ÁLGEBRA LINEAL ~ Catalina Flórez y Gabriel Borrero

5: (Theoretical) Muestre con detalle que la sustitución hacia adelante se expresa como:

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=0}^{i-1} A_{ij} x_j}{A_{ii}}$$

$$\left.\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{matrix}\right\}$$

Sistema de $n$ ecuaciones con $n$ incógnitas.

Este sistema también se puede representar como:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

Sustitución hacia adelante (Progresiva):

Algoritmo para resolver un sistema de ecuaciones lineales siendo A una matriz triangular inferior y con unos en la diagonal:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & = b_1 \\ a_{11}x_1 + a_{22}x_2 & = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1}x_1 + a_{n-1,2}x_2 + \dots + a_{n-1,n-1}x_{n-1} & = b_{n-1} \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{n,n-1}x_{n-1} + a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

Resolviendo la ecuación para $x_1$, se obtiene:

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}=1} \; ; \; x_1 = b_1$$

Resolviendo la ecuación para $x_2$, se obtiene

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{11} x_1}{a_{22} = 1} \rightarrow x_2 = b_2 - a_{21} x_1$$

Resolviendo la ecuación para $x_i$ se obtiene:

$$x_i = b_i - a_{i1} x_1 - a_{i2} x_2 - \dots - a_{i,i-1} x_{i-1}$$

Entonces:

$$x_i = b_i - \sum_{j=0}^{i-1} a_{ij} x_i$$