

Animação de fumaça em malhas não-estruturadas usando RBF-FD

Gabriel Lucas da Silva

Orientador: Prof. Dr. Afonso Paiva Neto

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
Universidade de São Paulo

8 de dezembro de 2025

- 1 Introdução
- 2 Motivação e Objetivos
- 3 Fundamentos Teóricos
- 4 Metodologia
- 5 Tratamento de Fronteiras
- 6 Resultados
- 7 Discussão
- 8 Conclusões e Contribuições
- 9 Trabalhos Futuros

Importância

- Indústria
 - Entretenimento
 - Jogos
 - Engenharia
- Academia

Introdução

Simulações baseadas em física tendem a apresentar resultados visualmente realísticos



Figura: Animação de fumaça no jogo Mass Effect 3

Limitações das grades regulares

- Geralmente restritas a domínios AABB simples
- Dificuldade para representar fronteiras complexas
- Perda de detalhes em geometrias irregulares

Malhas não-estruturadas

- Adaptam-se a fronteiras complexas
- Maior flexibilidade geométrica
- Desafio: métodos numéricos tradicionais (FD, FV)

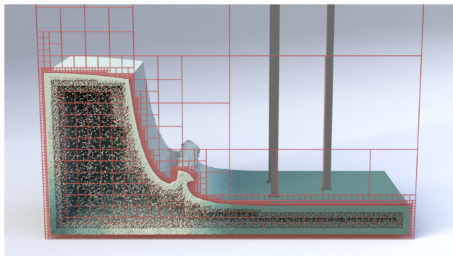


Figura: Octree Nakanishi (RBF-FD)

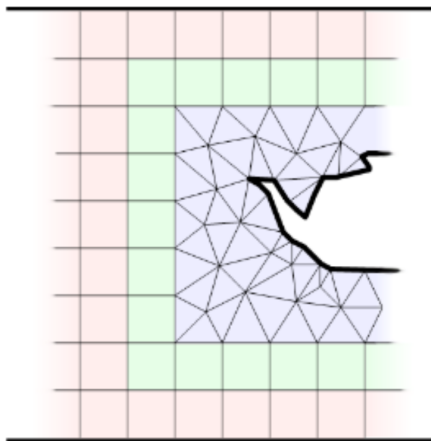


Figura: Malha híbrida Feldman (FV)

Objetivo Principal

Desenvolver uma técnica de animação de fumaça 2D em malhas triangulares não-estruturadas utilizando RBF-FD

Objetivos Específicos

- Adaptar pipeline Stable Fluids para malhas arbitrárias
- Implementar condição de fronteira de Neumann com nós fantasma (Flyer, Natasha)
- Validar método em domínios com geometrias complexas

Equações que regem o escoamento de fluidos

$$\dot{\mathbf{u}} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{g} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

- $-(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$: Termo de advecção
- $-\frac{1}{\rho}\nabla p$: Gradiente de pressão
- \mathbf{g} : Forças externas

Diferenças Finitas vs RBF-FD

Diferenças Finitas (FD)

- Baseado na série de Taylor
- Funciona apenas em grades regulares
- Estêncil fixo e estruturado

RBF-FD

- Generalização de FD para malhas arbitrárias
- Interpolação livre de malha (meshfree)
- Estêncil adaptativo baseado em vizinhança

Função de Base Radial (RBF)

$$\Phi_k(\mathbf{x}) = \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|)$$

Spline poliharmônica: $\phi(r) = r^s$, com $s = 1, 3, 5, \dots$

Interpolador Generalizado

A forma generalizada do interpolador rbf se da por:

$$S_y(x) = \sum_{k=1}^N \alpha_k \phi(\|x - x_k\|) + \sum_{j=1}^M \beta_j P_j(x).$$

Continuação RBF

Aplicando as seguintes restrições:

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k P_j(x_k) = 0, \forall j = 1, \dots, M,$$

e

$$S_y(x_i) = y_i, \forall i = 1, \dots, N.$$

Temos o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P}^\top & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Cálculo de pesos

Para calcular os pesos para o operador \mathcal{L} , temos o seguinte sistema linear:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P}^T & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}\phi \\ \mathcal{L}\mathbf{P} \end{bmatrix}$$

Aproximação de operador diferencial

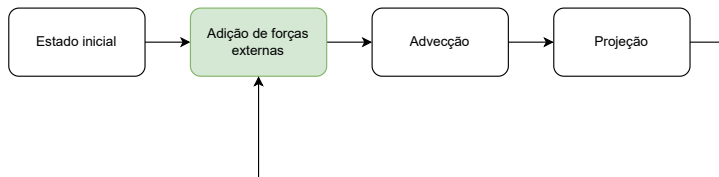
Para aproximar $\mathcal{L}y$ no ponto x_i , com vizinhança x_k :

$$\mathcal{L}y \approx \sum_{k=1}^N \omega_k^{\mathcal{L}} y_k$$

Pesos ω calculados resolvendo sistema linear local

Três passos principais

- **Passo 1:** Aplicação de forças externas
- **Passo 2:** Advecção semi-lagrangiana
- **Passo 3:** Projeção de Helmholtz-Hodge



Atualização do campo de velocidades

$$\mathbf{u}_{novo} = \mathbf{u}_{antigo} + \Delta t \cdot \mathbf{f}$$

onde \mathbf{f} representa forças externas

Forças típicas em simulação de fumaça

- **Gravidade:** $\mathbf{f}_g = -g\hat{\mathbf{j}}$ (aponta para baixo)
- **Empuxo térmico** (buoyancy): força que faz fumaça quente subir

$$\mathbf{f}_{empuxo} = \alpha(T - T_{amb})\hat{\mathbf{j}}$$

onde α é coeficiente de empuxo, T é temperatura local

Advecção Semi-Lagrangiana

Equação de advecção

Termo de transporte: $\frac{\partial q}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)q = 0$

onde q pode ser: velocidade, densidade de fumaça, temperatura...

Solução Semi-Lagrangiana

Seguir partícula ao longo da trajetória (característica):

$$q(\mathbf{x}, t + \Delta t) = q(\mathbf{x} - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\Delta t, t)$$

Algoritmo:

- 1 Backtrack: $\mathbf{x}_{prev} = \mathbf{x} - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\Delta t$
- 2 Interpolador q em \mathbf{x}_{prev} (RBF ou baricêntrica)
- 3 Atribuir valor interpolado a \mathbf{x}

Advecção - Desafio em Malhas Arbitrárias

Problema

\mathbf{x}_{prev} pode cair:

- Dentro de outra célula
- Fora do domínio

Solução

- Interseção raio-polígono

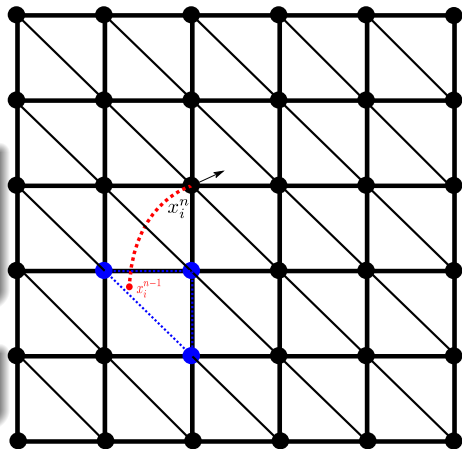


Figura: Backtracking em malha regular com Interpolação baricentrica.

Projeção de Pressão

Problema

Após advecção: \mathbf{w} (campo com divergente) $\rightarrow \nabla \cdot \mathbf{w} \neq 0$

Queremos: \mathbf{u} (campo incompressível) $\rightarrow \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$

Decomposição de Helmholtz-Hodge

Todo campo pode ser decomposto em parte livre de divergente + gradiente:

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \nabla p$$

Aplicando divergente e usando $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$:

$$\nabla^2 p = \nabla \cdot \mathbf{w}$$

Campo incompressível final:

$$\mathbf{u} = \mathbf{w} - \nabla p$$

Exemplo: Collocation

Resolvendo a equação de Poisson

$$\nabla^2 p = \nabla \cdot \mathbf{w}$$

Aplicando condição de fronteira de Neumann

$$\nabla p \cdot \mathbf{n} = 0$$

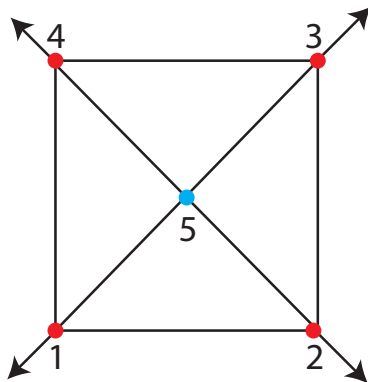


Figura: Malha com nós de fronteira

Abordagem Tradicional

Substituir equação diferencial nos nós de fronteira pela condição de contorno

Exemplo: 5 nós (1-4 fronteira, 5 interno)

$$\begin{bmatrix} \omega_1^n & \omega_2^n & 0 & \omega_4^n & \omega_5^n \\ \omega_1^n & \omega_2^n & \omega_3^n & 0 & \omega_5^n \\ 0 & \omega_2^n & \omega_3^n & \omega_4^n & \omega_5^n \\ \omega_1^n & 0 & \omega_3^n & \omega_4^n & \omega_5^n \\ \omega_1^L & \omega_2^L & \omega_3^L & \omega_4^L & \omega_5^L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_5 \end{bmatrix}$$

- Linhas 1-4: Condição de Neumann $\nabla p \cdot \mathbf{n} = 0$ (pesos ω^n)
- Linha 5: Equação de Poisson $\nabla^2 p = b$ (pesos ω^L)

Desafio

- Nós de fronteira têm vizinhos apenas em um semiplano
- Estêncil desequilibrado
- Perda de precisão

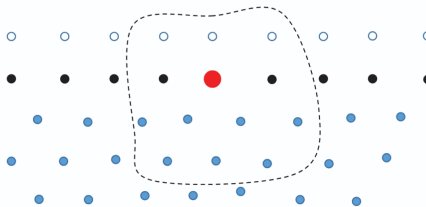
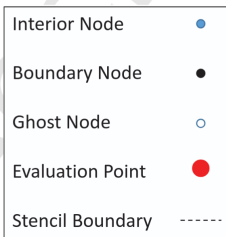


Figura: Solução Natasha para melhorar precisão do RBF-FD

Solução: Nós Fantasma

Ideia Central

- Criar nó temporário fora do domínio
- Balancear estêncil de fronteira
- Eliminar dependência através da condição de Neumann

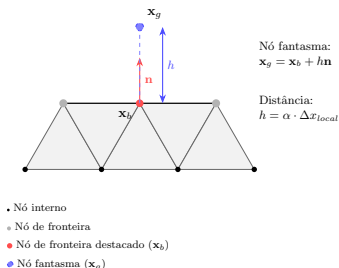


Figura: Nó fantasma (ilustração conceitual)

Nós Fantasma: Formulação

Criação do nó fantasma

$$\mathbf{x}_g = \mathbf{x}_b + h\mathbf{n}$$

onde \mathbf{n} é a normal à fronteira e $h = \alpha \cdot \Delta x_{local}$

Condição de Neumann

$$\nabla p \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_j \omega_j^n p_j + \omega_g^n p_g = 0$$

Eliminação do nó fantasma

$$p_g = -\frac{1}{\omega_g^n} \sum_j \omega_j^n p_j$$

Substituindo p_g na aproximação do Laplaciano

$$\begin{aligned}\nabla^2 p &\approx \sum_j \omega_j^L p_j + \omega_g^L p_g \\ &= \sum_j \omega_j^L p_j + \omega_g^L \left(-\frac{1}{\omega_g^n} \sum_j \omega_j^n p_j \right) \\ &= \sum_j \left(\omega_j^L - \frac{\omega_g^L}{\omega_g^n} \omega_j^n \right) p_j\end{aligned}$$

Pesos efetivos

$$\tilde{\omega}_j^L = \omega_j^L - \frac{\omega_g^L}{\omega_g^n} \omega_j^n$$

Interseção Raio-Polígono

Algoritmo

- Cohen-Sutherland
- Equação paramétrica
- Otimização JIT (Numba)
- Vetorização

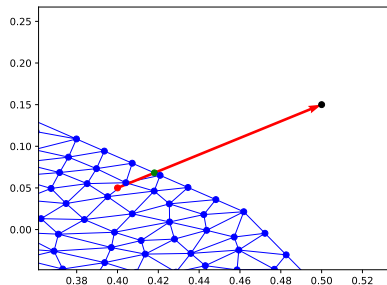


Figura: Exemplo intersecção durante backtracking

Experimento 1: Validação Ghost Nodes

Objetivo

Comparar método com e sem nós fantasma

- Domínio: AABB simples
- Métrica: Divergente do campo de velocidades
- Resultado: Redução significativa do divergente na fronteira

Experimento 2: Geometria Irregular

Objetivo

Testar capacidade em fronteiras complexas

- Domínio: Polígono irregular
- Formação de vórtices
- Comportamento físico qualitativamente (visualmente) correto

Experimento 3: Domínio Complexo

Objetivo

Validar em geometrias geográficas reais

- Domínio: Contorno geográfico (país)
- Fronteiras altamente irregulares
- Demonstração de viabilidade do método

Observações

- Divergente inicialmente alto (injeção de fumaça)
- Queda após desligamento do injetor
- Aumento gradual ao longo do tempo
- Concentração em regiões de fronteira

Interpretação

- Ghost nodes melhoram estabilidade
- Desafios em regiões de alta curvatura
- Sensibilidade à proximidade entre nós

Sucessos

- Comportamento físico qualitativamente (visualmente) correto
- Formação de estruturas vorticais
- Interação adequada com fronteiras
- Viabilidade em domínios arbitrários

Desafios Identificados

- Perda gradual de massa
- Instabilidades em regiões de alta curvatura
- Sensibilidade à proximidade de nós
- Dependência da função de base radial

Principais Contribuições

- Adaptação do Stable Fluids com RBF-FD para malhas triangulares
- Técnica simplificada de nós fantasma para fronteiras
- Algoritmo eficiente de ray-casting com JIT
- Demonstração de viabilidade em domínios arbitrários

Publicação

- CNMAC 2023 - Bonito, MS
- "Animação de fumaça em malhas não-estruturadas usando RBF-FD"

Extensões Imediatas

- Extensão para 3D (malhas tetraedrais)
- Melhoria na conservação de massa
- Exploração de outras funções de base radial

Desenvolvimentos Avançados

- Domínios não-simplesmente conexos (com buracos)
- Otimizações de desempenho (paralelização, GPU)
- Refinamento adaptativo
- Interatividade em tempo real

Obrigado!

Perguntas?