东北大学

数值分析 国家精品 申请认证证书

邵新慧、史大涛、冯男、盛莹、陈艳利、李铮

第五章作业

提交作业 | 作业批改 | 成绩公布
完成并提交作业 | 互评作业 自评作业 | 查看成绩

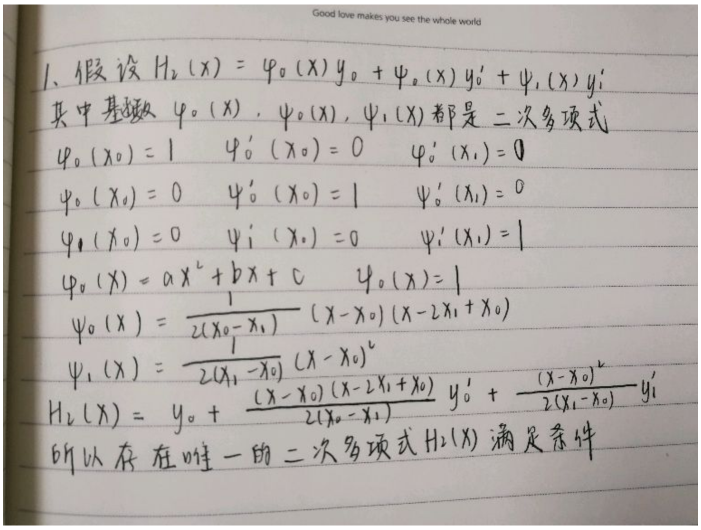
你的综合得分为：**30分**，你完成了全部互评

1 （10分）

一.（10分）请证明：对于节点 $x_0, x_1, (x_0 \neq x_1)$，必存在唯一的二次多项式 $H_2(x)$ 满

足插值条件 $H_2(x_0) = y_0$， $H_2'(x_0) = y_0'$， $H_2'(x_1) = y_1'$.

回答：



Good love makes you see the whole world

1、假设 $H_2(x) = \varphi_0(x)y_0 + \psi_0(x)y_0' + \psi_1(x)y_1'$

其中基函数 $\varphi_0(x)$，$\psi_0(x)$，$\psi_1(x)$ 都是二次多项式

$\varphi_0(x_0)=1 \quad \varphi_0'(x_0)=0 \quad \varphi_0'(x_1)=0$

$\psi_0(x_0)=0 \quad \psi_0'(x_0)=1 \quad \psi_0'(x_1)=0$

$\psi_1(x_0)=0 \quad \psi_1'(x_0)=0 \quad \psi_1'(x_1)=1$

$\varphi_0(x)=ax^2+bx+c \quad \varphi_0(x)=1$

$\psi_0(x)=\frac{1}{2(x_0-x_1)}(x-x_0)(x-2x_1+x_0)$

$\psi_1(x)=\frac{1}{2(x_1-x_0)}(x-x_0)^2$

$H_2(x)=y_0+\frac{(x-x_0)(x-2x_1+x_0)}{2(x_0-x_1)}y_0'+\frac{(x-x_0)^2}{2(x_1-x_0)}y_1'$

所以存在唯一的二次多项式 $H_2(x)$ 满足条件

互评模块 (该阶段只有在互评阶段开放后才可使用)

证明：设此二次多项式为 $H_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$， ……………………1 分

则根据题设条件，以下方程成立

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 &= y_0 \\ a_1 + 2a_2x_0 &= y_0' \\ a_1 + 2a_2x_1 &= y_1' \end{aligned}$$ ……………………5 分

其系数矩阵的行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 0 & 1 & 2x_0 \\ 0 & 1 & 2x_1 \end{vmatrix} = 2(x_1 - x_0) \neq 0$$ ……………………9 分

因此解 a_0, a_1, a_2 唯一存在，即唯一确定二次多项式 $H_2(x)$，证毕. ……………10 分

你的得分：10

该题得分：10

整体评价：

student1：1
student2：和
student3：666
student4：ok

2 （10分）

二.（10 分）**本题的计算过程和结果均用分数或整数表示.**

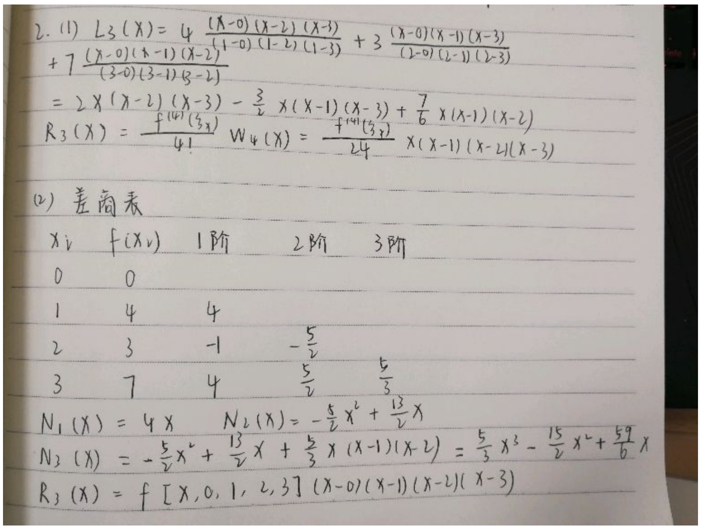
已知 $f(x)$ 是 4 阶连续可微函数．对于数据表

x	0	1	2	3
$y=f(x)$	0	4	3	7

(1) (5 分) 采用基函数法(不得采用其他方法)，求满足数据表中插值条件的三次拉格朗日(Lagrange)插值多项式 $L_3(x)$；并写出 Lagrange 插值余项 $R_3(x)$，直接写出 $R_3(x)$，不必具体推导;

(2) (5 分) 采用承袭法，即利用 Newton 差商构造插值多项式方法(不得采用其他方法)，求满足数据表中插值条件的三次牛顿(Newton)插值多项式 $N_3(x)$；并写出 Newton 插值余项 $R_3(x)$．直接写出 $R_3(x)$，不必具体推导．

回答:



2. (1) $L_3(x)=4\frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)}+3\frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)}+7\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)}$

$=2x(x-2)(x-3)-\frac{3}{2}x(x-1)(x-3)+\frac{7}{6}x(x-1)(x-2)$

$R_3(x)=\frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!}W_4(x)=\frac{f^{(4)}(\xi_x)}{24}x(x-1)(x-2)(x-3)$

(2) 差商表

x_i	$f(x_i)$	1阶	2阶	3阶
0	0			
1	4	4		
2	3	-1	$-\frac{5}{2}$	
3	7	4	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$

$N_1(x)=4x \quad N_2(x)=-\frac{5}{2}x^2+\frac{13}{2}x$

$N_3(x)=-\frac{5}{2}x^2+\frac{13}{2}x+\frac{5}{3}x(x-1)(x-2)=\frac{5}{3}x^3-\frac{15}{2}x^2+\frac{59}{6}x$

$R_3(x)=f[x,0,1,2,3](x-0)(x-1)(x-2)(x-3)$

互评模块 (该阶段只有在互评阶段开放后才可使用)

解:

(1) 设三次 Lagrange 插值多项式为

$$L_3(x)=l_0(x)x_0+l_1(x)x_1+l_2(x)x_2+l_3(x)x_3=4l_1(x)+3l_2(x)+7l_3(x)$$

其中基函数 $l_1(x),l_2(x),l_3(x)$ 分别满足条件:

$$l_1(0)=0,\quad l_1(1)=1,\quad l_1(2)=0,\quad l_1(3)=0.$$

$$l_2(0)=0,\quad l_2(1)=0,\quad l_2(2)=1,\quad l_2(3)=0.$$

$$l_3(0)=0,\quad l_3(1)=0,\quad l_3(2)=0,\quad l_3(3)=1.$$

由以上条件得基函数分别为:

$$l_1(x)=\frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)}=\frac{1}{2}x(x-2)(x-3),$$ ....1 分

$$l_2(x)=\frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)}=\frac{1}{-2}x(x-1)(x-3),$$ ....2 分

$$l_3(x)=\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)}=\frac{1}{6}x(x-1)(x-3),$$ ....3 分

于是三次 Lagrange 插值多项式为

$$L_3(x)=2x(x-2)(x-3)-\frac{3}{2}x(x-1)(x-3)+\frac{7}{6}x(x-1)(x-2).$$ ....4 分

$$=\frac{5}{3}x^3-\frac{15}{2}x^2+\frac{59}{6}x$$

（最后一步整理的结果可以不写．如果前面计算过程全部正确但此步整理结果写错，酌情可扣 0.5 分或 1 分.）

Lagrange 插值余项为 $R_3(x)=\frac{f^4(\xi_x)}{4!}x(x-1)(x-2)(x-3)$，其中 ξ_x 位于 0, 1, 2, 3, x 之间.

......................5 分

(2) 根据差商表

x	$f(x)$	1 阶差商	2 阶差商	3 阶差商
0	0			
1	4	4		
2	3	-1	-5/2	
3	7	4	5/2	5/3

得差商 $f[0,1]=4$， $f[0,1,2]=\frac{-5}{2}$， $f[0,1,2,3]=\frac{5}{3}$， ....7 分

(以上三个差商值若根据其他计算公式得到并计算正确，也得分.)

因此三次 Newton 插值多项式为

$$N_3(x)=f(0)+xf[0,1]+x(x-1)f[0,1,2]+x(x-1)(x-2)f[0,1,2,3]$$
$$=4x-\frac{5}{2}x(x-1)+\frac{5}{3}x(x-1)(x-2)$$

......................9 分

$$=\frac{5}{3}x^3-\frac{15}{2}x^2+\frac{59}{6}x$$

（最后一步整理的结果可以不写．如果前面计算过程全部正确但此步整理结果写错，酌情可扣 0.5 分或 1 分.）

Newton 插值余项为

$$R_3(x)=f[0,1,2,3,x]x(x-1)(x-2)(x-3)$$ ....10 分

你的得分：10

该题得分：10

整体评价：

student1：1
student2：和
student3：666
student4：ok

3 （10分）

三．（10 分）本题的计算过程均用分数、根号或整数表示．计算结果中，拟合多项式的系数用分数或整数表示，均方误差的最后一步计算结果可以用小数表示．

根据第二题的数据，即

x	0	1	2	3
y	0	4	3	7

权函数为 $\rho(x)=1$.

(1) (5 分) 用最小二乘法求出线性拟合多项式 $p_1(x)$ 及其均方误差;

(2) (5 分) 用最小二乘法求出二次拟合多项式 $p_2(x)$.

回答：

Good love makes you see the whole world

3 (1) 设 $\varphi_0(x)=1$ $\varphi_1(x)=x$ $\rho(x)=1$

$\varphi_0=(1,1,1,1)^T$ $\varphi_1=(0,1,2,3)^T$ $f=(0,4,3,7)^T$

正则方程组为 $\begin{cases}4a_0+6a_1=14\\6a_0+14a_1=31\end{cases}$ $\begin{cases}a_0=\frac{1}{2}\\a_1=2\end{cases}$

$y=2x+\frac{1}{2}$ 均方误差 $\|\delta^*\|_2=\sqrt{5}$

(2) $\varphi_0(x)=(1,1,1,1)^T$ $\varphi_1(x)=(0,1,2,3)^T$

$\varphi_2=(0,1,4,9)^T$ $f=(0,4,3,7)^T$

$\begin{cases}4a_0+6a_1+14a_2=14\\6a_0+14a_1+36a_2=31\\14a_0+36a_1+98a_2=79\end{cases}$ $\begin{cases}a_0=\frac{1}{2}\\a_1=2\\a_2=0\end{cases}$

$P_2(x)=2x+\frac{1}{2}$

互评模块 (该阶段只有在互评阶段开放后才可使用)

解:

(1) 设线性拟合多项式为 $p_1(x)=a_0+a_1x$，

即取基函数 $\varphi_0(x)=1$，$\varphi_1(x)=x$，取相应的向量为

$$\boldsymbol{\varphi}_0=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\varphi}_1=(0,1,2,3)^{\mathrm{T}},\ \mathbf{f}=(0,4,3,7)^{\mathrm{T}},$$ ....1 分

法方程组为:

$$\begin{pmatrix}(\boldsymbol{\varphi}_0,\boldsymbol{\varphi}_0) & (\boldsymbol{\varphi}_0,\boldsymbol{\varphi}_1)\\(\boldsymbol{\varphi}_1,\boldsymbol{\varphi}_0) & (\boldsymbol{\varphi}_1,\boldsymbol{\varphi}_1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\mathbf{f},\boldsymbol{\varphi}_0)\\(\mathbf{f},\boldsymbol{\varphi}_1)\end{pmatrix}$$ ....2 分

即

$$\begin{pmatrix}4 & 6\\6 & 14\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14\\31\end{pmatrix}$$

得 $$\begin{cases}a_0=\dfrac{1}{2},\\a_1=2\end{cases}$$ ....3 分

因此拟合多项式为 $p_1(x)=\dfrac{1}{2}+2x$. ....4 分

均方误差为

$$\|\delta^*\|_2=\sqrt{(p_1(x_0)-y_0)^2+(p_1(x_1)-y_1)^2+(p_1(x_2)-y_2)^2+(p_1(x_3)-y_3)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}-4\right)^2+\left(\frac{9}{2}-3\right)^2+\left(\frac{13}{2}-7\right)^2}$$

$$=\sqrt{5}\approx 2.236$$ ....5 分

(2) 设二次拟合多项式为 $p_2(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$，

即取基函数 $\varphi_0(x)=1$，$\varphi_1(x)=x$，$\varphi_2(x)=x^2$，取相应的向量为

$$\boldsymbol{\varphi}_0=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\varphi}_1=(0,1,2,3)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\varphi}_2=(0,1,4,9)^{\mathrm{T}},\ \mathbf{f}=(0,4,3,7)^{\mathrm{T}},$$ ....6 分

法方程组为:

$$\begin{pmatrix}(\boldsymbol{\varphi}_0,\boldsymbol{\varphi}_0) & (\boldsymbol{\varphi}_0,\boldsymbol{\varphi}_1) & (\boldsymbol{\varphi}_0,\boldsymbol{\varphi}_2)\\(\boldsymbol{\varphi}_1,\boldsymbol{\varphi}_0) & (\boldsymbol{\varphi}_1,\boldsymbol{\varphi}_1) & (\boldsymbol{\varphi}_1,\boldsymbol{\varphi}_2)\\(\boldsymbol{\varphi}_2,\boldsymbol{\varphi}_0) & (\boldsymbol{\varphi}_2,\boldsymbol{\varphi}_1) & (\boldsymbol{\varphi}_2,\boldsymbol{\varphi}_2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\mathbf{f},\boldsymbol{\varphi}_0)\\(\mathbf{f},\boldsymbol{\varphi}_1)\\(\mathbf{f},\boldsymbol{\varphi}_2)\end{pmatrix}$$ ....7 分

即

$$\begin{pmatrix}4 & 6 & 14\\6 & 14 & 36\\14 & 36 & 98\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14\\31\\79\end{pmatrix}$$ ....9 分

得

$$\begin{cases}a_0=\dfrac{1}{2}\\a_1=2,\\a_2=0\end{cases}$$

因此拟合多项式为 $p_2(x)=\dfrac{1}{2}+2x$. ....10 分

你的得分：10

该题得分：10

整体评价:

student1：1
student2：和
student3：666
student4：ok