

Animação de fumaça em malhas não-estruturadas usando RBF-FD.

Gabriel Lucas da Silva

Orientador: Afonso Paiva Neto

Universidade de São Paulo

11 de novembro de 2025

Roteiro

- 1 Introdução
- 2 Trabalhos relacionados
- 3 Objetivos
- 4 Simulação de fluidos
- 5 RBF-FD
- 6 Proposta
- 7 Resultados parciais
- 8 Resultados esperados

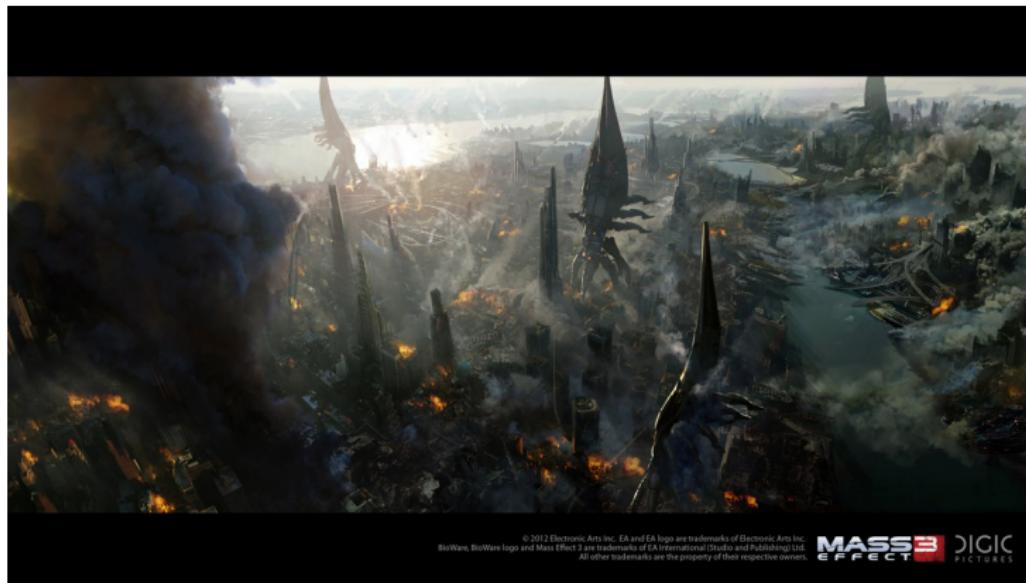
Introdução

Importância

- Indústria
 - Entretenimento
 - Jogos
 - Engenharia
- Academia

Introdução

Em geral, simulações baseadas em física tendem a apresentar resultados visualmente realísticos e convincentes, podendo levar uma pessoa leiga na área à confundir uma gravação real com uma simulação.

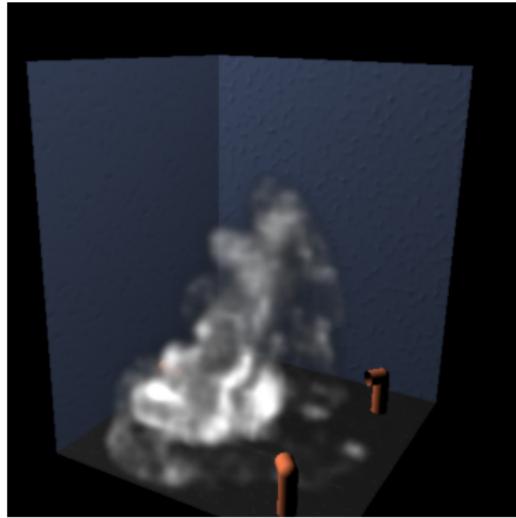


© 2012 Electronic Arts Inc. EA and EA logo are trademarks of Electronic Arts Inc.
BioWare, BioWare logo and Mass Effect are trademarks of EA International Studio and Publishing Inc.
All other trademarks are the property of their respective owners.

Trabalhos relacionados

Realistic animation of liquids (Foster e Metaxas, 1997)

- Advecção explícita
- FD
- Custo computacional alto



Trabalhos relacionados

Stable Fluids (Stam, 1999)

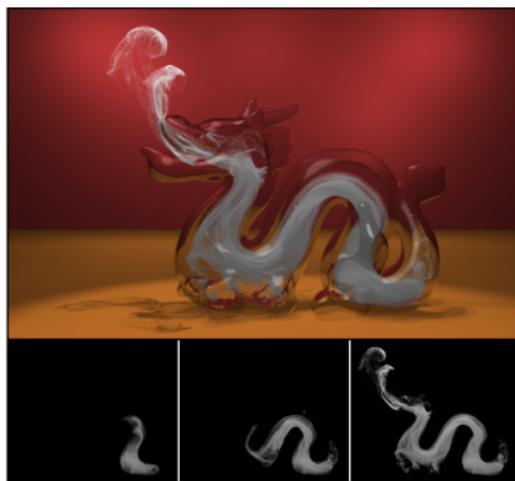
- Advecção Semi-lagrangiana
- Implementação simples
- Incondicionalmente estável
- FD
- Grande dissipação numérica



Trabalhos relacionados

Animating Gases with Hybrid Meshes (Feldman, 2005)

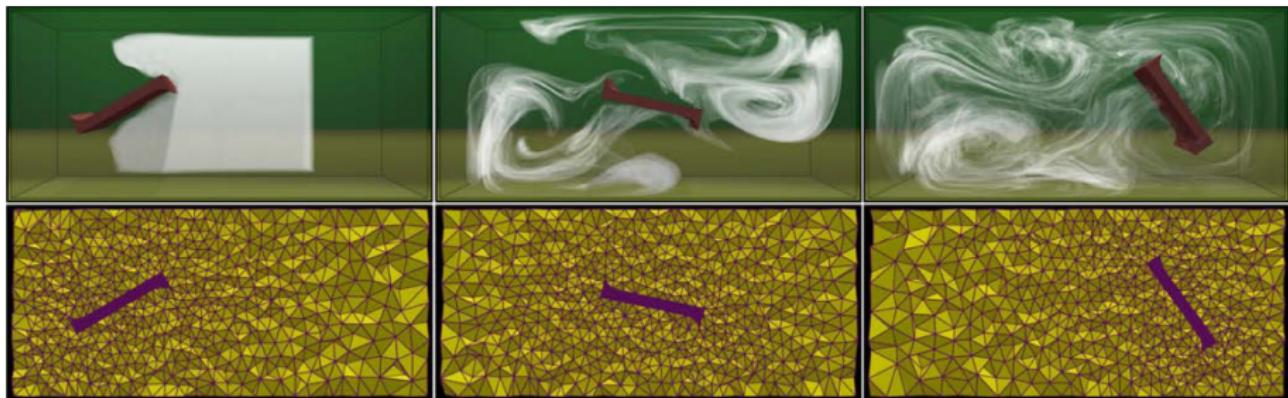
- Malha híbrida
- Fronteiras complexas
- FV
- Malha necessariamente conforme



Trabalhos relacionados

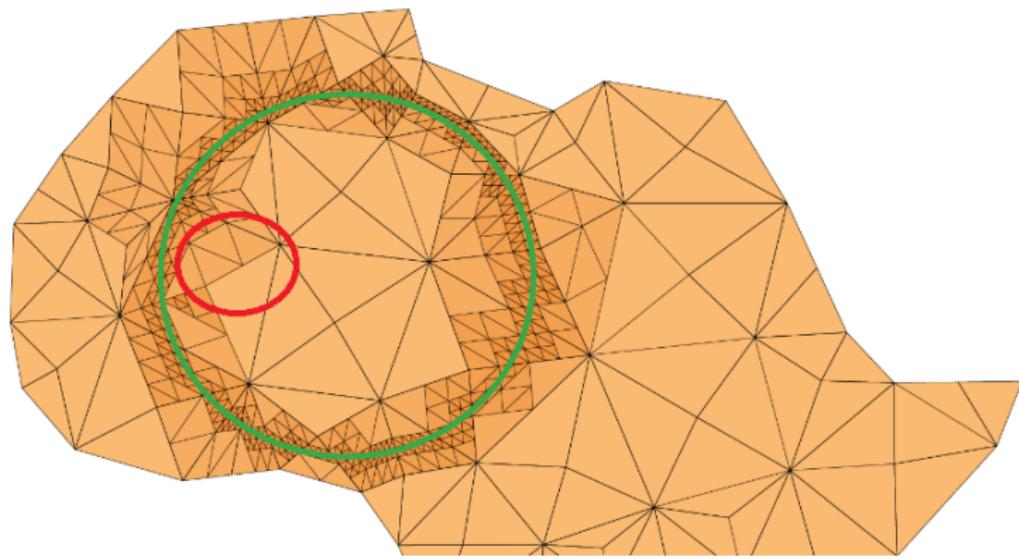
Fluid Animation with Dynamic Meshes (Klingner, 2006)

- Malha dinâmica
- FV
- Reconstrução lenta ($\approx 20\%$)



Objetivos

- Malha triangular
- Impor condição de Neumann em domínios arbitrários usando diferenças finitas



Equações de Navier-Stokes

Equação que rege a simulação de fluídos baseada em física.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2)$$

- $-(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$: Termo de advecção.
- $-\frac{1}{\rho} \nabla p$: Gradiente de pressão local. O fluido escoa de acordo com o gradiente negativo.
- $\nu \nabla^2 \mathbf{u}$: Termo de difusão.
- \mathbf{f} : Termo de forças externas. Exerce forças como a gravidade que atuam uniformemente através do fluido.

Simulação de fluidos

Malha estruturada

- Discretização
- Estrutura das células

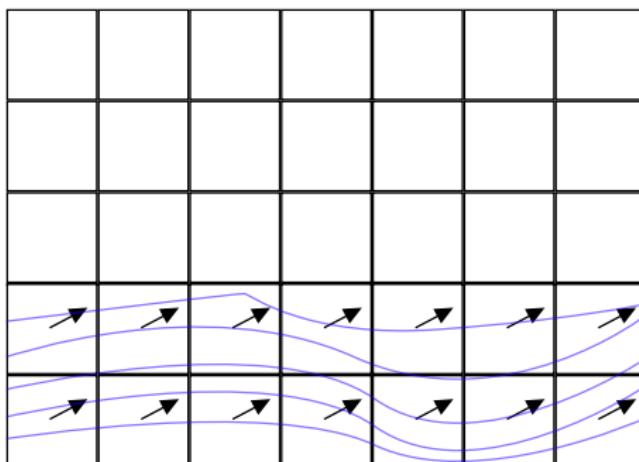
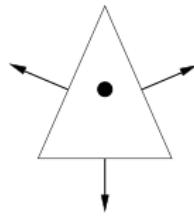
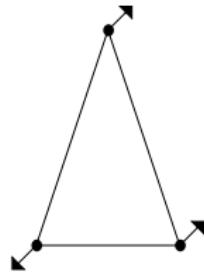
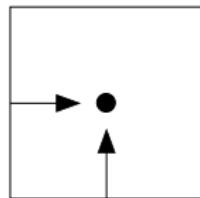
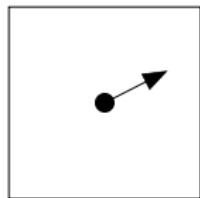


Figura: Malha estruturada

Simulação de fluidos

Figura: Tipos de células presentes na abordagens euleriana em duas dimensões.



Diferenças finitas

- Realiza o cálculo de operadores diferenciais
- Baseado na série de Taylor
- Dependente da estrutura da malha
- Três tipos: Progressiva, regressiva e central.

Pipeline de simulação do *Stable Fluids*

- Adição de forças externas
- Advecção
- Projeção de pressão

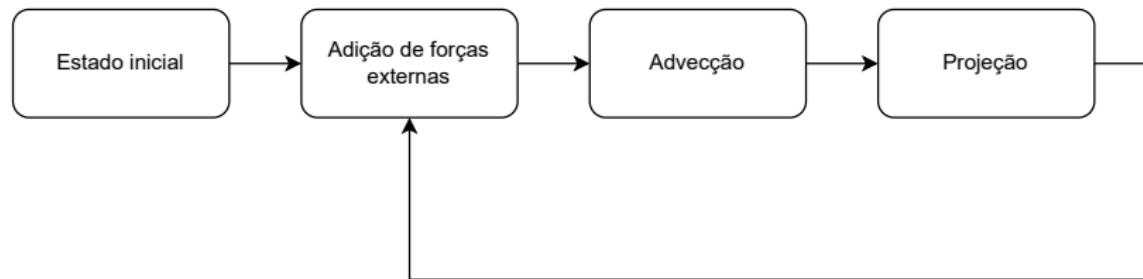


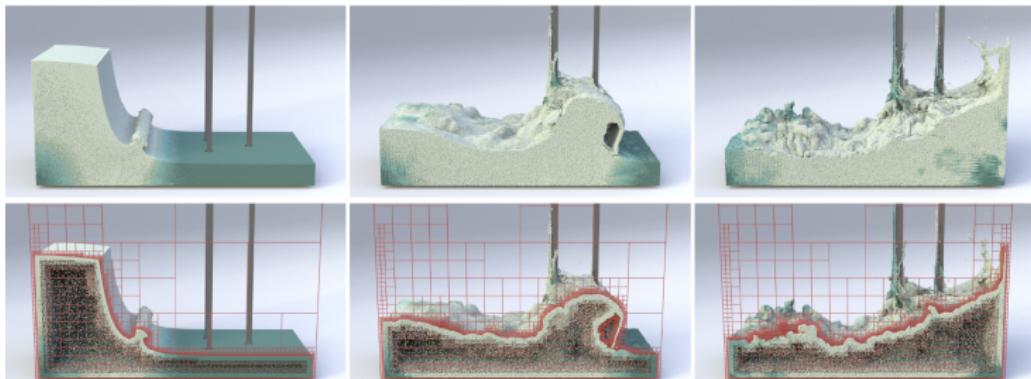
Figura: Pipeline de simulação

Stam 2D implementado

RBF-FD

RBF Liquids: An Adaptive PIC Solver Using RBF-FD (Nakanishi, 2020)

- Quadtree e Octree
- Adaptativa
- Não-conforme
- RBF-FD
- Não impõe a condição de contorno Neumann em fronteiras arbitrárias



RBF

Uma RBF é uma função radialmente simétrica entre o centro x_k e o ponto avaliado x . Representada por $\Phi_k(x) = \phi(||x - x_k||)$, onde $\phi(r)$ representa uma função escalar $[0, \infty)$ e $||\cdot||$ denota a norma euclidiana. Existem várias escolhas para ϕ , uma é a *spline* poliharmônica $\phi(r) = r^s$, com $s = 1, 3, 5, \dots$

Interpolador RBF

Aproximação de diferenças finitas por meio do uso de RBFs. Seja uma nuvem de pontos, $\{x_k\}_{k=1}^N$, os valores das funções $y_k = y(x_k) \in \mathbb{R}$, queremos achar um interpolador $S_y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, tal que:

$$S_y(x_i) = y_i, \forall i = 1, \dots, N. \quad (3)$$

Forma geral

A forma generalizada de um interpolador RBF é dada por:

$$S_y(x) = \sum_{k=1}^N \omega_k \phi(||x-x_k||) + \sum_{j=1}^M \gamma_j P_j(x), \text{ onde } \sum_{k=1}^N \omega_k P_j(x_k) = 0, \forall 1, \dots, M. \quad (4)$$

Aproximando um operador diferencial

Seja \mathcal{L} o operador diferencial que queremos aproximar, e \mathcal{X}_i a vizinhança composta por uma nuvem de pontos $\{x_k\}_{k=1}^N$. Para uma dada posição x_i , queremos aproximar $\mathcal{L}y$ avaliado no ponto central x_i como uma combinação linear dos valores das funções $\{y_k\}_{k=1}^N$, tal que:

$$\mathcal{L}y = \sum_{k=1}^N \omega_k^{\mathcal{L}} y_k. \quad (5)$$

Cálculo dos pesos

Os pesos ω são obtidos resolvendo o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P}^T & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega^{\mathcal{L}} \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}\phi \\ \mathcal{L}\mathbf{P} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

- \mathbf{A} é uma matriz de ordem N com $\mathbf{A}_{ij} = \phi(\|x_i - x_j\|)$
- \mathbf{P} é uma matriz de ordem $N \times M$ e $\mathbf{P}_{ij} = P_j(x_i)$
- \mathbf{O} é uma matriz nula de ordem M
- $\omega^{\mathcal{L}} = [\omega_1^{\mathcal{L}}, \dots, \omega_N^{\mathcal{L}}]^T$
- $\gamma = [\gamma_1, \dots, \gamma_M]^T$

Matriz de cálculo dos pesos

Dado uma vizinhança \mathcal{X}_i composta por uma nuvem de pontos $\{x_k\}_{k=1}^N$.
 Com $s = 5$ e ordem do polinômio = 2. Com $\Phi_k(\mathbf{x}) = \phi(||\mathbf{x} - \mathbf{x}_k||)$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \Phi_1(x_1) & \dots & \Phi_N(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_1(x_N) & \dots & \Phi_N(x_N) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1y_1 & x_1^2 & y_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_N & y_N & x_Ny_N & x_N^2 & y_N^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{L}\phi = \begin{bmatrix} \mathcal{L}\Phi_k(\mathbf{x}_1) \\ \vdots \\ \mathcal{L}\Phi_k(\mathbf{x}_N) \end{bmatrix}$$

Matriz de cálculo dos pesos

Dado uma vizinhança \mathcal{X}_i composta por uma nuvem de pontos $\{x_k\}_{k=1}^N$. Com $s = 5$ e ordem do polinômio = 2. Com $\Phi_k(\mathbf{x}) = \phi(||\mathbf{x} - \mathbf{x}_k||)$. Caso \mathcal{L} seja o laplaciano:

$$\mathcal{L}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Calculando os operadores diferenciais necessários

Calculamos os pesos RBF para o laplaciano, derivada parcial em x e derivada parcial em y. Com isso conseguimos calcular gradiente, divergente, laplaciano e impor Neumann na fronteira.

Impondo Neumann na fronteira

A condição de contorno de Neumann homogênea é dada por, sendo p o campo escalar:

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{n} \cdot \nabla p = 0 \quad (7)$$

Quando o nó central(p_k) está na fronteira, fazemos o cálculo dos pesos que vão para a matriz de Poisson da seguinte maneira:

$$n_x \sum_k \omega_k^x p_k + n_y \sum_k \omega_k^y p_k = \sum_k (n_x \omega_k^x + n_y \omega_k^y) p_k \quad (8)$$

Cálculo da vizinhança

Utilizamos o K-anel do vértice para obter a vizinhança

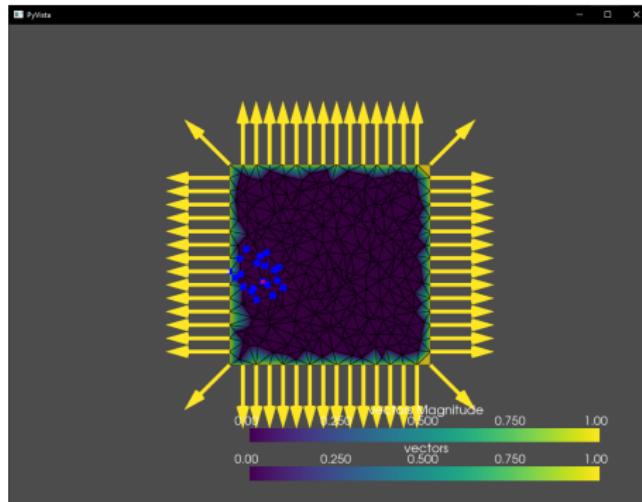


Figura: 2-anel no interior

Pipeline de simulação do *Stable Fluids*

- Adição de forças externas: Integração de Euler
- Advecção
- Projeção de pressão

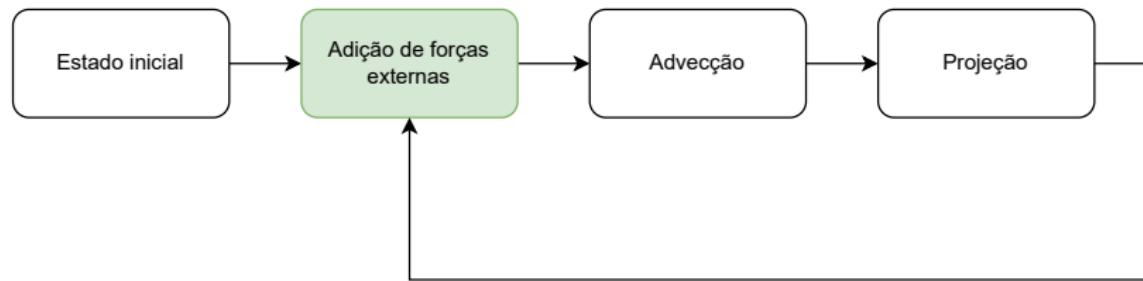


Figura: Pipeline de simulação

Pipeline de simulação do *Stable Fluids*

- Adição de forças externas
- Advecção: Esquema semi-lagrangiano
- Projeção de pressão

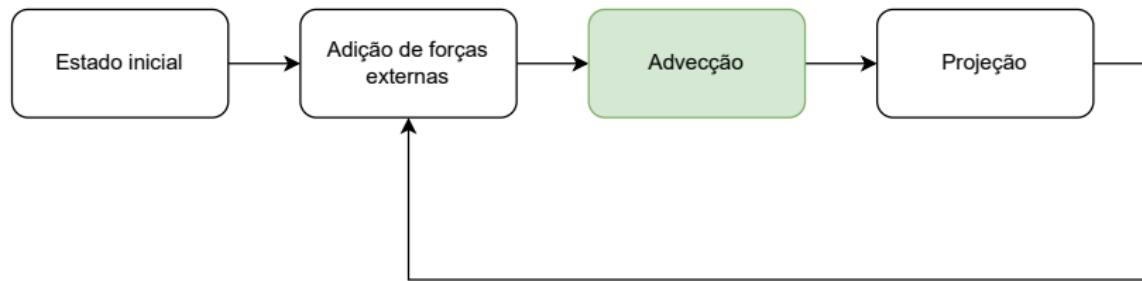


Figura: Pipeline de simulação

Simulação de fluidos: Passo a Passo

Pipeline de simulação do *Stable Fluids*

- Adição de forças externas
- Advecção: Esquema semi-lagrangiano
- Projeção de pressão

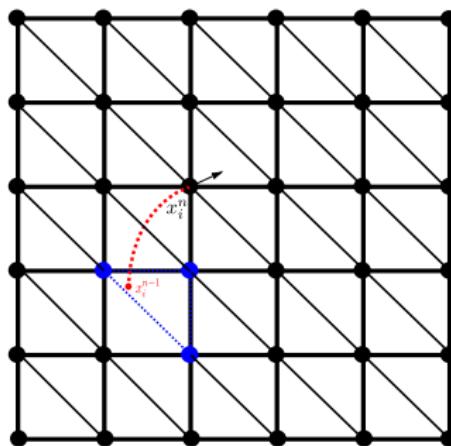


Figura: Esquema de backtracking

Pipeline de simulação do *Stable Fluids*

- Adição de forças externas
- Advecção
- Projeção de pressão: $\nabla^2 p = \nabla \cdot \mathbf{u}$, $\mathbf{u} = \mathbf{u} - \nabla p$

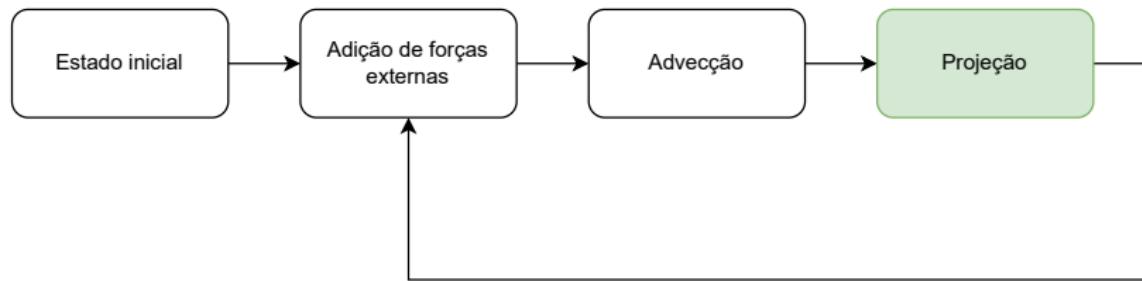
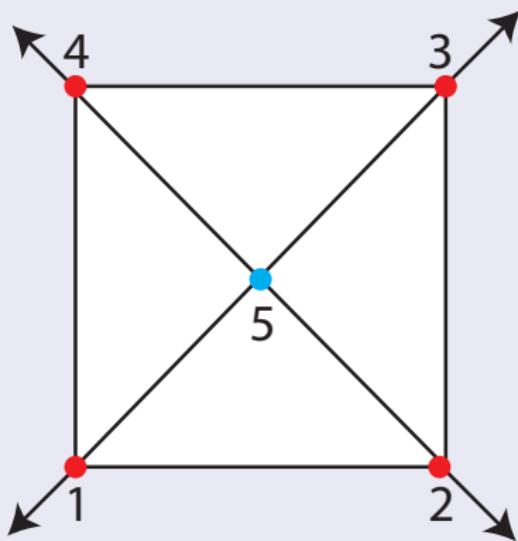


Figura: Pipeline de simulação

Matriz de Poisson

Dado a seguinte malha:



Simulação de fluidos: Passo a Passo

Matriz de Poisson

Com os pesos calculados, e usando o 1-anel como vizinhança, podemos montar a matriz para resolver a equação de poisson da seguinte maneira.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \omega_1^N & \omega_2^N & 0 & \omega_4^N & \omega_5^N \\ \omega_1^N & \omega_2^N & \omega_3^N & 0 & \omega_5^N \\ 0 & \omega_2^N & \omega_3^N & \omega_4^N & \omega_5^N \\ \omega_1^N & 0 & \omega_3^N & \omega_4^N & \omega_5^N \\ \omega_1^L & \omega_2^L & \omega_3^L & \omega_4^L & \omega_5^L \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \nabla \cdot u_5 \end{bmatrix}$$

Figura: Matriz de poisson com imposição de Neumann na fronteira

Com $\omega_k^N = n_x \omega_k^x + n_y \omega_k^y$

Proposta

Proposta

Utilizar os operadores diferenciais calculados por meio de RBF-FD em uma malha não estruturada para realizar a simulação de fumaça utilizando o pipeline apresentado.

Tabela: Cronograma

	2021/1	2021/2	2022/1	2022/2	2023/1
Revisão Bibliográfica	×	×	×	×	×
Grade regular 2D	×	×			
Grade não-estruturada			×	×	
Pipeline com RBF-FD				×	×
Domínios arbitrários				×	×

Resultados parciais

Foram realizados teste com funções analíticas e malhas triangulares com domínios AABB fazendo o uso da normal para impor Neumann. Para cálculo dos pesos RBF, utilizamos $s=5$, $d=2$, $k=2$. $\Omega = [0, \pi]^2$

Malha não estruturada

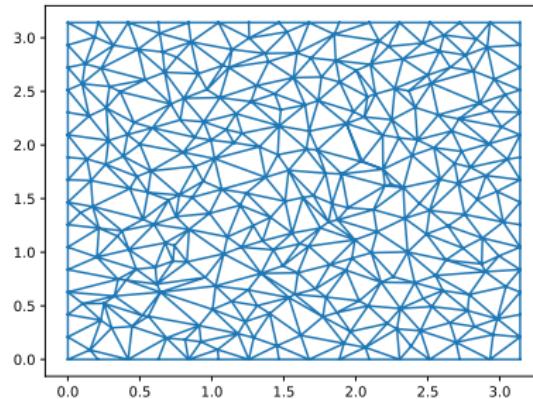


Figura: Malha 16x16

Resultados parciais

Equação de Poisson

$$\nabla^2 f(x, y) = -2 \cos(x) \cos(y)$$

Solução : $f(x, y) = \cos(x) \cos(y) - 1$. $\frac{\partial f}{\partial n} = 0$, $\forall (x, y) \in \partial\Omega$

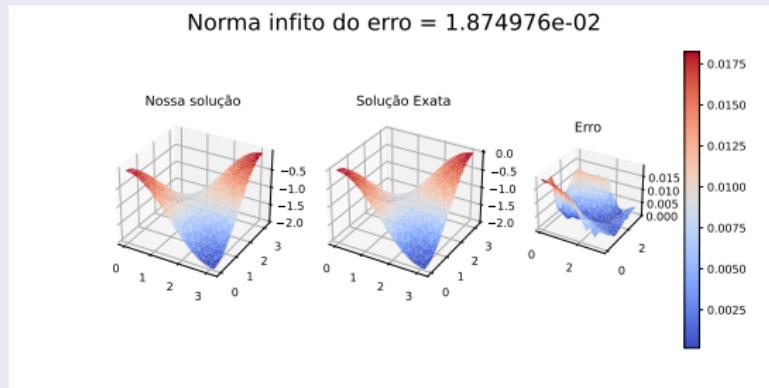


Figura: Erro da equação de Poisson em malha 16x16

Resultados parciais

Divergente

$$F(x, y) = (-2 \cos(x) \cos(y), -2 \cos(x) \cos(y))$$

$$\text{Solução: } \nabla \cdot f(x, y) = 2 \sin(x + y)$$

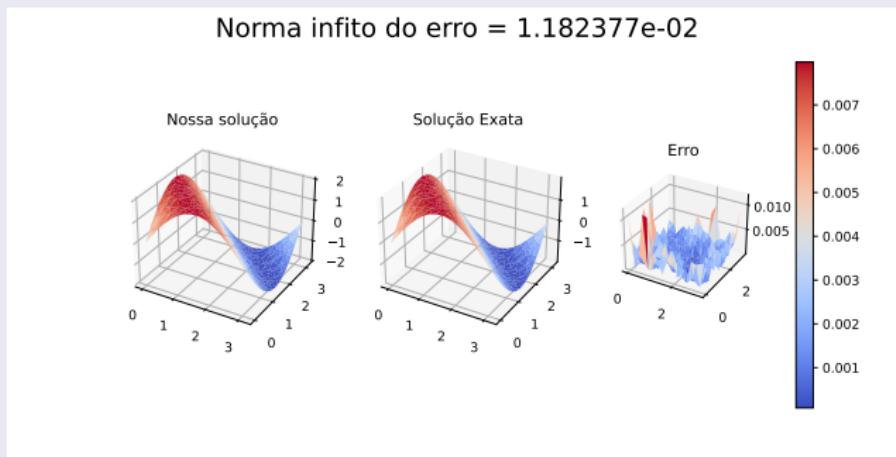


Figura: Erro do divergente em malha 16x16

Resultados parciais

Gradiente

$$f(x, y) = -2 \cos(x) \cos(y)$$

$$\text{Solução: } \nabla F(x, y) = (2\cos(y)\sin(x), 2\cos(x)\sin(y))$$

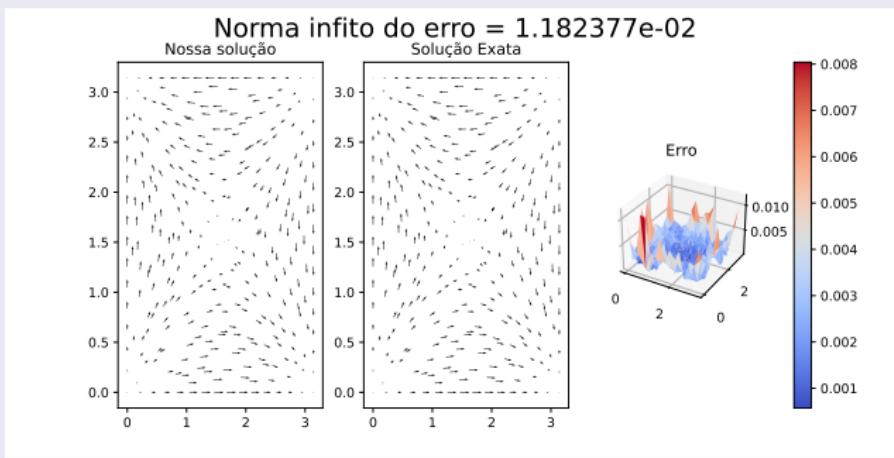


Figura: Erro do gradiente em malha 16x16

Resultados esperados

Resultados esperados

Implementação da simulação de fumaça 2D/3D em domínios arbitrários.

Obrigado!