Análise da Dinâmica e Estratégia de Controle via Realimentação Linearizante para um Robô Autoequilibrado de Duas Rodas

Luan Diego Ramalho Arantes
Mestrado em Engenharia de Automação e Sistemas
Sistemas Não Lineares
Florianópolis, Brasil
luandrarantes@gmail.com

***Resumo*—Robôs autoequilibrados de duas rodas são sistemas não lineares e naturalmente instáveis que demandam técnicas avançadas de controle para garantir sua estabilidade e rastreamento de trajetórias de forma eficaz. No contexto deste estudo, a dinâmica do robô foi cuidadosamente analisada para entender o comportamento de seus pontos de equilíbrio. Com base nessa análise, a modelagem e o controle do robô autoequilibrado foram detalhados. Utilizando a abordagem de linearização por realimentação, o sistema foi desacoplado e foram derivados subsistemas que foram posteriormente controlados. O principal objetivo era desenvolver controladores que permitissem um rastreamento eficaz de trajetórias, considerando trajetórias em formato de quadrado e círculo como estudos de caso. Através da técnica de regulador quadrático linear, os ganhos dos controladores foram otimizados para garantir um rastreamento preciso e uma resposta rápida. Os resultados simulados, comparando as trajetórias desejadas com as obtidas, confirmaram a eficácia dos controladores projetados.**

***Index Terms*—Linearização por realimentação, Rastreamento de trajetória, Robô autoequilibrado**

I. INTRODUÇÃO

O controle por realimentação, reconhecido como parte fundamental e intrínseca a uma gama de situações e a base da engenharia de controle de sistemas, este conceito é este presente em inúmeros sistemas dinâmicos, desde o equilíbrio e a locomoção de bípedes até a aterrissagem autônoma de foguetes. Embora os métodos de controle tradicionais sejam adequados para sistemas simples, sistemas mais complexos, como robôs com múltiplos eixos de movimento, plantas químicas complexas e redes elétricas avançadas, exigem abordagens mais sofisticadas. Estes sistemas apresentam desafios devido às suas complexas interações e aos impactos que um parâmetro pode ter em outro .

Os robôs autoequilibrados representam uma classe de sistemas complexos que operam sob o princípio de manter o equilíbrio enquanto realizam movimentos em superfícies variadas. Estes robôs, frequentemente equipados com duas rodas, empregam técnicas avançadas de controle para permanecerem eretos e navegarem em ambientes complexos. O estudo de tais sistemas é crucial, não apenas devido à sua relevância na pesquisa robótica atual, mas também devido às suas potenciais aplicações em áreas como transporte pessoal, logística e assistência a mobilidade.

Um dos desafios centrais na operação destes robôs é a necessidade de controladores precisos e robustos. O controlador deve garantir não apenas que o robô se mantenha equilibrado, mas também que seja capaz de seguir trajetórias predeterminadas em diferentes cenários. O seguimento de trajetória é uma habilidade vital para muitas aplicações práticas, permitindo que o robô execute tarefas de maneira autônoma e eficiente.

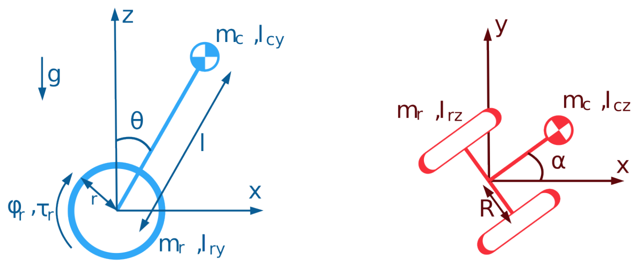
Neste contexto, o presente trabalho visa desenvolver um controlador para um robô autoequilibrado de duas rodas, focando no seguimento de trajetória. O estudo aborda a modelagem do sistema, o desenvolvimento do controlador e a simulação de seu desempenho em duas diferentes trajetórias. As metodologias e resultados aqui apresentados oferecem uma perspectiva técnica e detalhada sobre os desafios e soluções associados ao controle de robôs autoequilibrados.

II. DESENVOLVIMENTO

Nesta seção, é abordada a modelagem detalhada do robô autoequilibrado, proporcionando uma base sólida para compreensão do sistema e seu comportamento. A representação em espaço de estados é utilizada como principal ferramenta para capturar a dinâmica intrínseca do robô. Em sequência, é realizado um estudo aprofundado da dinâmica do sistema, explorando os pontos de equilíbrio e o comportamento sob variações de parâmetros. Concluindo esta seção, o projeto do controlador é elaborado com base nas informações coletadas, visando um desempenho otimizado no seguimento de trajetórias.

A. Modelagem do Sistema

Um robô autoequilibrado é caracterizado por duas rodas acopladas a uma estrutura vertical, tendo seu comportamento análogo a um pêndulo invertido fixado a um carrinho. Dado o interesse em modelar o movimento do robô em duas dimensões (x e y), dois ângulos se tornam fundamentais para a descrição do sistema: o ângulo de inclinação θ, que representa o desvio da estrutura vertical em relação ao eixo z, e o ângulo de guinada α, que descreve a rotação do robô em torno do



(a) Vista lateral.

(b) Vista superior.

Figura 1. Diagramas de corpo livre.

eixo z. A Figura 1a apresenta o diagrama de corpo livre do robô quando visto de lado (eixos x e z), enquanto a Figura 1b fornece uma perspectiva superior, mostrando o diagrama de corpo livre em relação aos eixos x e y.

As variáveis representadas nos diagramas têm os seguintes significados:

- m_c: Massa do centro de massa do robô.
- m_r: Massa da roda.
- I_{cy} e I_{cz}: Momentos de inércia do corpo em torno dos eixos y e z, respectivamente.
- I_{ry} e I_{rz}: Momentos de inércia da roda em torno dos eixos y e z, respectivamente.
- φ_r: Ângulo de rotação da roda.
- τ_r: Torque aplicado à roda.
- l: Distância entre o centro da roda e o centro de massa do robô.
- r: Raio da roda.
- R: Distância entre o centro do eixo do robô e a roda.
- g: Aceleração devido à gravidade.

A representação em espaço de estados para o sistema pode ser obtida utilizando as equações de Euler-Lagrange. Este método aproveita a análise da energia cinética e potencial do sistema para estabelecer as equações de movimento. A equação de Euler-Lagrange é dada por:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \tag{1}$$

Onde q_i representa as coordenadas generalizadas e Q_i são as forças não conservativas. O Lagrangiano L é definido como a diferença entre a energia cinética T e a energia potencial U:

$$L = T - U \tag{2}$$

É importante destacar que neste sistema ocorrem perdas devido a fatores não ideais, como o atrito. A função de dissipação de Rayleigh é uma ferramenta que pode ser utilizada para incluir estas perdas nas equações de movimento. Esta função representa a perda de energia associada ao atrito proporcional à velocidade, neste caso, do atrito entre a roda e o solo. A expressão para essa função é:

$$\mathcal{F} = \frac{b_r}{2}(\dot{\varphi}_{r1}^2 + \dot{\varphi}_{r2}^2) \tag{3}$$

Onde b_r é o coeficiente de atrito viscoso e $\dot{\varphi}_{r1}$ e $\dot{\varphi}_{r2}$ são as velocidades angulares das rodas.

A equação de Euler-Lagrange modificada, que leva em conta a dissipação causada pelo atrito, torna-se:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_i} \tag{4}$$

O robô pode ser conceptualmente dividido em duas partes principais: o centro de massa e as rodas. As energias associadas a cada uma dessas partes são descritas por:

Centro de Massa:

$$T_c = \frac{m_c v_c^2}{2} + \frac{I_{cy}\theta^2}{2} + \frac{I_{cz}\alpha^2}{2} \tag{5}$$

$$U_c = m_c g l \cos(\theta) \tag{6}$$

Rodas:

$$T_r = \frac{m_r(v_{r1}^2 + v_{r2}^2)}{2} + \frac{I_{ry}(\dot{\varphi}_{r1}^2 + \dot{\varphi}_{r2}^2)}{2} + I_{rz}\dot{\alpha}^2 \tag{7}$$

$$U_r = 0 \tag{8}$$

Onde v_c,v_{r1} e v_{r2} são as velocidades totais do centro de massa, da roda 1 e da roda 2 nos eixos x, y e z.

Considerando que não existe deslizamento, a relação entre a velocidade linear v_{ri} e a velocidade angular $\dot{\varphi}_i$ das rodas é dada por:

$$v_{ri} = r\dot{\varphi}_i \quad \text{com} \quad i = 1, 2 \tag{9}$$

A velocidade do corpo do robô v_c pode ser reescrita em função da velocidade horizontal do corpo v_{xy} e da velocidade vertical do corpo $\dot{z}_c$:

$$v_c = \sqrt{v_{xy}^2 + \dot{z}_c^2} \tag{10}$$

Como o corpo está preso à roda logo:

$$v_{xy} = \frac{v_{r1} + v_{r2}}{2} + l\dot{\theta}\cos\theta \tag{11}$$

$$\dot{z}_c = -l\dot{\theta}\sin\theta \tag{12}$$

Por se tratar de um robô com rotação diferencial:

$$\dot{\alpha} = \frac{v_{r2} - v_{r1}}{2R} \tag{13}$$

Com base em (2) e nas equações de (5) a (13):

$$L = a\dot{\varphi}_r^2 + b\dot{\varphi}_{rm}^2 + \frac{c}{2}(\dot{\varphi}_{r1}^2 + \dot{\varphi}_{r2}^2) + d\dot{\varphi}_r\dot{\theta}\cos\theta + \frac{e}{2}\dot{\theta}^2 - m_c g l\cos\theta \tag{14}$$

Com:

$$\begin{aligned}
\varphi_r &= \varphi_{r1} + \varphi_{r2} & \varphi_{rm} &= \varphi_{r2} - \varphi_{r1} \\
a &= \frac{m_c r^2}{4} & b &= \frac{r^2}{2R^2}\left(\frac{I_{cz}}{2} + I_{rz}\right) \\
c &= m_r r^2 + I_{ry} & d &= \frac{m_c r l}{2} \\
e &= 2m_c l^2 + I_{cy} & f &= m_c g l
\end{aligned}$$

As coordenadas generalizadas q_i e suas respectivas forças Q_i para o sistema são definidas como:

$$q_i : \varphi_{r1}, \varphi_{r2}, \theta \tag{15}$$
$$Q_i : \tau_{r1}, \tau_{r2}, -(\tau_{r1} + \tau_{r2}) \tag{16}$$

Considerando que as rodas são controlados por motores de corrente continua, o torque gerado pelas rodas pode ser expresso como:

$$\tau_{ri} = KV_i - B\left(\dot{\varphi}_{ri} - \dot{\theta}\right) \quad \text{com} \quad i = 1, 2 \tag{17}$$

Resolvendo a equação (4) para as coordenadas apresentadas em (15), resulta em:

$$\boldsymbol{\Delta} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_{r1} \\ \ddot{\varphi}_{r2} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B_u} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \tag{18}$$

$$\boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} a & b & d\cos(\theta) \\ b & a & d\cos(\theta) \\ d\cos(\theta) & d\cos(\theta) & c \end{bmatrix} \tag{19}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} (br + B)\dot{\varphi}_{r1} - B\dot{\theta} - d\sin(\theta)\dot{\theta}^2 \\ (br + B)\dot{\varphi}_{r2} - B\dot{\theta} - d\sin(\theta)\dot{\theta}^2 \\ 2B\dot{\theta} - B(\dot{\varphi}_{r1} + \dot{\varphi}_{r2}) - e\sin(\theta) \end{bmatrix} \tag{20}$$

$$\boldsymbol{B_u} = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & K \\ -K & -K \end{bmatrix} \tag{21}$$

Resultando no espaço de estados:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} \boldsymbol{u} \tag{22}$$

Onde:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \varphi_{r1} & \varphi_{r2} & \theta & \dot{\varphi}_{r1} & \dot{\varphi}_{r2} & \dot{\theta} \end{bmatrix}^\intercal$$
$$\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{A}$$
$$\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{B_u}$$
$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \end{bmatrix}^\intercal$$

Os parâmetros físicos do sistema foram determinados a partir de um modelo real, que pode ser visto em [6]. Estes valores foram obtidos combinando técnicas de medição direta com simulações para alcançar aproximações que se assemelham às características reais do objeto de estudo. A Tabela 1 apresenta estes parâmetros:

Par.	Valor	Par.	Valor
r	$0.04\,m$	R	$0.18\,m$
I_{cz}	$2.567 \cdot 10^{-3}\,kg \cdot m^2$	m_c	$1.013\,kg$
m_r	$0.07\,kg$	I_{ry}	$7.103 \cdot 10^{-5}\,kg \cdot m^2$
I_{rz}	$4.256 \cdot 10^{-5}\,kg \cdot m^2$	l	$0.09\,m$
I_{cy}	$1.866 \cdot 10^{-2}\,kg \cdot m^2$	g	$9.806\,m/s^2$
b_r	$0.03\,kg \cdot m^2/s$	B	0.05573
K	0.2109		

Tabela I
PARÂMETROS FÍSICOS DO SISTEMA.

B. *Estudo da Dinâmica do Sistema*

Com a equação de movimento do sistema já derivada, o próximo passo consiste em analisar seu comportamento dinâmico. Nesta subseção, focaremos inicialmente na análise dos pontos de equilíbrio do sistema. Posteriormente, estudaremos como o sistema responde às variações na ação de controle e no coeficiente de atrito.

Dado que as equações do sistema são independentes do ângulo da roda e dependem apenas da velocidade da roda, a análise pode se concentrar em situações onde a velocidade da roda não é nula. Resolvendo a equação (18) para condições onde as acelerações $\ddot{\varphi}_{r1}, \ddot{\varphi}_{r2}, \ddot{\theta}$ e a velocidade $\dot{\theta}$ são nulas e com tensões nos motores constantes, obtemos:

$$\dot{\varphi}_{r1} = -\frac{KV_1}{B + b_r} \tag{23}$$
$$\dot{\varphi}_{r2} = -\frac{KV_2}{B + b_r} \tag{24}$$
$$\theta = \arcsin\left(\frac{K}{e}(V_1 + V_2)\left(1 - \frac{B}{B + b_r}\right)\right) \tag{25}$$

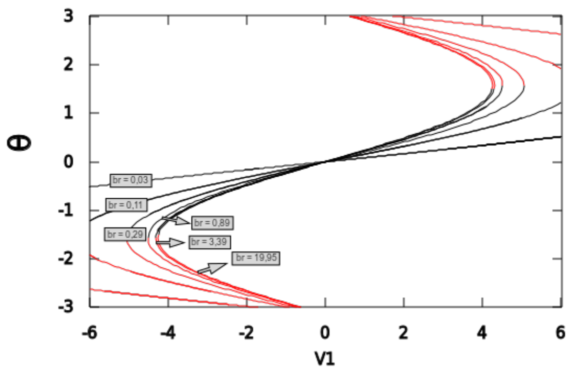
A partir das propriedades da função arcoseno, deduzimos as seguintes possibilidades para os equilíbrios:

- Se $V_1 + V_2 = 0$, o sistema possui apenas dois equilíbrios, onde $\bar{\theta} \in \{0, \pi\}$.
- Se $V_1 + V_2 = \pm\frac{e}{K(1-\frac{B}{B+b_r})}$, o sistema possui um único equilíbrio em $\bar{\theta} \in \{\pm\frac{\pi}{2}\}$.
- Para $0 < |V_1 + V_2| < \frac{e}{K(1-\frac{B}{B+b_r})}$, existem dois equilíbrios para $\bar{\theta}$ em dois ângulos complementares dependentes de $V_1 + V_2$.
- Se $|V_1 + V_2| > \frac{e}{K(1-\frac{B}{B+b_r})}$, o sistema não possui pontos de equilíbrio.

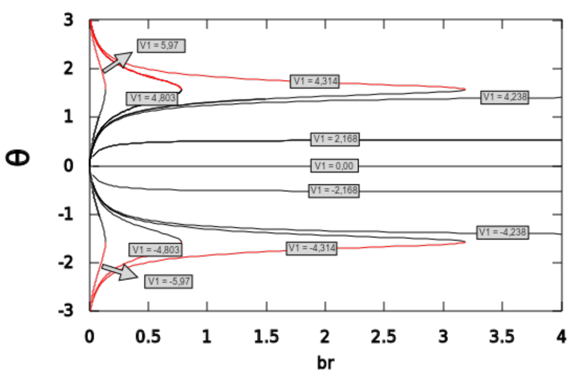
A complexidade do sistema dificulta a análise algébrica da estabilidade dos seus pontos de equilíbrio. No entanto, ao empregar ferramentas computacionais como MATLAB e XPPAUT, conclui-se que os pontos de equilíbrio em $-\frac{\pi}{2} \leq \bar{\theta} \leq \frac{\pi}{2}$ são estáveis, enquanto os pontos em $-\frac{\pi}{2} < \bar{\theta} < \frac{\pi}{2}$ são instáveis. É crucial ressaltar que, no contexto real do sistema, ângulos maiores que $\frac{\pi}{2}$ ou menores que $-\frac{\pi}{2}$ não são fisicamente possíveis, implicando que todos os pontos de equilíbrios fisicamente possíveis são instáveis.

A fim de aprofundar a compreensão sobre a dinâmica do sistema e como os pontos de equilíbrio são influenciados por determinados parâmetros, foram gerados gráficos de bifurcação utilizando a ferramenta XPPAUT. Os parâmetros escolhidos para essa análise, o coeficiente de atrito b_r e as tensões no motor, foram selecionados devido à possibilidade de variação destes durante a operação do robô.

O impacto nos pontos de equilíbrio não é determinado isoladamente pelos valores das tensões, mas pela soma delas. Portanto, o foco dessa seção será a variação do V_1 e do b_r, já que a variação de V_2 gera o mesmo resultado. A Figura 2a ilustra a evolução dos pontos de equilíbrio conforme V_1 aumenta para diferentes valores de b_r, enquanto a Figura 2b mostra como os pontos de equilíbrio evoluem à medida que



(a) θ em função de V_1.



(b) θ em função de b_r.

Figura 2. Diagramas de Bifurcação. As linhas pretas e vermelhas simbolizam respectivamente que o ponto de equilíbrio é instável ou estavel.

b_r aumenta para vários valores de V_1. A faixa de estudo para as tensões foi estabelecida entre $-6V$ e $6V$, considerando que esses são os limites fornecidos pelo motor utilizado no sistema real.

Ao analisar os gráficos, observa-se que à medida que o valor de b_r aumenta, a região contendo os pontos de equilíbrio diminui. Esta tendência é resultado da expressão $1 - \frac{B}{B+b_r}$ presente em (25). No entanto, existe um ponto de saturação para essa relação: quando b_r tende ao infinito, $\bar{\theta}$ converge para $\arcsin\left(\frac{K}{e}(V_1+V_2)\right)$.

C. Projeto do Controlador

Após uma análise minuciosa e entendimento do comportamento do sistema, a próxima etapa é formular uma lei de controle adequada, denotada por $\mathbf{u}$, para o sistema em questão. Esta seção visa detalhar o processo de criação e desenvolvimento do controlador.

O principal intuito deste projeto de controle é desenvolver uma lei que possibilite ao sistema seguir uma trajetória específica. Em outras palavras, o sistema deve ser capaz de rastrear referências para os ângulos das rodas. Contudo, dada a natureza intrinsecamente instável do sistema, o controle também deve assegurar a estabilidade do ângulo θ, buscando minimizar ao máximo suas variações. Com esse objetivo em vista, optou-se pelo uso da técnica de linearização por realimentação, o que viabiliza o desacoplamento do sistema e sua análise em partes separadas. É relevante mencionar, no entanto, que devido à subatuação do sistema, apenas uma linearização parcial é praticável.

Primeiramente, realizou-se uma mudança de variáveis, uma vez que, na configuração atual do sistema, não é possível realizar o seu desacoplamento por meio da linearização por realimentação, isto é devido ao angulo de inclinação θ depender de ambas as velocidades angulares $\dot{\varphi}_{ri}$. As novas variáveis definidas foram:

$$\varphi_{r1} = \varphi_r - \varphi_{rm} \tag{26}$$

$$\varphi_{r2} = \varphi_r + \varphi_{rm} \tag{27}$$

Esta transformação de variáveis conduziu a um novo espaço de estados representado por:

$$\dot{\boldsymbol{x}}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{x_n} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Omega}_n(\boldsymbol{x_n}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\Psi}_n(\boldsymbol{x_n}) \end{bmatrix} \boldsymbol{u} \tag{28}$$

Onde:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x_n} &= \begin{bmatrix} \varphi_r & \varphi_{rm} & \theta & \dot{\varphi}_r & \dot{\varphi}_{rm} & \dot{\theta} \end{bmatrix}^\intercal \\
\boldsymbol{\Omega_n}(\boldsymbol{x}) &= -\boldsymbol{\Delta}_n^{-1} \boldsymbol{A}_n \\
\boldsymbol{\Psi_n}(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{\Delta}_n^{-1} \boldsymbol{B_u} \\
\boldsymbol{u} &= \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \end{bmatrix}^\intercal \\
\boldsymbol{\Delta_n} &= \begin{bmatrix} (a+b)/2 & (b-a)/2 & d\cos(\theta) \\ (a+b)/2 & (b-a)/2 & d\cos(\theta) \\ d\cos(\theta) & 0 & c \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{A}_n &= \begin{bmatrix} (br+B)(\dot{\varphi}_r - \dot{\varphi}_{rm}) - B\dot{\theta} - d\sin(\theta)\dot{\theta}^2 \\ (br+B)(\dot{\varphi}_r + \dot{\varphi}_{rm}) - B\dot{\theta} - d\sin(\theta)\dot{\theta}^2 \\ 2B\dot{\theta} - B\dot{\varphi}_r - e\sin(\theta) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Se segmentarmos o sistema em partes atuadas $\boldsymbol{x_2}$ e não atuadas $\boldsymbol{x_1}$, obtemos:

$$\dot{\boldsymbol{x}}_1 = \boldsymbol{x_2} \tag{29}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_2 = \boldsymbol{\Omega_n}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\Psi_n}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{u} \tag{30}$$

O vetor $\boldsymbol{x_2}$ engloba $\dot{\varphi}_r$ e $\dot{\varphi}_{rm}$. O objetivo da linearização é que o sistema resultante seja representado por:

$$\ddot{\varphi}_r = v_1 \tag{31}$$

$$\ddot{\varphi}_{rm} = v_2 \tag{32}$$

Para atingir este objetivo, podemos decompor $\dot{\boldsymbol{x}}_2$ da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_r \\ \ddot{\varphi}_{rm} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Omega_{n1}}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\Psi_{n1}}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{u} \tag{33}$$

$$\ddot{\theta} = \boldsymbol{\Omega_{n2}}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\Psi_{n2}}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{u} \tag{34}$$

Onde $\boldsymbol{\Omega_{n1}}$ e $\boldsymbol{\Omega_{n2}}$ são submatrizes de $\boldsymbol{\Omega_n}$, e $\boldsymbol{\Psi_{n1}}$ e $\boldsymbol{\Psi_{n2}}$ são submatrizes de $\boldsymbol{\Psi_n}$.

Ao igualar $\begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_r & \ddot{\varphi}_{rm} \end{bmatrix}^\intercal$ a $\begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}^\intercal$, obtemos a ação de controle linearizante para o sistema:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\Psi_{n1}^{-1}}(\boldsymbol{x}) \left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} - \boldsymbol{\Omega_{n1}}(\boldsymbol{x}) \right) \tag{35}$$

Ao implementar esta ação de controle no sistema, resultamos em dois sistemas desacoplados. O primeiro é descrito por:

$$\dot{y}_1 = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_r \\ \dot{\theta} \\ v_1 \\ L + M v_1 \end{bmatrix} \tag{36}$$

Onde

$$L = \frac{2d\sin(\theta)\dot{\theta}^2 - b_r\dot{\varphi}_r + e\sin(\theta)}{c + 2d\cos(\theta)}$$
$$M = -\frac{a + b + d\cos(\theta)}{c + 2d\cos(\theta)}$$

O segundo sistema é descrito por:

$$\dot{y}_2 = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_{rm} \\ v_2 \end{bmatrix} \tag{37}$$

O primeiro sistema foi parcialmente linearizado, de forma que o comportamento do sistema ainda é dependente dos estados θ e $\dot{\theta}$. Analisando os pontos de equilíbrio, é observado um comportamento similar ao do sistema completo. Fazendo as mesmas considerações de que o ângulo da roda não influencia diretamente no sistema, obtemos um ponto de equilíbrio localizado em:

$$\bar{\boldsymbol{y_1}} = \begin{bmatrix} \varphi_r \\ \dot{\varphi}_r \\ \arcsin b_r\dot{\varphi}_r \\ 0 \end{bmatrix} \tag{38}$$

Sendo que todos os pontos de equilíbrio com $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ são instáveis. Portanto, ainda é necessário projetar outra forma de controle para estabilizar o sistema. No entanto, observe que a linearização por realimentação reduz significativamente a complexidade do sistema, e que o segundo sistema está completamente desacoplado.

Para projetar o controlador, o sistema é linearizado no ponto de equilíbrio $\bar{\boldsymbol{y_1}} = [0, 0, 0, 0]^\intercal$, pois o objetivo é fazer com que o robô siga uma trajetória de um ponto a outro, mantendo o ângulo θ com a mínima variação possível. O sistema resultante é:

$$\dot{\boldsymbol{y}}_1 = \boldsymbol{A_1}\boldsymbol{y_1} + \boldsymbol{B_1}v_1 \tag{39}$$

$$\boldsymbol{A_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e}{c+2d} & -\frac{b_r}{c+2d} & 0 \end{bmatrix} \tag{40}$$

$$\boldsymbol{B_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{a+b+d}{c+2d} \end{bmatrix} \tag{41}$$

Devido à ausência de um integrador no sistema, ele apresentará erro em estado permanente para o ângulo φ_m. Para corrigir isso, um integrador é incluído no sistema:

$$\dot{\zeta}_1 = (\text{ref}_1 - \varphi_r). \tag{42}$$

A lei de controle v_1 foi então definida como:

$$v_1 = \boldsymbol{K_{c1}} \begin{bmatrix} \text{ref}_1 - \varphi_r \\ -\theta \\ \dot{\text{ref}}_1 - \dot{\varphi}_r \\ -\dot{\theta} \\ \zeta_1 \end{bmatrix} \tag{43}$$

A determinação do ganho $\boldsymbol{K_{c1}}$ foi realizada utilizando a técnica ótima do regulador quadrático linear, definindo as matrizes $\boldsymbol{Q}$ e $\boldsymbol{R}$ como:

$$\boldsymbol{Q} = \text{diag}\,(100, 0, 0, 0, 10) \tag{44}$$
$$\boldsymbol{R} = 0.001. \tag{45}$$

O objetivo foi dar máxima prioridade ao controle do posicionamento do robô, buscando uma resposta rápida que mantenha o sistema estável.

Para o segundo sistema, o controle foi estabelecido através da dinâmica do erro. A dinâmica do erro é dada por:

$$\dot{\boldsymbol{e}}_2 = \boldsymbol{A_2}\boldsymbol{e_2} + \boldsymbol{B_2}(\ddot{\text{ref}}_2 - v_2) \tag{46}$$

Onde:

$$\boldsymbol{A_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{e_2} = \begin{bmatrix} \text{ref}_2 - \varphi_{rm} & \dot{\text{ref}}_2 - \dot{\varphi}_{rm} \end{bmatrix}^\intercal$$

Mais uma vez, para assegurar um erro nulo em regime permanente, um integrador foi acrescentado. Isso resultou na seguinte lei de controle:

$$v_2 = \ddot{\text{ref}}_2 + \boldsymbol{K_{c2}} \begin{bmatrix} e_2 \\ \zeta_2 \end{bmatrix} \tag{47}$$

A determinação do ganho $\boldsymbol{K_{c2}}$ foi realizada também empregando o regulador quadrático linear. As matrizes $\boldsymbol{Q}$ e $\boldsymbol{R}$ foram definidas da seguinte forma:

$$Q = \text{diag}\,(10, 0, 10) \tag{48}$$
$$R = 0.001 \tag{49}$$

O foco principal, mais uma vez, foi assegurar um desempenho otimizado para o erro de posicionamento em relação à referência

Com o controlador agora estabelecido e definido, a próxima seção se dedica a apresentar e discutir os resultados obtidos quando este controle é aplicado ao sistema para buscando o seguimento de trajetória, oferecendo uma visão concreta de sua eficácia.

III. Resultados

Nesta seção, serão apresentados e discutidos os resultados obtidos com a aplicação dos controladores desenvolvidos no sistema em estudo. O foco está no desempenho do sistema em seguir trajetórias específicas de um ponto a outro no plano $x - y$.

Para realizar o seguimento de trajetória é crucial compreender as equações de cinemática inversa associadas ao robô de duas rodas. As relações entre as posições x e y, o ângulo de guinada α, e os estados do sistema são dados por:

$$\dot{x} = \frac{r\cos(\theta)\dot{\varphi}_r}{2} \tag{50}$$

$$\dot{y} = \frac{r\sin(\theta)\dot{\varphi}_r}{2} \tag{51}$$

$$\dot{\alpha} = \frac{r\dot{\varphi}_r m}{2R} \tag{52}$$

Através delas é possível derivar as equações para a cinemática inversa:

$$\dot{\varphi}_r = \frac{2\dot{x}}{r\cos(\theta)} = \frac{2\dot{y}}{r\sin(\theta)} \tag{53}$$

$$\dot{\varphi}_r m = \frac{2R\dot{\alpha}}{r} \tag{54}$$

É importante notar que quando $\sin(\theta) = 0$, a equação em função de $\dot{y}$ não pode ser aplicada. Similarmente, para $\cos(\theta) = 0$, a equação em função de $\dot{x}$ é inválida. Utilizando a cinemática inversa é possível, mediante uma dada trajetória no eixo $x-y$, determinar a referência para os estados do sistema. Para o rastreamento da trajetória entre dois pontos foi utilizado a representação por um polinômio de terceiro grau:

$$x_{ref} = x_0 + \frac{3}{t_f^2}(x_f - x_0)t^2 - \frac{2}{t_f^3}(x_f - x_0)t^3 \tag{55}$$

Onde x_{ref} representa a referência, x_0 o ponto inicial, x_f o ponto final, e t_f o tempo de deslocamento. Cada referencial de posição (x,y e α) são representados por um polinômio neste formato.

Utilizando o Simulink foi desenvolvido uma simulação compreensiva do sistema. Essa simulação engloba a planta não linear, um gerador de trajetória, o cálculo das ações de controle v_1 e v_2, e da realimentação linearizante.

Na validação do controlador proposto, duas trajetórias paradigmáticas foram escolhidas: uma em formato de quadrado e outra em formato circular. A escolha dessas trajetórias se dá pela sua capacidade de, conjuntamente, testar diversas facetas do desempenho do robô e do controlador em situações distintas.

Estas trajetórias foram geradas através do polinômio de terceiro grau mencionado anteriormente. Em cada caso, foram definidos pontos-chave para guiar o robô através da trajetória desejada, aproveitando o gerador de trajetória desenvolvido no Simulink.

A. *Trajetória em Formato de Quadrado*

A Figura 3 apresenta uma comparação entre a trajetória de referência, que era esperada, e a trajetória efetivamente obtida durante a simulação. Fica claro que existem pequenas variações durante o trajeto, entretanto o robô consegue seguir a referência e chegar até o ponto desejado.

A Figura 4 se concentra nos estados do sistema. Através dela, pode-se observar que o estado desacoplado durante a linearização por realimentação apresenta erro praticamente nulo durante toda a trajetória, enquanto o restante apresenta pequenas variações, mas alcançam a referência de forma satisfatória com pequenas variações no ângulo θ.

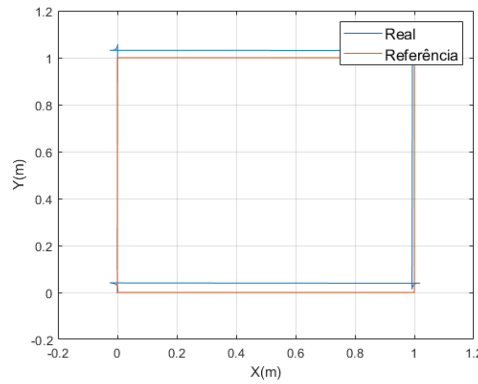


Figura 3. Comparação entre a trajetória de referência e o resultado da simulação para o formato quadrado.

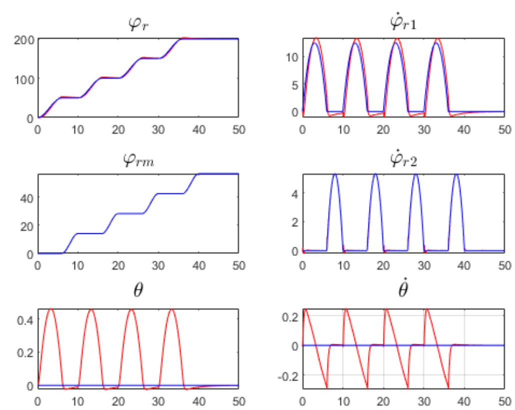


Figura 4. Estados do sistema para a trajetória em quadrado. Onde as linhas azuis e vermelhas simbolizam o resultado simulado e a referência.

B. *Trajetória em Formato de Círculo*

A Figura 5 compara a trajetória de referência com a trajetória efetivamente obtida durante a simulação para o círculo. Perceba que como o seguimento é feito de ponto a ponto, a referência tem um formato de hexágono que acaba resultando em um círculo.

A Figura 6 se aprofunda na análise dos estados do sistema. Nela, observa-se a evolução dos estados do robô ao longo da sua movimentação circular, e a comparação destes com suas respectivas referências dá uma visão clara sobre a eficiência do controlador, reafirmando os resultados obtidos com a trajetória quadrada.

IV. Conclusão

Ao longo deste estudo, foi realizada uma análise profunda da modelagem, controle e simulação de um robô autoequilibrado de duas rodas, ilustrando a importância da precisão em

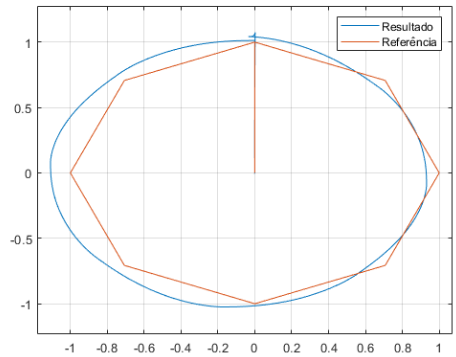


Figura 5. Comparação entre a trajetória de referência e o resultado da simulação para o formato circular.

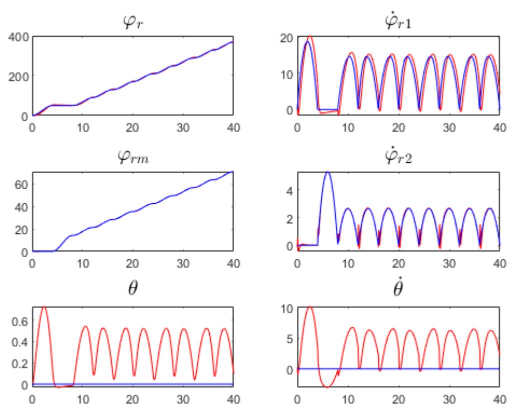


Figura 6. Estados do sistema para a trajetória em círculo. Onde as linhas azuis e vermelhas simbolizam o resultado simulado e a referência.

cada etapa do processo. O controle realimentado linearizante demonstrou ser uma abordagem eficaz na estabilização do sistema e no seguimento de trajetórias predeterminadas, mesmo em situações de complexidade, como trajetórias em formas de quadrado e círculo.

A modelagem inicial, que contou com parâmetros físicos extraídos de um modelo real, estabeleceu uma base sólida para o desenvolvimento subsequente. As trajetórias de referência, alinhadas com as equações de cinemática inversa, forneceram um roteiro para o deslocamento desejado do robô. Os resultados das simulações, ao serem comparados com as trajetórias de referência, evidenciaram o desempenho do controle implementado.

No entanto, é importante destacar que, embora os resultados tenham sido promissores, sistemas reais podem apresentar variações devido a ruídos, desgastes e outras perturbações não consideradas neste estudo. Portanto, testes em um ambiente real e ajustes contínuos do controlador podem ser necessários para otimizar ainda mais o desempenho do robô.

Concluindo, este estudo representa um passo significativo na compreensão e controle de robôs de duas rodas. A abordagem adotada pode servir como um modelo para futuras investigações e implementações em sistemas robóticos similares.

REFERÊNCIAS

[1] B. Friedland, *Control system design: an introduction to state-space methods*. New York: Courier Corporation, 2012.

[2] G.F. Franklin et al, *Feedback control of dynamic systems*, 7th ed. Harlow: Pearson Education Limited, 2015.

[3] N.S. Nise, *Control systems engineering*, 7th ed. Pomona: John Wiley & Sons, 2015.

[4] R.C. Bishop and R.H. Dorf, *Modern control systems*, 14th ed. Harlow: Pearson Education Limited, 2022.

[5] K. Ogata, *Modern Control Engineering*, 5th ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2010.

[6] L. D. R. Arantes and J. C. B. Dalcin, "Implementação de controle de realimentação de estados ótimo com observador de ordem mínima em um robô auto-equilibrado,"B.S. Thesis, Instituto Federal Catarinense, São Bento do Sul, Brazil, 2022. https://pergamumweb.ifc.edu.br/pergamumweb_ifc/vinculos/000026/00002628.pdf. (Accessed: Jun. 20, 2023).

[7] I. Gandarilla, J. Montoya-Cháirez, V. Santibáñez, C. Aguilar-Avelar, and J. Moreno-Valenzuela, "Trajectory tracking control of a self-balancing robot via adaptive neural networks," Engineering Science and Technology, an International Journal, vol. 35, pp. 101259, 2022.

[8] R. C. Ooi, "Balancing a two-wheeled autonomous robot," B.S. Thesis, Faculty of Eng. & Math. Sciences, Univ. of Western Australia, Perth, Nedlands, 2003.

[9] K. Peng, X. Ruan, and G. Zuo, "Dynamic model and balancing control for two-wheeled self-balancing mobile robot on the slopes," in Proceedings of the 10th World Congress on Intelligent Control and Automation, 2012, pp. 3681-3685.

[10] H. -S. Juang and K. -Y. Lum, "Design and control of a two-wheel self-balancing robot using the arduino microcontroller board,"*2013 10th IEEE International Conference on Control and Automation (ICCA)*, Hangzhou, China, 2013, pp. 634-639, doi: 10.1109/ICCA.2013.6565146.

[11] A. Wasif, D. Raza, W. Rasheed, Z. Farooq and S. Q. Ali, "Design and implementation of a two wheel self balancing robot with a two level adaptive control,"*Eighth International Conference on Digital Information Management (ICDIM 2013)*, Islamabad, Pakistan, 2013, pp. 187-193, doi: 10.1109/ICDIM.2013.6694021.