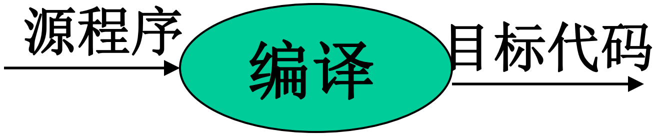
第五章　函数

函数是一个基本的数学概念，应用的范围很广，在计算机科学的理论中，如计算理论 、开关理论、编译理论、数据库理论、软件工程、计算机安全保密，操作系统等都用到函数。

函数---输入和输出间的关系。也叫变换、映射。例如：



具有分析、使用函数的能力在很多领域都是十分重要的。

本章主要介绍函数的概念、函数的复合、逆函数，以及在集合的基数中的应用。

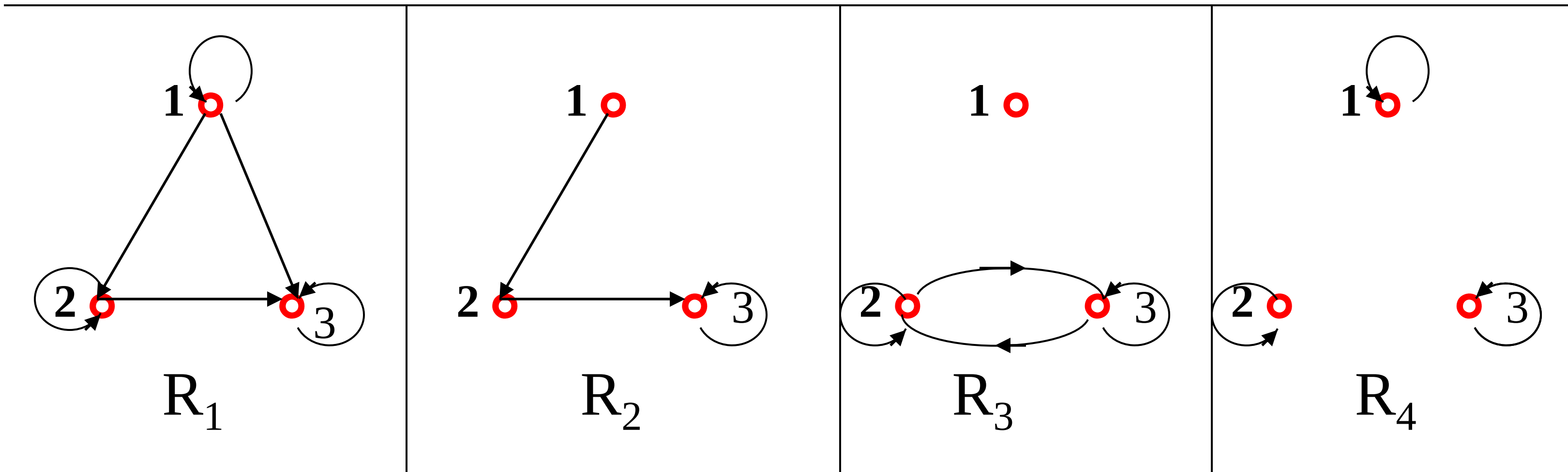
5-1　函数的基本概念

一. 概念

1.定义：X与Y集合，f是从X到Y的关系，如果**任何**$x \in X$，都存在**唯一**$y \in Y$，使得$\langle x,y\rangle \in f$,则称**f是从X到Y的函数**，(变换、映射)，记作$f:X\to Y$, 或$X \xrightarrow{f} Y$.

如果$f:X\to X$是函数, 也称**f是X上的函数**.

下面给出A={1,2,3}上几个关系，哪些是A到A的函数？



下面是大家熟悉的实数集合**R**上的几个关系，哪些是**R**到**R**的函数？

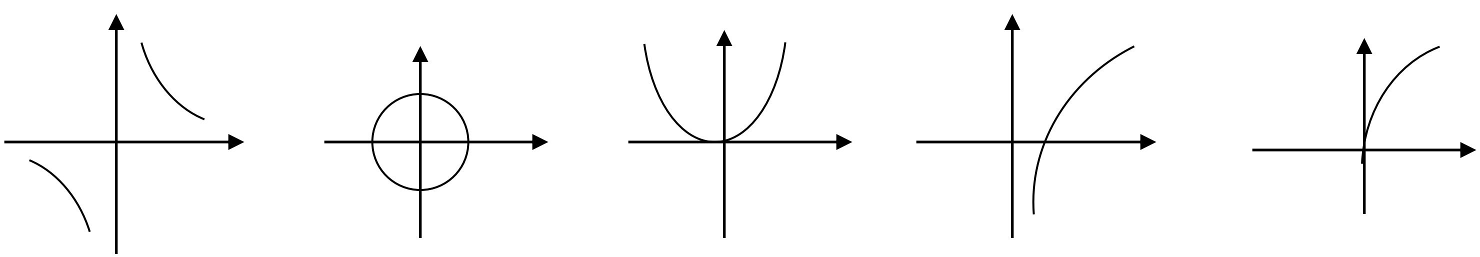
$f=\{<x,y>|x,y\in R\wedge y=\frac{1}{x}\}$

$g=\{<x,y>|x,y\in R\wedge x^2+y^2=4\}$

$h=\{<x,y>|x,y\in R\wedge y=x^2\}$

$r=\{<x,y>|x,y\in R\wedge y=\lg x\}$

$v=\{<x,y>|x,y\in R\wedge y=\sqrt{x}\}$



可见这里所说的函数与以前的数学中函数有区别。

2.自变元与函数值(像源与映像)：$f:X\to Y$, 如果$<x,y>\in f$,称x是自变元(像源)，称 y是x 的函数值(x的映像) 。

$<x,y>\in f \Leftrightarrow y=f(x) \Leftrightarrow f:x\to y$

3.定义域、值域和陪域(共域)：$f:X\to Y$,

1).f的定义域(domain)，记作dom f，或D_f即

D_f =dom f=$\{x|x\in X\wedge\exists y(y\in Y\wedge\langle x,y\rangle\in f)\}$ =X

2).f的值域(range)：记作ran f， 或R_f 即或f(X)

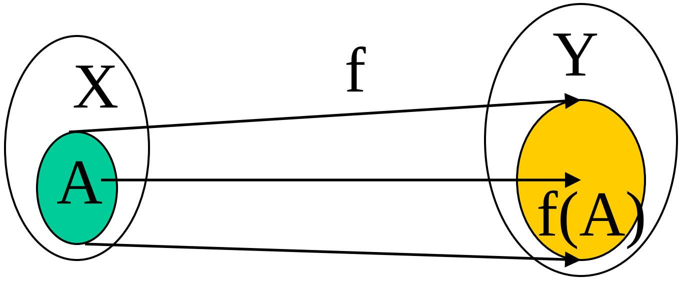
R_f =ran f=f(X)=$\{y|\ y\in Y\wedge\exists x(x\in X\wedge\langle x,y\rangle\in f)\}$

(如果A $\subseteq$X 定义集合f(A)如下：

$f(A)=\{y|\ y\in Y\wedge\exists x(x\in A\wedge\langle x,y\rangle\in f)\}$)

前面例中R_h =ran h=h(R)=R^+,

R^+是非负实数。



3).f的陪域(codomain):即是Y称之为f的陪域。

二. 函数的表示方法

同关系的表示方法，也可以有：

枚举法、有向图、矩阵、谓词描述法。这里不再赘述。

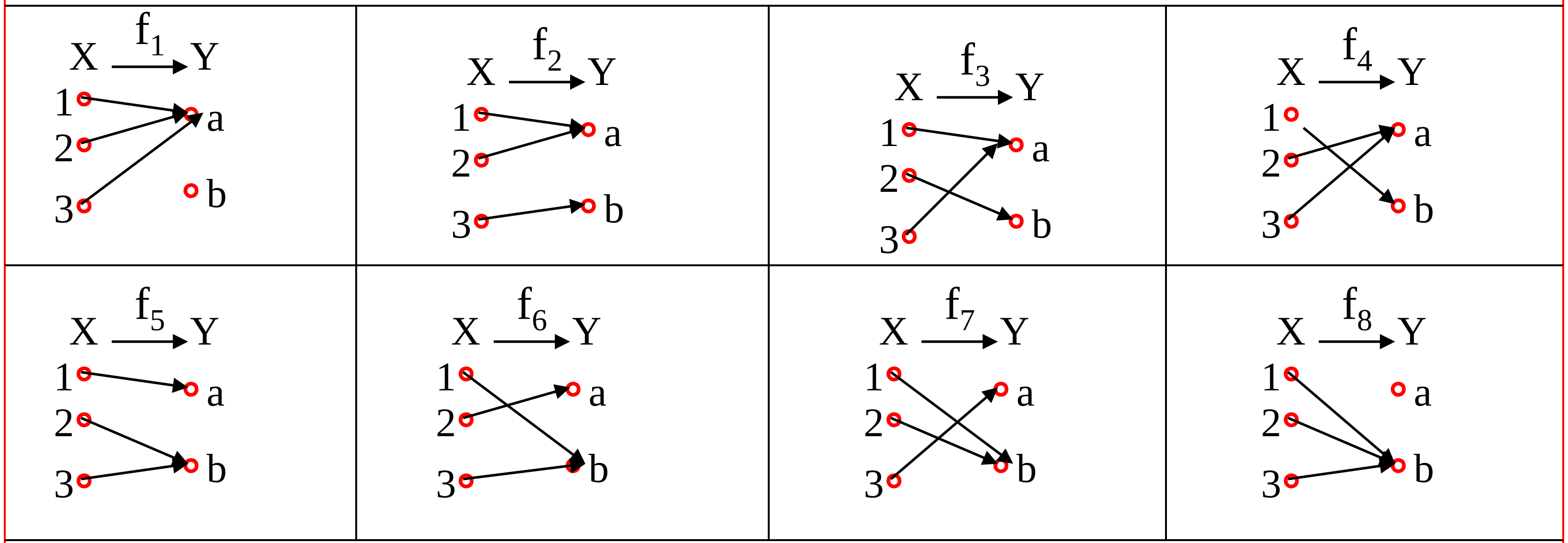
函数的矩阵的特点：每行必有且只有一个1。

三. 从X到Y函数的集合Y^X:

$Y^X = \{f \mid f: X \to Y\}$

Y^X：它是由所有的从X到Y函数构成的集合

例 $X=\{1,2,3\}$ $Y=\{a,b\}$ 所有的从X到Y函数:



$Y^X = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\}$

如果X和Y是有限集合，$|X|=m, |Y|=n$,因为X中的每个元素对应的函数值都有n种选择，于是可构成n^m个不同的函数，因此 $|Y^X|=|Y|^{|X|}=n^m$， 可见符号Y^X有双重含义.

四. 特殊函数

1. 常值函数：函数$f:X\to Y$，如果$\exists y_0\in Y$, 使得对$\forall x\in X$, 有$f(x)=y_0$，即$ran\ f=\{y_0\}$，称f是常值函数。如上例的f_1和f_8。

2.恒等函数：恒等关系I_X是X到X函数，即$I_X:X\to X$,称之为恒等函数。显然对于$\forall x\in X$，有 $I_X(x)=x$ 。

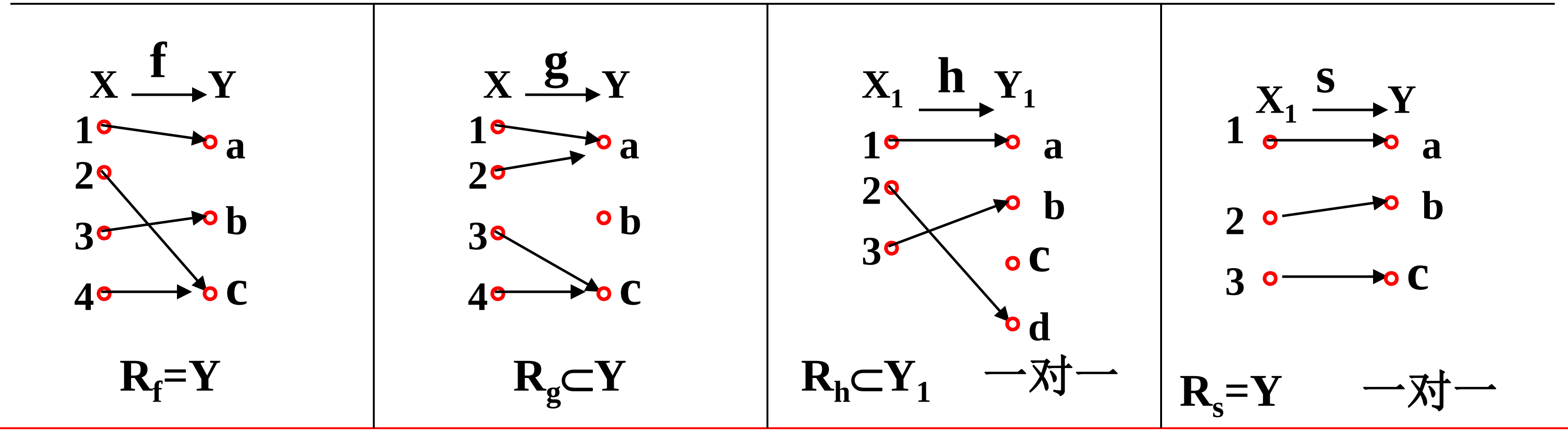
五．两个函数相等

设有两个函数$f:A\to B$ $g:C\to D$, $f=g$ 当且仅当 $A=C$，$B=D$，且对任何$x\in A$，有$f(x)=g(x)$。

即它们的定义域相等、陪域相等、对应规律相同。

六. 函数的类型

先看下面例子：

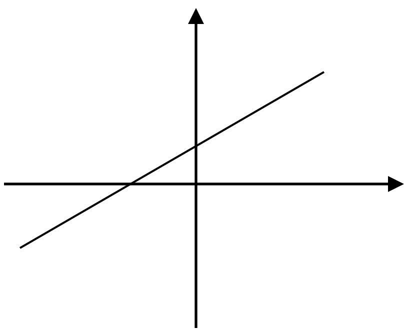


1.满射的：f:X→Y是函数，如果 R_f=Y,则称f 是满射的。

2.映内的：f:X→Y是函数，如果 $R_f \subset Y$ 则称f 是映内的。

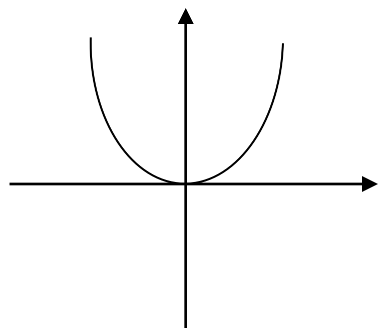
3.入射的：f:X→Y是函数，如果对于任何$x_1,x_2 \in X$, 如果 $x_1 \neq x_2$ 有$f(x_1) \neq f(x_2)$,(或者若$f(x_1)=f(x_2)$,则$x_1=x_2$),则称 f 是入射的，也称f 是单射的，也称f 是一对一的。

4.双射的：f:X→Y是函数，如果 f 既是满射的，又是入射的，则称 f 是双射的，也称f 是一一对应的。



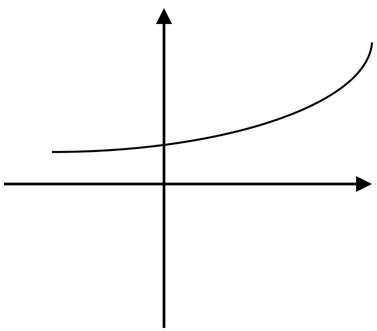
$y=ax+b$

双射的



$y=x^2$

映内的



$y=2^x$

映内的 入射的

思考题：如果 f:X→X是入射的函数，则必是满射的，所以 f 也是双射的。此命题成立吗？

答案是：不一定。例如$f:N\rightarrow N$，$f(n)=2n$，f是入射的，但不是满射的函数。

只有当X是有限集合时，上述命题才成立。

本节重点掌握：函数的定义、函数的类型的判定和证明。

1.证明$f:X\rightarrow Y$是满射的：任取$y\in Y$，推出存在$x\in X$，使得$y=f(x)$。

2.证明$f:X\rightarrow Y$是入射的：

方法1：任取$x_1,x_2\in X$，设$x_1\neq x_2$，推出$f(x_1)\neq f(x_2)$。

方法2：任取$x_1,x_2\in X$，设$f(x_1)=f(x_2)$，推出$x_1=x_2$。

作业 第151页 (1)，(3)，(5)，(6)

5-2 函数的复合

由于函数就是关系，所以也可以进行复合运算。下面先回顾关系的复合。

设R是从X到Y的关系，S是从Y到Z的关系，则R和S的复合关系记作R∘S 。定义为：

$$R\circ S=\{\langle x,z\rangle \mid x\in X\wedge z\in Z\wedge \exists y(y\in Y\wedge \langle x,y\rangle\in R\wedge \langle y,z\rangle\in S)\}$$

一. 定义: $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$是函数,则定义

$$g\circ f=\{\langle x,z\rangle \mid x\in X\wedge z\in Z\wedge \exists y(y\in Y\wedge \langle x,y\rangle\in f\wedge \langle y,z\rangle\in g)\}$$

则称 $g\circ f$ 为f与g的复合函数(左复合).

注意:这里把g写在f的左边了.所以叫左复合.

$g\circ f:X\to Z$,即 $g\circ f$ 是X到Z的函数.这样写是为了照顾数学习惯: $g\circ f(x)=g(f(x))$

二. 复合函数的计算

计算方法同复合关系的计算. 但要注意是左复合.

例 $f:X\to Y,\ g:Y\to Z$

$X = \{1,2,3\}\quad Y=\{1,2,3,4\}\quad Z=\{1,2,3,4,5\}$

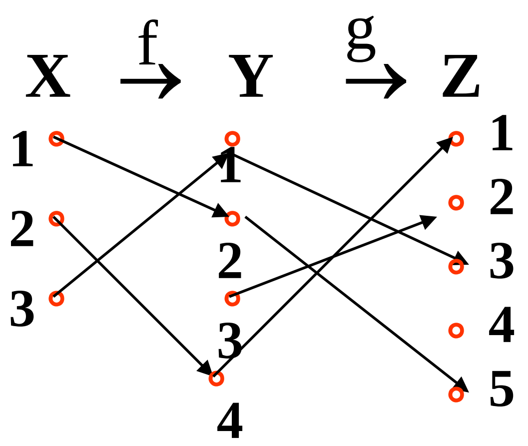
$f = \{\langle 1,2\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,1\rangle\}$

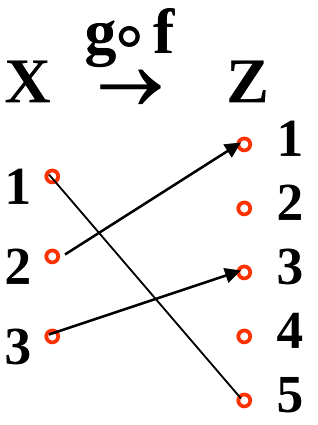
$g = \{\langle 1,3\rangle,\langle 2,5\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,1\rangle\}$

$g\circ f = \{\langle 1,3\rangle,\langle 2,5\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,1\rangle\}\circ\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,1\rangle\}$

$= \{\langle 1,5\rangle,\ \langle 2,1\rangle,\ \langle 3,3\rangle\}$

用有向图复合:





例 令f和g都是实数集合R上的函数,如下:

$f=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in R\wedge y=3x+1\}$

$g=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in R\wedge y=x^2+x\}$

分别求 $g\circ f$ 、 $f\circ g$ 、 $f\circ f$ 、 $g\circ g$

$g\circ f(x)=g(f(x))=(3x+1)^2+(3x+1)=9x^2+9x+2$

$f\circ g(x)=f(g(x))=3(x^2+x)+1=3x^2+3x+1$

$f\circ f(x)=f(f(x))=3(3x+1)+1=9x+4$

$g\circ g(x)=g(g(x))=(x^2+x)^2+(x^2+x)=x^4+2x^3+2x^2+x$

可见复合运算不满足交换性。

三. 函数复合的性质

1.定理5-2.1满足可结合性。 $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$, $h:Z\to W$ 是函数，则 $(h\circ g)\circ f=h\circ(g\circ f)$。

证明与关系复合可结合的证明类似，这里从略。

2.定理5-2.2 $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$是两个函数, 则

(1)如果f和g是 满射的，则 $g\circ f$ 也是满射的;

(2)如果f和g是入射的，则 $g\circ f$ 也是入射的;

(3)如果f和g是双射的，则 $g\circ f$ 也是双射的。

证明：(1) 设f和g是满射的，因$g\circ f:X\to Z$,任取$z\in Z$, 因$g:Y\to Z$是满射的，所以存在$y\in Y$,使得$z=g(y)$, 又因$f:X\to Y$是满射的，所以存在$x\in X$,使得$y=f(x)$, 于是有$z=g(y)=g(f(x))= g\circ f(x)$, 所以 $g\circ f$ 是满射的。

(2) 设f和g是入射的，因$g\circ f:X\to Z$,任取$x_1, x_2\in X$, $x_1\neq x_2$ 因$f:X\to Y$是入射的，$f(x_1)\neq f(x_2)$, 而 $f(x_1)$,$f(x_2)\in Y$，因$g:Y\to Z$是入射的，$g(f(x_1))\neq g(f(x_2))$ 即$g\circ f(x_1)\neq g\circ f(x_2)$ 所以$g\circ f$ 也是入射的。

(3)由(1)(2)可得此结论。

3.定理5-2.3

(1)如果 $g\circ f$ 是满射的，则g是 满射的；

(2)如果$g\circ f$ 是入射的，则 f 是入射的；

(3)如果 $g\circ f$ 是双射的，则f是入射的和g是 满射的。

此定理的证明是作业题第156页题(3)。

4.定理5-2.4 $f:X\to Y$是函数, 则

$$f\circ I_X= f \quad 且\ I_Y\circ f=f。$$

证明：先证明定义域、陪域相等。

因为$I_X:X\to X$， $f:X\to Y$， ∴ $f\circ I_X : X\to Y$, $I_Y\circ f : X\to Y$

可见$f\circ I_X$、$I_Y\circ f$ 与 f 具有相同的定义域和陪域。

再证它们的对应规律相同：任取$x\in X$,

$$f\circ I_X(x)=f(I_X(x))=f(x)$$

$$I_Y\circ f\ (x)= I_Y(f(x))=f(x)$$

所以 $f\circ I_X = f$ 且 $I_Y\circ f = f$。

5-3 逆函数

R是A到B的关系，其逆关系R^C是B到A的关系。

$R^C=\{\langle y,x\rangle \mid \langle x,y\rangle \in R\}$

$f:X\to Y$ $f^C:Y\to X$, 是否是个函数？请看下面的例子：

$f:X \to Y$ $f^C:Y \to X$

显然f^C不是函数。可见如果一个函数不是双射的，它的逆就不是函数。

一.定义：设$f:X\to Y$是双射的函数，$f^C:Y\to X$ 也是函数, 称之为 f 的逆函数。并用f^{-1}代替f^C 。 f^{-1}存在，也称f 可逆。

显然， f^{-1}也是双射的函数。

二. 性质

1.定理5-3.1 设$f:X\to Y$是双射的函数，则$(f^{-1})^{-1}=f$ 。

结论显然成立，证明从略。

2.定理5-3.2 设$f:X\to Y$是双射的函数，则有

$$f^{-1}\circ f=I_X \quad 且 \quad f\circ f^{-1}=I_Y 。$$

证明：先证明定义域、陪域相等。

因为 $f:X\to Y$是双射的，$f^{-1}:Y\to X$也是双射的， 所以

$$f^{-1}\circ f:X\to X，I_X:X\to X$$

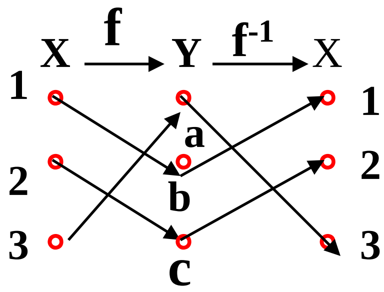
可见$f^{-1}\circ f$ 与I_X 具有相同的定义域和陪域。

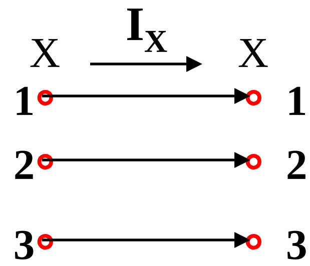
再证它们的对应规律相同：$\forall x\in X$，因$f:X\to Y$，$\exists y\in Y$，使得 $y=f(x)$，又f 可逆，故 $f^{-1}(y)=x$，于是

$$f^{-1}\circ f(x)=f^{-1}(f(x))=f^{-1}(y)=x=I_X(x)$$

所以有 $f^{-1}\circ f=I_X$ 。 同理可证 $f\circ f^{-1}=I_Y$ 。

下面看一个例子：





可见 $f^{-1}\circ f = I_X$ 。

3.定理5-3.3 令 $f:X\to Y$, $g:Y\to X$是两个函数, 如果

$g\circ f= I_X$ 且 $f\circ g = I_Y$,则 $g= f^{-1}$ 。

证明：

(1)证f和g都可逆。因为$g\circ f= I_X$， I_X是双射的， 由关系复合性质3得， f是入射的和g是 满射的。同理由 $f\circ g = I_Y$，得g是入射的和f 是 满射的。所以f和g都可逆。

(2)显然f^{-1}和g具有相同的定义域和陪域。

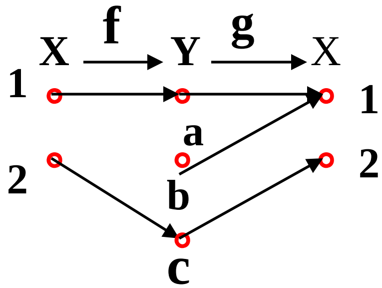
(3)证明它们的对应规律相同。

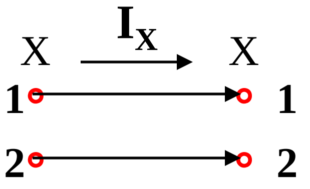
任取$y\in Y$， $f^{-1}(y)= f^{-1}\circ I_Y(y) = f^{-1}\circ(f\circ g)(y)$

$= (f^{-1}\circ f)\circ g(y) =(I_X\circ g)(y) =g(y)$ 所以$f^{-1}=g$

顺便说明： $f^{-1}=g$ 的两个条件必须同时满足，缺一不可。

例如





此例只满足$g\circ f=I_X$，但 f与 g都非双射，不可逆。

4.定理5-3.4,令 $f:X\to Y$, $g:Y\to X$是两个双射函数,则

$$(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$$

此定理与关系的复合求逆$(R\circ S)^C=S^C\circ R^C$ 类似，证明略。

作业 第156页 (1) , (3)c)， (5)

(5)有误，改成：….,则f是满射而g是入射的不一定成立。

*5-4 集合的特征函数与模糊子集

一. 集合的特征函数

以前学过集合A的幂集P(A), 下面是将A的各个子集与函数(称之为集合的特征函数)建立一一对应的关系.集合的特征函数在模糊数学中有直接的应用。

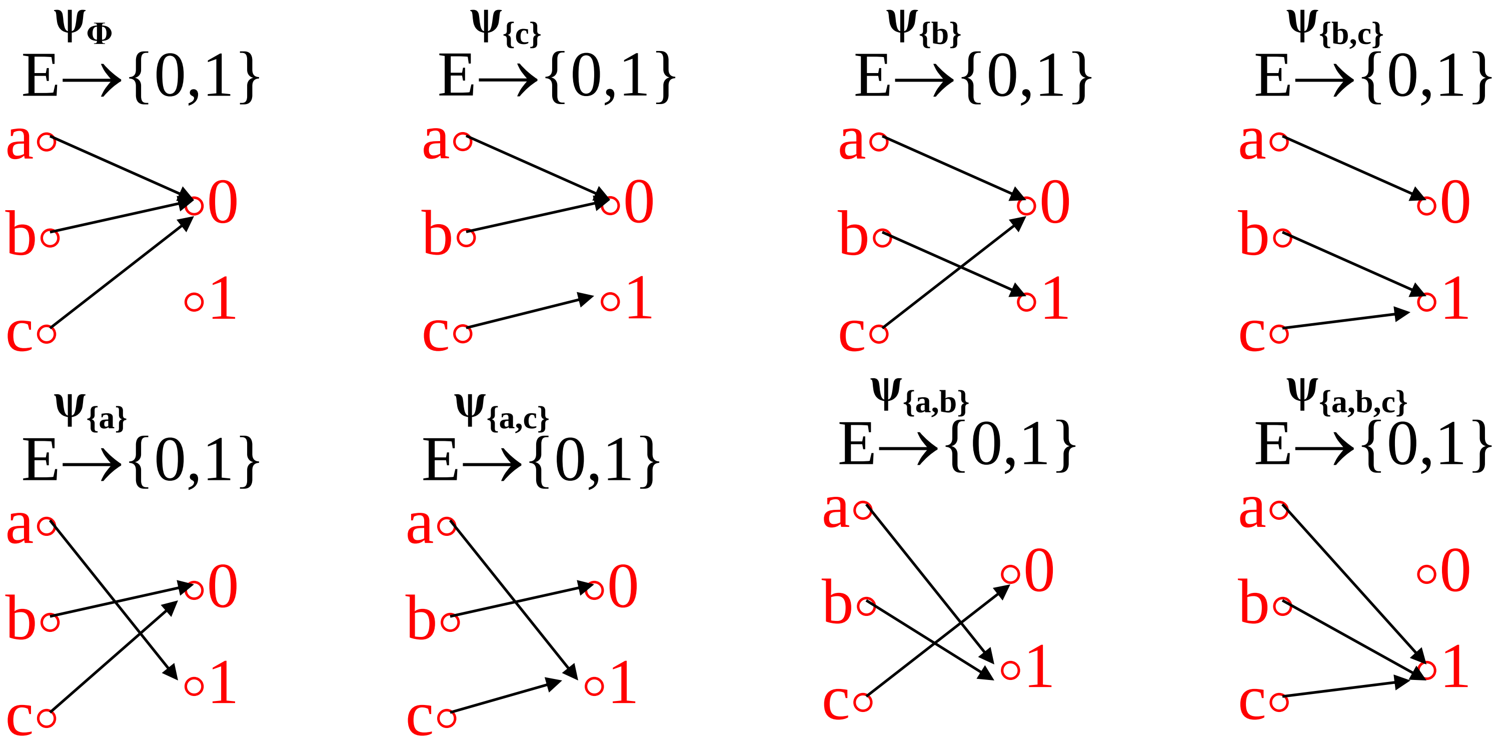
1.定义:令E是全集, A是E的子集,定义函数

$\psi_A: E \to \{0,1\}$ 对任何$x \in E$,有

$$\psi_A(x)= \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

称是$\psi_A: E \to \{0,1\}$子集A的特征函数.

下面以E={a,b,c}为例, 看看E的各个子集的特征函数。

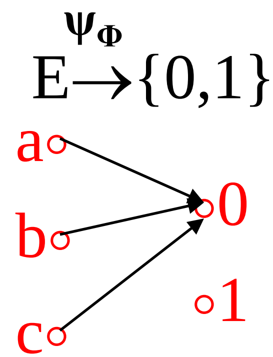


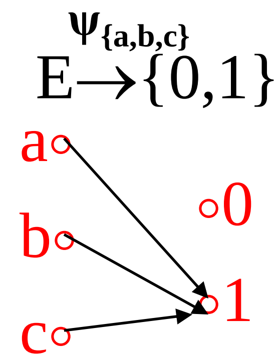
$\psi_A(x)$ \ A / x	Φ	{c}	{b}	{b,c}	{a}	{a,c}	{a,b}	{a,b,c}
a	0	0	0	0	1	1	1	1
b	0	0	1	1	0	0	1	1
c	0	1	0	1	0	1	0	1

用集合的特征函数可以进行集合的运算和表示集合间的关系.

2.性质

令**A,B**是全集**E**的子集,





1) $A=\Phi \Leftrightarrow \forall x(\psi_A(x)=0)$

2) $A=E \Leftrightarrow \forall x(\psi_A(x)=1)$

3) $A\subseteq B \Leftrightarrow \forall x(\psi_A(x) \le \psi_B(x))$

证明:任取$x\in E$, 从下表看出$A\subseteq B \Leftrightarrow \forall x(\psi_A(x) \le \psi_B(x))$

$x\in A$	$x\in B$	$x\in A\rightarrow x\in B$	$\psi_A(x)$	$\psi_B(x))$	$\psi_A(x) \le \psi_B(x))$
F	F	T	0	0	T
F	T	T	0	1	T
T	F	F	1	0	F
T	T	T	1	1	T

4) $A=B \Leftrightarrow \forall x(\psi_A(x)=\psi_B(x))$

5) $A \subset B \Leftrightarrow \forall x(\psi_A(x) \le \psi_B(x)) \wedge \exists x(\psi_B(x)=1 \wedge \psi_A(x)=0)$

6) $\psi_{A\cap B}(x)=\psi_A(x)\psi_B(x)$　　证明:任取$x\in E$

$x\in A$	$x\in B$	$x\in A\cap B$	$\psi_{A\cap B}(x)$	$\psi_A(x)\ \psi_B(x)$
F	F	F	0	$0\times 0=0$
F	T	F	0	$0\times 1=0$
T	F	F	0	$1\times 0=0$
T	T	T	1	$1\times 1=1$

7) $\Psi_{\sim A}(x)=1-\psi_A(x)$　　证明:任取$x\in E$

$x\in A$	$x\in \sim A$	$\psi_A(x)$	$\Psi_{\sim A}(x)$	$1-\psi_A(x)$
F	T	0	1	$1-0=1$
T	F	1	0	$1-1=0$

$8).\ \psi_{A\cup B}(x)=\psi_A(x)+\psi_B(x)-\psi_{A\cap B}(x)$ 证明:任取$x\in E$

$x\in A$	$x\in B$	$\psi_{A\cap B}(x)$	$x\in A\cup B$	$\psi_{A\cup B}(x)$	$\psi_A(x)+\psi_B(x))-\psi_{A\cap B}(x)$
F	F	0	F	0	0+0-0=0
F	T	0	T	1	0+1-0=1
T	F	0	T	1	1+0-0=1
T	T	1	T	1	1+1-1=1

所以 $\psi_{A\cup B}(x)=\psi_A(x)+\psi_B(x)-\psi_{A\cap B}(x)$

$9)\ \psi_{A-B}(x)=\psi_A(x)-\psi_{A\cap B}(x)$

证明:任取$x\in E$

$\psi_{A-B}(x)=\psi_{A\cap\sim B}(x)=\psi_A(x)\psi_{\sim B}(x)$

$=\psi_A(x)(1-\psi_B(x))=\psi_A(x)-\psi_A(x)\psi_B(x)$

$=\psi_A(x)-\psi_{A\cap B}(x)$

应用上述公式可以证明一些集合公式.例如证明吸收律:

$A\cup(A\cap B)=A$

证明:任取$x\in A$,

$\psi_{A\cup(A\cap B)}(x)=\psi_A(x)+\psi_{A\cap B}(x)-\psi_{A\cap(A\cap B)}(x)$

$=\psi_A(x)+\psi_{A\cap B}(x)-\psi_{A\cap B}(x)=\psi_A(x)$

二. 模糊子集

前边讨论的集合是表示一个确定的概念. 即对任何元素a, 要么$a\in A$,要么$a\notin A$,是确定的.

而在实际生活中,许多概念是模糊的,比如,青年人、老年人、凉、热等都是模糊概念. 比如一般认为70岁以上是老年人, 30岁以下不是老年人, 那么, 50岁是否是老年人就没有明确的回答. 对这些概念用以前的集合论方法研究就不适用了. 所以产生了模糊集合论.

模糊集合论是美国学者L.A.Zaden 在1965年创立的. 模糊集合是模糊数学的基础, 模糊数学不是让数学变成模糊的东西, 而是让数学进入模糊现象的领域.

模糊数学是借用数学工具,通过模仿人类的思维,描述和处理模糊概念.

现在已有了模糊语言,模糊自动机,模糊算法,模糊推理,模糊控制等, 总之模糊数学已经得到广泛地应用.

下面介绍模糊集合的基本概念.

1.定义: E是个论域, E上一个模糊子集 $\tilde{A}$**是指:存在一个函数,** $\mu_{\tilde{A}}: E \to [0,1]$, 并称$\mu_{\tilde{A}}$为$\tilde{A}$的隶属函数.

注意: $\mu_{\tilde{A}}$与ψ_A不同, $\psi_A: E \to \{0,1\}$ (陪域中只有0和1)

而$\mu_{\tilde{A}}: E \to [0,1]$ (陪域是[0,1]闭区间)

定义说明:

(1).用隶属函数$\mu_{\tilde{A}}$表示模糊集合$\tilde{A}$.

(2).对于任意$x \in E$都有唯一的隶属函数值:$\mu_{\tilde{A}}(x) \in [0,1]$.

$\mu_{\tilde{A}}(x)$表示x的隶属$\tilde{A}$的程度.

$\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$ 表示$x \in \tilde{A}$(完全属于).

$\mu_{\tilde{A}}(x) = 0$ 表示$x \notin \tilde{A}$(完全不属于).

$0 \prec \mu_{\tilde{A}}(x) \prec 1$ 表示x在某种程度上属于$\tilde{A}$.

这时$x \in \tilde{A}$和$x \notin \tilde{A}$均不成立.

例子.令E={ a , b , c , d , e }

$\tilde{A}$ **表示E中“圆形”的模糊子集**

$\tilde{B}$ **表示E中“方形”的模糊子集。**

它们的隶属函数如下:

$$
\begin{array}{lcl}
E & \xrightarrow{\mu_{\tilde{A}}} & [0,1] \\
a & \longrightarrow & 1 \\
b & \longrightarrow & 0.8 \\
c & \longrightarrow & 0.4 \\
d & \longrightarrow & 0.2 \\
e & \longrightarrow & 0.1
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{lcl}
E & \xrightarrow{\mu_{\tilde{B}}} & [0,1] \\
a & \longrightarrow & 0.4 \\
b & \longrightarrow & 0.3 \\
c & \longrightarrow & 1 \\
d & \longrightarrow & 0.2 \\
e & \longrightarrow & 0.1
\end{array}
$$

$$E=\{\ a,\ b,\ \boxed{c},\ d,\ e\ \}$$

2. 模糊子集的表示方法

1).序偶的集合表示

$$\tilde{A}=\{<a,1>,<b,0.8>,<c,0.4>,<d,0.2>,<e,0.1>\}$$

$$\tilde{B}=\{<a,0.4>,<b,0.3>,<c,1>,<d,0.2>,<e,0.1>\}$$

2).用Zaden记号表示

$$\tilde{A}=1/a+0.8/b+0.4/c+0.2/d+0.1/e$$

3).用有序n元组表示

$$\tilde{A}=<1,\quad 0.8,\quad 0.4,\quad 0.2,\quad 0.1>$$

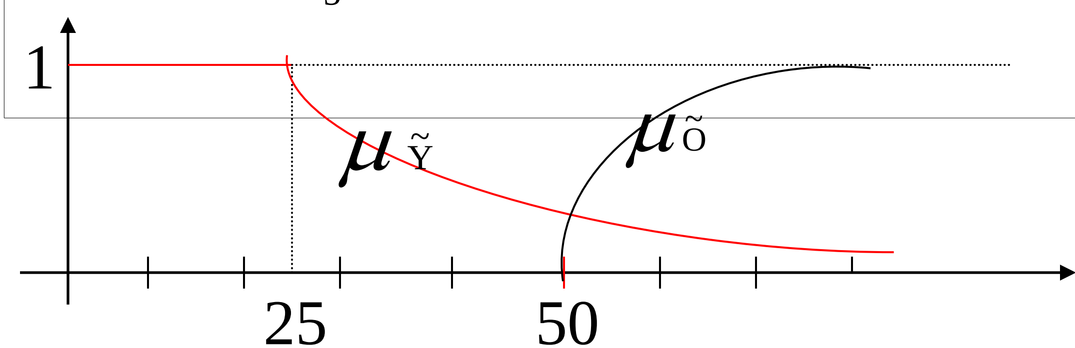
$a \quad b \quad c \quad d \quad e$

4).用函数表达式或曲线表示

例如,以年龄为论域, E={0,1,2,3,…200}, Zaden给出了“年老---$\tilde{O}$ ” “年青$\tilde{Y}$--- ”两个模糊子集的隶属函数表示为:

$$\mu_{\tilde{O}}=\begin{cases}0 & 当0\le x\le 50\\ \left[1+\left(\frac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1} & 当50\prec x\le 200\end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{Y}}=\begin{cases}1 & 当0\le x\le 25\\ \left[1+\left(\frac{x-25}{5}\right)^{2}\right]^{-1} & 当25\prec x\le 200\end{cases}$$



3. 模糊集合的运算

设$\mu_{\tilde{A}}, \mu_{\tilde{B}}$是全集E上两个模糊子集， $x \in E$

并集 $\tilde{A} \cup \tilde{B} : \mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \max(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x))$

交集 $\tilde{A} \cap \tilde{B} : \mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x))$

绝对补集 $\sim \tilde{A} : \mu_{\sim \tilde{A}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x)$

$$\tilde{A} = \{<a,1>,<b,0.8>,<c,0.4>,<d,0.2>,<e,0.1>\}$$

$$\tilde{B} = \{<a,0.4>,<b,0.3>,<c,1>,<d,0.2>,<e,0.1>\}$$

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \{<a,1>,<b,0.8>,<c,1>,<d,0.2>,<e,0.1>\}$$

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \{<a,0.4>,<b,0.3>,<c,0.4>,<d,0.2>,<e,0.1>\}$$

$$\sim \tilde{A} = \{<a,0>,<b,0.2>,<c,0.6>,<d,0.8>,<e,0.9>\}$$

*5-5 集合的基数

本节主要借助于函数讨论集合的所谓“大小”问题。这里用到自然数集合这个重要的概念。

一. 自然数

如何给自然数定义，每个自然数n ,就是个集合。

1.集合A的后继集合A^+

A是个集合，A的后继集合A^+为:

$A^+ = A \cup \{A\}$ 例如:

A:	A^+ :
$\Phi=0$	$0^+=\Phi\cup\{\Phi\}=\{\Phi\}=1=\{0\}$
$\{\Phi\}=1$	$1^+=\{\Phi\}\cup\{\{\Phi\}\}=\{\Phi,\{\Phi\}\}=2=\{0,1\}$
$\{\Phi,\{\Phi\}\}=2$	$2^+=\{\Phi,\{\Phi\}\}\cup\{\{\Phi,\{\Phi\}\}\}=\{\Phi,\{\Phi\},\{\Phi,\{\Phi\}\}\}=3=\{0,1,2\}$
……	……

2.自然数集合N的定义(Peano公理)

1). $0 \in N$ 这里 $0=\Phi$

2). $n \in N$, 则 $n^+ \in N$, 这里$n^+ = n \cup \{n\}$

3). 不存在 $n \in N$, 使得 $n^+ = 0$ —— 0是最小的自然数

4). 若$n^+ = m^+$, 则 $n=m$ —— 后继数的唯一性

5). 如果 $S \subseteq N$，且

(1) $0 \in S$

(2) $n \in S$, 则 $n^+ \in S$

则 $S=N$。

N的极小性

从此定义得 $n=\{0,1,2,3,\ldots,n-1\}$, 所以有：

$0 \in 1 \in 2 \in 3 \in \ldots\ldots$

$0 \subseteq 1 \subseteq 2 \subseteq 3 \subseteq \ldots\ldots$

自然数的这个定义，解释了许多数学问题，是一个很准确的抽象。因为0,1,2,3,..本身就是个抽象的概念。

二. 集合的等势

比较两个集合的“大小”有两种方法：

数集合中元素的个数。这只适用于有限集合。

看两个集合的元素间是否有一一对应的关系(双射)。这种方法既适用于有限集合，也适用无限集合。

1.定义：A、B是集合，如果存在双射$f:A\to B$，则称A与B等势。记作$A\sim B$。

例如下面集合间是等势的。

$N=\{0,1,2,3,4,\ldots\ldots\}$

$A=\{0,2,4,6,8,\ldots\ldots\}$　$f:N\to A$，$f(x)=2x$

$B=\{1,3,5,7,9,\ldots\ldots\}$　$g:N\to B$，　$g(x)=2x+1$

$C=\{1,10,100,1000,10000,\ldots\ldots\}$

$=\{10^0,10,10^2,10^3,10^4,,\ldots\ldots\}$　$h:N\to C$，　$h(x)=10^x$

2.集合间的等势关系“~”是个等价关系

令S是个集合族(即“所有集合构成的集合”)，在S上的等势关系~，满足：

(1)自反性：因为任何集合A有双射I_A:A→A,∴A~A

(2)对称性：任何集合A,B，若A~B，有双射f:A→B,
又有双射f^{-1}:B→A，所以B~A。

(3)传递性：任何集合A,B,C，若A~B，且B~C，则有双射f:A→B,和双射g:B→C,由函数的复合得双射：
g∘f:A→C，所以A~C。

所以~是等价关系。

按照等势关系“~”对集合族S进行划分，得到商集S/~，进而得到基数类的概念。

三. 基数类和基数

1.基数类

S是集合族，“~”是S上的等势关系，相对~的等价类称之为基数类。

S={0,Φ,1,{1},{a},…,2,{1,2},{a,b},…,3,{1,2,3},…,N,I,…R,..}

无元素 1个元素 2个元素 3个元素 可数集 不可数集 ...

S/~={[0],[1],[2],[3],…,[N],[R],...}

任何集合A，必属于且仅属于一个等价类。如{a,b,0,1}∈[4]，因为{a,b,0,1}与4(即集合{0,1,2,3})等势。

偶数集合E={0,2,4,6,8,...}∈[N], 因为E~N.

2.基数

给定集合A，A所属于的基数类，称之为A的基数，记作K[A]。

如A={1,2}, A∈[2], K[A]=[2], 简记成 K[A]=2

如B={a,b,c}, B∈[3], K[B]=[3], 简记成 K[B]=3

采用这种简单记法，使得对于有限集合A，K[A]=|A|。

四. 有限集合与无限集合

定义:凡是和某个自然数n等势的集合，都称之为有限集合；否则是无限集合。

如A={a,b,c,d,e},A与5({0,1,2,3,4})等势，故A是有限集。

五. 可数集合及其基数

1.自然数集合N的基数

因为N不可能与某个自然数n等势。所以N的基数不能是有限数，就用一个“无限大”的数$\aleph_0$(读:阿列夫零)表示, 即K[N]= $\aleph_0$ 。

2.可数集: 与自然数集合N等势的集合，称之为可数集。

A={0,2,4,6,8,……} $f:N\to A$ $f(n)=2n$

B={1,3,5,7,9,……} $g:N\to B$ $g(n)=2n+1$

C={10^0,10,10^2,10^3,10^4,,……} $h:N\to C$ $h(n)=10^n$

都是可数集合。

3.可数集的判定

定理5-5.1集合A是可数集，充分且必要条件是可将A的元素写成序列形式，即

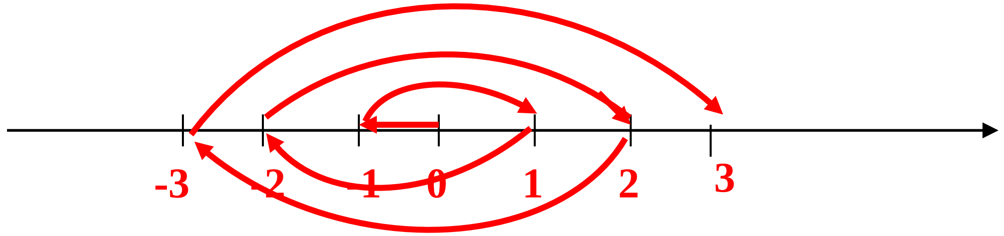
$$A=\{a_0,a_1,a_2,a_3,\ldots\}$$

证明的过程很简单，这里从略。因为这样A就可以与N之间建立一一对应。

例如整数集合I~N、有理数集合Q~N。

因为I可以写成：I={0,-1,1,-2,2,-3,3,-4,4,...}

即可将I中元素从0开始按照箭头指定次序排列：



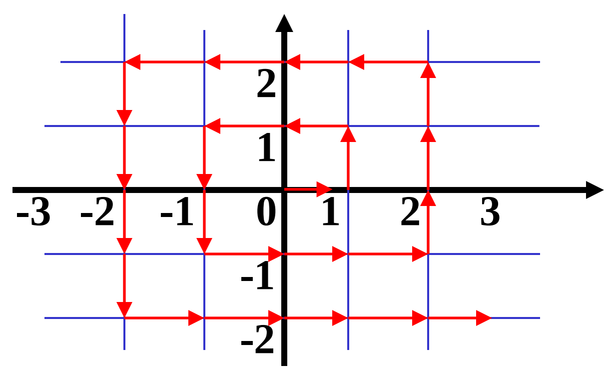
所以 I 是可数集。

因为每个有理数都可以写成一个分数形式如下：

…	-3/1	-2/1	-1/1	0/1	1/1	2/1	3/1	…
…	-3/2	-2/2	-1/2	0/2	1/2	2/2	3/2	…
…	-3/3	-2/3	-1/3	0/3	1/3	2/3	3/3	…
…	-3/4	-2/4	-1/4	0/4	1/4	2/4	3/4	…
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

可以从0/1开始按照箭头指定次序排列Q中元素(如果这个有理数在前面出现，就跳过去)，

所以Q是可数集。



另外 I×I~N 以及 N×N~N

如右图所示。

同理可证N×N~N 。

4.至多可数集：有限集合和可数集**统称**至多可数集。

六. 不可数集合及其基数

1.实数轴上的(0,1)区间中的实数是不可数的。

证明：假设(0,1)是可数的，则可以将它的元素写成如下序列形式：$\{x_1,x_2,x_3,...\}$,其中

$x_i = 0.a_{i1}a_{i2}a_{i3}\ldots\ldots$ $i=1,2,3,\ldots..$ 即 $0 < x_i < 1$

$a_{ik} \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ $k=1,2,3,4,\ldots$

令 $x_1 = 0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\ldots\ldots$

$x_2 = 0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\ldots\ldots$

$x_3 = 0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots$

$x_n = 0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}a_{n4}\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots$

构造一个数$b=0.b_1b_2b_3b_4\ldots b_n\ldots\ldots$，其中

$b_1 \neq a_{11}$ $b_2 \neq a_{22}$ $b_3 \neq a_{33}\ldots$ $b_n \neq a_{nn}\ldots$ 于是

$b \neq x_1$, $b \neq x_2$, $b \neq x_3$ ... $b \neq x_n$ … $\therefore$ $b \notin (0,1)$

产生矛盾，所以(0,1)是不可数的。

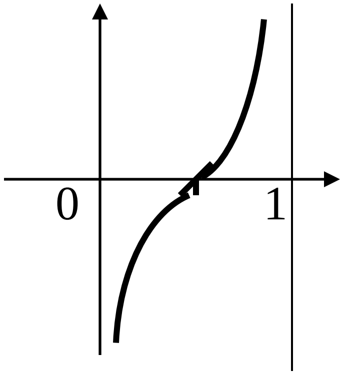
2.连续统基数

(1) (0,1)区间的基数是一个比N的基数$\aleph_0$更大的无限大的数,用$\aleph$(阿列夫)表示。即$\aleph > \aleph_0$ 。

(2) 整个实数集合R~(0,1)

证明：构造函数f: (0,1)→R

$$f(x)=tg(\pi x - \pi/2)$$



显然 f是双射，所以R~(0,1).

(3)实数轴上的任何一段连续区间(a,b)的基数都是$\aleph$，所以称之为连续统基数。

3.计算公式

(1) $K[A_1]=K[A_2]=\ldots=K[A_n]=\aleph$, 则

$K[A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n]=\aleph$

(2) $K[A]=K[B]=\aleph$, 则 $K[A \times B]=\aleph$

(3)K[A]=$\aleph$, K[B]=$\aleph_0$ (或K[B]=n), (B是至多可数集)

则 K[A－B]=$\aleph$

七. 基数的比较

前边讨论基数相等与否的问题, 下面讨论诸如$\aleph$和$\aleph_0$哪个大的问题, 即所谓无限集合的“次序”问题.

在比较两个集合基数相等时, 要看这两个集合之间是否存在双射, 但是找双射往往是个麻烦的事, 为了解决这个问题, 提出下面定理.

定理5-5.2 如果集合A到B存在入射函数, 则K[A]≤K[B].

定理5-5.3(Zermelo定理) A和B是任何集合, 则以下 三条之一必有一个成立:

a.) K[A]<K[B].

b.) K[B]<K[A]

c.) K[A]=K[B].

定理5-5.4(Contor- Schroder- Bernstein定理) A和B是任何集合, 如果 $K[A] \le K[B]$ 且 $K[B] \le K[A]$ 则$K[A]=K[B]$.

这三个定理的证明都超出我们的范围.

用这些定理对集合基数进行比较.

例如. 证明[0,1]与(0,1)等势.

证明:构造两个入射函数:

$f:(0,1)\to[0,1] \quad f(x)=x$

$g:[0,1]\to(0,1) \quad g(x)=\frac{2x+1}{4}$

因为f和g都是入射的,

所以有$K[(0,1)] \le K[[0,1]]$ 且

$K[[0,1]] \le K[(0,1)]$

所以 $K[[0,1]]=K[(0,1)]$

定理5-5.5 设A是有限集合, 则$K[A] < \aleph_0 < \aleph$.

证明: 令$K[A]=n$ 于是$A \sim \{0,1,2,\dots, n-1\}=B$ 显然$K[A]=K[B]$

构造一个函数 $f:B \to N$, $f(x)=x$ 显然f是入射的.

所以$K[B] \le K[N]$, 另外N与B之间不可能存在双射 , 所以

$K[B] \ne K[N]$ 所以 $K[B]<K[N]$, $K[A] < \aleph_0$;

再构造函数 $g:N \to [0,1]$ $g(n)=1/(n+1)$, 显然g 也是入射的,

所以$\aleph 0 \le \aleph$,另外N与[0,1]之间不可能存在双射 , 所以

$K[N] \ne K[[0,1]]$ 所以 $K[N]<K[[0,1]]$, 即$\aleph 0 < \aleph$

所以最后得 $K[A] < \aleph 0 < \aleph$.

定理5-5.6 设A是无限集合, 则$\aleph 0 \le K[A]$

证明: 因A是无限集合,所以A必包含一个可数无限子集B,

构造函数$f:B \to A$ $f(x)=x$ 显然 f是入射的, 故$K[B] \le K[A]$,

而$K[B]=\aleph 0$,所以$\aleph 0 \le K[A]$。

可见可数集合是“最小的”无限集合.

连续统假设: $\aleph$是大于$\aleph_0$的最小基数,不存在集合A使得
$\aleph_0 < K[A] < \aleph$

到目前为止, 该假设既没有被证明, 也没有被否定.

但是有人已证明, 根据现有的公理系统, 既不能证明它是正确的, 也不能证明它是错误的.

本节主要了解自然数的定义，集合的等势概念，基数的概念，可数集合与不可数集合的概念及它们的基数。

本章小结：

- 重点掌握内容：

  函数的概念、类型的判断和证明

  函数的复合、求逆
- 了解集合的特征函数
- 了解集合的基数概念、可数集概念