Gabriel Borrero y
Catalina Flórez

α (Theoritical):

$$h(\alpha) := \phi(x_k + \alpha r_k)$$

Primero, vamos a calcular la derivada de $h(\alpha)$ y la anulamos:

$$h'(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}[\phi(x_k + \alpha r_k)] \rightarrow \text{Regla de la cadena}$$

$$h'(\alpha) = \varphi'(x\_k + \alpha r\_k) \cdot \underline{d/d\alpha\,[x\_k + \alpha r\_k]}$$

$$\hookrightarrow \frac{d}{d\alpha}[x\_k + \alpha r\_k] = r\_k$$

Entonces, la derivada
Completa es:

$$h'(\alpha) = \phi'(x\_k + \alpha r\_k) \cdot r\_k$$

Ahora, el enunciado indica que debemos anular la derivada:

$$\phi'(x\_k + \alpha k) \cdot \underline{r\_k} = 0 \qquad r\_k = -(Ax\_k - b)$$

Entonces,

$$\nabla\phi(x\_k + \alpha k) \cdot (Ax\_k - b) = 0$$

Ahora, como A es simétrica

$$(\underbrace{\nabla\phi(x\_k)}_{} + \alpha A \nabla\phi(x\_k))(-r\_k)$$

$\nabla\phi(x\_k)$ es el gradiente de ϕ en x_k, por lo tanto:

Por otro lado, como queremos hallar α, entonces despejamos:

$$-\alpha A \nabla\phi(x\_k) = \nabla\phi(x\_k) \cdot (-r\_k)$$

$$\alpha = -(\nabla\phi(x\_k) \cdot r\_k) / (A \nabla\phi(x\_k))$$

Finalmente, como $r\_k = -(Ax\_k - b)$, entonces:

$$\alpha = -(-\nabla\phi(x\_k) \cdot r\_k) / (A\nabla\phi(x\_k) \cdot r\_k)$$

$$\alpha = \nabla\phi(x\_k) \cdot r\_k / (A\nabla\phi(x\_k) \cdot r\_k)$$

Finalmente, se tiene que:

$$\alpha = \frac{r_k^T \cdot r_k}{r_k^T \cdot A \cdot r\_k} \rightarrow \text{Comprobado.}$$