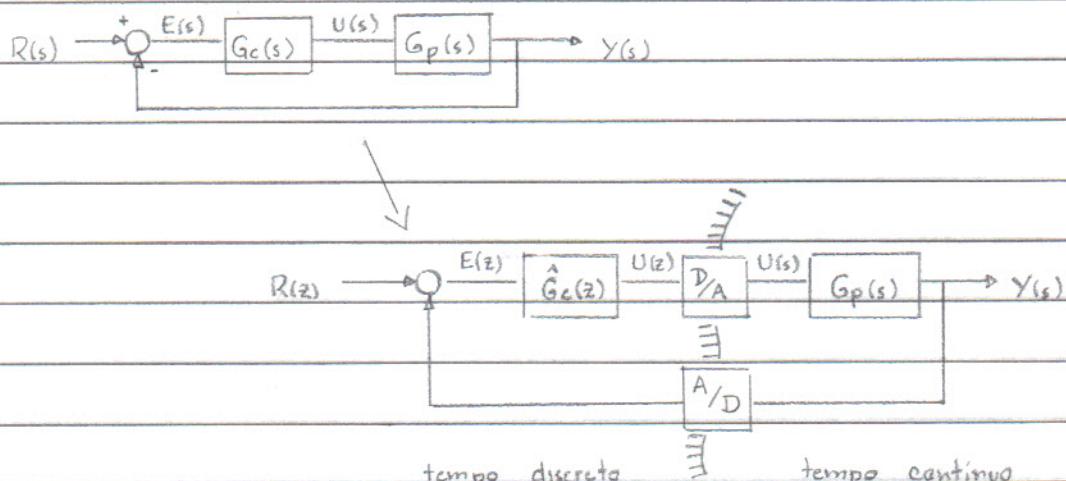


A ideia geral desta abordagem é projetar controladores analógicos (como em Controle I) e implementá-los em computador.

Para isso é necessário obter equivalentes discretas de controladores analógicos.



O comportamento do equivalente discreto deve corresponder ao do sistema contínuo em aspectos relevantes tais como resposta em frequência, resposta ao impulso ou ao degrau, manter a ordem do sistema, o número de polos ou zeros, e principalmente estabilidade ( $G_c(z)$  estável  $\Rightarrow \hat{G}_c(z)$  estável)

Vantagens dessa abordagem:

- Técnicas contínuas consolidadas (histórico de mais de 50 anos)
  - Controladores contínuos consagrados em diversas aplicações (e.g. PID)
  - Controle contínuo é tido como mais intuitivo
  - O projeto não depende da frequência de amostragem (porem a aproximação discreta dependerá)

## Desvantagem:

- Potencialmente um projeto discreto pode ser mais simples, melhor e flexível.

### 3.1 Aproximações por integração numérica

Ideia geral: Converter  $G_c(s)$  em uma equação diferencial e obter uma aproximação numérica para a solução.

Vamos considerar um caso simples:

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{1}{s} \quad \text{equivalente a} \quad \hat{U}(t) = e(t)$$

que tem como solução:  $u(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau$  p/ quaisquer  $t_0, t$

$$\text{escolhendo } t_0 \text{ e } t \text{ adequadamente: } u((k+1)T) = u(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e(\tau) d\tau$$

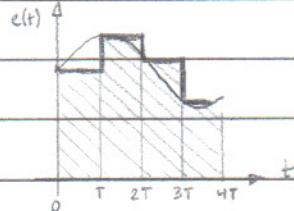
e fazendo aproximações a partir deste ponto.

#### 3.1.1 Retangular para frente (Euler's Forward Method)

É a mais simples aproximação.

$$\hat{U}(k+1T) = \hat{U}(kT) + T e(kT) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z \hat{U}(z) = \hat{U}(z) + T E(z)$$

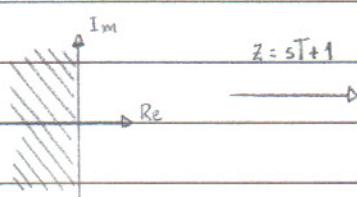


$$\text{portanto: } \hat{G}_c(z) = \frac{\hat{U}(z)}{E(z)} = \frac{T}{z-1}$$

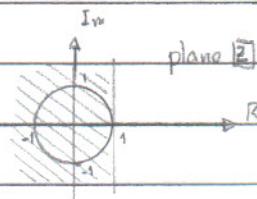
$$S \leftrightarrow \frac{z-1}{T}$$

$$\hat{G}_c(z) = G_c(s) \Big|_{s=\frac{z-1}{T}}$$

## Observações

i) plano  $\bar{S}$ 

$$z = sT + 1$$

Sistemas contínuos estáveis podem levar a equivalentes instáveisMelhor não usar este método

ii) Outra maneira de entender a aproximação

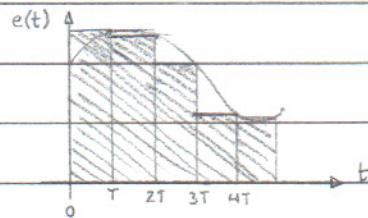
$$z \triangleq e^{sT} = 1 + sT + \frac{s^2 T^2}{2!} + \frac{s^3 T^3}{3!} + \dots \triangleq 1 + sT \Rightarrow s \approx \frac{z-1}{T}$$

AULA 9  
2009

## 3.1.2 Retangular para trás (Euler's backward method)

$$\hat{U}((k+1)T) = \hat{U}(kT) + T \cdot e((k+1)T) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z \hat{U}(z) = \hat{U}(z) + zT E(z)$$



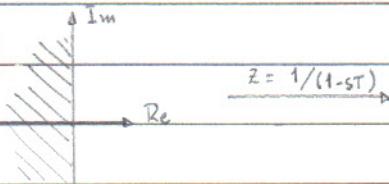
$$\text{portanto: } \hat{G}_c(z) = \frac{\hat{U}(z)}{E(z)} = \frac{Tz}{z-1}$$

$$s \leftrightarrow \frac{z-1}{Tz}$$

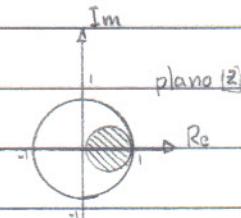
$$\hat{G}_c(z) = G_c(s)$$

$$s = \frac{z-1}{T}$$

## Observações

i) plano  $\bar{S}$ 

$$z = 1/(1-sT)$$



Estabilidade preservada, mas o mapeamento é restrito.

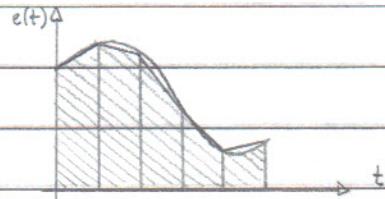
ii) outro modo de entender

$$z \stackrel{e^{sT}}{=} e^{sT} = \frac{1}{e^{-sT}} \approx \frac{1}{1-sT} \Rightarrow s \approx \frac{z-1}{zT}$$

### 3.1.3 Trapezoidal (aproximação bilinear ou método de Tustin)

$$\hat{G}((k+1)T) = \hat{U}(kT) + T \left\{ e(kT) + e((k+1)T) \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z \hat{U}(z) = \hat{U}(z) + T(z+1) E(z)$$



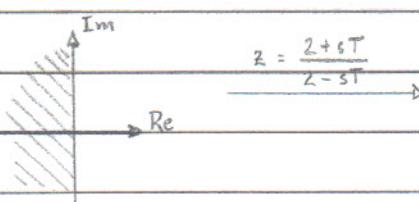
$$\text{portanto: } \hat{G}_c(z) = \frac{\hat{U}(z)}{E(z)} = \frac{I(z+1)}{2(z-1)}$$

$$s \leftrightarrow \frac{2(z-1)}{T(z+1)}$$

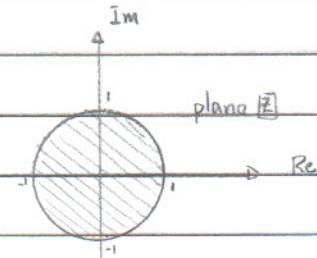
$$\hat{G}_c(z) = G_c(s) \Big|_{s=\frac{2(z-1)}{T(z+1)}}$$

Observações:

i) plano  $\mathbb{S}$



$$z = \frac{2+sT}{2-sT}$$



Estabilidade preservada:  $G_c(s)$  estável  $\Leftrightarrow \hat{G}_c(z)$  estável

ii) outro modo de entender

$$z \stackrel{e^{sT}}{=} e^{\frac{sT}{2}} \approx \frac{1 + \frac{sT}{2}}{1 - \frac{sT}{2}} \Rightarrow s \approx \frac{2(z-1)}{T(z+1)}$$

iii) O método mapeia todo o eixo imaginário de  $\mathbb{S}$ ,  $s=j\omega$ , na primeira volta

do círculo unitário em  $\mathbb{Z}$ , portanto há uma distorção em relação ao mapeamento  $e^{j\omega T}$  tanto maior quanto maior for  $\omega$

Há uma variação do método que compensa essa distorção, que não veremos.

### 3.2 Aproximações por derivação numérica

Vamos considerar  $G_c(s) = U(s) = s$  (derivador)  
 $E(s)$

equivalente a  $U(t) = \dot{E}(t)$

$$U(t) = \dot{E}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{e(t+\Delta t) - e(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{e(t) - e(t-\Delta t)}{\Delta t}$$

$$\hat{U}(kT) \approx \frac{e((k+1)T) - e(kT)}{T} \approx \frac{e(kT) - e((k-1)T)}{T}$$

$$\text{Portanto } \hat{U}(z) = \frac{zE(z) - E(z)}{T} \Rightarrow \hat{U}(z) = \frac{z-1}{T}$$

ou seja  $\hat{G}_c(z) = G_c(s) \Big|_{s=\frac{z-1}{T}}$  (equivale a retangular para frente)  
 -diferença finita para frente -

$$\text{ou } \hat{U}(z) = \frac{E(z) - z^{-1}E(z)}{T} \Rightarrow \hat{U}(z) = \frac{z-1}{Tz}$$

ou seja  $\hat{G}_c(z) = G_c(s) \Big|_{s=\frac{z-1}{Tz}}$  (equivale a retangular para trás)  
 -diferença finita para trás -

Outras aproximações de ordem superior poderiam ser utilizadas para a derivada, resultando em novos mapeamentos (não veremos aqui)

## 3.3 Casamento polo-zero

Ideia geral: Tentar uma aproximação simples explorando a definição do mapeamento ideal de polos  $Z \triangleq e^{sT}$  e entradas impulsivas

$$\text{Observe que: } Z \left[ \frac{1}{s+a} \right] = \frac{Z}{(z - e^{-aT})}$$

No denominador (onde ficam os polos)

substituímos a par  $-e^{-aT}$

- fácil -

No numerador (onde ficam os zeros)

infelizmente é mais complicado

A ideia da método é utilizar o mesmo procedimento fácil nos polos (que é o ideal) também nos zeros (o que é uma aproximação).

Essa aproximação afeta o numerador, principalmente, embaralhando o ganho do sistema.

Regras:

1) Mapear os polos segundo  $Z = e^{sT}$

polos reais:  $(s+a) \rightarrow (z - e^{-aT})$

polos complexos:  $(s + a - j\omega) \rightarrow (z - e^{-aT} \cdot e^{j\omega T})$

(lembre que polos complexos vêm em pares)

OBS: polos no infinito ou fora da faixa primária, mapear em  $Z = -1$

(bloqueamos o mapeamento na primeira volta)

IMPORTANTE: Isso jamais deve ser necessário:

polo no infinito  $\rightarrow$  sistema impróprio

polo acima da freq. Nyquist  $\rightarrow$  T inadequado para aproximação

2) Mapear os zeros segundo  $Z = e^{sT}$

zeros finitos

$$\text{reais: } (s+a) \rightarrow (z - e^{aT})$$

$$\text{complexos: } (s+\alpha - j\omega) \rightarrow (z - e^{-\alpha T} \cdot e^{j\omega T})$$

(também vêm em pares)

zeros infinitos (podem ocorrer!)

mapear em  $z = -1$ ; isto é, inclui-se um termo  $(z+1)$  para cada zero no infinito.

zeros fora da faixa primária (não podem ocorrer!)

mapear em  $z = -1$ ; essa situação indica que  $T$  foi mal escolhido.

OBS: Quem são os zeros no infinito?

Num sistema próprio, há

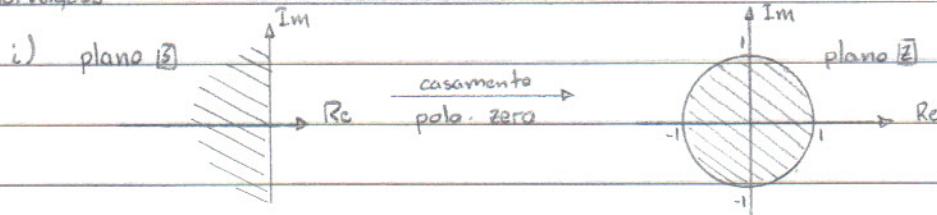
grau (denominador) - grau (numerador)

zeros no infinito (o termo vem do LGR)

3) Ajustar o ganho para algum ponto crítico. Em aplicações de controle tipicamente o ganho é ajustado para baixas freqüências, isto é

$$G_c(s) \Big|_{s=0} = \hat{G}_c(z) \Big|_{z=1}$$

## Observações



$$G_c(s) \text{ estável} \Leftrightarrow \hat{G}_c(z) \text{ estável}$$

i) O método mapeia a faixa primária no círculo de raio unitário e o restante do semi-plano esquerdo em  $z = -1$   
 - Isso é um bom mapeamento -

ii) O que eu faço se meus polos/zeros estão fora da faixa primária?

- Desprezá-los ou aumentar a frequência de amostragem

iv) Para atrasar a resposta do sistema discreto em um período de amostragem, basta mapear um dos zeros no infinito em  $z = \infty$  (isto é, retirar um dos termos  $(z+1)$ )  
 Util para obter aproximações discretas estritamente próprias.  
 Esse procedimento causa perdas na qualidade das aproximações.

AVALIAO  
2009

## Exemplo:

$$\text{Equivalente discreto de } G_c(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \text{ para } T = 0,1 \text{ s}$$

$$\text{Temos } \hat{G}_c(z) = \frac{(z+1)^2 K}{(z - e^{-0,1})(z - e^{-0,2})} = \frac{(z+1)^2 K}{(z - 0,9048)(z - 0,8187)}$$

$$\begin{array}{c|c|c} \text{Cálculo do ganho: } \frac{(z+1)^2 \cdot K}{(z - 0,9048)(z - 0,8187)} & = \frac{1}{(s+1)(s+2)} & = \frac{1}{2} \\ \hline z=1 & s=0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow K = 0,0021563$$

$$\text{Portanto } \hat{G}_c(z) = \frac{0,0021563 (z+1)^2}{(z-0,9048)(z-0,8187)}$$

$$\text{Ou então } \hat{G}_c'(z) = \frac{(z+1)k'}{(z-e^{-0,1})(z-\bar{e}^{0,2})}$$

resultando em

$$\hat{G}_c'(z) = \frac{0,0043125 (z+1)}{(z-0,9048)(z-0,8187)} \quad (\text{que é estritamente próprio})$$

### Exemplo:

$$G_c(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad \text{com } \xi = 0,3 \quad \text{e } \omega_n = 2 \text{ rad/s}$$

Comparação das aproximações:

Ver approx.m

OBS: Definição de diagrama de Bode para sistemas discretos

Em tempo contínuo usamos  $s = j\omega$

Em tempo discreto usamos  $z = e^{j\omega T}$  (pela def.  $z \stackrel{\Delta}{=} e^{sT}$ )

### 3.4 Observações sobre a utilização dos métodos

#### Aumento de f

Via de regra, com o aumento de  $f$ , todos os métodos produzem aproximações mais próximas entre si e mais próximas do sistema contínuo original (porém não se pode aumentar  $f$  impunemente)

#### Estabilidade

Somente se deve utilizar aproximações que mapeiam sistemas contínuos estáveis em sistemas discretos estáveis. (isso exclui retangular para frente)

Forma de mapeamento

Se os requisitos de frequência de amostragem forem apertados (i.e. pouca folga entre a banda do sistema e a frequência de Nyquist) deve-se dar preferência a mapeamentos com pouca distorção em relação a  $z = e^{sT}$  (melhores: Tustin e cas. PZ)

Graus da FT

Com Tustin e Cas. PZ, as funções de transferência em  $z$  são bipoárias ( $\text{grau}(\text{num}) = \text{grau}(\text{den})$ ), mesmo que não fossem assim no plano  $\mathbb{S}$ . Se isso for um problema, usar a versão estritamente própria do cas. PZ.

AULA 11  
20083.5 Aspectos numéricos das implementações em  $\mathbb{Z}$ 

OBS: Isso vale para todas as métodos e também sistemas originalmente discretos

Contrução do mapeamento de  $\mathbb{S}$  em  $\mathbb{Z}$ 

Distâncias iguais no semi-plano esquerdo de  $\mathbb{S}$  são mapeadas em distâncias cada vez menores no plano  $\mathbb{Z}$  à medida que se afastam da origem

Considere um ponto no plano  $\mathbb{S}$ ,  $s_0 = -\xi w_n \pm j w_n \sqrt{\xi^2 - 1}$ ; para  $w_n > 0$  e  $\xi > 0$ .

Não por acaso, os polos de  $G(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2}$  são  $\{s_0, s_0^*\}$

$\xi$ : coeficiente de amortecimento

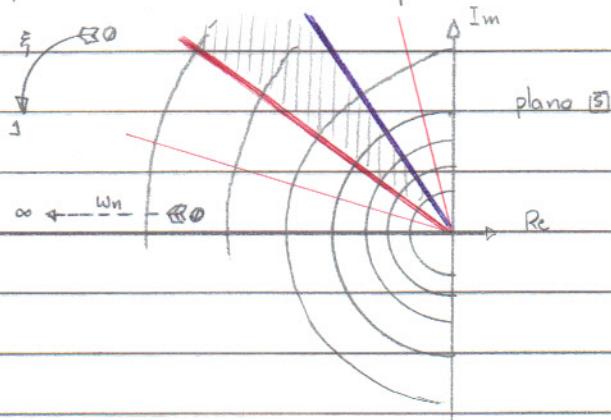
Se  $0 < \xi < 1$ ,  $G(s)$  tem comportamento oscilatório

(indica quão rapidamente as oscilações se anulam)

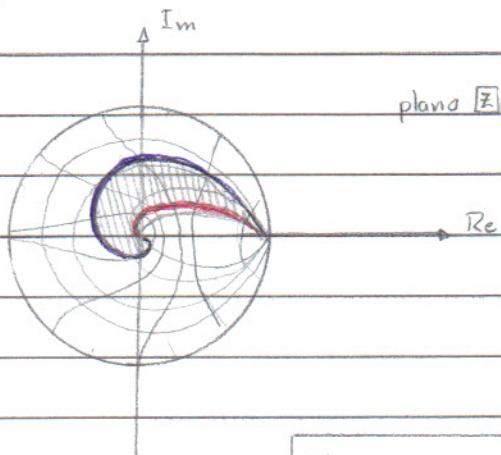
$w_n$ : frequência natural de amortecimento

(indica a frequência de oscilação e o tempo de resposta do sistema)

Mapeando o plano  $s\bar{s}$  em termos de  $\xi$  e  $w_n$



No plano  $\bar{z}$ , com  $z = e^{sT}$



Ver mapxw.m

Conclusão: Parâmetros  $\xi, w_n$  que indicam o comportamento do sistema, variam conformemente no plano  $s\bar{s}$ , mas são "espremidos" no plano  $\bar{z}$ .

O mapeamento em função de T

Consideremos o polo  $s_0 = -\omega_n (\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1} j)$  (podendo ser qualquer  $s_0$ )

que é mapeado em  $z_0 = e^{s_0 T}$

Quando  $T \rightarrow 0$ ,  $z_0 \rightarrow 1$ , qualquer que seja  $s_0$ .

Quando  $T \rightarrow \infty$ ,  $z_0 \rightarrow 0$ , qualquer que seja  $s_0$  no semi-plano esquerdo.

Conclusão: Aumentar a frequência de amostragem "espreme" o mapeamento em direção a  $1 + j\infty$ .

Exemplo: Seja o sistema  $G_c(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$ ; com  $\xi = 0,6$  e  $\omega_n = 2$

Ver mappole.m

Problemas numéricos com aumento da frequência de amostragem

Novamente: isso vale para qualquer método e também sistemas originalmente discretos

Exemplo:

Vamos considerar o método do cas. PZ.

Seja o sistema  $G_c(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$  com  $\xi = 0,3$  e  $\omega_n = 2$

Para  $f = 1 \text{ Hz}$  (muito baixa) :  $G_c(z) = \frac{0,416054 (z+1)^2}{z^2 + 0,363022 z + 0,301194}$

Para  $f = 10 \text{ Hz}$  (melhor) :  $G_c(z) = \frac{0,009391 (z+1)^2}{z^2 - 1,649352 z + 0,986920}$

Para  $f = 100 \text{ Hz}$  (boa) :  $G_c(z) = \frac{0,000099 (z+1)^2}{z^2 - 1,987674 z + 0,988071}$

Para  $f = 1\text{ kHz}$  (mais do que necessário):  $G_c(z) = \frac{0,000001 (z+1)^2}{z^2 - 1,998797 z + 0,998801}$

Para  $f = 100\text{ kHz}$  (perigoso)  $G_c(z) = \frac{0,0000000 (z+1)^2}{z^2 - 1,999989 z + 0,999988}$   
 $(k = 9,999940 \cdot 10^{-11})$

12/2010

Para  $f = 1\text{ MHz}$  (muito perigoso)  $G_c(z) = \frac{0,0000002 (z+1)^2}{z^2 - 1,999999 z + 0,999999}$   
 $(k = 9,9999 \cdot 10^{-13})$

Como o sistema tem a seguinte estrutura

$$G_c(z) = \frac{k(z^2 + 2z + 1)}{z^2 + \alpha z + \beta} \Rightarrow U(z) = \frac{k + 2kz^{-1} + kz^{-2}}{1 + \alpha z^{-1} + \beta z^{-2}} \Rightarrow$$

$$\approx U(z) = kE(z) + 2kz^{-1}E(z) + kz^{-2}E(z) - \alpha z^{-1}U(z) - \beta z^{-2}U(z)$$

$$\text{ou seja } u(k) = k \cdot e(k) + 2k \cdot e(k-1) + k \cdot e(k-2) - \alpha u(k-1) - \beta u(k-2)$$

Para entrada degrau e  $k \geq 2$

$$u(k) = 4k - \alpha u(k-1) - \beta u(k-2)$$

$$\text{com } u(0) = k$$

$$u(1) = (3-\alpha)k$$

Ver prec.z.m

Conclusão: \* Aumento de  $f$  requer maior precisão:

- nos parâmetros

- nas contas

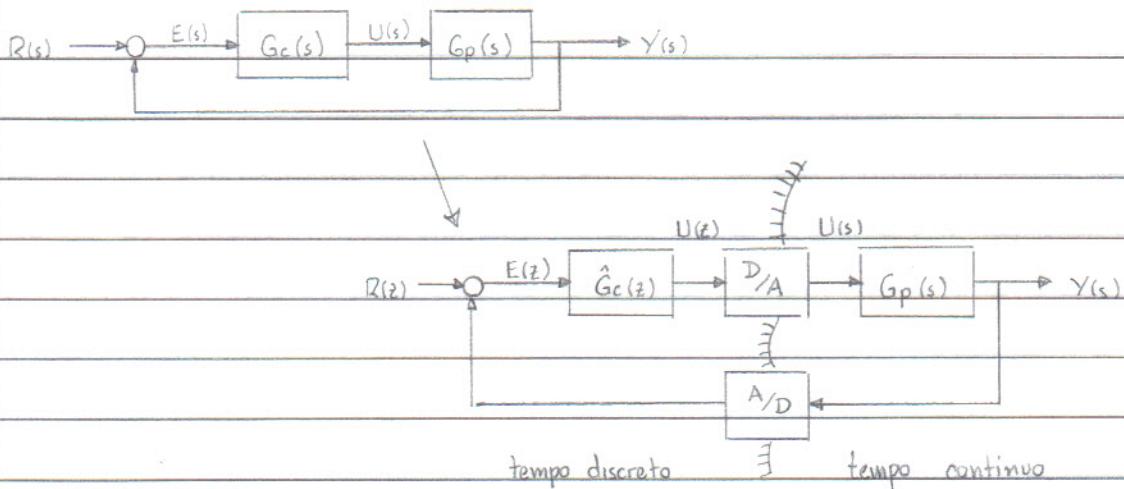
\*  $f$  elevada pode inviabilizar virtualmente qualquer implementação

OBS: \* O caráter iterativo da solução das equações de diferenças agrava a propagação de erros numéricos.

\* Fechar a malha tende a agravar o problema ainda mais

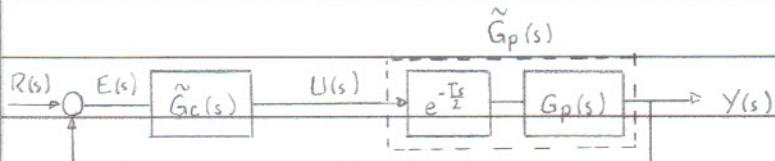
### 3.6 O efeito do ZOH na saída do controlador

Recapitulando:



Porém, como vimos em 2.3, o conversor D/A com ZOH, distorce o sinal em relação à versão contínua. Essa distorção é parecida com um atraso de  $T_s/2$ .

Teríamos então



Idéia geral: Em vez de projetar um controlador  $G_c(s)$  para controlar a planta  $G_p(s)$ , devemos projetar um controlador  $\tilde{G}_c(s)$  para controlar a planta  $\tilde{G}_p(s)$ . Ao discretizarmos  $\tilde{G}_c(s)$ , o equivalente discreto  $\hat{G}_c(s)$  terá um comportamento mais parecido com  $G_c(s)$  do que se tivessemos discretizado o próprio  $G_c(s)$ .

AULA 12  
2009

É necessário?

→ Segundo FPW, se a frequência de amostragem for maior que 30 vezes a banda passante da sistema em malha fechada (ou da malha aberta - a que for maior), pode-se desprezar o efeito do ZOH.

→ Para frequências mais baixas - faz diferença no resultado final.

Vantagem

- \* Permite diminuir bastante a freq. amostragem, sem perda de desempenho

Desvantagens

- \* Complica o projeto
- \* Como o atraso depende da freq. amostragem, o projeto passa a depender também da freqüência escolhida.

### 3.7 Aproximações para o atraso

Usualmente fazemos aproximações racionais para  $e^{-sT/2}$

a) Aproximação de Padé de 1<sup>o</sup> ordem

$$e^{-sT/2} \approx \frac{1 - sT/4}{1 + sT/4} = -\frac{(s - 4/T)}{(s + 4/T)}$$

Esta aproximação introduz um zero no semi-plano direito e um ganho negativo na planta, o que complica mais o projeto.

OBS: Há também aproximações de Padé de ordens superiores

13/2010

### b) Aproximação por filtros em série

$$e^{-\frac{sT}{2}} \approx \frac{1}{(1 + \frac{Ts}{2})^n} ; n \in \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\text{Para } n=1: e^{-\frac{sT}{2}} \approx \frac{1}{(1 + \frac{Ts}{2})} = \frac{2/T}{s + 2/T}$$

Esta aproximação introduz apenas um polo a mais na planta (não complica tanto o projeto)

OBS: Em geral é uma aproximação pior que a de Padé de mesma ordem, mas não muito

Mais detalhes no Suplemento 1

### 3.8 Exemplo de projeto

Seja a planta  $G_p(s) = \frac{1}{s(s+1)}$  (que é instável)

Queremos que o sistema em malha fechada tenha para a resposta ao degrau:  $M_p = 37,2\%$

$\omega_n = 0,98 s$

ou seja  $\xi = 0,3$  e  $\omega_n = 2$

$t_r = 0,98 s$

equivalente a  $s_0 = -0,6 \pm j1,908$

$t_s = 6,7 s$

Um compensador  $G_c(s) = \frac{K_c(s+\alpha)}{(s+\beta)}$  é capaz de resolver o

problema. Uma técnica comum é cancelar o polo da planta com o zero do compensador - $\alpha$  e ajustar  $K_c$  e  $\beta$  para atender aos requisitos do projeto.

$$G_c G_p(s) = \frac{K_c(s+\alpha)}{(s+\beta)} \cdot \frac{1}{s(s+1)}$$

$$\text{com } d=1 \text{ termos} \quad G_c G_p(s) = \frac{K_c}{s(s+\beta)}$$

$$\text{A malha fechada é } G_{mf}(s) = \frac{K_c}{s^2 + \beta s + K_c}$$

$$\text{Desejamos ter } G_{mf}(s) = \frac{K_c}{s^2 + \beta s + K_c} = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2} \quad \text{com } \zeta = 0,3 \text{ e } w_n = 2$$

$$\text{Portanto: } K_c = w_n^2 = 4 \quad \text{e} \quad G_c(s) = \frac{4(s+1)}{(s+1,2)}$$

$$\beta = 2\zeta w_n = 1,2$$

Vamos escolher a frequência de amostragem:

$$G_{mf}(s) = \frac{4}{s^2 + 1,2s + 4} \quad \text{tem uma banda passante (p/-3 dB) de 2,91 rad/s,}$$

isto é 0,46 Hz

Vamos utilizar duas frequências:

i)  $f_1 = 20 \text{ Hz}$  (maior que 30 vezes a BP do sistema)

ii)  $f_2 = 5 \text{ Hz}$  (apenas 10 vezes a BP do sistema)

Caso (i): Basta discretizar o Controlador

Usando os PZ.  $\hat{G}_c(z) = \frac{3,98023233(z - 0,95122942)}{(z - 0,94176453)}$

Caso ii) É necessário reprojetar o controlador

Usaremos a mesma estrutura:  $\tilde{G}_c(s) = \frac{K_c(s+\alpha)}{(s+\beta)}$  cancelando o

ii.a) Aprox. Padé

$$\tilde{G}_c ZOH G_p(s) = -\frac{K_c(s+\alpha)}{(s+\beta)} \cdot \frac{(s-20)}{(s+20)} \cdot \frac{1}{s(s+1)}$$

$$p/ \alpha = 1; \quad \tilde{G}_c ZOH G_p(s) = \frac{-K_c(s-20)}{s(s+\beta)(s+20)}$$

$$\text{Malha fechada: } \tilde{G}_{mf}(s) = \frac{-K_c(s-20)}{s^3 + (20+\beta)s^2 + (20\beta - K_c)s + 20K_c}$$

aps! É de 3ª ordem e tem um zero! Como utilizar  $\xi$  e  $\omega_n$ ?

Vamos supor que o denominador seja da forma

$$(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)(s+p)$$

$$\text{O que resultaria em } \tilde{G}_{mf}(s) = \frac{K_c}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} \cdot \frac{-(s-20)}{(s+p)}$$

Igualando os denominadores:

$$\begin{aligned} s^3 + (20+\beta)s^2 + (20\beta - K_c)s + 20K_c \\ = s^3 + (2\xi\omega_n + p)s^2 + (\omega_n^2 + 2\xi\omega_n p)s + p\omega_n^2 \end{aligned}$$

$$\beta - p = 2\xi\omega_n - 20$$

$$20\beta - 2\xi\omega_n p - K_c = \omega_n^2$$

$$-p\omega_n^2 + 20K_c = 0$$

resolvendo para  $\omega_n = 2$  e  $\xi = 0,3$

$$\text{termos } \left\{ \begin{array}{l} \beta = 1,6301 \\ p = 20,4301 \end{array} \right.$$

$$K_c = 4,0860$$

Com isso:

$$\tilde{G}_c(s) = \frac{4,0860}{(s+1,6301)} (s+1)$$

Verificando a aproximação:

$$\text{Note que } -4,0860 \cdot (s-20) \approx 4 \\ (s+20,43) \quad (\text{para } s \text{ pequ.})$$

Portanto:

$$\tilde{G}_{mf}'(s) \approx \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Então podemos relacionar  $\xi$  e  $\omega_n$  com o desempenho do sistema.

OBS: Isso era esperado!

(ii) Filtro 1ª ordem

$$\tilde{G}_c ZOH G_p(s) = \frac{k_c (s+\alpha)}{(s+\beta)} = \frac{10}{(s+10)} \cdot \frac{1}{s(s+1)}$$

$$\text{p/ } \alpha = 1, \quad \tilde{G}_c ZOH G_p(s) = \frac{10 k_c}{s(s+\beta)(s+10)}$$

$$\text{Malha fechada: } \tilde{G}_{mf}(s) = \frac{10 k_c}{s^3 + (10+\beta)s^2 + 10\beta s + 10 k_c}$$

ops! Novamente de 3ª ordem (mas é mais simples)

$$\text{Vamos supor que } \tilde{G}_{mf}(s) = \frac{10 k_c}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)(s+p)}$$

Igualando os denominadores

$$s^3 + (10+\beta)s^2 + 10\beta s + 10 k_c = \\ = s^3 + (2\xi\omega_n + p)s^2 + (\omega_n^2 + 2\xi\omega_n p)s + p\omega_n^2$$

$$\begin{cases} \beta - p = 2\xi\omega_n - 10 \\ 10\beta - 2\xi\omega_n p = \omega_n^2 \\ -p\omega_n^2 + 10 k_c = 0 \end{cases}$$

resolvendo para  $w_n = 2$  e  $\zeta = 0,3$

temos  $\beta = 1,6545$

$\rho = 10,4545$

$K_c = 4,1818$

Com isso:

$$\tilde{G}_c(s) = \frac{4,1818 (s+1)}{(s + 1,6301)}$$

Verificando a aproximação:

Note que  $\frac{10 \cdot 4,1818}{(s+10)} \approx 4$   
(para  $s$  pequeno)

Portanto

$$\tilde{G}_{mf}(s) \approx \frac{w_n^2}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2}$$

Ok, mas a aproximação não é tão boa.

Ver approxctrl.m

14/2010

Observações:

\* Via de regra  $G_c(s)$  e  $\tilde{G}_c(s)$  são parecidos, qualquer que seja a abordagem adotada

\* Quando  $f$  aumenta,  $\tilde{G}_c(s) \rightarrow G_c(s)$

\* A compensação do efeito do ZOH é uma aproximação.

ZOH  $\rightarrow$  atraso é uma aproximação

atraso  $\rightarrow$  Padé, etc é uma aproximação

\*  $\tilde{G}_p(s)$  tem ordem maior que  $G_p(s)$ , mas comportamento semelhante.  
(se não tiver é porque a frequência está baixa demais)

\* O projeto pode ficar mais complicado ou não (veja o Suplemento 1)

3.8. Um pouco de espaço de estados.

Seja a seguinte descrição de um sistema SLIT a tempo contínuo, possivelmente multivariável.

$$\sum_c: \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}; \quad x, \dot{x} \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^p, y \in \mathbb{R}^m \\ A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times p}, C \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Esta forma transforma uma equação diferencial de ordem  $n$  em  $n$  equações diferenciais de 1º orden (devido a H. Poincaré 1854-1912)

Se tornou popular em Controle a partir da década de 50

Razões:

- Bom para tratar controle multivariável (exigência de aplicações aeroespaciais)
- Bom para CAD (computadores se dão bem com matrizes)
- Solução tem forma analítica fechada

A versão discreta tem a seguinte estrutura

$$\sum_d: \begin{cases} x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases}; \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^p, y \in \mathbb{R}^m \\ \Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}, \Gamma \in \mathbb{R}^{n \times p}, C \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

3.8.1. Convertendo tempo contínuo em tempo discreto

Solução de  $\sum_c$ :

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-z)} B u(z) dz$$

ou

$$x((k+1)T) = e^{AT} x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} B u(z) dz \quad p/ t_0 = kT \text{ e } t = (k+1)T$$

supondo  $u(z) = u(kT)$  p/  $kT \leq z < (k+1)T$  (é a única aprox. que faremos)

temos

$$x((k+1)T) = e^{AT} x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A(t-z)} B dz u(kT)$$

fazendo  $\eta = (k+1)T - z$  resulta

$$x((k+1)T) = e^{AT} x(kT) + \int_0^T e^{A\eta} B d\eta u(kT)$$

ou seja

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k)$$

$$\text{com } \Phi = e^{AT} = I + AT + A^2 T^2 + \dots$$

$$\Gamma = \int_0^T e^{A\eta} B d\eta = \int_0^T (I + A\eta + A^2 \eta^2 + \dots) B d\eta$$

OBS:

- (i) A única aproximação feita foi considerar  $u(t)$  constante por trechos
- (ii)  $x(k)$  e  $u(k)$  representam as mesmas grandezas (o estado e a entrada discretos são as mesmas que nas variáveis contínuas)

iii) Tendo em vista (ii)

$$y(k) = C x(k)$$

iv) O comando c2d do Matlab faz o troque

### 3.8.2 Comparação com tempo contínuo

#### Estabilidade

$\Sigma_d$  é estável se  $r_g(\Phi) < 1$  (ou seja, todos os autovalores de  $\Phi$  tiverem módulo menor que 1)

(no caso contínuo: parte real negativa)

Propriedades

Controlabilidade, Observabilidade, Estabilizabilidade, Detectabilidade

são iguais ao caso contínuo (são puramente algébricas)

Técnicas

Controle par realimentação de estado é igual ao caso contínuo

(o estado e a entrada são os mesmos)

Observador de Luenberger é similar ao caso contínuo

(o observador em si é um sistema discreto)

Princípio da separação é igual ao caso contínuo

(o princípio é algébrico)

fim (\*)  
salto p/ (\*\*)

etc. etc.

4. Controlador PID discreto4.1 Introdução

De 90 a 95% dos problemas de controle na indústria são resolvidos com controladores PID. (levantamento da década de 80)

Praticamente todas os controladores PID industriais disponíveis hoje no mercado são digitais.

4.2 PID básico

Os PIDs existem desde a década de 1920 (portanto antes do nascimento da teoria de controle clássico) em diversas formas. O padrão preferido hoje (com variações) é a formulação ISA.

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right)$$

ou

$$U(s) = U_P(s) + U_I(s) + U_D(s) \quad \text{com} \quad U_P(s) = K_p E(s)$$

$$U_I(s) = \frac{K_p \cdot I}{T_I s} E(s)$$

$$U_D(s) = K_p T_D s \cdot E(s)$$

$U_P$  : Não tem dinâmica, logo:

$$U_P(z) = K_p E(z)$$

$U_I$  : Qualquer das metódos podem ser empregado. O melhor método que temos para aproximar uma integral é o método de Tustin, assim

$$U_I(z) = \frac{K_p \cdot T}{T_I z} E(z)$$

$U_D$ : Nem todos os métodos podem ser empregados. A melhor aproximação de um derivador puro é dada pelo método das diferenças finitas p/ trás (cf. item 3.2) ou retangular p/ trás.

$$\text{Ou seja: } U_D(z) = \frac{K_p T_D}{T} \frac{(z-1)}{z} E(z)$$

O método de Tustin também pode ser usado, resultando em

$$U_D(z) = \frac{2 K_p T_D}{T} \frac{(z-1)}{(z+1)} E(z)$$

Com isso o PID discreto fica

$$\begin{aligned} G_c(z) = U(z) &= \frac{U_P(z) + U_I(z) + U_D(z)}{E(z)} = \\ &= \frac{K_p (1 + T_I (z+1) + T_D (z-1))}{2 T_I (z+1) T D z} \end{aligned}$$

onde  $K_p$ ,  $T_I$  e  $T_D$  são os mesmos do PID contínuo.

#### 4.3 Um PID mais realista

Os PIDs efetivamente implementados na indústria em geral diferem bastante da formulação ISA básica. Incorporam não-linearidades, malhas auxiliares de realimentação, ponderações diferentes nos ganhos e nas entradas, etc. frequentemente para lidar com problemas bastante específicos.

Seguem aqui apenas algumas variações mais importantes.

De modo geral essas variações são sempre mais fáceis de se fazer em implementações digitais do que nas analógicas.

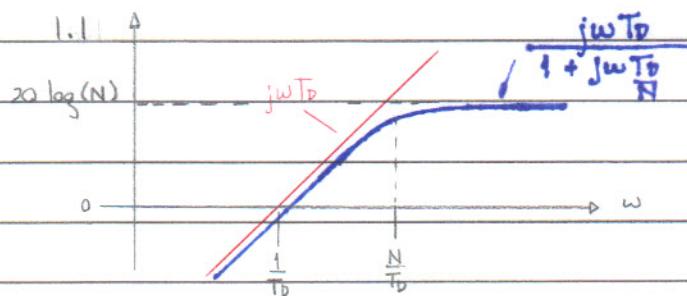
## 1) Limitação da banda do derivador.

O termo  $U_D(s) = K_p T_D s E(s)$ , além de impróprio, tem banda idealmente infinita. O seu ganho é cada vez mais alto com o aumento da frequência, o que serve basicamente para amplificar ruídos.

Na prática o termo é substituído por

$$U_D(s) = T_D K_p \frac{s}{1 + \frac{sT_D}{N}} E(s) ; \text{ tipicamente com } 3 \leq N \leq 20$$

Nota que



A aproximação é boa em baixas freqüências e tem ganho limitado em altas freqüências. Tipicamente:

Ambiente mais ruinoso  $\rightarrow N$  menor

Ambiente menos ruinoso  $\rightarrow N$  pode ser maior

## 2) Derivação da saída da planta

Frequentemente se usa

$$U_D''(s) = -K_p T_D \frac{s}{(1 + \frac{sT_D}{N})} Y(s)$$

ou seja, deriva-se a saída da planta  $Y(s)$  em vez do sinal de erro  $E(s) = R(s) - Y(s)$

Razões para isso:

i) Objetivamente se quer reduzir oscilações no sinal de saída da planta  $Y(s)$  que é um sinal real e não no erro  $E(s)$ , que é um sinal que só existe internamente ao controlador (ao contrário da componente integradora, em que queremos efetivamente que o erro  $E(s)$  se anule)

ii) O sinal de erro  $E(s)$  pode variar muito rapidamente sem que a saída da planta varie (bastando que o setpoint  $R(s)$  varie rapidamente)

iii) O sinal de erro  $E(s)$  pode ser descontínuo (por exemplo ao se aplicar um degrau em  $R(s)$ )

iv) Se o setpoint  $R(s)$  for constante,

$$-K_p T_D \frac{s}{N} Y(s) = K_p T_D \frac{s}{N} E(s)$$

Aula 16 - 2005

### 3) Anti-windup no integrador.

Frequentemente em sistemas práticos, a planta deixa de responder a ações de controle em certas situações, por fatores tais como

- Saturação do atuador;
- Problemas estruturais da planta;
- Falhas mecânicas;
- Incapacidade da planta em operar em certas regiões, etc.

Nestas situações, a saída da planta  $Y(s)$  não atinge o setpoint  $R(s)$ , qualquer que seja a saída do controlador, o que leva a componente  $U_I(s)$  a crescer cada vez mais e saturar a saída do controlador. Quando o problema é resolvido ou o sistema é levado a um ponto de operação

admissível (p.ex. pela redução do setpoint), o controle continua saturado devido ao integrador e pode levar um tempo muito longo para voltar a responder (a isso se dá o nome de windup)

OBS: Todo integrador em um sistema de controle deve prever alguma forma de saturação e anti-windup.

Como fazer anti-windup? Há diversas variações. A mais simples é congelar os integradores quando houver saturação na saída do controlador.

#### 4) Infinitas variações

Exemplos: Ganho variável com o erro

Erro grande  $\rightarrow$  ganho baixo; mibe oscilações e windup.

Erro pequeno  $\rightarrow$  ganho alto; melhora a regulagem e o desempenho

Ganho variável com a saída da planta

$y$  grande  $\rightarrow$  ganho alto

$y$  pequeno  $\rightarrow$  ganho baixo

Para sistemas que respondem rapidamente para  $y$  pequeno e lentamente para  $y$  grande. Tipicamente: rotação de motores de combustão e turbinas.

Ganho variável com o sinal algébrico do erro

Erro positivo  $\rightarrow k_p$

Erro negativo  $\rightarrow k_p'$

Para sistemas que sofrem o efeito da gravidade como braços mecânicos, guindastes, etc.

Ganho variável com a entrada da planta  
(ou saída do controlador)

$U$  pequeno  $\rightarrow$  ganho baixo

$U$  grande  $\rightarrow$  ganho alto

Para sistemas, como motores e turbinas, que respondem pior quando sujeitos a cargas excessivas

OBS: Se para um sistema obter o mesmo valor  $y$  for necessário um maior valor de  $U$ , isso pode indicar carga excessiva.

Ganho variável com o tempo de operação

Para sistemas que sofrem desgaste ou degradação com o tempo de uso

Ex. Rolos de laminadores, Ferramentas, Catalisadores, etc.

4.4. Discretizando o PID realista

Não-linearidades, etc. são mais facilmente implementadas em computador

Anti-windup: É um simples IF na implementação

IF  $U(k-1) > 100\% \text{ OR } U(k-1) < -100\%$

EI = 0

ELSE

EI =  $R(k) - Y(k)$

$$UI(k) = f(EI)$$

$$UP(k) = f(R(k) - Y(k))$$

$$UD(k) = \dots$$

$$U(k) = UP(k) + UI(k) + UD(k)$$

:

Termo derivativo

O termo  $U''_D(s) = -K_p T_D \frac{s}{1+sT_D} \cdot Y(s)$  pode, a princípio, ser

discretizado por qualquer método, porém há aspectos importantes a observar

## i) Método de Tustin

$$\text{Pode-se mostrar que } U''_D(z) = -\frac{2K_p T_D N}{T(T_N + 2T_D)} \cdot \frac{z-1}{z + \frac{(T_N - 2T_D)}{(T_N + 2T_D)}} \cdot Y(z)$$

Normalmente, se sintetizam os PIDs usando  $T_D$  pequeno (devido a ruídos, etc.) Nessa situação a pola associada ao derivador é tal que

$$\frac{-(TN - 2T_0)}{(TN + 2T_0)} \approx -1$$

O polo  $\{-1\}$  tem caráter extremamente oscilatório, o que não é desejável.

OBS: A menos disso o polo é sempre estável.

Note que

$$X(s) = \frac{1}{s+1}, \text{ equivalente a } U(s)$$

$x(k) = -x(k-1) + u(k-1)$  tem resposta impulsiva

$$\{0; 1; -1; 1; -1; 1; \dots\}$$

AULA 16  
2009

## ii) Diferença finita para trás

Pode-se mostrar que  $U_D(z) = \frac{-k_p T_0 N}{TN + T_0} \cdot \frac{z-1}{\left[ z - \frac{T_0}{(TN + T_0)} \right]} \cdot Y(z)$

Quando  $T_0$  é pequeno, o polo é aproximadamente  $\{0\}$ , que é estável

OBS: O polo é sempre estável.

Note que

$$X(s) = \frac{1}{s} \text{ equivale a } x(k+1) = u(k)$$

Conclusão: O método das diferenças finitas é normalmente preferível.

#### 4.5 Influência do período de amostragem

O PID discretizado sofre os mesmos efeitos que outros compensadores, como condicionamento numérico, contracção do mapeamento, efeito do ZOH, etc.

Quando  $T \rightarrow 0$ , o devidor (qualquer que seja a aproximação) se transforma num oscilador de frequência de oscilação e ganhos infinitos.

Quando a frequência de amostragem é baixa, os efeitos do ZOH são mais pronunciados, porém como o PID usualmente não é projetado, mas apenas sintonizado de acordo com a resposta da planta, o impacto desse fenômeno não é tão sentido.

#### 4.6 Atividades

Veja o Suplemento 1