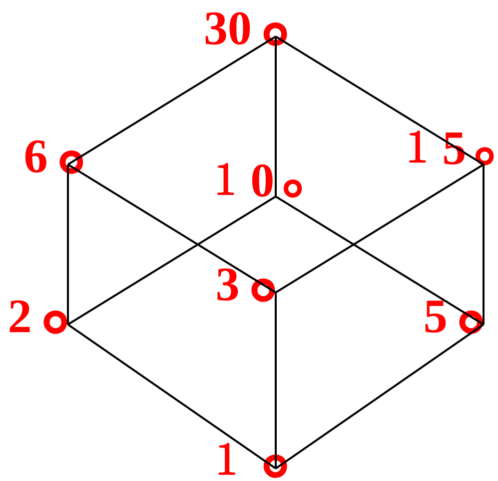
C={1,2,3,6,12,24,36}，D={1,2,3,5,6,10,15,30}

$\le$ 是C、D上整除关系：$<C,\le>$, $<D,\le>$的Hasse图：

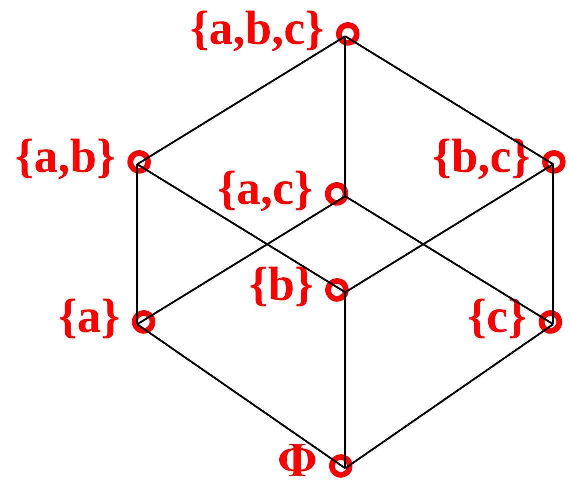
以及A={a,b,c} $<P(A),\subseteq>$的Hasse图：



$<C,\le>$



$<D,\le>$



$<P(A),\subseteq>$

四. 偏序集中的重要元素

在格和布尔代数中，要用到下面一些术语。

设<A,≤>是偏序集，**B**是**A**的非空子集。

一. 极小元与极大元

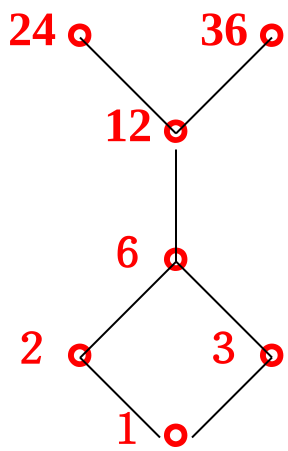
y是B的极小元⇔$\exists y(y\in B\wedge\neg\exists x(x\in B\wedge x\neq y\wedge x\leq y))$

（在B中没有比y更小的元素了，y就是极小元）

y是B的极大元⇔$\exists y(y\in B\wedge\neg\exists x(x\in B\wedge x\neq y\wedge y\leq x))$

（在B中没有比y更大的元素了，y就是极大元）

举例，给定<C,≤>的Hasse图如图所示：



从Hasse图找极小(大)元：子集中处在最下(上)层的元素是极小(大)元。

子集B	极小元	极大元
{2,3}	2, 3	2, 3
{1,2,3}	1	2, 3
{6,12,24}	6	24
C	1	24,36

二. 最小元与最大元

y是B的最小元⇔$\exists y(y\in B\wedge\forall x(x\in B\rightarrow y\le x))$

（最小元y是B中元素，该元素比B中所有元素都小）

y是B的最大元⇔$\exists y(y\in B\wedge\forall x(x\in B\rightarrow x\le y))$

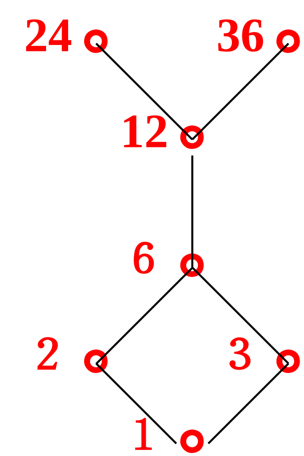
(最大元y是B中元素，该元素比B中所有元素都大）

举例，给定<C,≤>的Hasse图如图所示：

从Hasse图找最小(大)元：

子集中如果只有唯一的极小(大)元，则这个极小(大)元，就是最小(大)元。否则就没有最小(大)元。

子集B	最小元	最大元
{2,3}	无	无
{1,2,3}	1	无
{6,12,24}	6	24
C	1	无



下面介绍最小(大)元的唯一定理。

定理：<A,≤>是偏序集，B是A的非空子集，如果B有最小元(最大元)，则最小元(最大元)是唯一的。

证明：假设B有两个最小元a、b,则

因为a是最小元，b∈B，根据最小元定义，有a≤b;

类似地，因为b是最小元，a∈B，根据最小元定义，有b≤a。因为≤有反对称性，所以有a=b。

同理可证最大元的唯一性。

小结：<A,≤>是偏序集，B是A的非空子集，则

⑴B的极小(大)元总是存在的，就是子集中处在最下(上)层的元素是极小(大)元。

⑵B的最小元(最大元)有时可能不存在，只有有唯一的极小(大)元，则这个极小(大)元就是最小(大)元。否则就没有最小(大)元。

3. 上界与下界 (Upper Bound and Lower Bound)

y是B的上界⇔$\exists y(y\in A\wedge\forall x(x\in B\rightarrow x\le y))$

（上界y是A中元素，该元素比B中所有元素都大）

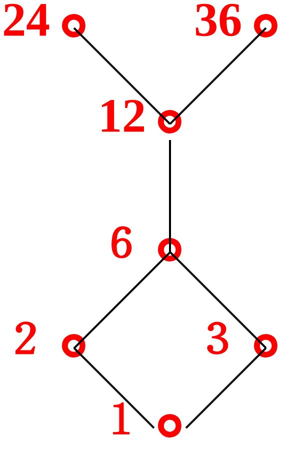
y是B的下界⇔$\exists y(y\in A\wedge\forall x(x\in B\rightarrow y\le x))$

（下界y是A中元素，该元素比B中所有元素都小）

举例，给定<C,≤>的Hasse图如图所示：

从Hasse图找上(下)界：注意是在A中找！

子集B	上界	下界
{2,3}	6,12,24,36	1
{1,2,3}	6,12,24,36	1
{6,12,24}	24	6,2,3,1
C	无	1



4. 最小上界(上确界)和最大下界(下确界)

(Least Upper Bound and Greatest Lower Bound)

定义： y是B的上界，并且对B的所有上界x,都有y≤x,则称y是B的最小上界(上确界)，记作LUB B=y 。

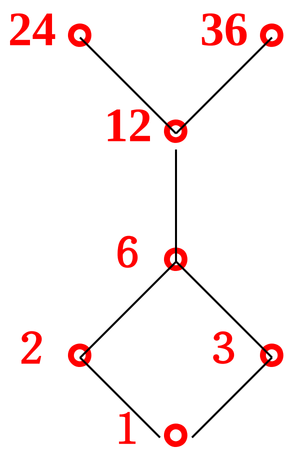
（即y是上界中最小的。如果B有上确界，则是唯一的）

y是B的下界，并且对B的所有下界x,都有x≤y,则称y是B的最大下界(下确界)，记作GLB B=y 。

（即y是下界中最大的。如果B有上确界，则是唯一的）

举例，给定<C,≤>的Hasse图如图所示：

子集B	上界	上确界	下界	下确界
{2,3}	6,12,24,36	6	1	1
{1,2,3}	6,12,24,36	6	1	1
{6,12,24}	24	24	1,2,3,6	6
C	无	无	1	1



五. 良序

定义：$<A,\leq>$是偏序集，如果对A的任何非空子集B，都有最小元，则称$\leq$是A上的良序，并称$<A,\leq>$为良序集。

例如N是自然数集合，I是整数集合，$\leq$是小于或等于关系，$<N,\leq>$就是良序集。而$<I,\leq>$不是良序集。

定理：所有良序集，一定是全序集。

证明：设$<A,\leq>$为良序集,任取$x,y\in A$,构成子集$\{x,y\}$, 它有最小元，该最小元或是x,或是y, 于是有$x\leq y$或$y\leq x$，所以$<A,\leq>$是全序集。

定理：有限的全序集，一定是良序集。

证明：设$A=\{a_1,a_2,\ldots a_n\}$,$<A,\leq>$是全序集，假设它不是良序，必存在非空子集$B\subseteq A$，B中无最小元，因B是有限集，必存在$x,y\in B$,使得$x \not\leq y$，这与$\leq$是全序矛盾，$\therefore <A,\leq>$是良序集。

本节要求：

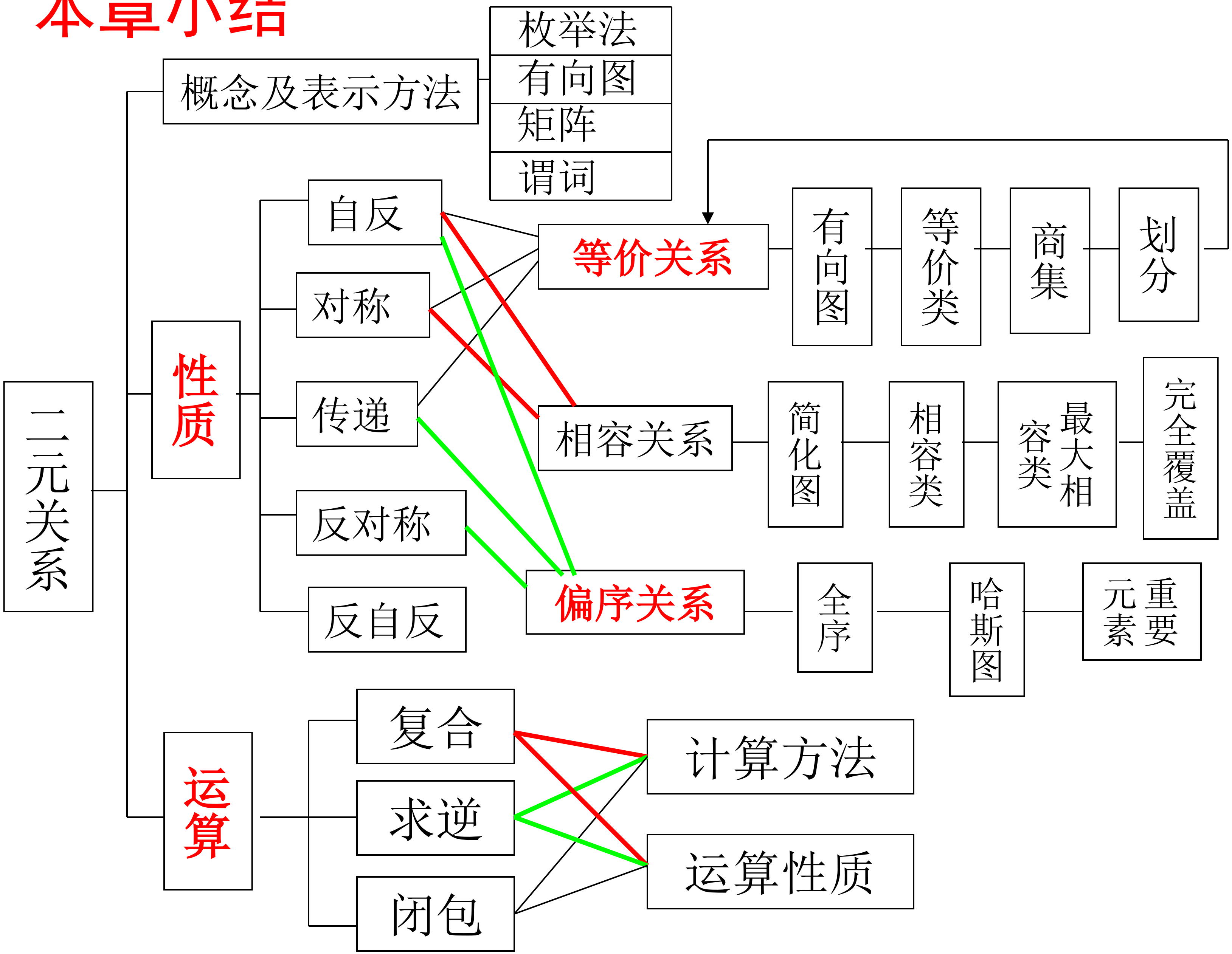
掌握偏序 、 全序的概念，

会画Hasse图，

会求重要元素。

作业 第145页 (1), (6),(7)

本章小结


二元关系
概念及表示方法
枚举法
有向图
矩阵
谓词
性质
自反
对称
传递
反对称
反自反
等价关系
有向图
等价类
商集
划分
相容关系
简化图
相容类
最大相容类
完全覆盖
偏序关系
全序
哈斯图
重要元素
运算
复合
求逆
闭包
计算方法
运算性质