

中国大学MOOC

课程

学校

学校云

下载APP

搜索感兴趣的课程

数值分析

国家精品

申请认证证书

邵新慧、史大涛、冯男、盛莹、陈艳利、李铮

评价课程

公告

评分标准

课件

测验与作业

考试

讨论区

课程分享

微信提醒课程进度

扫码下载APP

帮助中心

第四章作业题

查看帮助

返回

提交作业

完成并提交作业

作业批改

互评作业

自评作业

成绩公布

查看成绩

你的综合得分为：**30分**，你完成了全部互评

1 (10分)

1. 设 $F(x) = x + c(x^2 - 3)$ ，构造迭代格式 $x_{k+1} = F(x_k)$ ， $k = 0, 1, 2, \dots$ ，
(1) 求使迭代格式具有局部收敛性的参数 c 的取值范围。
(2) 求使该迭代格式具有尽可能高的收敛阶的参数 c 的值。

回答：

Mo Tu We Th Fr Sa Su

Memo No. _____

Date 2019/5/1

1. (1) 因为 $x_{k+1} = x_k + c(x_k^2 - 3)$ $f(x) = c(x^2 - 3)$
所以方程的根为 $x^* = \pm\sqrt{3}$
 $F'(x^*) = 1 + 2cx^*$ 若使迭代格式具有局部收敛性
 $|F'(x^*)| < 1$ $|1 + 2cx^*| < 1$ $\begin{cases} |1 + 2\sqrt{3}c| < 1 \\ |1 - 2\sqrt{3}c| < 1 \end{cases}$
所以 c 的取值范围为 $(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, 0) \cup (0, \frac{1}{2\sqrt{3}})$

(2) $F'(x^*) = 0$ 则 $c = \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}$
 $F''(x^*) = 2c$ $c \neq 0$ 综上 $c = \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}$

互评模块 (该阶段只有在互评阶段开放后才可使用)

解： 方程 $x = F(x)$ 的根为 $\alpha_1 = -\sqrt{3}, \alpha_2 = \sqrt{3}$ ， (3 分)

函数 $F(x)$ 在根附近具有连续一阶导数，
又 $F'(x) = 1 + 2cx$ ，解 $|F'(-\sqrt{3})| = |1 - 2\sqrt{3}c| < 1$ 得 $0 < c < \frac{1}{\sqrt{3}}$ ；
解 $|F'(\sqrt{3})| = |1 + 2\sqrt{3}c| < 1$ 得 $-\frac{1}{\sqrt{3}} < c < 0$ 。
从而使迭代 $x_{k+1} = F(x_k)$ 具有局部收敛性，应 $|c| < \frac{1}{\sqrt{3}}$ ，且 $c \neq 0$ 。 (8 分)

令 $F'(-\sqrt{3}) = 1 - 2\sqrt{3}c = 0$ 得 $c = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ ；
令 $F'(\sqrt{3}) = 1 + 2\sqrt{3}c = 0$ 得 $c = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$ 。
这时 $F''(x) = 2c \neq 0$ 为平方收敛。
故当 c 取 $\pm \frac{1}{2\sqrt{3}}$ 时，这个迭代格式是平方收敛的。 (10 分)

你的得分：10

该题得分：10

整体评价：

https://www.icourse163.org/learn/NEU-1002089009?tid=1206007221#/learn/hw?id=1219519758

1/3

student1: 6
 student2: 1
 student3: 很好
 student4: 对
 student5: 棒棒

2 (10分)

2. 已知方程 $x^3 + 2x - 1 = 0$ 在 $[0, 1]$ 上有唯一实根 x^* , 证明对任意初值 $x_0 \in [0, 1]$, 迭代格式

$$x_{k+1} = \frac{2x_k^3 + 1}{3x_k^2 + 2}, \quad k = 0, 1, \dots$$

均收敛于 x^* , 并分析该迭代格式的收敛阶。

回答:

$$\varphi(x) = \frac{2x^3 + 1}{3x^2 + 2}$$

$$\varphi'(x) = \frac{6x^2(3x^2 + 2) - 6x(2x^3 + 1)}{(3x^2 + 2)^2} = \frac{6x^2(3x^2 + 2) - 6x(2x^3 + 1)}{(3x^2 + 2)^2}$$

$$= \frac{6x^2(3x^2 + 2) - 6x(2x^3 + 1)}{(3x^2 + 2)^2} = \frac{6x^2(3x^2 + 2) - 6x(2x^3 + 1)}{(3x^2 + 2)^2}$$
 当 $x \in [0, 1]$ 时, $\varphi(x) \in [0, 1]$
 且 $|\varphi'(x)| \leq \frac{12}{25} < 1$
 满足条件, 迭代格式收敛于 x^*
 因为 $\varphi'(x) = \frac{6x(3x^2 + 2) - 6x(2x^3 + 1)}{(3x^2 + 2)^2} = 0$

$$\varphi''(x) = \frac{6(-4x^3 + 4x^2 + 8x - 2)}{(3x^2 + 2)^3} \neq 0$$

 所以该迭代格式二阶收敛

互评模块 (该阶段只有在互评阶段开放后才可使用)

解: 记 $\varphi(x) = \frac{2x^3 + 1}{3x^2 + 2}$, 则原方程改写为 $x = \varphi(x)$ 。

对 $\varphi(x)$ 求导得 $\varphi'(x) = \frac{6x(x^3 + 2x - 1)}{(3x^2 + 2)^2}$ 。..... (3分)

当 $x \in [0, 1]$ 时, 容易验证 $|\varphi'(x)| < 1$, 且 $\varphi'(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 则存在 L 满足 $|\varphi'(x)| \leq L < 1$,

又 $0 \leq \varphi(x) \leq \frac{2x^3 + 1}{3x^2 + 2} < 1$,

所以对任意 $x_0 \in [0, 1]$, 迭代格式收敛于方程 $[0, 1]$ 中的根。..... (8分)

又 $\varphi'(x^*) = 0$, $\varphi''(x^*) \neq 0$, 所以迭代为 2 阶收敛。..... (10分)

你的得分: 10

该题得分: 10

整体评价:

student1: 6
 student2: 1
 student3: 很好
 student4: 对
 student5: 棒棒

3 (10分)

3. 设函数 $f(x) = (x^3 - a)^2$, 是建立求解方程 $f(x) = 0$ 根的牛顿迭代格式, 并说明此格式的收敛阶。

回答:

$$\begin{aligned}
 3. \quad x_{k+1} &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\
 &= x_k - \frac{(x_k^3 - a)^2}{6x_k^2(x_k^3 - a)} \\
 &= x_k - \frac{(x_k^3 - a)}{6x_k^2} \\
 &= \frac{5}{6}x_k + \frac{a}{6x_k^2}
 \end{aligned}$$

所以 $x_{k+1} = \frac{5}{6}x_k + \frac{a}{6x_k^2}$ 为迭代格式

$$f'(x) = 6x^2(x^3 - a) \quad \alpha = \sqrt[3]{a}$$

$$\varphi'(x) = \frac{5}{6} - \frac{a}{3x^3} \quad \varphi'(\alpha) = \frac{1}{2} \quad \text{且 } |\varphi'(\alpha)| < 1$$

所以此格式的收敛阶为1.

互评模块 (该阶段只有在互评阶段开放后才可使用)

解: 将 $f(x) = (x^3 - a)^2$, $f'(x) = 6(x^3 - a)x^2$ 代入牛顿迭代格式

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$\text{有 } x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k^3 - a)^2}{6(x_k^3 - a)x_k^2} = \frac{5}{6}x_k + \frac{a}{6x_k^2}, \dots\dots\dots (5 \text{ 分})$$

$$\text{迭代函数 } \varphi(x) = \frac{5}{6}x + \frac{a}{6x^2}, \quad \varphi'(x) = \frac{5}{6} - \frac{a}{3x^3},$$

$$\text{又 } f(x) = 0 \text{ 的根 } x^* = \sqrt[3]{a}, \quad \varphi'(\sqrt[3]{a}) = 0.5 < 1 \neq 0,$$

所以牛顿迭代法为线性收敛。 $\dots\dots\dots (10 \text{ 分})$

你的得分: 10

该题得分: 10

整体评价:

student1: 6

student2: 1

student3: 很好

student4: 对

student5: 棒棒