Parte Teórica

g) $f(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1]x - f[x_0, x_1]x_0 + f[x_0, x_1, x_2](x^2 - x(x_0 + x_1) - x_0 x_1)$

$f(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1]x - f[x_0, x_1]x_0 + f[x_0, x_1, x_2]x^2 - f[x_0, x_1, x_2]x(x_0 + x_1) - f[x_0, x_1, x_2]x_0 x_1$

$f(x) = \underbrace{f[x_0, x_1, x_2]}_{a}x^2 + x\underbrace{(f[x_0, x_1] - f[x_0, x_1, x_2](x_0, x_1))}_{b} + \underbrace{f(x_0) - f[x_0, x_1]x_0 - x_0 x_1 f[x_0, x_1, x_2]}_{c}$

↳ Sigue la forma $ax^2 + bx + c$

Por lo tanto se concluye.

$a = f[x_0, x_1, x_2]$

$b = f[x_0, x_1] - f[x_0, x_1, x_2](x_0 + x_1)$

$c = f(x_0) - x_0 f[x_0, x_1] + x_0 x_1 f[x_0, x_1, x_2]$

Parte Teórica

h) Para hallar a:

- Necesitamos $f(x_1, x_2) = -ah_2 + b$
  &
  $f(x_0, x_1)$

- Para encontrar $f(x_0, x_1)$

$$f(x_0) = a(x_0 - x_2)^2 + b(x_0 - x_2) + f(x_2)$$
$$= a(x_0 - x_2)^2 - b(x_2 - x_0) + f(x_2)$$
$$= a(h_1 + h_2)^2 - b(h_1 + h_2) + f(x_2)$$

$$f(x_1) = ah_2^2 - bh_2 + f(x_2)$$
↳ punto anterior

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$f(x_0, x_1) = \frac{(ah_2^2 - bh_2 + f(x_2)) - (a(h_1 + h_2)^2 - b(h_1 + h_2) + f(x_2))}{x_1 - x_0}$$
$$= \frac{ah_2^2 - bh_2 + \cancel{f(x_2)} - a(h_1 + h_2)^2 + b(h_1 + h_2) - \cancel{f(x_2)}}{h_1}$$
$$= \frac{ah_2^2 - bh_2 - a(h_1^2 + 2h_1h_2 + h_2^2) + b(h_1 + h_2)}{h_1}$$
$$= \frac{\cancel{ah_2^2} - \cancel{bh_2} - ah_1^2 - 2ah_1h_2 - \cancel{ah_2^2} + bh_1 + \cancel{bh_2}}{h_1}$$
$$= \frac{-ah_1^2 - 2ah_1h_2 + bh_1}{h_1}$$
$$= \frac{h_1(-ah_1 - 2ah_2 + b)}{h_1}$$
$$= -ah_1 - 2ah_2 + b$$

- Para $\frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{h_2 + h_1}$

$$\frac{(-ah_2 + b) - (-ah_1 - 2ah_2 + b)}{h_2 + h_1}$$

$$\frac{-ah_2 + \cancel{b} + ah_1 + 2ah_2 - \cancel{b}}{h_2 + h_1}$$

$$\frac{a(-h_2 + h_1 + 2h_2)}{h_2 + h_1}$$

$$\frac{a(h_2 + h_1)}{h_2 + h_1}$$

$$= a$$

(h)

$f(x) = a(x-x_2)^2 + b(x-x_2) + c.$

para c.

$f(x_2) = a(x_2 - x_2)^2 + b(x_2 - x_2) + c$

$f(x_2) = a(0) + b(0) + c$

Catalina Flórez y Gabriel Borrero

$f(x_2) = c$ ✓

para b.

$f(x_1) = a(x_1 - x_2)^2 + b(x_1 - x_2) + c$

$f(x_2) = a(x_2 - x_2) + b(x_2 - x_2) + c = 0$

$f(x_1) = a(x_1 - x_2)^2 + b(x_1 - x_2) + c$

$f(x_1) = a(-h)^2 + b(-h) + c$

$f(x_1) = ah^2 - b(h) + c$

$f(x_1) = a(x_1 - x_2)^2 + b(x_2 - x_2) + c$

$f(x_1) = a(-h_2)^2 + b(-h_2) + c$

$f(x_1) = ah^2 - bh_2 + c$

$f(x_1) = ah_2^2 - bh_2 + f(x_2)$

$f(x_1) - f(x_2) - ah_2^2 = -bh_2$

$(-)\ \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{h_2} - \dfrac{ah_2^2}{h_2} = -b\ (-)$

$b = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} + ah_2 \rightarrow b = f[x_1, x_2] + ah_2$

(i) Para demostrar la afirmación, es necesario tener en cuenta que:

$$x_3 = x_2 + \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

$$|x_3 - x_2| = \left| \cancel{x_2} + \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2-4ac}} - \cancel{x_2} \right|$$

$$* \; |x_3 - x_2| = \left| \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2-4ac}} \right|$$

$$\frac{|x_3 - x_2|}{|x_3|} = \left| \frac{\frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2-4ac}}}{\frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2-4ac}}} \right| = \left| \frac{b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{b \pm \sqrt{b^2-4ac}} \right|$$

Según la pista $|x_3 - x_2|$ debe ser un número cada vez más pequeño. Pero $* \; |x_3 - x_2| = \left| \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2-4ac}} \right|$.

Ahora, si queremos demostrar que $|x_3 - x_2|$ debe ser un número cada vez más pequeño, sólo hay que ver que el denominador sea lo más grande posible. Esto es $a/b \Rightarrow b > a$ implica que, si b crece, entonces a/b es un número cada vez más pequeño.

Entonces, necesitamos que $|b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}|$ sea lo más grande posible para que $|x_3 - x_2|$ sea lo más pequeño posible.

En este sentido, si $b<0$ es necesario elegir el signo negativo, ya que de esta manera tendríamos $|-b-\sqrt{b^2-4ac}|$, es decir, a un número negativo le estamos sumando otro número negativo. Es decir,

$$-n-p=-n+(-p) \text{ es un número negativo mayor.}$$

Entonces $|-b-\sqrt{b^2-4ac}|$ sería un número más grande, pues aumentamos la magnitud. Es decir, el denominador es más grande y $|x_3-x_2|$ es un número aún más pequeño.

Por otro lado, si $b\geq 0$ es necesario elegir el signo positivo, ya que de esta manera tendríamos $|b+\sqrt{b^2-4ac}|$, es decir, a un número positivo le estamos sumando otro número positivo. Es decir,

$$+n+p=+n+(+p) \text{ es un número positivo mayor}$$

Entonces $|b+\sqrt{b^2-4ac}|$ sería un número más grande, pues aumentamos la magnitud. Es decir, el denominador es más grande y $|x_3-x_2|$ es un número aún más pequeño.

Concluyendo, como $x_3=x_2+\frac{-2c}{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}$ y $|x_3-x_2|=\left|\frac{-2c}{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}\right|$, la razón por la cual se escoge el signo negativo si $b<0$, y el signo positivo si $b\geq 0$ se debe a que de esta manera se logra maximizar el denominador de x_3, es decir, aumentar el denominador $|b\pm\sqrt{b^2-4ac}|$, disminuir la fracción $\frac{-2c}{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}$ y así lograr que $|x_3-x_2|$ sea lo más pequeño posible.

Catalina Flórez
y Gabriel Borrero.