第六章作业 查看帮助

你的综合得分为：**30分**，你完成了全部互评

1 （10分）

已知函数 $f(x)\in C^3[0,2]$，给定求积公式

$$\int_0^2 f(x)dx \approx Af(0)+Bf(x_0)$$

(1) 试确定参数 A,B,x_0，使得该求积公式的代数精度尽可能的高，并指出其代数精度；

(2) 求出参数确定后的求积公式的求积余项.

回答:

解：(1) 令 $f(x)=1,x,x^2$ 可得

$$\begin{cases} 2=A+B \\ 2=Bx_0 \\ \frac{8}{3}=B\cdot x_0^2 \end{cases} \quad 即 \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=\frac{3}{2} \\ x_0=\frac{4}{3} \end{cases}$$

即 $\int_0^2 f(x)dx=\frac{1}{2}f(0)+\frac{3}{2}f(\frac{4}{3})$

代 $f(x)=x^3$ 得 $4\neq\frac{32}{9}$，则其代数精度为 $m=2$

(2) 由于 $f(x)\in C^3[0,2]$，对其构造二次 $H_2(x)$

满足 $H_2(0)=f(0)$, $H_2(2)=f(2)$, $H_2'(0)=f'(0)$

互评模块 (该阶段只有在互评阶段开放后才可使用)

解 (1) 令求积公式分别对 $f(x)=1,x,x^2$ 精确成立，则

当 $f(x)=1$时，左$=\int_0^2 1\mathrm{d}x=2$，右$=A+B$；

当 $f(x)=x$时，左$=\int_0^2 x\mathrm{d}x=2$，右$=Bx_0$；

当 $f(x)=x^2$时，左$=\int_0^2 x^2\mathrm{d}x=\frac{8}{3}$，右$=Bx_0^2$.

即
$$\begin{cases} A+B=2, \\ Bx_0=2, \\ Bx_0^2=\frac{8}{3}, \end{cases}$$ ----------------------------------3 分

求解得

$$A=\frac{1}{2},\quad B=\frac{3}{2},\quad x_0=\frac{4}{3}.$$

求积公式为 $$\int_0^2 f(x)dx\approx\frac{1}{2}f(0)+\frac{3}{2}f(\frac{4}{3}).$$

当 $f(x)=x^3$ 时，左$=\int_0^2 x^3\mathrm{d}x=4\neq$右$=\frac{32}{9}$，

所以该求积公式的代数精度为 2. ------------------------------5 分

(2) 作 $f(x)$的 2 次插值多项式$H_2(x)$，使其满足

$$H_2(0)=f(0),\quad H_2(\frac{4}{3})=f(\frac{4}{3}),\quad H_2'(\frac{4}{3})=f'(\frac{4}{3}).$$

由于求积公式具有 2 次代数精度，所以有

$$\int_0^2 H_2(x)dx=\frac{1}{2}H_2(0)+\frac{3}{2}H_2(\frac{4}{3})=\frac{1}{2}f(0)+\frac{3}{2}f(\frac{4}{3})$$ -------------8 分

所以求积余项为

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x-(\frac{1}{2}f(0)+\frac{3}{2}f(\frac{4}{3}))=\int_0^2[f(x)-H_2(x)]\mathrm{d}x$$ --------------10 分
$$=\frac{2}{27}f'''(\eta),\quad \eta\in(0,2).$$

你的得分：10

该题得分：10

整体评价：

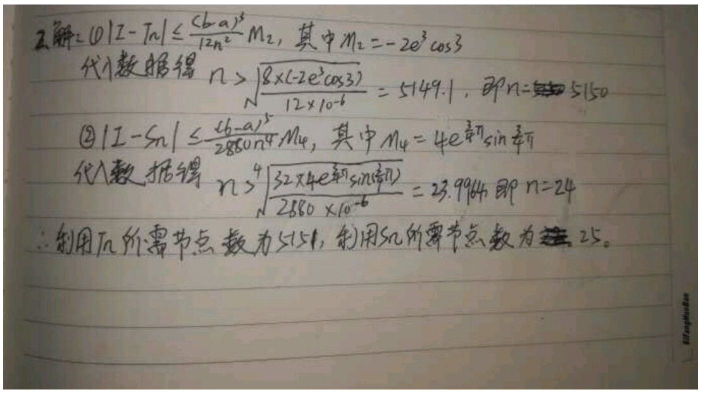
student1：没毛病
student2：Good
student3：。

2

（10分）

利用复化梯形公式及复化辛普森公式分别计算定积分 $\int_1^3 e^x\sin x dx$，若使误差小于 10^{-6}，所需节点数分别为多少？($e\approx2.7183$)

回答：



2.解：① $|I-T_n|\le\frac{(b-a)^3}{12n^2}M_2$，其中 $M_2=-2e^3\cos3$

代入数据得 $n>\sqrt{\frac{8\times(-2e^3\cos3)}{12\times10^{-6}}}=5149.1$，即 $n=$ ~~[illegible]~~ 5150

② $|I-S_n|\le\frac{(b-a)^5}{2880n^4}M_4$，其中 $M_4=4e^{[illegible]}\sin[illegible]$

代入数据得 $n>\sqrt[4]{\frac{32\times4e^{[illegible]}\sin([illegible])}{2880\times10^{-6}}}=23.9964$ 即 $n=24$

∴利用T_n所需节点数为5151，利用S_n所需节点数为 ~~[illegible]~~ 25。

互评模块 (该阶段只有在互评阶段开放后才可使用)

解 假设 $f(x)=e^x\sin x$，$a=1$，$b=3$，$\varepsilon=10^{-6}$. 将区间[1,3] n 等分，$h=\frac{2}{n}$，则

$$I-T_n=-\frac{b-a}{12}h^2f^{(2)}(\eta_1)=-\frac{2}{3n^2}f^{(2)}(\eta_1),$$

$$I-S_n=-\frac{b-a}{2880}h^4f^{(4)}(\eta_2)=-\frac{1}{90n^4}f^{(4)}(\eta_2).$$ -----------------5 分

$$f'(x)=e^x(\sin x+\cos x),\quad f^{(2)}(x)=2e^x\cos x,$$

$$f^{(3)}(x)=2e^x(\cos x-\sin x),\quad f^{(4)}(x)=-4e^x\sin x.$$

因此，$M_2=2e^3$，$M_4=4e^3$. -------------------8 分

由 $|I-T_n|\le\frac{2}{3n^2}2e^3<\varepsilon$ 可得 $n>5175.01$，因此取 n=5176，即 5177 个节点。

由 $|I-S_n|\le\frac{1}{90n^4}4e^3<\varepsilon$ 可得 $n>30.74$，因此取 n=31，即 32 个节点。-------10 分

你的得分：10

该题得分：10

整体评价:

student1：错误
student2：Good
student3：.

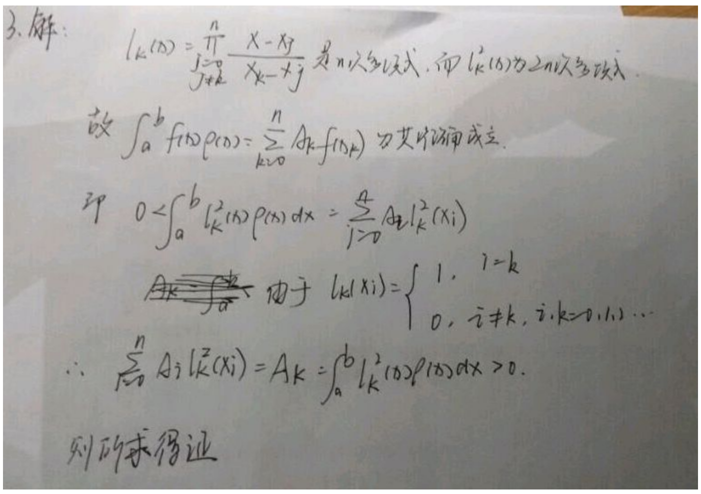
3 （10分）

对于 Gauss 型求积公式 $\int_a^b\rho(x)f(x)dx\approx\sum_{k=0}^{n}A_kf(x_k)$，证明：

(1) 求积系数 $A_k>0$，$k=0,1,2,\dots,n$.

(2) $\sum_{k=0}^{n}A_k=\int_a^b\rho(x)dx$.

回答:


3. 解:
$l_k(x)=\prod_{j=0, j\ne k}^{n}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}$ 是n次多项式, 而 $l_k^2(x)$为2n次多项式.
故 $\int_a^b f(x)\rho(x)=\sum_{k=0}^{n}A_kf(x_k)$ 对其准确成立.
即 $0<\int_a^b l_k^2(x)\rho(x)dx=\sum_{j=0}^{4}A_jl_k^2(x_j)$
~~$A_k=\int_a^b$~~ 由于 $l_k(x_j)=\begin{cases}1, & j=k\\ 0, & j\ne k,\ j,k=0,1,\dots\end{cases}$
∴ $\sum_{j=0}^{n}A_jl_k^2(x_j)=A_k=\int_a^b l_k^2(x)\rho(x)dx>0$.
则所求得证

互评模块 (该阶段只有在互评阶段开放后才可使用)

证明 (1) 因为求积公式为 Gauss 型求积公式，故代数精度为 2n+1 次。-------3 分
因此，对于 2n 次多项式 $l_k^2(x)\,(k=0,1,2,\dots,n)$，求积公式是精确成立的（$l_k(x)$为 Lagrange 插值节点基函数），

即 $$0<\int_a^b\rho(x)l_k^2(x)dx=\sum_{i=0}^{n}A_il_k^2(x_i)=A_k.$$ ---------------8 分

(2) 在求积公式 $\int_a^b\rho(x)f(x)dx\approx\sum_{k=0}^{n}A_kf(x_k)$ 中令 $f(x)=1$，此时求积公式精确成立，

即 $$\int_a^b\rho(x)dx=\sum_{k=0}^{n}A_k.$$ ------------------10 分

你的得分：10

该题得分：10

整体评价：

student1：没毛病
student2：Good
student3：。