班级
学号
姓名

密 封 线

东北大学考试试卷B

2012 —2013 学年第 1 学期

课程名称： 数值分析B答案评分

总分	一（1—8）	一（9-10）	二	三	四	五

一、解答下列各题：（每题5分，共50分）

1．$\sqrt{111}$ 的近似值 x 具有 5 位有效数字，求 x 的绝对误差限。

由于 $\sqrt{111}=10.5\ldots=0.105\ldots\times10^2$，所以 $|\sqrt{111}-x|\le 0.5\times10^{-3}$

2．设 $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$，求 $\rho(A)$ 和 $Cond(A)_1$

$\rho(A)=\dfrac{5+\sqrt{33}}{2}$，$Cond(A)_1=21$。

3．x 为何值时，矩阵 $A=\begin{pmatrix}9&x&3\\x&8&4\\3&4&3\end{pmatrix}$ 可分解为 GG^T，并求 $x=6$ 时的分解式，其中 G 为下三角矩阵。

由 A 正定可得，$0<x<8$，$x=6$ 时有：

$$A=\begin{pmatrix}9&6&3\\6&8&4\\3&4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&&\\2&2&\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2&1\\&2&1\\&&1\end{pmatrix}$$

4．对线性方程组 $\begin{cases}2x_1+3x_2=1\\4x_1-3x_2=2\end{cases}$ 建立一个收敛的迭代格式，并说明收敛性。

$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=\dfrac{3}{4}x_2^{(k)}+\dfrac{1}{2}\\x_2^{(k+1)}=-\dfrac{2}{3}x_1^{(k)}+\dfrac{1}{3},k=0,1,2,\ldots\end{cases}$ 由于迭代矩阵行范数小于 1，所以收敛。

5．已知满足条件 $f(0)=0,f(1)=1,f(2)=-1,f(3)=2,f'(0)=0,f'(3)=1$ 的三次样条插值函数 $S(x)$ 在区间 $[1,2]$ 的表达式为 $S(x)=\frac{1}{7}(31x^3-130x^2+159x-53)$，试求 $S(x)$ 在区间 $[0,1]$ 的表达式。

由已知可得 $S(0)=0,S'(0)=0,S(1)=1,S'(1)=-\frac{8}{7}$，所以在 $[0,1]$ 上有：

$$S(x)=-\frac{1}{7}x^2(22x-29)$$

6．求区间 $[0,1]$ 上权函数为 $\rho(x)=1$ 的二次正交多项式 $P_2(x)$。

$P_0(x)=1$，$P_1(x)=x-\dfrac{(x,P_0)}{(P_0,P_0)}P_0=x-\dfrac{1}{2}$

$P_2(x)=x^2-\dfrac{(x^2,P_0)}{(P_0,P_0)}P_0-\dfrac{(x^2,P_1)}{(P_1,P_1)}P_1=x^2-x+\dfrac{1}{6}$

7．给定离散数据

x_i	−1	0	1	2
y_i	−2	1	3	2

试求形如 $y=a+bx^2$ 的拟合曲线。

由于 $\varphi_0(x)=1,\varphi_1(x)=x^2$，所以 $\varphi_0=(1,1,1,1)^T,\varphi_1=(1,0,1,4)^T,f=(-2,1,3,2)^T$

正则方程组为 $\begin{cases}4a+6b=4\\6a+18b=9\end{cases}$，解得：$a=\frac{1}{2},b=\frac{1}{3}$

所以，拟合曲线为：$y=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}x^2$

8．设 $f(x)=3x^3-5x^2+1$，求差商 $f[0,1],f[0,1,2,3],f[0,1,2,3,4]$。

$f[0,1]=-2$，$f[0,1,2,3]=3$，$f[0,1,2,3,4]=0$。

9、求 *Gauss* 积分公式 $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(-\frac{1}{\sqrt{3}})+f(\frac{1}{\sqrt{3}})$ 的截断误差 $R[f]$。

由于 *Gauss* 积分公式具有 3 次代数精度，所以

$$R[f]=\int_{-1}^{1} f(x)dx-[f(-\frac{1}{\sqrt{3}})+f(\frac{1}{\sqrt{3}})]$$

$$=\int_{-1}^{1} f(x)dx-\int_{-1}^{1} H_3(x)dx+\int_{-1}^{1} H_3(x)dx-[f(-\frac{1}{\sqrt{3}})+f(\frac{1}{\sqrt{3}})]$$

$$=\int_{-1}^{1} \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!}(x+\frac{1}{\sqrt{3}})^2(x-\frac{1}{\sqrt{3}})^2 dx=\frac{f^{(4)}(\eta)}{4!}\int_{-1}^{1}(x+\frac{1}{\sqrt{3}})^2(x-\frac{1}{\sqrt{3}})^2 dx$$

$$=\frac{f^{(4)}(\eta)}{135},\quad \eta\in(-1,1)$$

10. 求解初值问题 $\begin{cases} y'=ye^x & 1\le x\le 2 \\ y(1)=2 \end{cases}$ 的改进 Euler 方法是否收敛？为什么？

由于 $f(x,y)=ye^x$，所以 $|f(x,y)-f(x,\bar{y})|=|e^x(y-\bar{y})|\le e^2|y-\bar{y}|$，

于是，改进 Euler 方法是收敛的。

二、(10 分) 讨论求解线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=1 \\ x_1+x_2+x_3=2 \\ 2x_1+2x_2+x_3=3 \end{cases}$ 的 Gauss-Seidel 迭代法的收敛性。

令 $\begin{vmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ \lambda & \lambda & 1 \\ 2\lambda & 2\lambda & \lambda \end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)^2=0$ 得：$\rho(G)=2>1$。

所以，Gauss-Seidel 迭代法不收敛。

三、(12 分) 已知方程 $x=\ln x+2$，

1. 证明此方程在区间 $(1,+\infty)$ 内有唯一根 α；

2. 建立一个收敛的迭代格式，使对任意初值 $x_0\in[e,2e]$ 都收敛，说明收敛理由和收敛阶。

3. 若取初值 $x_0=e$，用此迭代法求精度为 $\varepsilon=10^{-5}$ 的近似根，需要迭代多少步？

1.记 $f(x)=x-\ln x-2$，则 $f'(x)=1-\frac{1}{x}>0,\ (x>1)$

又由于 $f(e)=e-3<0, f(2e)=2e-\ln 2-3>0$

所以，方程在区间 $(1,+\infty)$ 内有唯一根 α，而且 $\alpha\in(e,2e)$。

2. 建立迭代格式：$x_{k+1}=\ln x_k+2,\ k=0,1,2,\dots$，迭代函数为 $\varphi(x)=\ln x+2$

由于对任何 $x\in[e,2e]$ 有：$e<3\le\varphi(x)\le\ln 2+3<2e$，而且 $|\varphi'(x)|=\frac{1}{x}\le\frac{1}{e}<1$

所以，对任意初值 $x_0\in[e,2e]$ 都收敛。

又由于 $\varphi'(\alpha)=\frac{1}{\alpha}\neq 0$，所以收敛阶等于 1。

3. 由于 $x_1=3$，$L=\frac{1}{e}$，所以

$$k\ge\ln\frac{(1-L)\varepsilon}{x_1-x_0}\div\ln L\approx 10.704$$

即，需要迭代 11 步。

密　封　线

四、（16 分）

1．确定参数 A_0, A_1, A_2, x_1，使求积公式 $\int_{-1}^{1} x^2 f(x)dx \approx A_0 f(-1) + A_1 f(x_1) + A_2 f(1)$ 具有尽可能高的代数精度，并问代数精度是多少？

2．利用复化 Simpson 公式 S_n 计算计算定积分 $I = \int_0^1 e^x dx$，若使 $|I - S_n| < \varepsilon = 10^{-4}$，问应取 n 为多少？并求此近似值。

1．由 $A_0 + A_1 + A_2 = \frac{2}{3}, -A_0 + A_1 x_1 + A_2 = 0,\ A_0 + A_1 x_1^2 + A_2 = \frac{2}{5}$,

$-A_0 + A_1 x_1^3 + A_2 = 0$, 可得：$A_0 = A_2 = \frac{1}{5}, A_1 = \frac{4}{15}, x_1 = 0$，具有 3 次代数精度。

2．$n \ge \sqrt[4]{\dfrac{e}{2880 \times 10^{-4}}} \approx 1.75$，所以取 $n = 2$。

$$I \approx S_2 = \frac{1}{12}(e^0 + e + 2e^{0.5} + 4e^{0.25} + 4e^{0.75}) = 1.7183188$$

五、（12 分）已知求解常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & x \in [a, b] \\ y(a) = \alpha \end{cases}$$

的差分公式：

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{3}(k_1 + \lambda k_2) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + \alpha h, y_n + \beta h k_1) \\ y_0 = \alpha \end{cases}$$

1．确定参数 λ, α, β，使差分公式的阶尽可能高，并指出差分公式的阶。

2．用此差分公式求解初值问题 $\begin{cases} y' = -5y, & 0 \le x \le 2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ 时，取步长 h=0.1，所得数值解是否稳定，为什么？

1．由于

$$k_2 = f_n + h(\alpha \frac{\partial f_n}{\partial x} + \beta \frac{\partial f_n}{\partial y} f_n) + \frac{h^2}{2}(\alpha^2 \frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2} + 2\alpha\beta \frac{\partial^2 f_n}{\partial x \partial y} f_n + \beta^2 \frac{\partial^2 f_n}{\partial y^2} f_n^2) + O(h^3)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1+\lambda}{3} h f_n + \frac{\lambda h^2}{3}(\alpha \frac{\partial f_n}{\partial x} + \beta \frac{\partial f_n}{\partial y} f_n)$$

$$+ \frac{\lambda h^3}{6}(\alpha^2 \frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2} + 2\alpha\beta \frac{\partial^2 f_n}{\partial x \partial y} f_n + \beta^2 \frac{\partial^2 f_n}{\partial y^2} f_n^2) + O(h^4)$$

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + y'(x_n)h + \frac{h^2}{2} y''(x_n) + \frac{h^3}{6} y'''(x_n) + O(h^4)$$

$$= y_n + h f_n + \frac{h^2}{2}(\frac{\partial f_n}{\partial x} + \frac{\partial f_n}{\partial y} f_n)$$

$$+ \frac{h^3}{6}[\frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f_n}{\partial x \partial y} f_n + \frac{\partial^2 f_n}{\partial y^2} f_n^2 + \frac{\partial f_n}{\partial x}\frac{\partial f_n}{\partial y} + (\frac{\partial f_n}{\partial y})^2 f_n] + O(h^4)$$

于是，当 $\lambda = 2$，$\alpha = \frac{3}{4}$，$\beta = \frac{3}{4}$ 时，差分公式的阶最高，是 2 阶方法。

2．带入试验方程有：

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{3}[-5y_n - 10(y_n + \frac{3h}{4}(-5y_n))]$$

$$= (1 - 5h + \frac{25}{2}h^2) y_n$$

$h = 0.1$ 时，由于 $y_{n+1} = 0.625 y_n$，所以，所得数值解是稳定的。

学院
班级
学号
姓名

密 封 线

东北大学期末考试试卷

2012—2013 学年第 1 学期

课程名称： 数值分析A答案评分

总分	一	二	三	四	五	六
120						

一、 解答下列各题：（每题6分，共48分）

1. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$，求 $\rho(A)$ 和 $Cond_1(A)$

$\rho(A)=\dfrac{5+\sqrt{33}}{2}$ $\quad Cond(A)_1=21$

2. x 为何值时，矩阵 $A=\begin{pmatrix}9 & x & 3\\ x & 8 & 4\\ 3 & 4 & 3\end{pmatrix}$ 可分解为 GG^T，

并求 $x=6$ 时的分解式，其中 G 为下三角矩阵。

由 A 正定可得，$0<x<8$，$x=6$ 时有：

$$A=\begin{pmatrix}9 & 6 & 3\\ 6 & 8 & 4\\ 3 & 4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & & \\ 2 & 2 & \\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ & 2 & 1\\ & & 1\end{pmatrix}$$

3. 对线性方程组 $\begin{cases}2x_1+3x_2=1\\ 4x_1-3x_2=2\end{cases}$ 建立一个收敛的迭代格式，并说明收敛性。

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=\dfrac{3}{4}x_2^{(k)}+\dfrac{1}{2}\\ x_2^{(k+1)}=-\dfrac{2}{3}x_1^{(k)}+\dfrac{1}{3},k=0,1,2,\ldots\end{cases}$$

由于迭代矩阵行范数小于1，所以收敛。

4. 已知满足边值条件 $S(0)=0$ 的三次样条函数 $S(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上的表达式为 $S(x)=3x^3-x^2+6x-5$，试求 $S(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的表达式。

由已知可得 $S(0)=0,S(1)=3,S'(1)=13$，$S''(1)=16$，所以在 $[0,1]$ 上有：

$S(x)=-2x^2+14x-9x$

5. 给定离散数据

x_i	−1	0	1	2
y_i	−2	1	3	2

试求形如 $y=a+bx^2$ 的拟合曲线拟合这组数据。

解 由于 $\varphi_0(x)=1,\varphi_1(x)=x^2$，所以 $\varphi_0=(1,1,1,1)^T,\varphi_1=(1,0,1,4)^T,f=(-2,1,3,2)^T$

正则方程组为 $\begin{cases}4a+6b=4\\6a+18b=9\end{cases}$，解得：$a=\frac{1}{2},b=\frac{1}{3}$

所以，拟合曲线为：$y=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}x^2$

6. 设 $f(x)=3x^3-5x^2+1$，求差商 $f[0,1],f[0,1,2,3],f[0,1,2,3,4]$

$f[0,1]=-2$，$f[0,1,2,3]=3$，$f[0,1,2,3,4]=0$。

7. 判定求积分公式 $\int_{-1}^{1}f(x)dx\approx f(-\frac{1}{\sqrt{3}})+f(\frac{1}{\sqrt{3}})$ 是否是 Guass 型求积公式

解 是 $Gauss$ 积分公式具有 3 次代数精度

8. 试建立求解 $\sqrt[4]{a}$，$a>0$，的 Newton 迭代格式

写 $x^4-a=0$，用牛顿迭代法建立。

密 封 线

二、(12 分) 写出求解线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=1 \\ x_1+x_2+x_3=2 \\ 2x_1+2x_2+x_3=3 \end{cases}$

的 Gauss-Seidel 迭代格式，并讨论是否收敛

令 $\begin{vmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ \lambda & \lambda & 1 \\ 2\lambda & 2\lambda & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-2)^2 = 0$ 得： $\rho(G)=2>1$，

所以，Gauss-Seidel 迭代法不收敛。

三、(12 分) 给定方程 $x-\ln x-2=0$，

1. 证明此方程在区间 $(1,+\infty)$ 内有唯一根 α；

2. 建立一个迭代格式，使对任意初值 $x_0\in[e,2e]$ 都收敛，说明收敛理由和收敛阶。

3. 若取初值 $x_0=e$，用此迭代法求精度为 $\varepsilon=10^{-5}$ 的近似根，需要迭代多少步？

1. 记 $f(x)=x-\ln x-2$，则 $f'(x)=1-\dfrac{1}{x}>0$，$(x>1)$

又由于 $f(e)=e-3<0, f(2e)=2e-\ln 2-3>0$

所以，方程在区间 $(1,+\infty)$ 内有唯一根 α，而且 $\alpha\in(e,2e)$。

2. 建立迭代格式：$x_{k+1}=\ln x_k+2$，$k=0,1,2,\dots$，迭代函数为 $\varphi(x)=\ln x+2$

由于对任何 $x\in[e,2e]$ 有：$e<3\le\varphi(x)\le\ln 2+3<2e$，而且 $|\varphi'(x)|=\dfrac{1}{x}\le\dfrac{1}{e}<1$

所以，对任意初值 $x_0\in[e,2e]$ 都收敛。

又由于 $\varphi'(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha}\ne 0$，所以收敛阶等于 1。

3. 由于 $x_1=3$，$L=\dfrac{1}{e}$，所以

$$k\ge\ln\frac{(1-L)\varepsilon}{x_1-x_0}\div\ln L\approx 10.704$$

即，需要迭代 11 步。

密 封 线

四、（16 分） 1. 确定参数 A_0, A_1, A_2, x_1，使求积公式

$$\int_{-1}^{1} x^2 f(x)dx \approx A_0 f(-1) + A_1 f(x_1) + A_2 f(1)$$

具有尽可能高的代数精度，并问代数精度是多少？

2. 利用复化 Simpson 公式 S_n 计算计算定积分 $I=\int_0^1 e^x dx$，若使 $|I-S_n|<\varepsilon=10^{-4}$，问应取 n 为多少？并求此积分近似值。

1. 由 $A_0+A_1+A_2=\frac{2}{3}, -A_0+A_1x_1+A_2=0,\ A_0+A_1x_1^2+A_2=\frac{2}{5}$,
$-A_0+A_1x_1^3+A_2=0$, 可得：$A_0=A_2=\frac{1}{5}, A_1=\frac{4}{15}, x_1=0$，具有 3 次代数精度。

2. $n\ge\sqrt[4]{\frac{e}{2880\times10^{-4}}}\approx1.75$，所以取 $n=2$。

$I\approx S_2=\frac{1}{12}(e^0+e+2e^{0.5}+4e^{0.25}+4e^{0.75})=1.7183188$

五、（12 分）给定求解常微分方程初值问题 $\begin{cases} y'=f(x,y) & x\in[a,b] \\ y(a)=\alpha \end{cases}$ 的差分公式：

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+\frac{h}{3}(k_1+\lambda k_2) \\ k_1=f(x_n,y_n) \\ k_2=f(x_n+\alpha h, y_n+\beta h k_1) \\ y_0=\alpha \end{cases}$$

1 确定参数 λ,α,β，使差分公式的截断误差阶尽可能高，并指出差分公式的阶。

2. 用此差分公式求解初值问题 $\begin{cases} y'=-5y, & 0\le x\le 2 \\ y(0)=0 \end{cases}$ 时，取步长 h=0.1，所得数值解是否稳定，为什么？

1. 由于

$$k_2=f_n+h(\alpha\frac{\partial f_n}{\partial x}+\beta\frac{\partial f_n}{\partial y}f_n)+\frac{h^2}{2}(\alpha^2\frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2}+2\alpha\beta\frac{\partial^2 f_n}{\partial x\partial y}f_n+\beta^2\frac{\partial^2 f_n}{\partial y^2}f_n^2)+O(h^3)$$

$$y_{n+1}=y_n+\frac{1+\lambda}{3}hf_n+\frac{\lambda h^2}{3}(\alpha\frac{\partial f_n}{\partial x}+\beta\frac{\partial f_n}{\partial y}f_n)$$

$$+\frac{\lambda h^3}{6}(\alpha^2\frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2}+2\alpha\beta\frac{\partial^2 f_n}{\partial x\partial y}f_n+\beta^2\frac{\partial^2 f_n}{\partial y^2}f_n^2)+O(h^4)$$

$$y(x_{n+1})=y(x_n)+y'(x_n)h+\frac{h^2}{2}y''(x_n)+\frac{h^3}{6}y'''(x_n)+O(h^4)$$

$$=y_n+hf_n+\frac{h^2}{2}(\frac{\partial f_n}{\partial x}+\frac{\partial f_n}{\partial y}f_n)$$

$$+\frac{h^3}{6}[\frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f_n}{\partial x\partial y}f_n+\frac{\partial^2 f_n}{\partial y^2}f_n^2+\frac{\partial f_n}{\partial x}\frac{\partial f_n}{\partial y}+(\frac{\partial f_n}{\partial y})^2 f_n]+O(h^4)$$

于是，当 $\lambda=2$，$\alpha=\frac{3}{4},\beta=\frac{3}{4}$ 时，差分公式的阶最高，是 2 阶方法。2. 带入试验方程有：

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{3}[-5y_n-10(y_n+\frac{3h}{4}(-5y_n))]$$

$$=(1-5h+\frac{25}{2}h^2)y_n$$

$h=0.1$ 时，由于 $y_{n+1}=0.625y_n$，所以，所得数值解是稳定的。

东北大学考试试卷（A）

2006 —2007 学年第 1 学期

课程名称： 数值分析

总分	一	二	三	四	五	六	七	八	九			

一、填空题（20 分，每题 4 分）

1. 设 $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$，则 $\|A\|_\infty=$ 4 ，$\|A\|_2=$ $\sqrt{\frac{15+\sqrt{5}}{2}}$。

2. 设 $f(x)=x^3-2$，则差商 $f[1,2]=$ 7 ，$f[0,1,2,3,4]=$ 0

3. 用 J 迭代法和 GS 迭代法求解线性方程组 $Ax=b$，其中 $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ a & 1\end{pmatrix}$，则当参数 a 满足条件 $|a|<1$ 时两种方法均收敛。 $\rho<1$ $1-a^2<1$

4. 将 $A=\begin{bmatrix}9 & -6\\ -6 & 5\end{bmatrix}$ 进行 Cholesky 分解得到 $A=GG^T$，则下三角矩阵 $G=$ $\begin{bmatrix}3 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix}$

5. 对积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的 Simpson 求积公式为 $\frac{b-a}{6}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)]$

二、判断题，正确划"√"，不正确划"×"（12 分，每题 2 分）

1. 若被插值函数 $f(x)$ 为 n 次多项式，则由 n+1 个互异插值节点确定的插值多项式 $p(x)$ 必为 $f(x)$。（×）

2. 当线性方程组的系数矩阵对称正定时，GS 方法收敛。（√）

3. 解非线性方程的 Newton 迭代法对任意的迭代初值均平方收敛。（ ）

4. 分段 Hermite 插值具有一阶连续导函数。（√）

5. 当线性方程组系数矩阵的谱半径小于 1 时迭代法一定收敛。（√）

6. 对方程 $y'=-10y$，取步长 $h=0.15$ 采用改进的 Euler 方法求解是稳定的。（×）

三.（9 分）用列主元高斯消去法解线性代数方程组

$$\begin{cases}x_1-x_2+x_3=-4\\ 5x_1-4x_2+3x_3=-12\\ 2x_1+x_2+x_3=11\end{cases}$$

四.（12 分）求解方程组 $\begin{cases}x_1-2x_2+2x_3=3\\ -x_1+x_2-x_3=1\\ -2x_1-2x_2+x_3=2\end{cases}$

(1) 写出 Jacobi 法与 SOR 法的迭代格式。

(2) 讨论 Jacobi 迭代法与 SOR 迭代法（$\omega=1$ 时）的收敛性。

(1) Jacobi: $\begin{cases}x_1^{(k+1)}=3+2x_2^{(k)}-2x_3^{(k)}\\ x_2^{(k+1)}=1+x_1^{(k)}+x_3^{(k)}\\ x_3^{(k+1)}=2+2x_1^{(k)}+2x_2^{(k)}\end{cases}$

(2) 对 J 迭代法：$B=\begin{bmatrix}0 & 2 & -2\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 2 & 0\end{bmatrix}$ $|\lambda I-B|=\begin{vmatrix}\lambda & -2 & 2\\ -1 & \lambda & -1\\ -2 & -2 & \lambda\end{vmatrix}$

SOR: $\begin{cases}x_1^{(k+1)}=x_1^{(k)}+w(3-x_1^{(k)}+2x_2^{(k)}-2x_3^{(k)})\\ x_2^{(k+1)}=x_2^{(k)}+w(1-x_1^{(k+1)}-x_2^{(k)}+x_3^{(k)})\end{cases}$

五. （10 分）求满足插值条件

x_j	0	1	2	4
y_j	1	9	23	3

的不超过三次的插值多项式，并给出余项的形式。

六. (10 分) 对于如下的离散数据：

x_j	-1	-0.5	0	0.25	0.75	1.0
y_j	0.22	0.8	2.0	2.5	3.8	4.2

利用最小二乘法求 $y(x)$ 的拟合曲线 $p(x)=a+bx$，并求其最佳均方误差。

七.(10 分) 试确定求积公式

$$\int_{-2h}^{2h} f(x)dx \approx Af(-h)+Bf(0)+Cf(h)$$

的待定参数 A，B，C，使公式具有尽可能高的代数精度，并指明代数精度。

八、(12 分) 对于常微分方程初值问题：$\begin{cases} y'=f(x,y), \\ y(a)=\alpha \end{cases}$，$a\le x\le b$.

求多步方法 $y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[3f(x_n,y_n)-f(x_{n-1},y_{n-1})]$ 的局部截断误差，并指出是几阶方法。

九.(5 分) 用迭代法的思想，给出求 $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}$ 的迭代格式，说明其收敛性并证明

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}=2$$