Lista Avaliativa 3 – Controle Discreto
28/08/2024
Espaço de Estados Discreto

Aluno: Gabriel Almeida Santos de Oliveira.
Nº de matrícula: 2021000042.

2. Considere o sistema dado por :

$$\begin{aligned} x_1[k+1] &= 0.6x_1[k] + u[k] \\ x_2[k+1] &= 0.4x_2[k] + 5u[k] \\ y[k] &= x_1[k] + 3x_2[k] \end{aligned} \tag{2}$$

Determine a estabilidade do sistema, ache sua função de transferência equivalente (com condições iniciais nulas) e determine seu ganho estático.

A estabilidade do sistema é determinada pelos autovalores da matriz G, que multiplica a matriz de estados [X1(K) X2(K)]', apresentada abaixo:

$$x_1[K+1] = 0{,}6\,x_1[K] + u[K]$$
$$x_2[K+1] = 0{,}4\,x_2[K] + 5u[K]$$
$$y[K] = x_1[K] + 3x_2[K]$$

$$x[K+1] = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0{,}4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(K) \\ x_2(K) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} u(K)$$

$$y(K) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(K) \\ x_2(K) \end{bmatrix}$$

Utilizando o código apresentado ao lado foram obtidos os autovalores: 0.6 e 0.4. Sendo ambos menores que 1, o sistema é estável.

```
close all;
clc; clear all;

%% declaração matrizes discretas

G = [0.6 0;...
     0 0.4];
H = [1;...
     5];
C = [1 3];
D = [];

%put Ts=-1 with sample time is indetermined
SS = ss(G,H,C, D,-1)

%% estabilidade
auto_val = eig(G)

%% FT
Gma = tf(SS)

%% Ganho
[num, den] = tfdata(Gma, 'v');
syms z;
sys_syms = poly2sym(num, z)/poly2sym(den, z)
gain = limit((1-z^-1)*sys_syms*(z/(1-z^-1)), z, 1)
```

A Função de Transferência foi obtida pelos cálculos apresentados abaixo, e seu resultado foi confirmado com o código apresentado previamente.

G FT é dada por:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = C[z.I - G]^{-1} H$$

$$= [1 \;\; 3].\left(\begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0{,}4 \end{bmatrix}\right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

• calculando a inversa:

$$\begin{bmatrix} z-0{,}6 & 0 \\ 0 & z-0{,}4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(z-0{,}4)(z-0{,}6)} \begin{bmatrix} z-0{,}4 & -0 \\ -0 & z-0{,}6 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{z^2 - z + 0{,}24} \begin{bmatrix} z-0{,}4 & 0 \\ 0 & z-0{,}6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{z-0{,}4}{EC} & 0 \\ 0 & \frac{z-0{,}6}{EC} \end{bmatrix}$$

$$FT = [1 \;\; 3] \begin{bmatrix} \frac{z-0{,}4}{EC} & 0 \\ 0 & \frac{z-0{,}6}{EC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{z-0{,}4}{EC} & \frac{3z-1{,}8}{EC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{z-0{,}4 + 5(3z-1{,}8)}{EC} = \frac{16z - 9{,}4}{z^2 - z + 0{,}24}$$

```
Gma =

  16 z - 9.4
 --------------
 z^2 - z + 0.24
```

Como anteriormente, se calculou o ganho estático, e foi confirmado o seu valor no Matlab.

* Ganho obtido pelo teorema do valor final da FT

$$VF = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}) . FT . U(z) = \cancel{(1-z^{-1})} \frac{16z - 47/5}{z^2 - z + 0{,}24} \cdot \frac{1}{\cancel{(1-z^{-1})}}$$

$$VF = \frac{16 - 47/5}{1 - 1 + 0{,}24} = 27{,}5$$

```
gain =

55/2

>> 55/2

ans =

  27.5000
```

3. Considere o sistema dado por :

$$\begin{aligned} x[k+1] &= (a-3a)x[k] + bu[k] \\ y[k] &= x[k] \end{aligned} \tag{3}$$

Determine para quais valores de a e b o sistema é internamente estável.

A estabilidade do sistema é determinada pelos autovalores da matriz G, pois estes correspondem aos polos da Função de Transferência, sendo o sistema discreto, esses devem estar dentro do círculo unitário.

$G = [a-3a]$, $H = [b]$

$\det([zI - G]) = 0$ % autovalores de G
$\det([z-(a-3a)]) = 0$
$\det([z+2a]) = 0$
$z+2a = 0$
$z = -2a$ % $|z|<1$, para que o polo esteja dentro do círculo unitário.
$|z| = |-2a| < 1$
$|a| < 0{,}5$

* Na prática, os polos apenas se encontram no lado esquerdo do semiplano discreto quando o ganho está excessivamente alto, portanto: $0 < a < 0{,}5$.

A variável b não influencia na estabilidade do sistema.
$\therefore$ b pode ser qualquer valor $\mathbb{R}$

4. Para o sistema em malha aberta:

$$x[k+1] = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}} x[k] + \underbrace{\begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}} u[k] \tag{4}$$

a) Verifique a controlabilidade do sistema.

A controlabilidade do sistema e determinada pela formula:

$$M = [\ B_d \quad A_dB_d \quad A_d^2B_d \quad \dots \quad A_d^{n-1}B_d\ ]_{n\times n}$$

Sendo a matriz Ad equivalente a G e Bd a H. Se a matriz M resultante tiver posto pleno, ou seja, o posto é igual a ordem do sistema, o sistema é controlável.

Se utilizou o seguinte script no Matlab para se descobrir se o sistema é controlável:

```
close all;
clc; clear all;

G = [1 1;...
    0 1];

H = [0.5; ...
    1];

%% letra a) controlabilidade do sistema

% ordem do modelo
n = size(G,2);
disp('Ordem do modelo')
disp(n)

mat_ctrlb = ctrb(G, H) %obtendo matriz de controlabilidade

if rank(mat_ctrlb) == n
   disp('Matriz de Obs. tem posto completo')
   disp('matriz é controlavel.')
else
   disp('Nao controlavel')
end
```

Se obteve como resultado que o sistema é controlável.

b) Verifique a observabilidade do sistema para $C = [0\ 1]$ e $C = [1\ 0]$.

A observabilidade do sistema é ditada pela formula ao lado:

$$N = \begin{bmatrix} C \\ CA_d \\ CA_d^2 \\ \cdots \\ CA_d^{n-1} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

```

%% letra b) observabilidade

C1 = [0 1];
C2 = [1 0];

disp(' ')
mat_ob1 = obsv(G,C1);
if rank(mat_ob1) == n
   disp('Matriz de controlabilidade C1 tem posto completo')
   disp('Mat com C1 é observavel.')
else
   disp('Mat com C1 nao e observavel')
end

disp(' ')
mat_ob2 = obsv(G,C2);
if rank(mat_ob2) == n
   disp('Matriz de Obs. C2 tem posto completo')
   disp('Mat com C2 é observavel.')
else
   disp('Mat com C2 nao e observavel')
end
```

Sendo Ad equivalente a matriz G. Se a matriz N tiver posto pleno, o sistema é observável. Como anteriormente, foi utilizando um script no software Matlab presente ao lado para se descobrir se o sistema é observável ou não.

Se obteve que para C1 = [0 1] o sistema não é observável, e para C = [1 0] o sistema é observável.

c) Justifique o resultado (b), explicitando o motivo da ocorrência (ou não) da observabilidade.

O sistema para o para C1 não é observável por que o posto da matriz de observabilidade obtida com C1 não é igual a ordem do sistema, isso reflete no fato de que não é possível se calcular o estado do sistema no tempo de amostragem zero a partir da saída do sistema. O mesmo não ocorre para C2, pois a matriz de observabilidade do mesmo tem posto pleno.

d) Encontre, sem ajuda do matlab, o ganho K que leva os polos em malha fechada para $z = 0.9 \pm j0.1$. Assuma que realimentação de estados é possível

④ d) A dinâmica de malha fechada na realimentação de estados é dada por: $(G - HK)$. Para se obter a equação característica é feito os cálculos abaixo:

$$\det([zI - G - HK]) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}\right)\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,5K_1 & 0,5K_2 \\ K_1 & K_2 \end{bmatrix}\right)\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1-0,5K_1 & 1-0,5K_2 \\ -K_1 & 1-K_2 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} z-1+0,5K_1 & -1+0,5K_2 \\ K_1 & z-1+K_2 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$(z-1+0,5K_1)(z-1+K_2) - (-1+0,5K_2)(K_1) = 0$$

$$z^2 - z + K_2 z - z + 1 - K_2 + 0,5K_1 z - 0,5K_1 + \cancel{0,5K_1K_2} + K_1 - \cancel{0,5K_1K_2} = 0$$

$$z^2 + [-2 + K_2 + 0,5K_1]z + [1 - K_2 + 0,5K_1] = 0 = E.C.FTMF$$

* Polo desejado: $0,9 \pm j0,1$

$$(z - 0,9 + j0,1)(z - 0,9 - j0,1) = 0$$

$$z^2 - 0,9z - \cancel{0,1zj} - 0,9z + 0,81 + \cancel{0,09j} + \cancel{0,1zj} - \cancel{0,09j} + 0,01 = 0$$

$$z^2 - 1,8 + 0,82 = 0 = E.C.\ \text{desejada.}$$

* Igualando ambas as equações características:

z^2: $1 = 1$

z^1: $-2 + K_2 + 0,5K_1 = -1,8$ I

z^0: $1 - K_2 + 0,5K_1 = 0,82$ II

$K = [0,02 \quad 0,19]$

I

$K_2 = 0,2 - 0,5K_1$

I → II

$1 - (0,2 - 0,5K_1) + 0,5K_1 = 0,82$ $\therefore K_2 = 0,2 - 0,5 \cdot 0,02$

$K_1 = 0,82 - 1 + 0,2 = 0,02$ $K_2 = 0,19$

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO AMAZONAS

CAMPUS MANAUS - DISTRITO INDUSTRIAL

INSTITUTO FEDERAL AMAZONAS Campus Manaus-Distrito Industrial

e) Encontre, sem ajuda do matlab, o ganho L que leva os polos em malha fechada de estimação para $z = 0.6 \pm j0.3$.

④ d) A dinâmica de malha fechada na realimentação de estados é dada por: $(G - HK)$. Para se obter a equação característica é feito os cálculos abaixo:

$$\det([zI - G - HK]) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}\right)\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,5K_1 & 0,5K_2 \\ K_1 & K_2 \end{bmatrix}\right)\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1-0,5K_1 & 1-0,5K_2 \\ -K_1 & 1-K_2 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} z-1+0,5K_1 & -1+0,5K_2 \\ K_1 & z-1+K_2 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$(z-1+0,5K_1)(z-1+K_2) - (-1+0,5K_2)(K_1) = 0$$

$$z^2 - z + K_2 z - z + 1 - K_2 + 0,5K_1 z - 0,5K_1 + \cancel{0,5K_1K_2} + K_1 - \cancel{0,5K_1K_2} = 0$$

$$z^2 + [-2 + K_2 + 0,5K_1]z + [1 - K_2 + 0,5K_1] = 0 = E.C.FTMF$$

* Polo desejado: $0,9 \pm j0,1$

$$(z - 0,9 + j0,1)(z - 0,9 - j0,1) = 0$$

$$z^2 - 0,9z - \cancel{0,1zj} - 0,9z + 0,81 + \cancel{0,09j} + \cancel{0,1zj} - \cancel{0,09j} + 0,01 = 0$$

$$z^2 - 1,8 + 0,82 = 0 = E.C.\ desejada.$$

* Igualando ambas as equações características:

z^2: $1 = 1$

z^1: $-2 + K_2 + 0,5K_1 = -1,8$ I

z^0: $1 - K_2 + 0,5K_1 = 0,82$ II

$K = [0,02 \quad 0,19]$

I

$K_2 = 0,2 - 0,5K_1$

I → II

$1 - (0,2 - 0,5K_1) + 0,5K_1 = 0,82$

$K_1 = 0,82 - 1 + 0,2 = 0,02$

$\therefore K_2 = 0,2 - 0,5 \cdot 0,02$

$K_2 = 0,19$

5. Considere o sistema, com tempo de amostragem de 10 ms:

$$\ddot{x} = 1000x + 20u \tag{5}$$

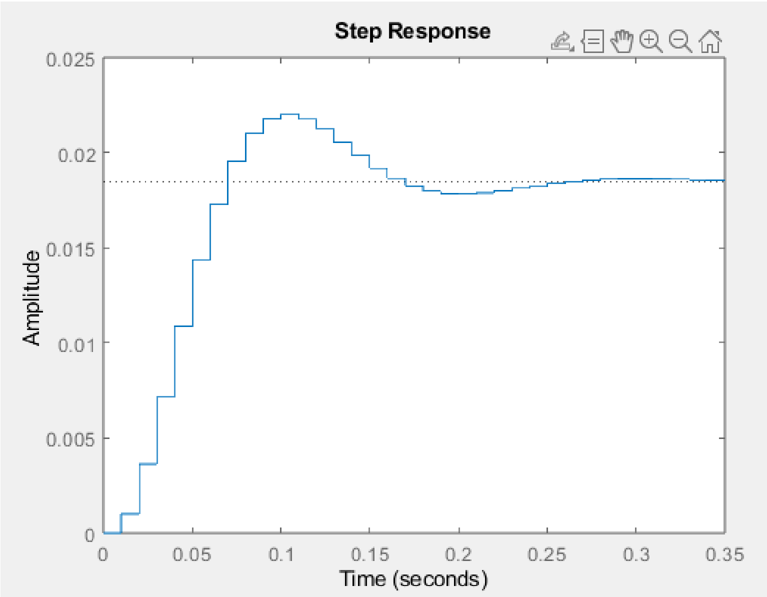
a) Use alocação de polos para projetar um controlador que garanta um tempo de assentamento de 0.25 segundos e um overshoot de menos de 20%.

Foi utilizado um script no Matlab para projeto do controlador, o mesmo é apresentado abaixo:

```matlab
%% montando as matrizes SS
% as variaveis de estado são X1 = x e X2 = x'
% derivando: X1' = x' e X2' = x''
% X1' = X2 ; X2' = 1000 X1 + 20 U

A = [0 1;...
    1000 0];

B = [0;...
    20];

C = [1 0];

D = [];

SS2 = ss(A, B, C, D)

%% discretizacao das matrizes
Ts = 0.01
SS2_z = c2d(SS2, Ts,'zoh')

G = SS2_z.A
H = SS2_z.B
C = SS2_z.C

%% verificacao controlabilidade
n = size(G,2); % ordem do modelo
Co = ctrb(G,H);

if rank(Co) == n
   disp('Matriz de Cont. tem posto completo')
   disp('O par é controlavel.')
else
   disp('Nao controlavel')
end
```

```matlab
%% calculo dos polos desejados

tsd = 0.25*0.95;
Mp = 0.2*0.95;
% 0.95 para dar uma margem de erro

zeta = sqrt( (log(Mp)^2) / (pi^2 + log(Mp)^2))
wn = 4 / (zeta*tsd)

Pd = roots([1 2*zeta*wn wn^2])
Pd_z = exp(Pd*Ts)

%% Alocacao dos polos
%polos discretos deesjados
[K,precision] = place(G,H,Pd_z);

disp('Ganho K')
disp(K)

% Checar resposta
disp('Polos de malha fechada')
disp(eig(G-H*K))

%% verificacao resposta
step(ss((G-H*K), H, C, D, Ts))
stepinfo(ss((G-H*K), H, C, D, Ts))
```

Se obteve a dinâmica desejada como observável abaixo:




```
ans =

  struct with fields:

        RiseTime: 0.0400
    SettlingTime: 0.2400
     SettlingMin: 0.0173
     SettlingMax: 0.0220
       Overshoot: 18.9860
      Undershoot: 0
            Peak: 0.0220
        PeakTime: 0.1000
```

b) Modifique o controlador passado para que o sistema siga referência ($y[k] = x[k]$) ainda mantendo um tempo de assentamento de 0.25 segundos e um overshoot de menos de 20%.

Para rejeição do distúrbio é necessário se acrescentar um termo integrador ao espaço de estados, o mesmo é feito através do script desenvolvido no Matlab apresentado abaixo:

```
%% Leutura do sistema e discretização

A = [0 1;...
    1000 0];

B = [0;...
    20];

C = [1 0];

D = [];

SS2 = ss(A, B, C, D)

Ts = 0.01
SS2_z = c2d(SS2, Ts,'zoh')

G = SS2_z.A;
H = SS2_z.B;
C = SS2_z.C;
```

```
%% Sistema aumentado (acrescentado integrador)
n = size(A,2); % ordem do modelo
m = size(B,2); % numero de entradas
p = size(C,1); % numero de saidas

G
G_aug = [G    zeros(n,p);...
      -Ts*C eye(p,p)]
H
H_aug = [H;...
       zeros(p,m)]
C
ref_mat = [zeros(n,p); Ts*eye(p)]

% Nova ordem do modelo
n_aug = size(G_aug,2);
disp('Ordem do modelo')
disp(n_aug)
```

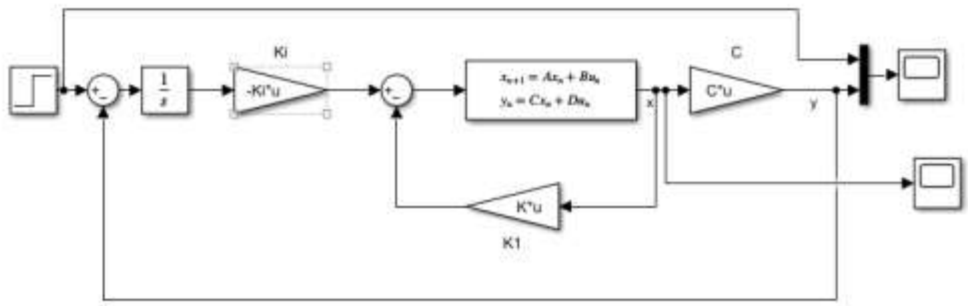
Matrizes obtidas:

```
G =

   1.0504   0.0102
  10.1675   1.0504


G_aug =

   1.0504   0.0102        0
  10.1675   1.0504        0
  -0.0100        0   1.0000


H =

   0.0010
   0.2034


H_aug =

   0.0010
   0.2034
        0
```

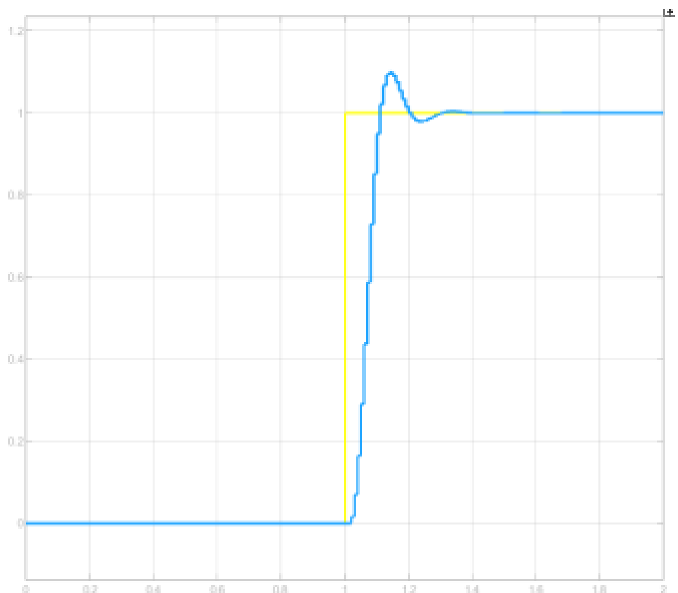
```
%% verificacao controlabilidade
Co = ctrb(G_aug,H_aug);

if rank(Co) == n_aug
    disp('Matriz de Cont. tem posto completo')
    disp('O par é controlavel.')
else
    disp('Nao controlavel')
end


%% calculo dos polos desejados

tsd = 0.25*0.95;
Mp = 0.2*0.95;
% 0.95 para dar uma margem de erro

zeta = sqrt( (log(Mp)^2) / (pi^2 + log(Mp)^2))
wn = 4 / (zeta*tsd)

Pd = roots([1 2*zeta*wn wn^2]);
Pd_z = exp(Pd*Ts);
Pd_z(end+1) = 0.7
```

```
%% Calculo ganho do integrador
[K,precision] = place(G_aug,H_aug,Pd_z);

disp('Ganho K')
disp(K)

% Checar resposta
disp('Polos de malha fechada')
disp(eig(G_aug-H_aug*K))

Ki = K(end);
K = K(1:end-1);
```

Se utilizou o seguinte modelo de simulação no simulink para verificação da resposta:



A partir do qual se obteve a resposta observada ao lado, o sistema segue referência.



c) A malha fechada (b) rejeita distúrbios não modelados?

Sim, dado que a mesma possui um integrador, eventualmente o erro provindo de um distúrbio será anulado.

6. Para o sistema em malha aberta (considere $C = [1\ 0]$):

$$x[k+1] = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.8815 & 0.4562 \\ -0.4562 & 0.7903 \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}} x[k] + \underbrace{\begin{bmatrix} 0.1185 \\ 0.4562 \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}} u[k] \tag{6}$$

a) Encontre o ganho K que leva os polos em malha fechada para $z = 0.6 \pm j0.3$. Assuma que realimentação de estados é possível.

Como feito anteriormente, se utilizou o matlab para calcular os ganhos:

```
%% sistema

G = [0.8815 0.4562;...
    -0.4562 0.7903]
H = [0.1185;...
    0.4562]
C = [1 0]
D = [];
Ts = 1


%% polos desejados
Pd_z = [0.6 + j*0.3; 0.6 - j*0.3]


%% Cáluclo ganhos
[K,precision] = place(G,H,Pd_z); %calculo do ganho que leva ao polo desejado
disp(eig(G-H*K)) %mostrar os polos obtidos com o ganho calculado


%% verificacao resposta
step(ss((G-H*K), H, C, D, Ts))
```

Se obteve os ganhos:

```
Ganho K
   0.0731    1.0152
```

b) Encontre um ganho integrativo e mostre o diagrama de blocos (desenhado ou no simulink) com o termo integrativo incluido. O polo extra deve ser colocado em $z = 0.9$.

Como feito anteriormente, se utilizou o matlab para calcular o ganho integrativo:

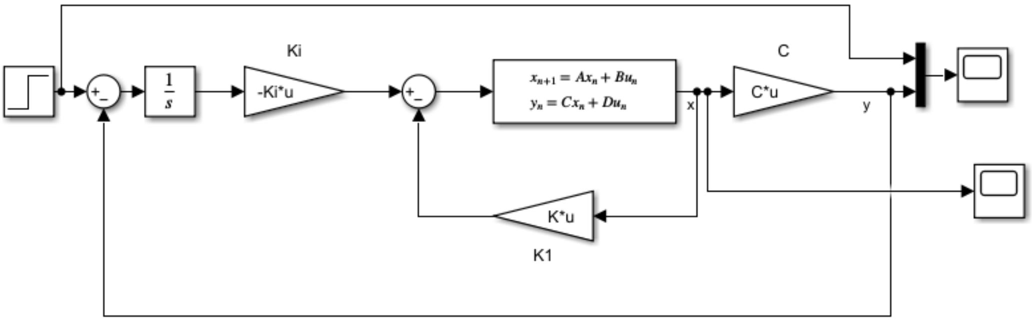
```
%% sistema

G = [0.8815 0.4562;...
    -0.4562 0.7903];
H = [0.1185;...
    0.4562];
C = [1 0];
D = [];
Ts = 1;

%% Sistema aumentado (acrescentado integrador)
n = size(G,2); % ordem do modelo
m = size(H,2); % numero de entradas
p = size(C,1); % numero de saidas

G
G_aug = [G    zeros(n,p);...
      -Ts*C eye(p,p)]
H
H_aug = [H;...
       zeros(p,m)]
C
ref_mat = [zeros(n,p); Ts*eye(p)]

% Nova ordem do modelo
n_aug = size(G_aug,2);

%% verificacao controlabilidade
Co = ctrb(G_aug,H_aug);

if rank(Co) == n_aug
disp('Controlavel')
end


%% polos desejados
Pd_z  = [0.6 + i*0.3; 0.6 - i*0.3];
Pd_z(end+1) = 0.9


%% Cáluclo Ganhos
[K,precision] = place(G_aug,H_aug,Pd_z);
disp(eig(G_aug-H_aug*K))

Ki = K(end); % ganho integrador
K = K(1:end-1);
```

```
Ganho integrador

Ki =

  -0.1073
```

```
Ganho realimentação

K =

   0.3619    1.1594
```

```
G =

   0.8815    0.4562
  -0.4562    0.7903


G_aug =

   0.8815    0.4562         0
  -0.4562    0.7903         0
  -1.0000         0    1.0000


H =

   0.1185
   0.4562


H_aug =

   0.1185
   0.4562
        0
```

O diagrama de blocos é o mesmo apresentado anteriormente:



c) Encontre um ganho de estimação L para trabalhar em conjunto com o controlador. Mostre o diagrama de blocos (desenhado ou no simulink) e explique por qual motivo o conjunto controlador + observador está funcionando ou não.

O ganho integrativo se manteve o mesmo, então se utilizou o seguinte script para cálculo do ganho do observador:

```
%% sistema
G = [0.8815 0.4562;...
    -0.4562 0.7903];
H = [0.1185;...
    0.4562];
C = [1 0];
D = [];
Ts = 1;

%% verificacao observabilidade
Co = obsv(G,C);

n = size(G,2);
if rank(Co) == n
   disp('Observavel')
end

%% polos desejados
Pd_z  = [0.6 + i*0.3; 0.6 - i*0.3];

%% Cáluclo ganho observador
%polos discretos deesjados
[Lt,precision] = place(G',C',Pd_z);
L = Lt';

disp(eig(G-L*C)) % verificação polos obtidos
```

```
Ganho do observador:

L =

    0.4718
   -0.1795
```

O diagrama de blocos do observador de estados em conjunto com o bloco integrador foi montado no simulink e pode ser observado abaixo: