MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO AMAZONAS
CAMPUS MANAUS - DISTRITO INDUSTRIAL

INSTITUTO FEDERAL
AMAZONAS
Campus Manaus-Distrito Industrial

Exercício Avaliativo 2 – Controle Discreto
03/04/2024
Controle e Discretização de Sistemas

Aluno: Gabriel Almeida Santos de Oliveira.
Nº de matrícula: 2021000042.

Seja um sistema dado por $G_p(s) = \dfrac{1}{s(s+1)}$.

Queremos um sistema com overshoot máximo de 38% e tempo de assentamento de 7 segundos.

Para visto que a planta sozinha não atende a condição de um tempo de assentamento menos que 7 segundos, optou-se pelo desenvolvimento de um controlador de avanço de fase pelo lugar das raízes. O controlador foi obtido através de um algoritmo feito no Matlab onde é comentado os passos necessários para obtenção do controlador.

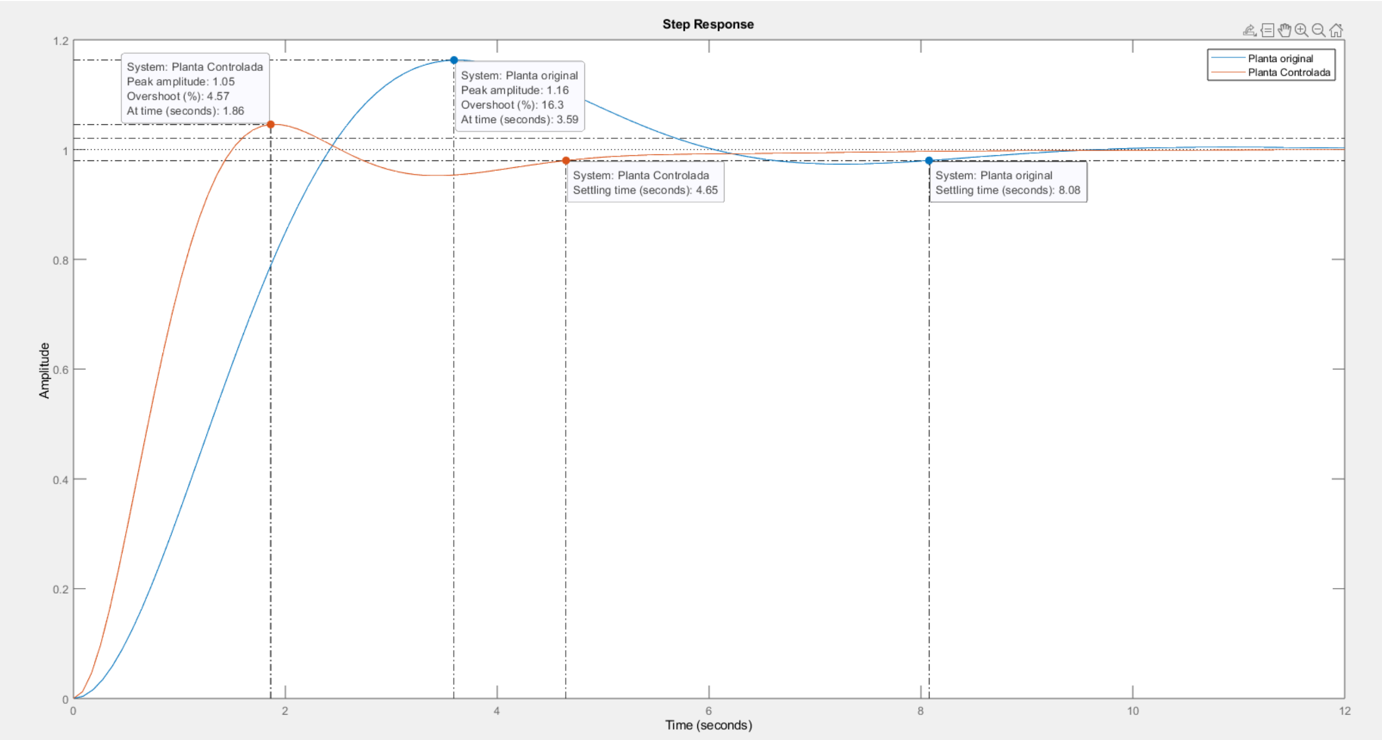
O controlador de avanço de fase consiste na adição de um polo e um zero que fazem o lugar das raízes se aproximar de um par de polos dominantes desejados, em conjunto com um ganho kc que acomode os polos dominantes na posição desejada. Os polos dominantes são obtidos através das especificações de desempenho solicitadas: pelo máximo sobressinal se obtem o coeficiente de amortecimento zeta; junto deste, e pela formula do tempo de assentamento se obtem a frequência natural. De posse destes é possível calcular a parte real e imaginaria do polo desejado. Deste ponto se calcula a posição do polo do controlador a partir da condição de fase do lugar das raízes, o zero é posto diretamente abaixo do polo desejado para simplificação dos cálculos, ambos o polo e o zero do controlador ficam sobre o eixo real, não possuem parte imaginaria. Por ultimo, se calcula o ganho do controlador Kc através da condição de modulo do lugar das raízes.

Abaixo está o algoritmo desenvolvido para o cálculo do controlador assim como o resultado da resposta com o controlador:

```
clc; clear all;

s = tf('s'); j = sqrt(-1);

% planta original
FTMA = 1 / (s^2 + s)

%especificações de desempenho desejadas:
trgt_err_pos = 0.1;
trgt_Mp = 0.38;
trgt_ts = 7;

% Calculo de zeta [Mp = exp(-zeta*pi / sqtr(1-zeta^2)  )]
zeta = sqrt( log(trgt_Mp)^2 / (log(trgt_Mp)^2 + pi^2)) * 1.10 % aumentar em 10% para
dar uma margem de erro

%calculando wn [ts = 4 / zeta*wn] p/ 2%
wn = 4 / (trgt_ts*zeta);

%polo dominante desejado:
Re = zeta*wn;
Img = wn*sqrt(1-zeta^2);

trgt_Pd = -1*(Re) + j*(Img)

% se ecolhe a posição do zero diretamente abaixo do polo desejado para
% simplificação dos calculos
z_c = Re;

% se calcula a posição do polo pela condição de fase
% angulo (G(S)*H(S)) = 180º(2n + 1)
[num, den] = tfdata(FTMA, 'v');
zeros = roots(num);
poles = roots(den);

teta_pd = 3*pi/2; % 180 da cond. de fase + 90 do zero diretamente abaixo do polo
desejado

if ~ isempty(zeros)
   for ind = 1:length(zeros) % calcular a contribuição de fase de cada zero
```

```
        if abs(zeros(ind)) > Re
            auxiliar_teta = atan( Img / ( Re - abs(zeros(ind)) ) );
        else
            auxiliar_teta = pi - atan( Img / ( Re - abs(zeros(ind)) ) );
        end
        teta_pd = teta_pd + auxiliar_teta;
    end
end

if ~ isempty(poles)
    for ind = 1:length(poles) % calcular a contribuição de fase de cada polo
        if abs(poles(ind)) > Re
            auxiliar_teta = atan( Img / ( Re - abs(poles(ind)) ) );
        else
            auxiliar_teta = pi - atan( Img / ( Re - abs(poles(ind)) ) );
        end
        teta_pd = teta_pd - auxiliar_teta;
    end
end

%sabendo o angulo do polo desejado se calcula sua posição no eixo real
p_c = Re + Img/tan(teta_pd);

%tendo a posição do polo e do zero do controlador se calcula agora o ganho pela
condição de modulo
% |kc*C(S)*G(S)| = 1
CONT = (s + z_c) / (s + p_c);
INV = CONT^(-1) * FTMA^(-1);
[mag,phase] = mag_phase(INV, trgt_Pd)

CONT = mag * CONT

% FTs de malha fechada da planta original e da planta com o controlador
FTMF = feedback(FTMA, 1)
FTMF_C = feedback(FTMA*CONT, 1)

step(FTMF,  FTMF_C);
legend('Planta original','Planta Controlada');
```

Obtido um overshoot de 4.57% e tempo de assentamento de 4.65s.



O controlador obtido com o algoritmo foi:

```
CONT =

  3.64 s + 2.08
  -------------
    s + 1.668

Continuous-time transfer function.
```

E a função de transferência de malha fechada com o controlador ficou:

```
FTMF_C =

          3.64 s + 2.08
  --------------------------------
  s^3 + 2.668 s^2 + 5.307 s + 2.08

Continuous-time transfer function.
```

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

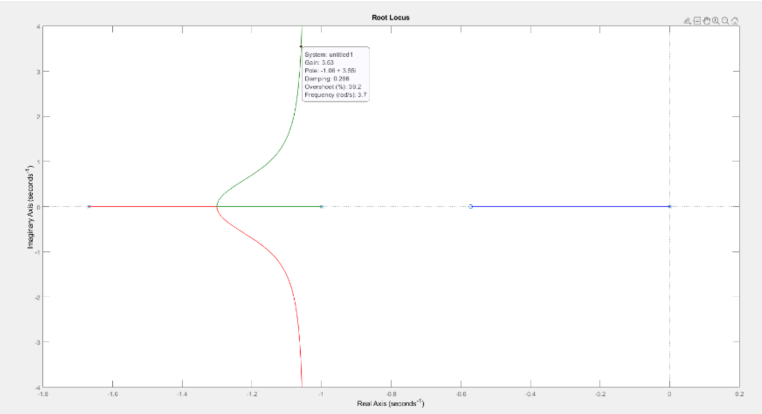
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA

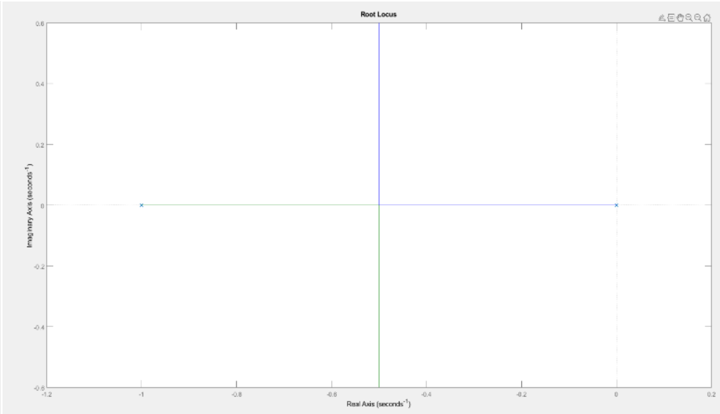
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO AMAZONAS

CAMPUS MANAUS - DISTRITO INDUSTRIAL

INSTITUTO FEDERAL
AMAZONAS
Campus Manaus-Distrito Industrial

Lugar das raízes com e sem o controlador:





(a) Qual seria a frequência natural do sistema em malha fechado?

A frequência natural foi obtida a partir dos polos dominantes da função de transferência de malha fechada obtido pelos comandos abaixo e pelos cálculos feitos com os mesmos:

```
>> [num, den] = tfdata(FTMF_C, 'v')

num =

     0      0   3.6396   2.0798


den =

   1.0000   2.6677   5.3073   2.0798

>> roots(den)

ans =

  -1.0886 + 1.7476i
  -1.0886 - 1.7476i
  -0.4906 + 0.0000i
```

Q.a) $P_d = (s + 1{,}088 \pm j\,1{,}747)$

$$G_{MF}(s) \approx \frac{N(s)}{(s+1{,}088+j\,1{,}747)(s+1{,}088-j\,1{,}747)}$$

$$\approx \frac{N(s)}{s^2 + 1{,}088s - \cancel{js1{,}747} + 1{,}088s + 1{,}183 - \cancel{j1{,}90} + \cancel{js1{,}747} + \cancel{j1{,}90} + 3{,}052}$$

$$\approx G_{MF}(s) \approx \frac{N(s)}{s^2 + 2{,}176s + 4{,}235} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\therefore \omega_n = \sqrt{4{,}235} \approx 2{,}05$$

A frequência natural é aproximadamente 2.05 rad/s.

(b) Projete um controlador discreto, baseado em um $C(s)$, para uma $fs = 20\,Hz$.

b) Será desenvolvido um controlador discreto pelo método Bilinear:

$$C(z) = C(s)\Big|_{s=\frac{2z-1}{Tz+1}} , \quad f = 20\,Hz \;\therefore\; T = 0{,}05\,s$$

$$\therefore C(z) = \frac{3{,}64\,s + 2{,}08}{s + 1{,}668}\Bigg|_{s=\frac{40z-1}{z+1}}$$

$$C(z) = \frac{3{,}64\left(\frac{40z-40}{z+1}\right) + 2{,}08}{\left(\frac{40z-40}{z+1}\right) + 1{,}668} = \frac{\frac{3{,}64(40z-40) + 2{,}08(z+1)}{\cancel{z+1}}}{\frac{(40z-40) + 1{,}668(z+1)}{\cancel{z+1}}}$$

$$C(z) = \frac{145{,}6z - 145{,}6 + 2{,}08z + 2{,}08}{41{,}66z - 38{,}33} = C(z) = \frac{147{,}68z - 143{,}52}{41{,}66z - 38{,}33}$$

$$C(z) = \frac{1}{41{,}66} \cdot \frac{147{,}68z - 143{,}52}{(z - 0{,}92)} = \frac{3{,}54z - 3{,}44}{z - 0{,}92} = \frac{3{,}54(z - 0{,}97)}{z - 0{,}92}$$

Comparando com o resultado obtido no matlab confirma-se que o controlador foi discretizado corretamente:

```
>> D_CONT = c2d(CONT, 0.05, 'tustin')

D_CONT =

  3.544 z - 3.444
  ---------------
     z - 0.92

Sample time: 0.05 seconds
Discrete-time transfer function.
```

(c) Projete um controlador discreto, baseado em $C(s)$, para $f_s = 5Hz$. Neste caso é necessário considerar os efeitos do ZOH. Ou seja, projete $C(s)$ para $\tilde{G}_p(s)$.

Primeiramente é calculado a planta com o atraso do ZOH, para isso é necessário escolher um metodo de aproximação do atraso causado pelo ZOH, foi feita a simulação com os dois tipo de aproximação e a aproximação por filtro torna o sistema mais instavel (muito oscilatório). Então se utilizou a aproximação de padé, qua apesar de acrescentar um zero de fase não nula (que acrescenta um atraso a resposta), ainda atende as especificação de desempenho.

$\tilde{G}(s) = e^{-sT/2}\, G(s)$, pela aproximação de padé: $e^{-sT/2} = \dfrac{-(s - 4/T)}{s + 4/T}$

$$\therefore\ \tilde{G}(s) = \frac{-s + 4/T}{s + 4/T} \cdot \frac{1}{s^2 + s}$$, onde $T = f^{-1} = (5/s)^{-1} = 0{,}2\,s$

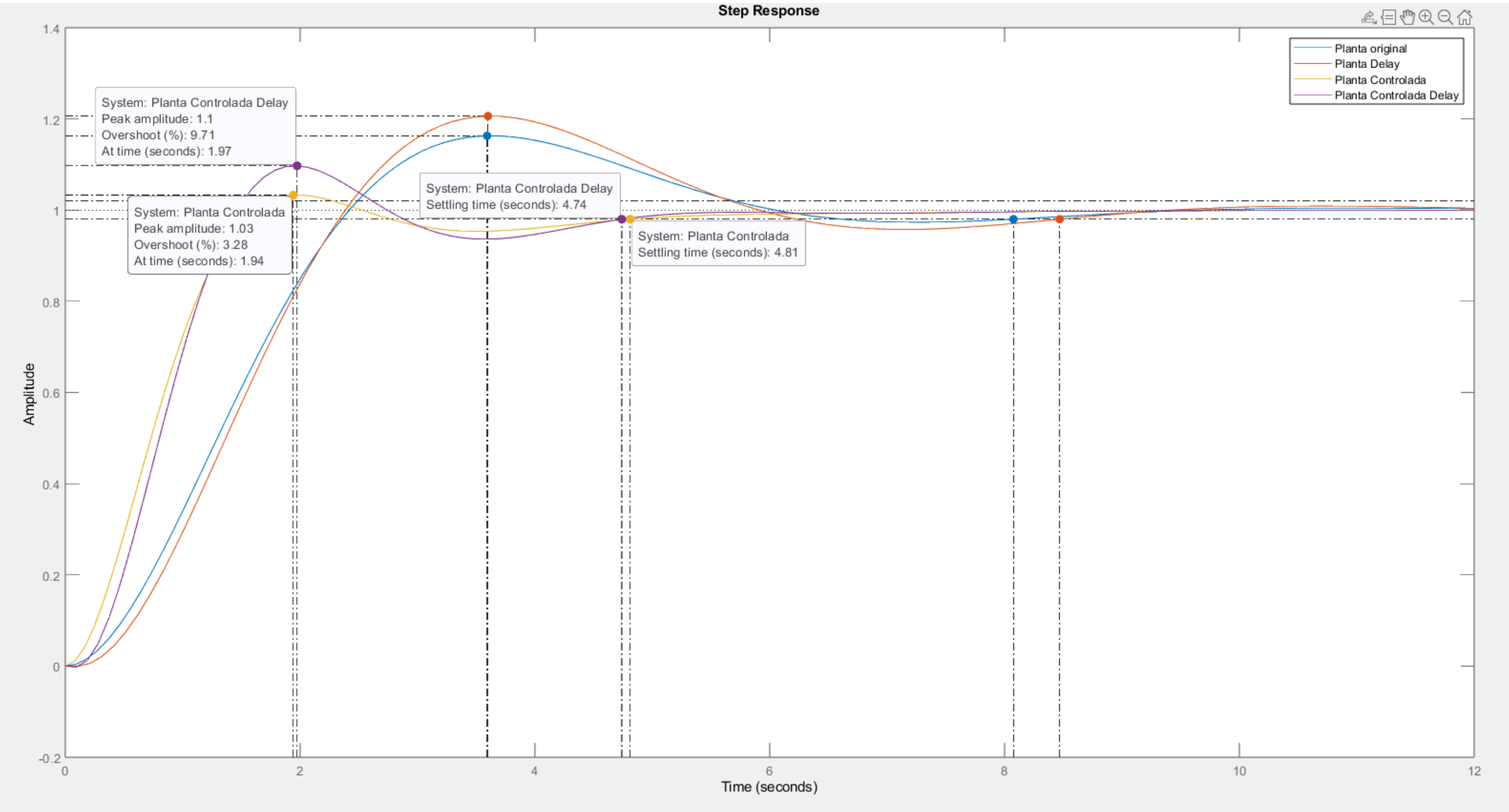
$$\tilde{G}(s) = \frac{-s + 20}{s(s+1)(s+20)}$$

Utilizando o algoritmo para calculo do controlador de avanço se obteve o seguinte controlador:

```
CONT =

  3.439 s + 1.965
  ---------------
     s + 1.668

Continuous-time transfer function.
```

```
FTMF_C_delay =

        -3.439 s^2 + 66.81 s + 39.3
  ----------------------------------------------
  s^4 + 22.67 s^3 + 51.58 s^2 + 100.2 s + 39.3

Continuous-time transfer function.
```

Com as seguintes respostas: Overshoot de 9.71% e tempo de assentamento 4.74 s.



O controlador continuo teve pouca alteração com o acrescimo do ZOH a planta, o calculo do controlador discreto para o novo controlador da planta atrasada foi feito abaixo, se utilizou o metodo bilinear novamente.

$$C(z) = C(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}} \quad , \quad T = 0{,}2\,s$$

$$C(z) = \frac{3{,}439\,s + 1{,}965}{s + 1{,}668}\Bigg|_{s=\frac{10z-10}{z+1}}$$

$$C(z) = \frac{3{,}439\left(\frac{10z-10}{z+1}\right) + 1{,}965}{\left(\frac{10z-10}{z+1}\right) + 1{,}668}$$

$$C(z) = \frac{[3{,}439(10z-10) + 1{,}965(z+1)] / \cancel{(z+1)}}{[10z-10 + 1{,}668(z+1)] / \cancel{(z+1)}}$$

$$C(z) = \frac{34{,}39z - 34{,}39 + 1{,}965z + 1{,}965}{10z - 10 + 1{,}668z + 1{,}668}$$

$$C(z) = \frac{36{,}35z - 32{,}425}{11{,}66z - 8{,}33} = \frac{36{,}35z - 32{,}425}{11{,}66(z - 0{,}71)} = \frac{3{,}11(z - 2{,}78)}{z - 0{,}71}$$

O resultado obtido manualmente foi igual ao resultado obtido no matlab:

```
D_CONT =

  3.116 z - 2.779
  ---------------
    z - 0.7141

Sample time: 0.2 seconds
Discrete-time transfer function.
```

O resultado como o controlador e planta discretos foi o abaixo: