Animação de fumaça em malhas não-estruturadas usando RBF-FD

Gabriel Lucas da Silva

Orientador: Prof. Dr. Afonso Paiva Neto

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
Universidade de São Paulo

5 de dezembro de 2025

Roteiro

Introdução

Importância

- Indústria
  - Entretenimento
  - Jogos
  - Engenharia
- Academia

Introdução

Simulações baseadas em física tendem a apresentar resultados visualmente realísticos

Figura: Animação de fumaça no jogo Mass Effect 3

Motivação

Limitações das grades regulares

- Restritas a domínios AABB simples
- Dificuldade para representar fronteiras complexas
- Perda de detalhes em geometrias irregulares

Malhas não-estruturadas

- Adaptam-se a fronteiras complexas
- Maior flexibilidade geométrica
- Desafio: métodos numéricos tradicionais (FD, FV)

Objetivos

Objetivo Principal

Desenvolver uma técnica de animação de fumaça 2D em malhas triangulares não-estruturadas utilizando RBF-FD

Objetivos Específicos

- Adaptar pipeline Stable Fluids para malhas arbitrárias
- Implementar tratamento de fronteiras com nós fantasma
- Desenvolver algoritmo eficiente de interseção raio-polígono
- Validar método em domínios com geometrias complexas

Equações de Navier-Stokes

Equações que regem o escoamento de fluidos

$$\dot{\mathbf{u}} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{g} \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{2}$$

- $-(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$: Termo de advecção
- $-\frac{1}{\rho}\nabla p$: Gradiente de pressão
- $\nu\nabla^2\mathbf{u}$: Termo de difusão
- $\mathbf{g}$: Forças externas

Diferenças Finitas vs RBF-FD

Diferenças Finitas (FD)

- Baseado na série de Taylor
- Funciona apenas em grades regulares
- Estêncil fixo e estruturado

RBF-FD

- Generalização de FD para malhas arbitrárias
- Interpolação livre de malha (meshfree)
- Estêncil adaptativo baseado em vizinhança

RBF-FD: Fundamentos

Função de Base Radial (RBF)

$$\Phi_k(\mathbf{x}) = \phi(||\mathbf{x} - \mathbf{x}_k||)$$

Spline poliharmônica: $\phi(r) = r^s$, com $s = 1, 3, 5, \ldots$

Aproximação de operador diferencial

Para aproximar $\mathcal{L}y$ no ponto x_i:

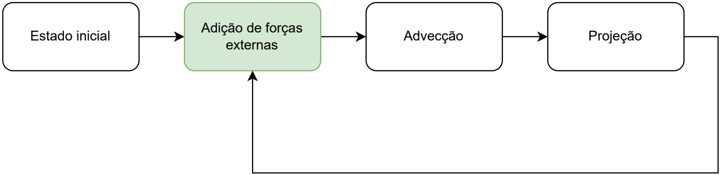
$$\mathcal{L}y \approx \sum_{k=1}^{N} \omega_k^{\mathcal{L}} y_k$$

Pesos ω calculados resolvendo sistema linear local

Pipeline Stable Fluids

Três passos principais

- **Passo 1**: Aplicação de forças externas
- **Passo 2**: Advecção semi-lagrangiana
- **Passo 3**: Projeção de Helmholtz-Hodge



Passo 1: Aplicação de Forças Externas

Atualização do campo de velocidades

$$\mathbf{u}_{novo} = \mathbf{u}_{antigo} + \Delta t \cdot \mathbf{f}$$

onde $\mathbf{f}$ representa forças externas

Forças típicas em simulação de fumaça

- **Gravidade**: $\mathbf{f}_g = -g\hat{\mathbf{j}}$ (aponta para baixo)
- **Empuxo térmico** (buoyancy): força que faz fumaça quente subir

$$\mathbf{f}_{empuxo} = \alpha(T - T_{amb})\hat{\mathbf{j}}$$

onde α é coeficiente de empuxo, T é temperatura local

Resultado

Integração explícita (método de Euler)

Advecção Semi-Lagrangiana

Equação de advecção

Termo de transporte: $\frac{\partial q}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) q = 0$
onde q pode ser: velocidade, densidade de fumaça, temperatura...

Solução Semi-Lagrangiana

Seguir partícula ao longo da trajetória (característica):

$$q(\mathbf{x}, t + \Delta t) = q(\mathbf{x} - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\Delta t, t)$$

Algoritmo:

1. Backtrack: $\mathbf{x}_{prev} = \mathbf{x} - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\Delta t$
2. Interpolar q em $\mathbf{x}_{prev}$ (RBF ou baricêntrica)
3. Atribuir valor interpolado a $\mathbf{x}$

Problema

$\mathbf{x}_{prev}$ pode cair:

- Dentro de outra célula
- Fora do domínio

Solução

- Interseção raio-polígono
- Ray-casting otimizado (JIT)
- Interpolação RBF

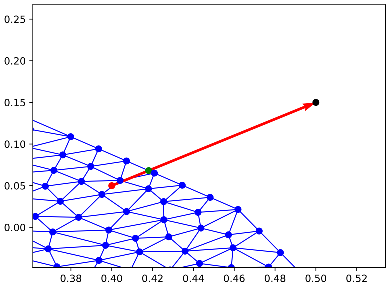


Figura: Raio de backtracking interceptando fronteira

Projeção de Pressão

Problema

Após advecção: $\mathbf{w}$ (campo com divergente) $\rightarrow \nabla \cdot \mathbf{w} \neq 0$
Queremos: $\mathbf{u}$ (campo incompressível) $\rightarrow \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$

Decomposição de Helmholtz-Hodge

Todo campo pode ser decomposto em parte livre de divergente + gradiente:

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \nabla p$$

Aplicando divergente e usando $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$:

$$\nabla^2 p = \nabla \cdot \mathbf{w}$$

Campo incompressível final:

$$\mathbf{u} = \mathbf{w} - \nabla p$$

Problema: Estêncils Assimétricos

Desafio

- Nós de fronteira têm vizinhos apenas em um semiplano
- Estêncil desequilibrado
- Perda de precisão

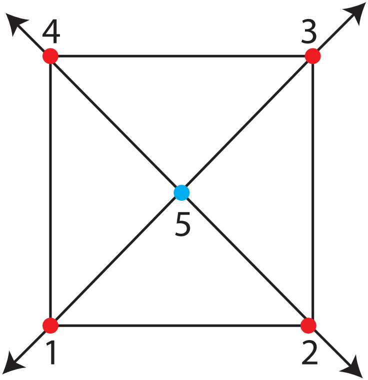


Figura: Malha com nós de fronteira

Solução: Nós Fantasma

Ideia Central

- Criar nó temporário fora do domínio
- Balancear estêncil de fronteira
- Eliminar dependência através da condição de Neumann

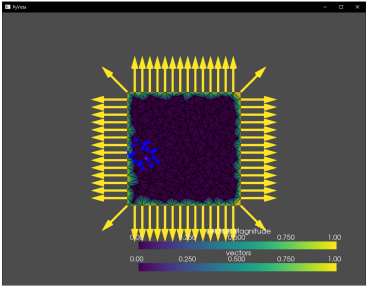


Figura: Nó fantasma (ilustração conceitual)

Nós Fantasma: Formulação

Criação do nó fantasma

$$\mathbf{x}_g = \mathbf{x}_b + h\mathbf{n}$$

onde $\mathbf{n}$ é a normal à fronteira e $h = \alpha \cdot \Delta x_{local}$

Condição de Neumann

$$\nabla p \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_j \omega_j^n p_j + \omega_g^n p_g = 0$$

Eliminação do nó fantasma

$$p_g = -\frac{1}{\omega_g^n} \sum_j \omega_j^n p_j$$

Pesos Efetivos do Laplaciano

Substituindo p_g na aproximação do Laplaciano

$$\nabla^2 p \approx \sum_j \omega_j^L p_j + \omega_g^L p_g$$

$$= \sum_j \omega_j^L p_j + \omega_g^L \left(-\frac{1}{\omega_g^n} \sum_j \omega_j^n p_j \right)$$

$$= \sum_j \left(\omega_j^L - \frac{\omega_g^L}{\omega_g^n} \omega_j^n \right) p_j$$

Pesos efetivos

$$\tilde{\omega}_j^L = \omega_j^L - \frac{\omega_g^L}{\omega_g^n} \omega_j^n$$

Interseção Raio-Polígono

Algoritmo

- Cohen-Sutherland
- Equação paramétrica
- Otimização JIT (Numba)
- Vetorização

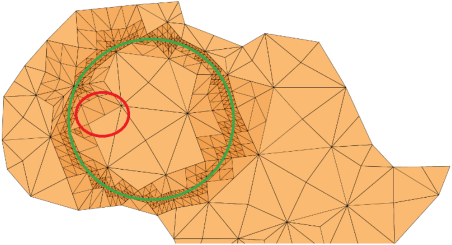


Figura: Exemplo de malha arbitrária

Experimento 1: Validação Ghost Nodes

Objetivo

Comparar método com e sem nós fantasma

- Domínio: AABB simples
- Métrica: Divergente do campo de velocidades
- Resultado: Redução significativa do divergente na fronteira

Objetivo

Testar capacidade em fronteiras complexas

- Domínio: Polígono irregular
- Formação de vórtices
- Comportamento físico qualitativamente correto

Experimento 3: Domínio Complexo

Objetivo

Validar em geometrias geográficas reais

- Domínio: Contorno geográfico (país)
- Fronteiras altamente irregulares
- Demonstração de viabilidade do método

Análise do Divergente

Observações

- Divergente inicialmente alto (injeção de fumaça)
- Queda após desligamento do injetor
- Aumento gradual ao longo do tempo
- Concentração em regiões de fronteira

Interpretação

- Ghost nodes melhoram estabilidade
- Desafios em regiões de alta curvatura
- Sensibilidade à proximidade entre nós

Discussão dos Resultados

Sucessos

- Comportamento físico qualitativamente correto
- Formação de estruturas vorticais
- Interação adequada com fronteiras
- Viabilidade em domínios arbitrários

Desafios Identificados

- Perda gradual de massa
- Instabilidades em regiões de alta curvatura
- Sensibilidade à proximidade de nós
- Dependência da função de base radial

Conclusões

Principais Contribuições

- Adaptação do Stable Fluids com RBF-FD para malhas triangulares
- Técnica simplificada de nós fantasma para fronteiras
- Algoritmo eficiente de ray-casting com JIT
- Demonstração de viabilidade em domínios arbitrários

Publicação

- CNMAC 2023 - Bonito, MS
- "Animação de fumaça em malhas não-estruturadas usando RBF-FD"

Trabalhos Futuros

Extensões Imediatas

- Extensão para 3D (malhas tetraedrais)
- Melhoria na conservação de massa
- Exploração de outras funções de base radial

Desenvolvimentos Avançados

- Domínios não-simplesmente conexos (com buracos)
- Otimizações de desempenho (paralelização, GPU)
- Refinamento adaptativo
- Interatividade em tempo real

Agradecimentos

- Prof. Dr. Afonso Paiva Neto (orientação)
- CAPES (bolsa PROEX)
- Colegas do laboratório
- Família e amigos

Obrigado!

Perguntas?