东北大学
数值分析 国家精品 申请认证证书
邵新慧、史大涛、冯男、盛莹、陈艳利、李铮

第一二章作业

你的综合得分为：**30分**，你完成了全部互评

1 （10分）

1.试确定 $\dfrac{22}{7}$ 作为 π 的近似值具有几位有效数字.

回答：

1. 试确定 $\frac{22}{7}$ 作为 π 的近似值具有几位有效数字.

$\frac{22}{7} \approx 3.1428571 = 0.31428571 \times 10 \quad m=1$

$\pi \approx 3.1415926$

$\left|\pi - \frac{22}{7}\right| \leq \frac{1}{2} \times 10^{m-n} = \frac{1}{2} \times 10^{1-n}$

即 $0.00126 \leq \frac{1}{2} \times 10^{1-n} \quad n=3$

$\frac{22}{7}$ 作为 π 的近似值为3位有效数字.

互评模块 (该阶段只有在互评阶段开放后才可使用)

解 因为

$$\frac{22}{7} = 3.142857\cdots$$

$$\pi = 3.141592\cdots$$

$$\text{所以}\left|\pi - \frac{22}{7}\right| = 0.001264\cdots < 0.005 = \frac{1}{2}\times 10^{-2} = \frac{1}{2}\times 10^{1-3}$$

由定义可知 $\dfrac{22}{7}$ 作为 π 的近似值具有三位有效数字.

你的得分：10

该题得分：10

整体评价：

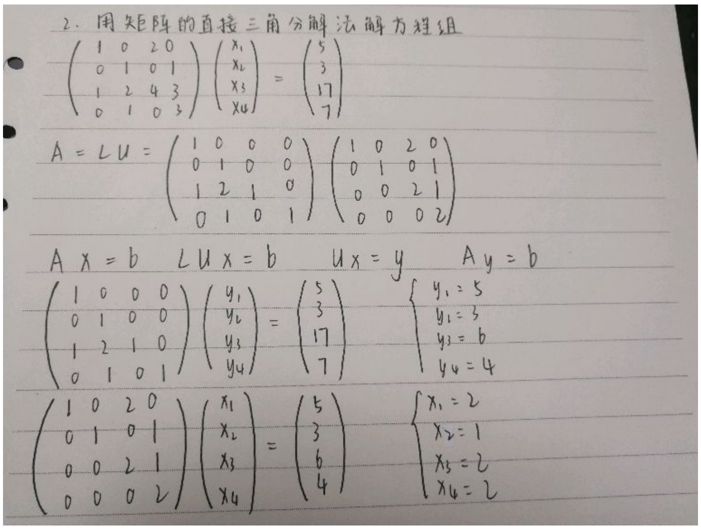
student1：.
student2：well.
student3：。
student4：a
student5：对

2 （10分）

2.用矩阵的直接三角分解法解方程组

$$\begin{bmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&1\\1&2&4&3\\0&1&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\3\\17\\7\end{bmatrix}$$

回答:



2. 用矩阵的直接三角分解法解方程组

$$\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&1\\1&2&4&3\\0&1&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\3\\17\\7\end{pmatrix}$$

$$A=LU=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&2&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&1\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$$

$Ax=b \quad LUx=b \quad Ux=y \quad Ay=b$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&2&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\3\\17\\7\end{pmatrix} \quad \begin{cases}y_1=5\\y_2=3\\y_3=6\\y_4=4\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&1\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\3\\6\\4\end{pmatrix} \quad \begin{cases}x_1=2\\x_2=1\\x_3=2\\x_4=2\end{cases}$$

互评模块 (该阶段只有在互评阶段开放后才可使用)

解 设

$$\begin{bmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&1\\1&2&4&3\\0&1&0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&&&\\l_{21}&1&&\\l_{31}&l_{32}&1&\\l_{41}&l_{42}&l_{43}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&2&0\\&u_{22}&u_{23}&u_{24}\\&&u_{33}&u_{34}\\&&&u_{44}\end{bmatrix}$$

由矩阵乘法可逐行、逐列分别求出u_{ij}和l_{ij}：

$$\begin{bmatrix}1&&&\\l_{21}&1&&\\l_{31}&l_{32}&1&\\l_{41}&l_{42}&l_{43}&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&&&\\0&1&&\\1&2&1&\\0&1&0&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&2&0\\&u_{22}&u_{23}&u_{24}\\&&u_{33}&u_{34}\\&&&u_{44}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&2&0\\&1&0&1\\&&2&1\\&&&2\end{bmatrix}$$

解下三角方程组

$$\begin{bmatrix}1&&&\\0&1&&\\1&2&1&\\0&1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\3\\17\\7\end{bmatrix}$$

有 $y_1=5, y_2=3, y_3=6, y_4=4$

再解上三角方程组

$$\begin{bmatrix}1&0&2&0\\&1&0&1\\&&2&1\\&&&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\3\\6\\4\end{bmatrix}$$

得 $x_4=2, x_3=2, x_2=1, x_1=1$

你的得分：10

该题得分：10

整体评价：

student1：.
student2：well.
student3：。
student4：a
student5：对

---

3 （10分）

3.设 A 是 n 阶实矩阵，试证

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_F \le \|A\|_2 \le \|A\|_F$$

回答：

3. 设 A 是 n 阶实矩阵，试证 $\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_F \le \|A\|_2 \le \|A\|_F$

证明：先对原式平方 $\frac{1}{n}(\|A\|_F)^2 \le (\|A\|_2)^2 \le (\|A\|_F)^2$

因为 $\mathrm{trace}(A^TA) = (\|A\|_F)^2 = \lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_{max}+\dots+\lambda_n$

($\lambda_i \ge 0$; λ_i 为 A^TA 矩阵的秩)

$\|A\|_2 = \lambda_{max}$

所以 $\frac{1}{n}(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_{max}+\lambda_n) \le \lambda_{max} \le (\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_{max}+\dots$

$\frac{1}{n}(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_{max}+\dots+\lambda_n) \le \lambda_{max}$

$\lambda_{max} \le \lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_{max}+\dots+\lambda_n$

所以证明成立

互评模块 (该阶段只有在互评阶段开放后才可使用)

证 (1) 由范数定义有

$$\|A\|_2^2 = \lambda_{\max}(A^TA) \le \lambda_1(A^TA)+\lambda_2(A^TA)+\cdots+\lambda_n(A^TA) = A^TA\text{的对角元之和} =$$

$$\sum_{i=1}^n a_{1i}^2 + \sum_{i=1}^n a_{2i}^2 + \cdots + \sum_{i=1}^n a_{ni}^2 = \sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n a_{ji}^2 = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 = \|A\|_F^2$$

(2) 显然

$$\|A\|_2^2 = \lambda_{\max}(A^TA) \ge \frac{1}{n}\left[\lambda_1(A^TA)+\lambda_2(A^TA)+\cdots+\lambda_n(A^TA)\right] = \frac{1}{n}\|A\|_F^2$$

从而 $$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_F \le \|A\|_2 \le \|A\|_F$$

你的得分：10

该题得分：10

整体评价：

student1：.
student2：well.
student3：。
student4：a
student5：对