

Modelagem de Sistemas Dinâmicos - Prática de Laboratório -
Sistemas Térmicos

Dr. Eng. Flávio José Aguiar Soares flaviosoares@ifam.edu.br

Maio de 2017

Capítulo 1

Modelagem de Sistemas Térmicos

Esta aula é baseada em conteúdo do livro **Dynamic Modeling and Control of Engineering Systems de Kulakowski, Gardner e Sheaner (2007)**, do qual foram copiadas as figuras e algumas passagens são basicamente traduções do texto original. O aluno que deseja se aprofundar deve estudar pelo texto original. As figuras sofreram alterações mínimas e a estrutura do texto original foi mantida.

A determinação analítica ou experimental da temperatura sobre um volume de controle é uma tarefa complexa, isso porque ela possui três formas de propagação: Condução, Convecção e Irradiação, cada uma com modelagens distintas e sutilezas específicas. Na maioria dos casos reais se tem mais de uma forma de propagação agindo simultaneamente no sistema. Além disso, as condições de contorno com relação às fronteiras do sistema precisam estar claramente definidas.

Históricamente o comitê ISO passou 30 anos discutindo se a medida da temperatura era a medida da energia até que se formasse o consenso que ela era consequência da energia cinética média das moléculas, Lobo(2008)¹. Basicamente ela se comporta como um fluxo com variação tridimensional e temporal, obedecendo a direção preferencial do calor do corpo mais quente para o corpo mais frio, sendo o fluxo de temperatura entre dois corpos uma das leis da termodinâmica.

$$T = T(x, y, z, t) \quad (1.1)$$

As características de fluxo com variação tridimensional e temporal faz com que seja necessário o uso de derivadas parciais para modelar a transferência de calor. Além disso a propagação por convecção e radiação são de natureza não linear, o que conduz a equações diferenciais parciais não lineares, que possuem poucas soluções analíticas, ou seja, é necessário o emprego de métodos numéricos como o Método dos Elementos Finitos, Método dos Volumes Finitos, Método das Diferenças Finitas, etc. O emprego destes métodos requer o uso de programas computacionais sofisticados e caros para se obter soluções aproximadas, já que estes métodos não produzem soluções exatas. Como uma abordagem mais profunda transcende os objetivos desta disciplina, empregaremos uma abordagem alternativa, o método dos *Modelos Concentrados*, cuja aplicação é razoavelmente limitada mas capaz de gerar soluções simplificadas.

¹Análise Dimensional e Teoria da Semelhança de Modelos Físicos - Fernando Lobo Carneiro

1.1 Condução

Trata-se da condição mais simples que se possa aplicar na solução do problema da condução térmica. O entendimento básico está representada na figura 1.1 abaixo. Seja um condutor térmico de área A e comprimento L ... conforme a figura 1.1 abaixo:

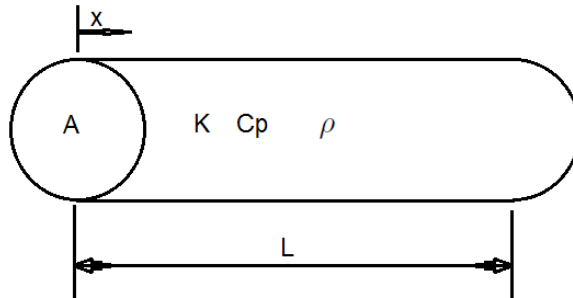


Figura 1.1: Condutor térmico ideal.

Você deve se lembrar das aulas de *Fundamentos de Termodinâmica* que os materiais que são bons condutores elétricos também são bons condutores térmicos e materiais que são isolantes elétricos são também isolantes térmicos.

De modo geral metais são bons condutores térmicos, neles as moléculas possuem ordenamento espacial denominado *estrutura cristalina* nas quais a temperatura é transmitida molécula a molécula como uma intensidade de vibração. A temperatura está associada a energia com que as moléculas vibram.

Para simplificar a dinâmica do sistemas de transferência de calor, consideramos que eles se encontram dentro de uma região denominada volume de controle, que seria uma região na qual se tem condições de isolamento térmico próximas das ideais.

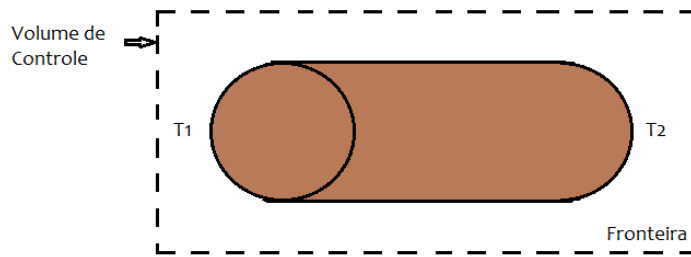


Figura 1.2: Condutor térmico dentro de um volume de controle.

Em escala macroscópica a taxa de condução térmica através das fronteiras do volume de controle é determinada através da equação de Laplace, ver equação 1.2

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \quad (1.2)$$

Onde (x, y, z) são as coordenadas cartesianas; \mathbf{T} é a temperatura; t o tempo e α a difusibilidade térmica sendo $\alpha = \frac{K}{\rho C_p}$. Onde k é a condutividade térmica, ρ é a densidade e C_p o calor específico do material.

Em regime permanente \mathbf{T} é constante ou sua variação é suficientemente pequena para ser desprezível, de modo que a equação 1.2 torna-se:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (1.3)$$

Por questões didáticas vamos fazer uma simplificação, para o caso de um fluxo unidimensional na direção x . Observe na figura 1.1 que esta simplificação implica em considerar nulos os gradientes nas direções y e z , o que fisicamente significa em um isolamento perfeito nestas direções, o que teoricamente corresponde a uma fronteira impermeável, sem trocas de calor nestas direções. De modo que, o fluxo que sai do volume de controle pela face direita é idêntico ao fluxo que entra pela face esquerda, ou seja, o fluxo é constante. O aluno atento deve perceber que alcançar estas condições na prática é algo difícil de se realizar.

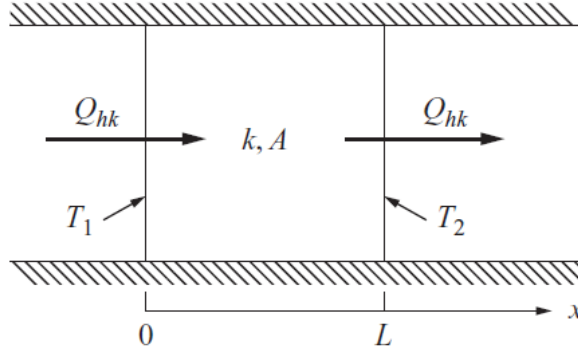


Figura 1.3: Fluxo de calor em regime permanente unidirecional.

Matematicamente significa reduzir 1.3 a 1.4:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad (1.4)$$

Como a derivada segunda se anula, teremos a derivada primeira igual a uma constante, no caso Q_{hk} . Neste caso se aplica a equação de Fourier, 1.5.

$$Q_{hk} = -kA \frac{dT}{dx} \quad (1.5)$$

Para obter o fluxo ao longo da dimensão x se faz a integração ao longo deste condutor.

$$\int_0^L Q_{hk} dL = - \int_{T_1}^{T_2} kA \frac{dT}{dx} \quad (1.6)$$

O que resulta em:

$$Q_{hk} = -\frac{A}{L} \int_0^L k dT \quad (1.7)$$

Caso a condutividade térmica não dependa da temperatura, a equação da taxa de transferência de calor assume a forma final da equação 1.8.

$$Q_{hk} = \frac{kA}{L} (T_1 - T_2) \quad (1.8)$$

O valor da temperatura para um ponto ao longo do condutor pode ser determinado uma vez que T_1 é o valor da temperatura em $T(0)$ e T_2 é o valor em $T(L)$, então se substitui T_2 por T_x em 1.8, mas para isso é preciso se conhecer o valor de Q_{hk} , o que resulta em:

$$T_x = T_1 - \left(\frac{x}{kA} \right) Q_{hk} \quad (1.9)$$

Observe que Q_{hk} é positivo se o fluxo é transferido na direção x e negativo se transferido na direção inversa.

1.2 Convecção

Nos sólidos as forças que tendem a manter próximas as moléculas são maiores que as que tendem a afastá-las. Nos gases elas tem maiores níveis de energia, que as impedem de se associar *rigidamente*. Nos líquidos se verifica uma condição especial intermediária. Como tanto em líquidos como em gases o acoplamento físico de moléculas vizinhas é raro, o que lhes confere muita mobilidade e faz com que o fluxo de calor se propague sem direções preferenciais como no caso dos condutores térmicos sólidos. Novamente se torna necessário recorrer a derivadas parciais e a derivadas cruzadas para modelar este tipo de sistema de forma coerente.

A convecção esta associada a condução de calor em líquidos e gases, pelo fluxo induzido por diferença de densidade dentro de um mesmo fluido ou entre fluidos diferentes, ou entre sólidos e gases ou sólidos e líquidos. Em muitos casos a diferença de temperatura é que ocasiona a diferença de densidades. Quando o escoamento é causado por diferença de temperaturas entre dois pontos o **escoamento** é dito **potencial**, quando é imposto por uma fonte externa é dito forçado. Quando a convecção ocorre por diferença de densidade é dita **livre**, quando imposta por agente externo é dito **forçada**. Veja que nestes caso podemos ter fluxos laminares e turbulentos.

Quando um fluido escoar em um tubo, em escoamento livre, não forçado, seu perfil de escoamento se desenvolve em um formato parabólico, tendo máximo deslocamento no centro do tubo e deslocamento nulo na superfície do tubo, ver figura 1.2. Isso acontece porque uma camada do fluido adere a superfície do tubo, esta camada é denominada **camada limite** e se trata de um conceito de grande importância seja no escoamento de fluidos, seja na transferência de calor.

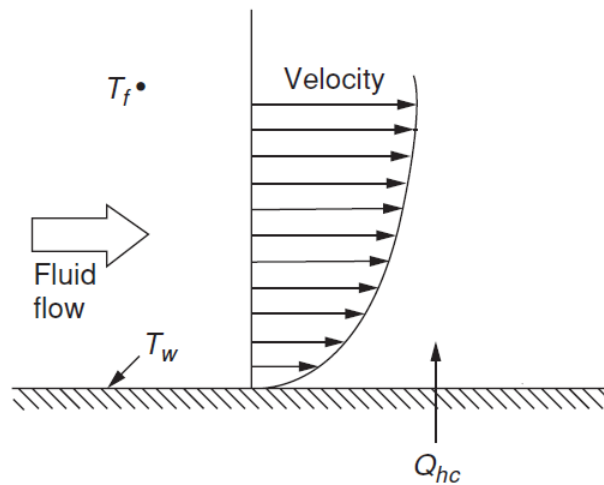


Figura 1.4: Perfil de escoamento laminar de um fluido ao longo de um tubo.

Como a **camada limite** permanece fixa a parede do tubo, a transferência de calor para o fluido se dá por condução e depois por convecção. A taxa de transferência de calor por convecção Q_{hc} entre o fluido e a

parede do tubo é dada por:

$$Q_{hc} = h_c A (T_w - T_f) \quad (1.10)$$

Onde h_c é o coeficiente de transferência de calor de convecção, A é a área de transferência de calor, T_w a temperatura da parede do tubo e T_f a temperatura do fluido.

1.3 Radiação

A transferência de calor por radiação possui características bem mais sutis que a condução e a convecção. Na condução e na convecção é preciso haver interação diretas entre moléculas para que o calor seja transmitido. Na radiação não é preciso de um meio, ela pode se propagar no vácuo como as ondas eletromagnéticas, por distâncias enormes. Todo o calor que nos chega do Sol a Terra, por exemplo.

A lei de *Stefan-Boltzmann* abaixo, prescreve a taxa de calor transferido por radiação entre dois corpos. Observe que se trata de uma equação não linear.

$$Q_{hr} = \sigma F_e F_a A (T_1^4 - T_2^4) \quad (1.11)$$

Onde $\sigma = 5,667 \times 10^{-8} \left[\frac{W}{m^2 K^4} \right]$ é a constante de Stefan-Boltzmann, F_e é a emissividade efetiva, F_a um fator de forma e A área de transferência. A emissividade efetiva avalia o desvio da radiação do sistema com relação a *radiação de corpo negro*, tomado como referência. A emissividade efetiva entre dois planos com emissividades ϵ_1 e ϵ_2 é dada por:

$$F_e = \frac{1}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1} \quad (1.12)$$

F_a representa a quantidade de energia que depois de emitida foi captada por outro corpo. Se toda energia enviada pelo corpo emissor for captada pelo corpo receptor $F_a = 1$.

O problema do corpo negro foi o tema do doutorado de *Max Planck*. A idéia consistia basicamente em tomar uma bola de ferro ôca, mas com um pequeno orifício. Aquecê-la até o ponto de medir a radiação que emergisse do orifício. **Planck** mediu o espectro da radiação do corpo negro para valores crescentes de temperatura e comparou com o modelo teórico, mas a curva prevista pela teoria não correspondia aos resultados obtidos experimentalmente, para ajustar o modelo teórico criou uma constante \hbar que posteriormente ficou conhecida como a *constante de Planck*, de imensa importância para a Física.

1.4 Modelos Concentrados de Sistemas Térmicos

Considerando a complexidade dos modelos matemáticos e computacionais necessários para a solução dos problemas envolvendo a transferência de calor, avaliaremos o uso dos Modelos Concentrados para a modelagem de sistemas térmicos.

Assim como na modelagem de sistemas fluidos os modelos concentrados utilizam os conceitos de capacitância e resistência. A capacitância térmica C_h , de calor específico c_p e volume ν é dada por:

$$C_h = \rho c_p \nu \quad (1.13)$$

A velocidade de resposta dos sistemas térmicos é dado pela sua capacitância térmica, lembrando que a curva de resposta de um sistema de primeira ordem permite a determinação da constante de tempo do sistema, ou seja, sistemas com grande capacitância térmica terão resposta lenta e sistemas térmicos de pequena capacitância terão tempos de resposta rápidos. Já a taxa de energia armazenada Q_a no sistema de capacitância térmica C_h é dada por:

$$Q_a = C_h \frac{dT}{dt} \quad (1.14)$$

Uma variação na taxa de energia armazenada no sistema implica na variação da temperatura.

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\Delta Q_h}{C_h} \quad (1.15)$$

A resistência térmica ao fluxo de calor Q_h entre dois pontos T_1 e T_2 é dada por:

$$R_h = \frac{T_1 - T_2}{Q_h} \quad (1.16)$$

Entretanto cada forma de transferência de calor tem um expressão própria para a resistência térmica. A resistência por condução pode ser obtida da equação 1.8 e 1.16.

$$R_{hk} = \frac{L}{kA} \quad (1.17)$$

Já a resistência térmica por convecção é dada por:

$$R_{hc} = \frac{1}{h_c A} \quad (1.18)$$

A relação entre a resistência por condução e por convecção é um número adimensional denominado número de *Biot* 1.20.

$$Bi = \frac{R_{hk}}{R_{hc}} \quad (1.19)$$

Cuja simplificação se reduz:

$$Bi = \frac{h_c L}{k} \quad (1.20)$$

Onde L é o comprimento característico. O número de *Biot* é utilizado como um parâmetro de aplicação do método concentrado em relação a dinâmica do sistema, só sendo recomendável sua aplicação se $Bi \leq 0,1$. Se $Bi > 0,1$ deve se empregar equações diferenciais parciais para descrever o sistema.

Finalmente, a resistência térmica por radiação:

$$R_{hr} = \frac{1}{\sigma F_e F_a A (T_1^2 - T_2^2)(T_1 - T_2)} \quad (1.21)$$

A equação abaixo apresenta o modelo concentrado que combina a transmissão de calor por convecção e radiação em paralelo:

$$Q_h = \left(\frac{1}{R_{hc}} + \frac{1}{R_{hr}} \right) (T_1 - T_2) \quad (1.22)$$

1.5 Exemplos de Aplicação

Exemplo 1: Um pino de alumínio puro inicialmente a temperatura ambiente de 25°C em $t=0$, tem sua base submetida a 100°C . Encontre o valor da temperatura ao longo do pino no tempo.

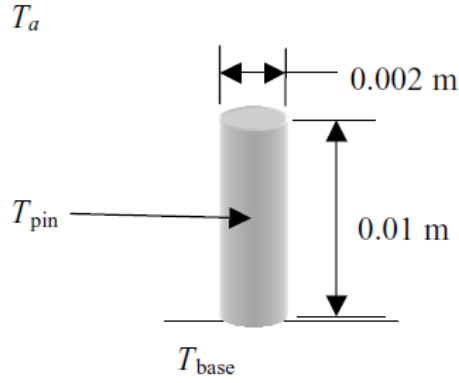


Figura 1.5: .

As propriedades do alumínio podem ser obtidas em livros de materiais ou na rede de computadores. Os valores necessários estão elencados na tabela 1.5. Entretanto o coeficiente de transferência de calor por convecção h_c depende da geometria e podem ser encontrados em livros de transferência de calor. Para o cilindro se adotou $h_c = 20 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{C}}$.

Cilindro	de	Alumínio
propriedade	valor	unidade
densidade	2707	$\frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$
condutividade térmica	220	$\frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{C}}$
calor específico C_p	896	$\frac{\text{J}}{\text{Kg}^2\text{C}}$

O primeiro passo é avaliar a aplicabilidade do método com o número de Biot.

$$Bi = \frac{h_c L}{k} = \frac{(20)(0,01)}{220} = 0,001 \quad (1.23)$$

Portanto o método pode ser aplicado, e como se deseja conhecer o valor da temperatura ao longo do cilindro estes serão divididos em cilindros menores, conforme a figura 1.5.

Considerando um único modelo concentrado teremos o balanço entre as taxas de calor:

$$(\text{armazenado no pino}) = (\text{conduzido através da base}) + (\text{convecção no ar}) \quad (1.24)$$

$$C_h \frac{dT_{pin}}{dt} = \frac{1}{R_{hk}} (T_{base} - T_{pino}) - \frac{1}{R_{hc}} (T_{pino} - T_{amb}) \quad (1.25)$$

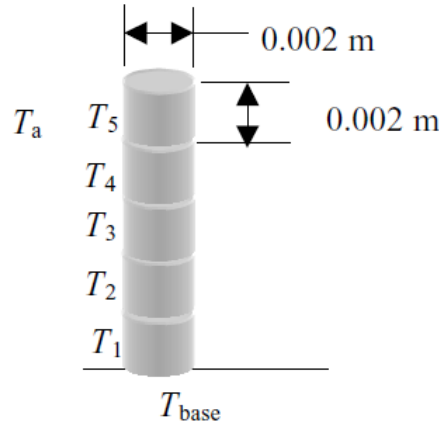


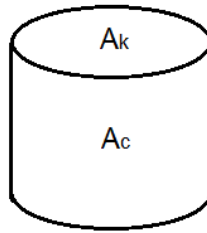
Figura 1.6: Seccionamento do cilindro em vários pequenos cilindros.

Onde:

$$C_h = \rho C_p \nu = (2707)(896)(3,14 \times 10^{-8}) = 0,0762 \frac{J}{^\circ C}$$

$$R_{hk} = \frac{L}{k A_k} = \frac{0,005}{(220)(3,14 \times 10^{-6})} = 7,23 \frac{^\circ C}{W}$$

$$R_{hc} = \frac{1}{h_c A_c} = \frac{1}{(20)(6,28 \times 10^{-5})} = 796 \frac{^\circ C}{W}$$



Observe que A_k é a área de condução A_c é a área de convecção. Substituindo os valores numéricos chega-se à equação:

$$\frac{dT_{pin}}{dt} + 1,8T_{pin} = 1,81T_{base} + 0,017T_a \quad (1.26)$$

Aplicando-se a transformada de Laplace, trabalhando a equação algébrica, aplicando-se a transformada inversa de Laplace obtém-se a solução:

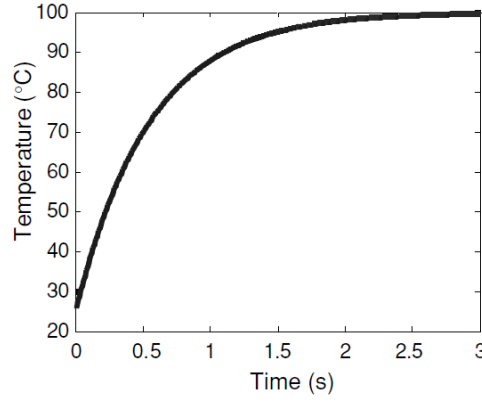
$$T_{pin}(t) = 100 - 75e^{-1,83t} \quad (1.27)$$

Cuja curva de resposta pode ser vista na figura 1.5.

Abaixo seguem as equações para cada pino, configuradas para o formato de espaço de estado:

$$\frac{d}{dt}T_1 = \frac{1}{C_h} \left[- \left(\frac{1}{R_{hk0}} + \frac{1}{R_{hk}} + \frac{1}{R_{hc}} \right) T_1 + \frac{1}{R_{hk}} T_2 + \frac{1}{R_{hk0}} T_{base} + \frac{1}{R_{hc}} T_{amb} \right] \quad (1.28)$$

$$\frac{d}{dt}T_2 = \frac{1}{C_h} \left[\frac{1}{R_{hk}} T_1 - \left(\frac{2}{R_{hk}} + \frac{1}{R_{hc}} \right) T_2 + \frac{1}{R_{hk}} T_3 + \frac{1}{R_{hc}} T_{amb} \right] \quad (1.29)$$



$$\frac{d}{dt}T_3 = \frac{1}{C_h} \left[\frac{1}{R_{hk}}T_2 - \left(\frac{2}{R_{hk}} + \frac{1}{R_{hc}} \right) T_3 + \frac{1}{R_{hk}}T_4 + \frac{1}{R_{hc}}T_{amb} \right] \quad (1.30)$$

$$\frac{d}{dt}T_4 = \frac{1}{C_h} \left[\frac{1}{R_{hk}}T_3 - \left(\frac{2}{R_{hk}} + \frac{1}{R_{hc}} \right) T_4 + \frac{1}{R_{hk}}T_5 + \frac{1}{R_{hc}}T_{amb} \right] \quad (1.31)$$

$$\frac{d}{dt}T_5 = \frac{1}{C_h} \left[\frac{1}{R_{hk}}T_4 - \left(\frac{1}{R_{hk}} + \frac{1}{R_{hc}} + \frac{1}{R_{hce}} \right) T_5 + \left(\frac{1}{R_{hk}} + \frac{1}{R_{hce}} \right) T_{amb} \right] \quad (1.32)$$

Onde R_{hk0} é a resistência da condutividade na base e R_{hce} é a resistência convectiva no topo do pino.

$$C_h = \rho C_p \nu = (2707)(896)(6,28 \times 10^{-9}) = 0,0152 \frac{J}{^{\circ}C}$$

$$R_{hk0} = \frac{L_0}{kA} = \frac{0,001}{(220)(3,14 \times 10^{-6})} = 1,45 \frac{^{\circ}C}{W} \quad (1.33)$$

$$R_{hk} = \frac{L}{kA} = \frac{0,002}{(220)(3,14 \times 10^{-6})} = 2,89 \frac{^{\circ}C}{W} \quad (1.34)$$

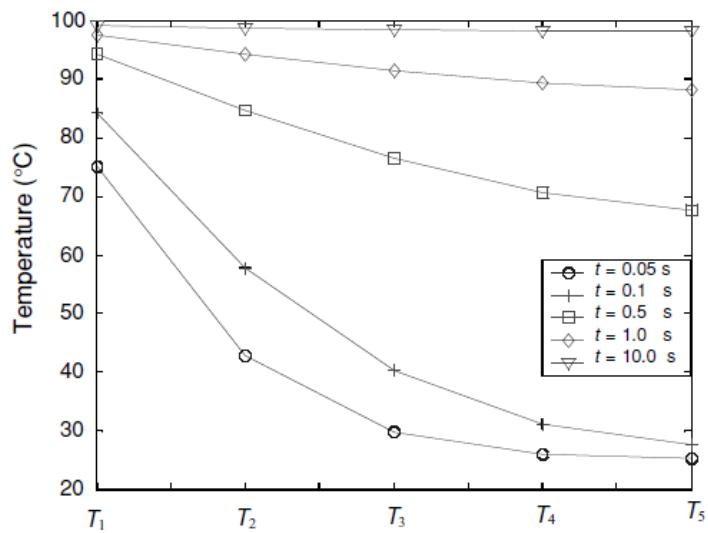
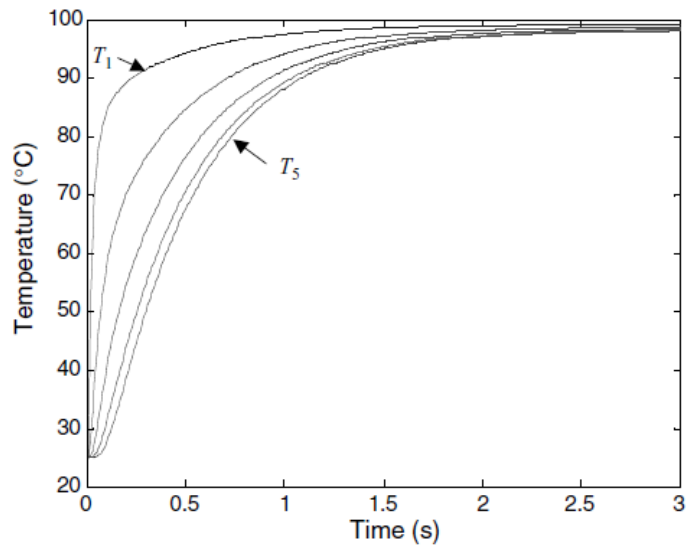
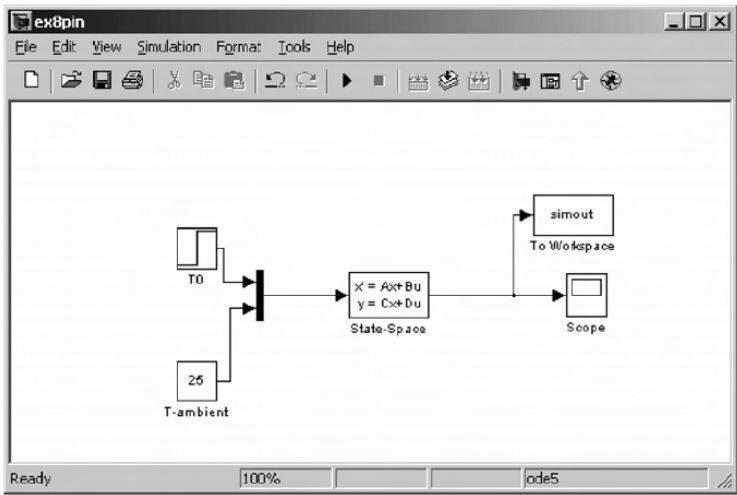
$$R_{hc} = \frac{1}{h_c A} = \frac{1}{(20)(1,26 \times 10^{-5})} = 3968 \frac{^{\circ}C}{W} \quad (1.35)$$

$$R_{hce} = \frac{1}{h_c A_{ce}} = \frac{1}{(20)(3,14 \times 10^{-6})} = 16.000 \frac{^{\circ}C}{W} \quad (1.36)$$

1.6 Exercício

Considerando o problema apresentado no exemplo anterior, obtenha:

1. O modelo no espaço de estados;
2. Gere a simulação no simulink, de acordo com a figura 2 abaixo;
3. Gere um gráfico superpondo as temperaturas obtidas para cada elemento de massa em uma simulação de 3s;
4. Gere um gráfico com as temperaturas em cada pino para 5 intervalos de tempo, com valor mínimo de 0,05s e máximo de 10s.



Não copie trabalhos de colegas, não se engane. Trabalhos clonados terão nota **redonda**. Qualquer comparação com o trabalho de outro aluno que se configurar em fraude, como parágrafos e figuras idênticas, terá nota **ZERO** para ambos os trabalhos.

Trabalho INDIVIDUAL. Imprima o arquivo pdf e escreva à mão as respostas. Entregue dessa atividade 05/05/2023. Após essa data não será mais aceito o trabalho.