1. El método de trapecio simple se da para un polinomio interpolador de grado 1 de la forma

$$p_1(x) = \frac{x-b}{a-b} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b)$$

$$= \frac{xf(a) - bf(a)}{a-b} + \frac{xf(b) - af(b)}{b-a}$$

$$= \frac{xf(a) - bf(a) - xf(b) + af(b)}{a-b}$$

$$= \frac{x(f(a)-f(b)) - bf(a) + af(b)}{a-b}$$

Ahora integro el polinomio

$$= \int_a^b \frac{x(f(a)-f(b)) - bf(a) + af(b)}{a-b}\, dx$$

$$= \frac{1}{a-b}\left((f(a)-f(b)) \int_a^b x\,dx - bf(a)\int_a^b dx + af(b)\int_a^b dx \right)$$

$$= \frac{f(a)-f(b)}{a-b} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_a^b - \frac{bf(a)}{a-b}\, x\Big|_a^b + \frac{af(b)}{a-b}\, x\Big|_a^b$$

$$= \frac{f(a)-f(b)}{a-b} \cdot \left(\frac{b^2-a^2}{2}\right) - \frac{bf(a)}{a-b}(b-a) + \frac{af(b)}{a-b}(b-a)$$

$$= \frac{f(a)-f(b)}{a-b} \cdot \frac{(b+a)(b-a)}{2} + \frac{bf(a)}{\cancel{b-a}}\cancel{(b-a)} - \frac{af(b)}{\cancel{b-a}}\cancel{(b-a)}$$

$$= \frac{-f(a)+f(b)}{\cancel{b-a}} \cdot \frac{(b+a)\cancel{(b-a)}}{2} + bf(a) - af(b)$$

$$= \frac{(f(b)-f(a))(b+a) + 2bf(a) - 2af(b)}{2}$$

$$= \frac{bf(b) + af(b) - bf(a) - af(a) + 2bf(a) - 2af(b)}{2}$$

$$= \frac{bf(b) - af(b) + bf(a) - af(a)}{2}$$

$$= \frac{b(f(b)+f(a)) - a(f(b)+f(a))}{2}$$

$$= \frac{b-a}{2}(f(b)+f(a))$$

Por lo tanto se concluye que

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \int_a^b p_1(x)\,dx = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$$

3. El método de Simpson Simple 1/3 aproxima la integral de una función usando un polinomio de grado 2.

En primer lugar, la fórmula general de un polinomio de grado 2 es $Ax^2 + Bx + C$.

Ahora, si integramos esa función nos queda:

$$I = \int_{-h}^{h} (Ax^2 + Bx + C)\, dx$$

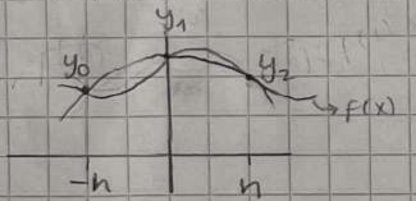
$$= \frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + Cx \Big|_{-h}^{h}$$

$$= \frac{Ah^3}{3} + \cancel{\frac{Bh^2}{3}} + Ch - \left(-\frac{Ah^3}{3} + \cancel{\frac{Bh^2}{2}} - Ch\right)$$

$$= 2\frac{Ah^3}{3} + 2Ch$$

$$= \frac{h}{3}\left(2Ah^2 + 6C\right)$$

Si tenemos...



los podemos reescribir como:

$$y_0 = Ah^2 - Bh + C$$
$$y_1 = C$$
$$y_2 = Ah^2 + Bh + C$$

si sumo y_0 & y_2:

$$\begin{aligned} y_0 &= Ah^2 - Bh + C \\ y_2 &= Ah^2 + Bh + C \\ \hline y_0 + y_2 &= 2Ah^2 + 2C \end{aligned}$$

Despejo: $2Ah^2 = y_0 + y_2 - 2C$ & eso lo puedo reemplazo en lo de arriba...

$$I = \frac{h}{3}\left(y_0 + y_2 - 2C + 6C\right)$$

$$= \frac{h}{3}\left(y_0 + y_2 + 4y_1\right) = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right)$$

Teniendo en cuenta que los límites de integración tienen la siguiente equivalencia: $a = -h$
$b = h$

se pueden hacer los siguientes reemplazos: (ver siguiente).

$y_0 = f(a)$

$y_2 = f(b)$

$y_1 = f(x_m)$ donde $x_m = \frac{a+b}{2}$

En ese orden de ideas nuestra aproximación de la integral de la función queda:

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \int_a^b P_2(x)\,dx = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4f(x_m) + f(b)\right)$$

10:

$$Error = \frac{f^{(4)}(\varepsilon)}{4!}\int_0^{3h}(x)(x-h)(x-2h)(x-3h)\,dx$$

$$E = \frac{f^{(4)}\cdot(\varepsilon)}{4!}\cdot\int_0^{3h}(x^2-xh)(x^2-3xh-2xh+6h^2)\,dx$$

$$E = \frac{f(4)\cdot(\varepsilon)}{4!}\int_0^{3h}(x^2-xh)(x^2-5xh+6h^2)\,dx$$

$$E = \frac{f(4)\cdot(\varepsilon)}{4!}\int_0^{3h} x^4-5x^3h+6x^2h^2-x^3h+5x^2h^2-6xh^3\,dx$$

$$E = \frac{f(4)\cdot(\varepsilon)}{4!}\cdot\left[\frac{x^5}{5}-\frac{5x^4h}{4}+\frac{6x^3}{3}h^2-\frac{x^4}{4}h+\frac{5x^3h^2}{3}-6\frac{x^2}{2}h^3\right]_0^{3h}$$

$$E = \frac{f(4)\cdot(\varepsilon)}{4!}\cdot\left[\frac{x^5}{5}-\frac{5x^4h}{4}+2x^3h^2-\frac{x^4}{4}h+\frac{5x^3h^2}{3}-3x^2h^3\right]_{\cancel{0}}^{3h}$$

$$E = \frac{f(4)\cdot(\varepsilon)}{4!}\cdot\left[\frac{(3h)^5}{5}-\frac{5(3h)^4\cdot h}{4}+2(3h)^3h^2-\frac{(3h)^4}{4}\cdot h+\frac{5(3h)^3h^2}{3}-3(3h)^2h^3\right]$$

$$E = \frac{f(4)\cdot(\varepsilon)}{4!}\cdot\left[\frac{243h^5}{5}-\frac{405h^5}{4}+54h^5-\frac{81}{4}h^5+\frac{135}{3}h^5-27h^5\right]$$

$$E = \frac{f(4)\cdot(\varepsilon)}{4!}\cdot\left[\frac{243h^5}{5}-\frac{405h^5}{4}+54h^5-\frac{81}{4}h^5+45h^5-27h^5\right]$$

$$E = \frac{f(4)\cdot(\varepsilon)}{4!}\cdot\left[\frac{-9}{10}h^5\right]$$

$$E = \frac{f(4)\cdot(\varepsilon)}{24}\cdot\left[\frac{-9}{10}h^5\right] = f(4)\cdot(\varepsilon)\cdot\frac{-9}{240}h^5 = f(4)\cdot(\varepsilon)\cdot\frac{-3}{80}h^5$$

$$E = \frac{-3}{80}h^5 f(4)\cdot(\varepsilon) \rightarrow \text{Comprobado}$$

Gabriel Borrero y Catalina Flórez

18:

B:

$$\Psi_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2^n \cdot n!}} \cdot \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \cdot e^{-\xi^2/2} \cdot H_n(\xi)$$

$\xi = x$ y $\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} = 1$; $H_1(x) = 2x$. Entonces:

$$\Psi_n(\xi) = \Psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n \cdot n!}} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot 2x$$

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi_1(x)|^2 \cdot x^2 \, dx = \frac{3}{2}$$

$$\Psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2^1 \cdot 1!}} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot 2x$$

Cuando $n = 1$ ///

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 \cdot \left|\sqrt[4]{\frac{1}{\pi}}\right|^2 \cdot \left|e^{-\frac{x^2}{2}}\right|^2 \cdot |2x|^2 \, dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt[2]{\frac{1}{\pi}} \cdot \left|e^{-\frac{x^2}{2}}\right|^2 \cdot 4x^2 \, dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4x^4}{\cancel{2}} \cdot \sqrt[2]{\frac{1}{\pi}} \cdot e^{-x^2} \, dx$$

→ Ahora, utilizamos código en Python para calcular la integral mediante Hermite.

$$= \int_{-\infty}^{\infty} 2x^4 \cdot \sqrt[2]{\frac{1}{\pi}} \cdot e^{-x^2} \, dx$$