Capítulo 1

Modelagem de Sistemas Não Lineares

Está aula é baseada em conteúdo do livro Dynamic Modeling and Control of Engineering Systems de Kulakowski e Gardner (2007), do qual foram copiadas as figuras e a estrutura do texto. As figuras sofreram alterações mínimas e apenas a estrutura do texto original foi mantida.

O modelo clássico de um sistema mecânico de segunda ordem é o modelo massa-mola-amortecedor ***mkb***, como se pode ver na Figura(1.1). Onde a massa $\boldsymbol{m}$ modela a inércia do sistema, $\boldsymbol{b}$ as perdas por atrito e $\boldsymbol{k}$ a deformação elástica ou rigidez estrutural.

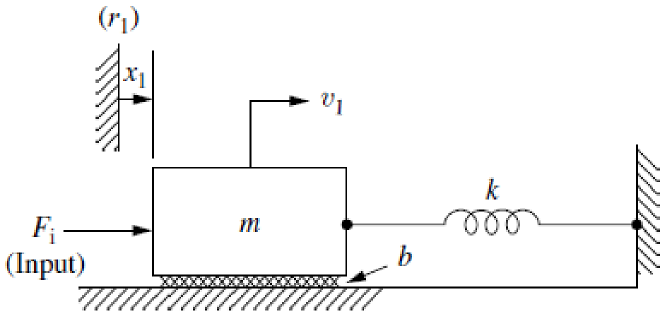

Figura 1.1: Sistema massa-mola-amortecedor.

Se considerarmos a força externa F_i como entrada e a velocidade v_1 como saída podemos trabalhar a modelagem matemática do sistema ***mkb***, conforme as equações (1.1) e (1.2) para serem reescritas na forma de diagrama de blocos, conforme se pode ver na Figura (1.2) abaixo.

$$F_i - F_k - F_b = m\frac{dv_i}{dt} \tag{1.1}$$

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{1}{m}\left(F_i - F_k - F_b\right) \tag{1.2}$$

A equação (1.2) apresenta o termo $\dfrac{dv_i}{dt}$ igual a uma constante $\frac{1}{m}$ vezes uma soma de forças. Em controle esta soma é feita em um bloco comparador, como se pode ver na Figura (1.2).

Se tomarmos a Figura (1.2) e considerarmos x_1 como saída, com pequenas modificações chegamos ao diagrama apresentado na Figura (1.3).

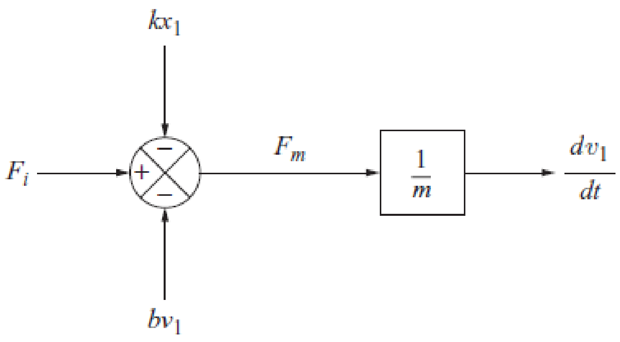

Figura 1.2: Arranjo dos temos da equação de modelagem.

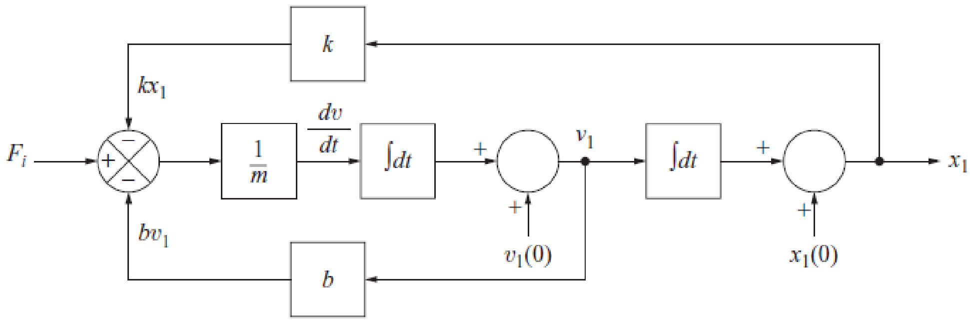

Figura 1.3: Diagrama de blocos para o modelo ***mkb***.

Analise cuidadosamente a Figura (1.3). Certifique-se que o diagram de blocos corresponde ao modelo *mbk*. Compreenda todos os passos que levaram a Figura (1.2) a se tornar a Figura (1.3).

A partir do diagrama de blocos é intuitivo a sua conversão para o ambiente Simulink, no qual tanto ***b*** como ***k*** são considerados como simples ganhos, uma vez que são constantes. A integração recebe a formulação equivalente $\frac{1}{s}$ do domínio complexo.

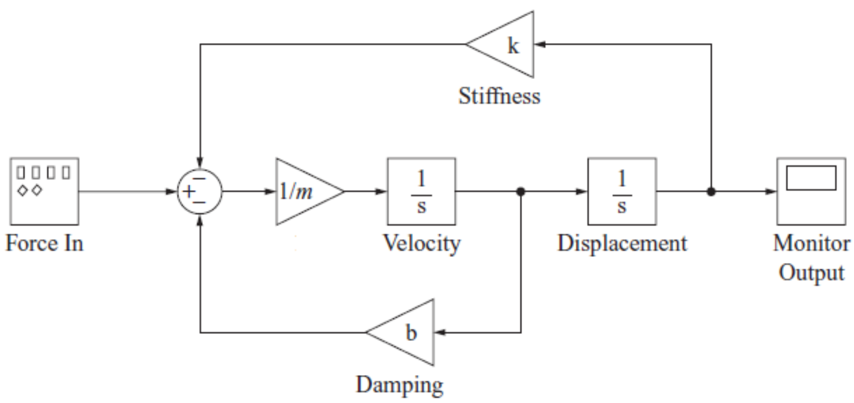

Figura 1.4: Simulação do modelo ***mkb***.

Volte e compare as Figuras (1.3) e (1.4). Compreenda todos os passos que levaram a Figura (1.3) a se tornar a Figura (1.4).

A grande vantagem de se poder modelar um sistema é o uso que se pode fazer dele como ferramenta, seja como método de análise para fins de controle ou para o desenvolvimento de projetos. Se o objetivo for conhecer a energia dissipada no absorvedor utiliza-se a equação (1.3).

$$E_d = \int_0^t F_{amortecedor} v \; dt = \int_0^t bv^2 \; dt \tag{1.3}$$

Com pequenas modificações na árvore da simulação é possível obter e analisar as perdas provocadas pelo atrito, como se pode ver na Figura (1.5).

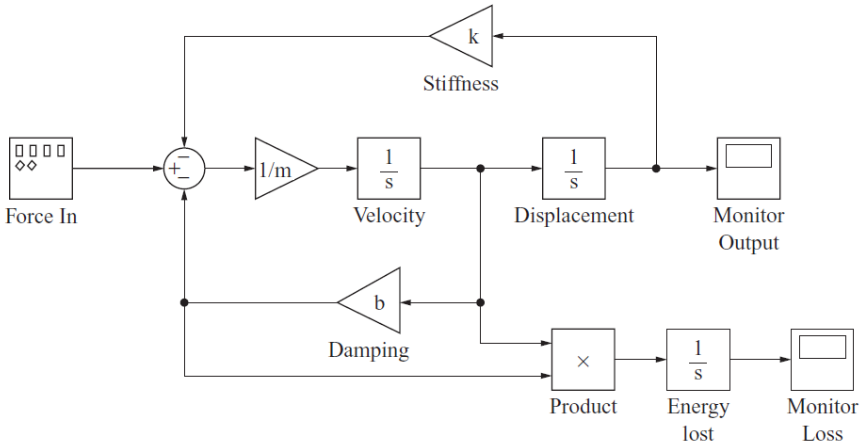

Figura 1.5: Inclusão de perdas por atrito do modelo ***mkb***.

1.1 Um Modelo Não Linear

Uma das grandes vantagens da simulação é poder solucionar e analisar sistemas não lineares, o que pode ser muito complexo dentro das técnicas analíticas.

No problema massa-mola-amortecedor as perdas são representadas pelo atrito viscoso, o que gera uma abordagem linear, de maior simplicidade, mas nem sempre se trata de abordagem muito precisa. Em muitos sistemas o **atrito sêco** está presente e ai teremos um problema de não linearidade.

O atrito é uma força que se opôe ao movimento, no atrito viscoso a força é proporcional a velocidade, e por ser linear se comporta como uma equação de primeiro grau. No atrito sêco a oposição ao movimento se mantém até que a força que gera o movimento for maior que a força de atrito, então, subitamente, quando a força de atrito é superada pela força motora ocorre um deslocamento. Definida pela força normal multiplicada por um coeficiente de atrito estático, normalmente considerado como sendo constante, ver Figura 1.6.

A não linearidade ocorre pela descontinuidade intríseca da função de atrito sêco. Esta descontinuidade pode ser modelada utilizando-se blocos de descontinuidades no Simulink ou pelo uso da função *sign(x)* que retorna 1 para $x > 0$, 0 para $x == 0$ ou -1 para $x < 0$.

$$sign(x) = \frac{x}{|x|} \tag{1.4}$$

Também é possível a combinação das duas formas de atrito, neste caso a força não linear F_{nl} assume a forma:

$$F_{nl} = F_o sign(v) + bv \tag{1.5}$$

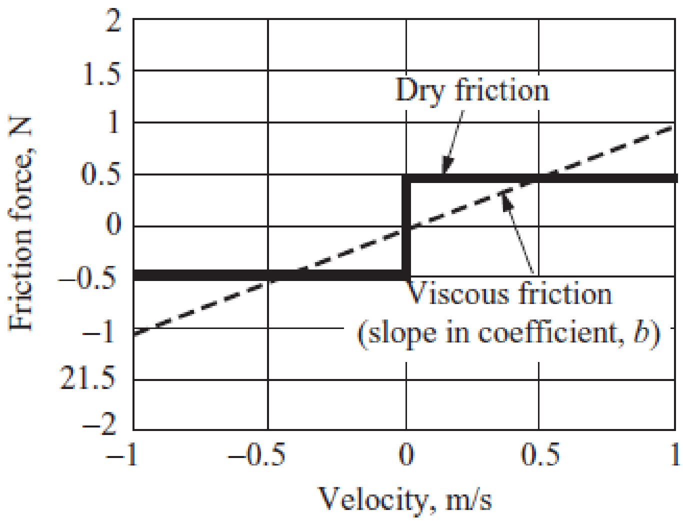

Figura 1.6: Curvas de definição para o atrito sêco e atrito viscoso.

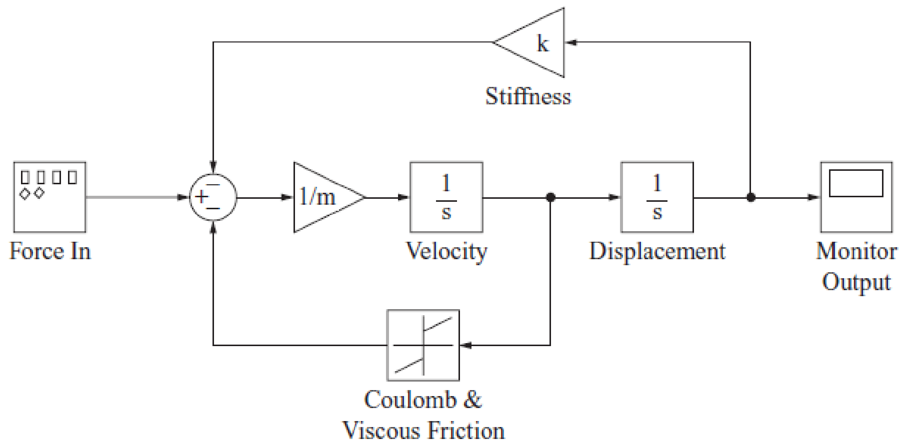

Figura 1.7: Comparação entre atrito sêco e atrito viscoso.

Na Figura (1.7) empregou-se um bloco de não linearidade da pasta *discontinuities* que modela o atrito como a soma do atrito viscoso com o atrito sêco.

1.2 Outras Não Linearidades

O Simulink possui alguns blocos para o tratamento de não linearidades. Segue uma descrição rápida de alguns deles.

- **Saturação**: Os componentes tem uma capacidade de resposta. Se forem solicitados além deste limite sua respsota se limitará a sua capacidade máxima. Um atuador tem uma capacidade de carga, para a qual apresenta uma resposta máxima. Se ele for solicitado além da sua capacidade sua resposta não irá além da resposta máxima. Da mesma forma em um sistema de controle, o atuador não pode responder além de seu limite. Nada adianta se ter um controle em malha fechada se o atuador saturar o seu comportamento será de malha aberta.

- **Zona Morta**: O sistema não responde se o sinal de entrada tiver amplitude muito baixa. Exemplo: Se

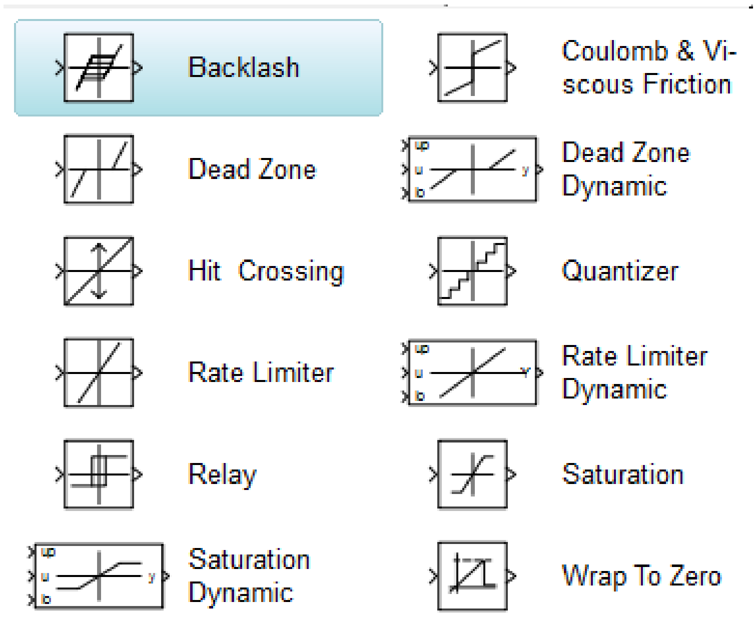

Figura 1.8: Blocos de não linearidades por descontinuidade.

você pegar um pequeno motor dc, com especificação de alimentação de 5V e começar a energizá-lo com, por exemplo 0,1V provavelmente ele não vai funcionar. Você continua a aumentar a alimentação até que ele começa a funcionar com por exemplo 3,5V. Isso acontece porque o baixo potencial empregado foi insuficiente para vencer os atritos internos. Esta faixa antes do acionamento é chamada de zona morta. Sistemas, atuadores e sensores comumente apresentarem esta característica.

- **Relé**: Elemento empregado para modelar histere elétrica. Uma das formas de controles mais básicas que existe é o controlador liga-desliga. O Relé é basicamente uma chave que comuta entradas para diferentes saídas. A não linearidade é decorrente da descontinuidade do sinal no formato de histerese, ou seja, a função possui uma curva ao ser acionada distinta da curva ao ser desligada.

- **Folga**: Elemento empregado para modelar histere mecânica. Sistemas mecânicos necessitam de folga para poderem operar com níveis de atrito baixo. A ausência de folga pode levar ao travamento dos mecanismos. A não linearidade ocorre quando há inversão no sentido de movimento devido à descontinuidade na transmissão do movimento. Exemplo: Na Figura (1.9) a peça **A** desloca a peça **B** pela ação da força **F**. Se houver inversão de **F** o movimento de **A** primeiro se deslocará através de Δ**A** sem que **B** se desloque.

- **Atraso**: Não é possível ler um sinal de forma instantânea, um pequeno tempo de processamento é consumido, este efeito gera um atraso entre o sinal real e o sinal lido.

- **Funções Trigonométricas**: Seno e coseno são funções não lineares, tangente e cotangente são funções descontínuas. Estas são algumas das não linearidades destas funções.

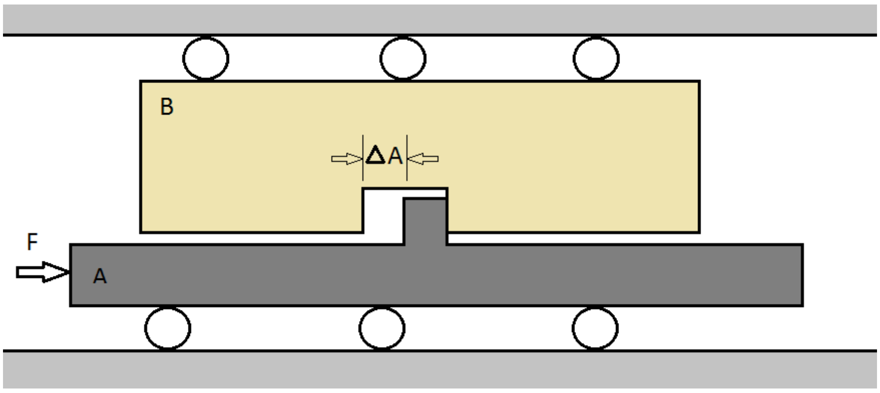

Figura 1.9: **A** é a peça móvel, **B** é a peça movida.

1.3 Estudo de Caso - Amortecedor de Impacto

Uma dada massa **m** tem oscilação livre com deslocamento definido pelo referencial **x** de tal modo que **m** é sustentada por uma mola k_1 de modo que seu peso se contrapõe a força elástica. Ver Figura (1.10)

Numa plataforma abaixo fica o absorvedor de impacto. Caso a amplitude de oscilação em torno da posição de equilíbrio não alcance o absorvedor, então a massa **m** oscila livremente como um sistema massa-mola.

Entretanto, se a amplitude de oscilação aumentar a ponto da massa se chocar com o absorvedor, então o sistema passará a ter rigidez composta por k_1 e k_2 e terá perdas definidas por $b_{amortecedor}$, então o modelo precisa ser redefinido para esta nova realidade. Observe que a ação do absorvedor será apenas em um sentido.

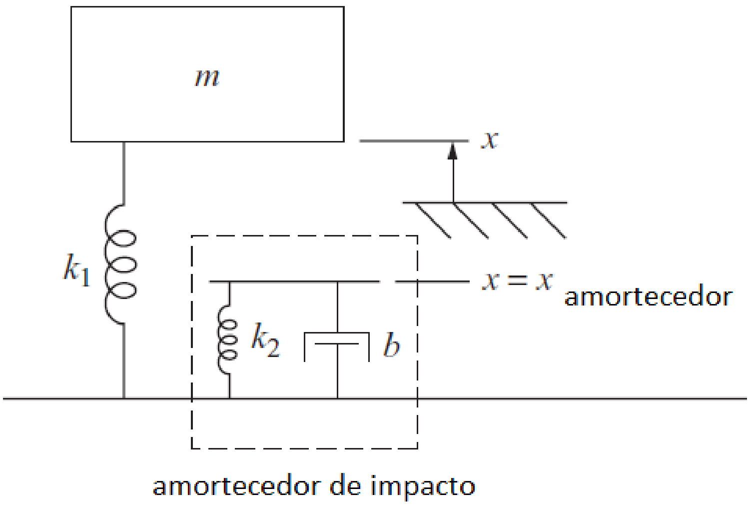

Figura 1.10: Amortecedor de fim de curso.

O modelo em espaço de estado será:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= \frac{1}{m}(F_{k1} + Famortecedor) \end{aligned} \tag{1.6}$$

Aonde:

$$F_{k1} = -k_1 x \tag{1.7}$$

é a força na mola principal e

Este modelo, constituído por equações lineares é não linear uma vez que a equação que descreve o comportamento dinâmico muda em função da amplitude de deslocamento. Este comportamento pode ser modelado utilizando-se um chaveamento de sinal de entrada, dependo do estado da amplitude, ou seja, o sistema terá uma saída, mas terá duas entradas possíveis.

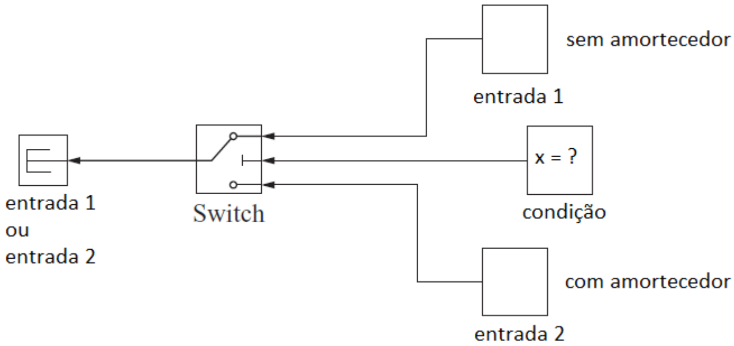

Figura 1.11: Chaveamento condicional.

Para fazer a simulação são necessários os parâmetros físicos. Neste caso os valores são apresentados na Figura (1.12), abaixo. De posse destes valores se pode construir a simulação, ver Figura (1.13).

	Symbol	Value
Model parameters	m	1 kg
	k_1	10 N/m
	k_2	50 N/m
	b	50 N s/m
	x_{snub}	−0.05 m
Initial conditions	$x(0)$	0.05 m
	$v(0)$	−0.5 m/s

Figura 1.12: Valores físicos atribuídos.

Analise com muita atenção a Figura (1.13). Tente identificar o ponto aonde se faz a decisão condicional de que entrada será escolhida. Verifique também aonde se encontra a equação (1.5). Este modelo produz como saída os sinais de deslocamento, velocidade e força. Estes sinais são apresentados nas Figuras (1.14) e (1.15) abaixo.

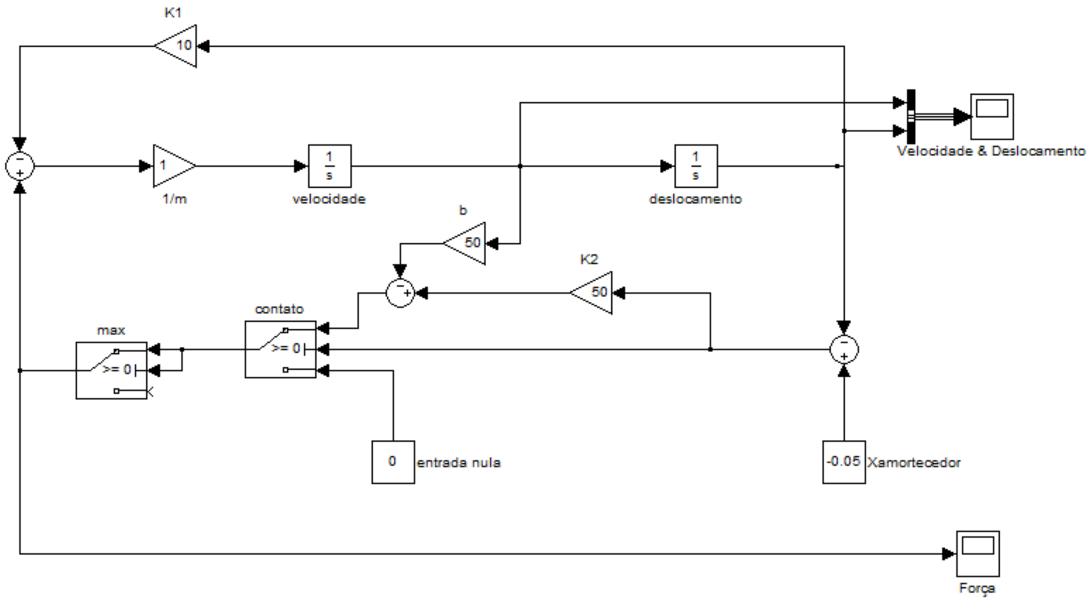

Figura 1.13: Modelo de simulação não linear.

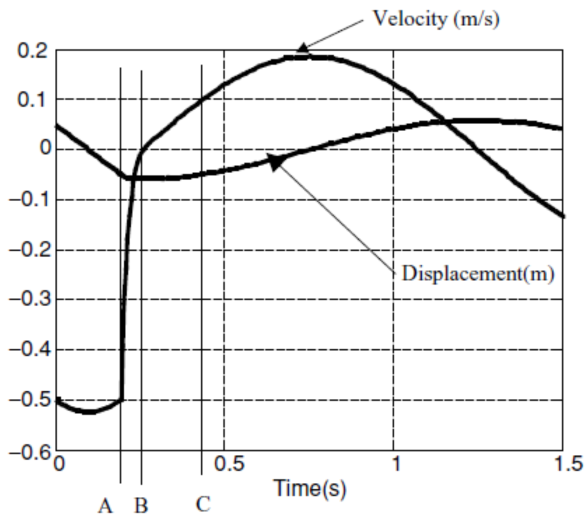

Figura 1.14: Velocidade e deslocamento estimados no absorvedor.

1.3.1 Abordagem Alternativa

Uma outra forma de realizar a simulação é gerando uma função que será chamada pela simulação. Está é uma forma de interação entre o ambiente gráfico do Simulink e o editor de texto do Matlab. Também é possível enviar dados do ambiente gráfico diretamente para a área de trabalho *workspace* do Matlab.

A vinculação da função à simulação é feito utilizando-se o bloco *Matlab Function*, de acordo com a Figura (1.16).

Observe que a saída de dados não foi alterada, mas sim a forma com que é feita a comutação entre os sinais que de entrada que irão definir a atuação ou não do amortecedor de impacto sobre o sistema massa-mola.

O bloco *Matlab Function* foi escrito em um arquivo.m que é chamado cada vez que a simulação é executada. O código da função segue abaixo. Observe que a função retorna o deslocamento e a velocidade, que são os parâmetros para o cálculo da equação:

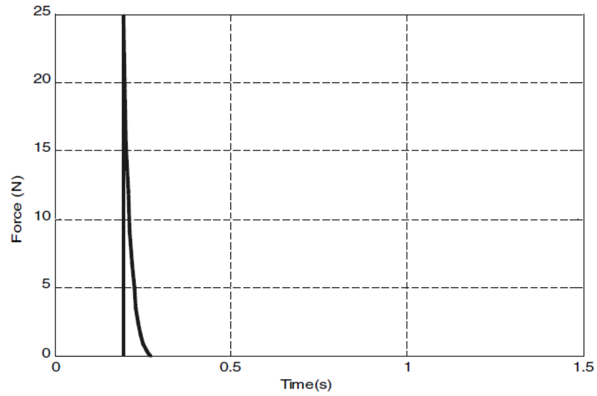

Figura 1.15: Força estimada no absorvedor.

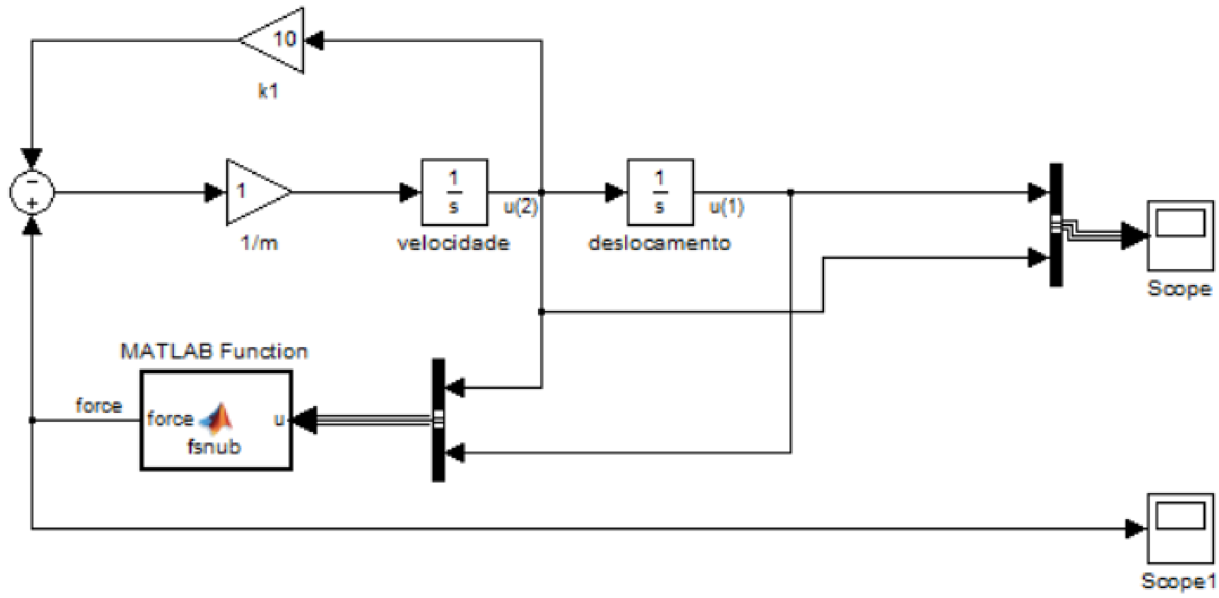

Figura 1.16: Forma alternativa de simulação do amortecedor.

$$F_{nl} = F_o sign(v) + bv \tag{1.8}$$

```
function [force]=fsnub(u)
%
% FSNUB computes the nonlinear force for snubber simulation
%
% Computes the snubber force as a function of
% displacement and velocity
%
% u(1) = displacement u(2) = velocity
%
```

```
xsnub = -0.05; % Location of snubber
k2 = 50.0; % Spring constant (N/m)
b = 50.0; % Damping (Ns/m)
%
if u(1) > xsnub
force = 0.0; % not in contact
else
force = k2*(xsnub-u(1))-b*u(2);
end;
%
% Snubber cannot exert a negative force
%
if force < 0
force = 0;
end;
```

1.4 Atividade Laboratorial

1. Refaça a simulação apresentada na figura (1.13) para um tempo de 1,5s, com os parâmetros da Figura (1.12) e verifique se os resultados são idênticos aos apresentados. As condições iniciais devem ser aplicadas nos blocos integradores.

2. Descreva o comportamento das variáveis em cada um dos gráficos obtidos, comparando-os com os deslocamentos da massa da Figura (1.1).

3. Refaça a simulação apresentada na figura (1.16) com os parâmetros da Figura (1.12) e verifique se os resultados são idênticos aos apresentados. As condições iniciais devem ser aplicadas nos blocos integradores.

4. Estude o código abaixo. Inclua um comentário em cada linha após o símbolo %.

```
% M-file to to perform parametric study of snubber
%
X0 = 0.05; %
Xsnub= -0.05; %
%
maxd=zeros(6,6);  %
% for each run
kall=[1 10 20 30 40 50];  %
ball=[1 10 20 30 40 50]; %
%
for i=1:6;
```

```
    for j=1:6;
      b=ball(j); %
      k2=kall(i); %
      [T,Y]=sim('algo2',2); %
      maxd(i,j)= Xsnub- min(Y(:,1)); %
    end
  end
  meshz(kall,ball,maxd);  %
```

5. O modelo de simulação referido no código corresponde ao apresentado na Figura (1.17).

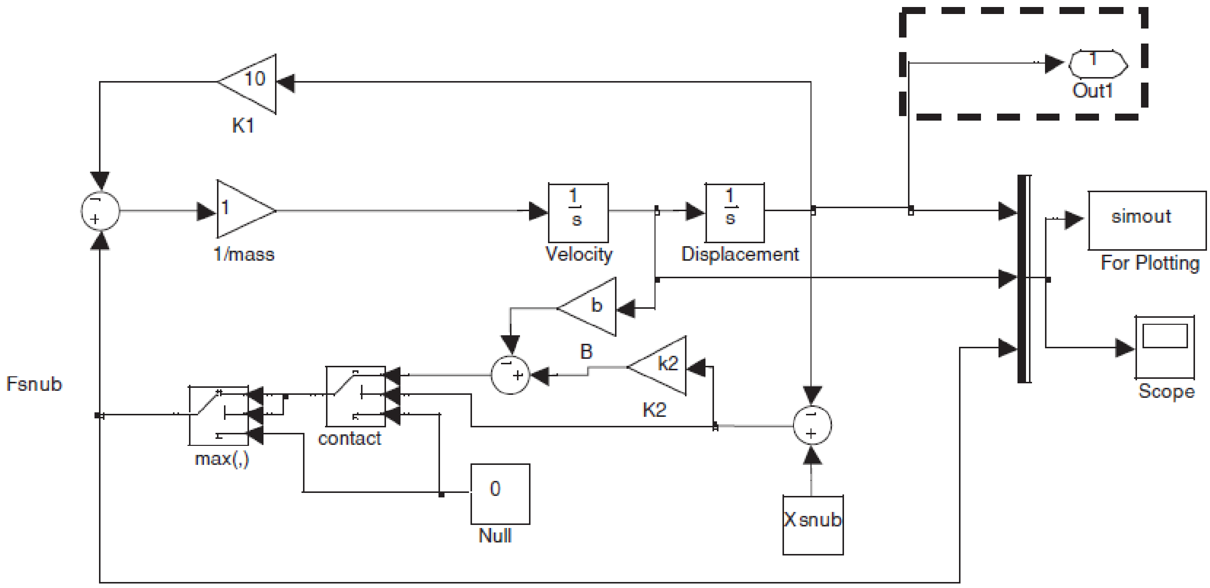

Figura 1.17: *algo*2.

Execute o algoritmo acima, em conjunto com a simulação. Analise o resultado. Quais informações relevantes se pode retirar dele?

Bom Trabalho!

1.5 Relatório

Ao seguir um procedimento você tem uma receita para alcançar o objetivo da aula, então para que se faz um relatório?

1. Para você aprender a usar procedimentos metódicos;
2. Para documentar o que foi feito;
3. Para demonstrar o que você fez;

Faça um relatório, **em dupla**, baseado nas aulas teóricas e no material de apoio bibliográfico. **O relatório deve ser entregue impresso ao professor na data prevista, atrasos incorrerão em perda de nota. Qualquer comparação com o trabalho de outro aluno que se configurar em fraude, como parágrafos e figuras idênticas, terá nota ZERO para os dois trabalhos**. Para não acontecer semelhanças indesejadas escolha valores específicos para as variáveis m, b e K Este relatório deve conter:

Não copie trabalhos de colegas, não se engane. Trabalhos clonados terão nota redonda. Qualquer comparação com o trabalho de outro aluno que se configurar em fraude, como parágrafos e figuras idênticas, terá nota ZERO para ambos os trabalhos.

Trabalho em dupla. Imprima o arquivo pdf e escreva à mão as respostas. Entrega dessa atividade 28/07/2021. Deixar na portaria do IFAM CMDI. Assinar lista assim que entregar o trabalho. Após essa data não será mais aceito o trabalho.

$$G(s) = \frac{5s+3}{s^4+2s^3+4s^2+8s+5} \tag{1.9}$$

$$\dddot{x} + 8\ddot{x} + 15\dot{x} = u(t) \tag{1.10}$$

$$y(t) = K(\dot{x} + x) \tag{1.11}$$