Universidad del Istmo de Guatemala
Facultad de Ingeniería
Ing. en Sistemas
Informática 1
Prof. Ernesto Rodríguez - erodriguez@unis.edu.gt

Corrección del Examen Parcial #1

Jeremy Cáceres y Gabriel Lemus

Instrucciones: Responda las preguntas que se le presentan a continuación. Asegúrese de brindar el procedimiento necesario para evaluar el razonamiento que le llevó a la respuesta. Puede hacer uso de cualquier material impreso para este examen. El examen debe resolverse de forma individual. Se le recuerda que la universidad no tolera el plagio y cualquier instancia de plagio será penalizado con la anulación de esta prueba, un reporte académico y la posible suspensión de ayuda financiera.

Ejercicio #1: Inducción (20 %)

Demuestre las siguientes propiedades utilizando inducción. Puede hacer uso de la aritmética para dichas demostraciones. Asegúrese de indicar claramente el caso base, el caso inductivo, la hipótesis inductiva y cada paso del procedimiento.

1. $\forall n \geq 1.\ 2 * n$ es par

   Caso Base:
   - $n = 1$

   Demostración.

   $$2 * 1 = 2 \tag{1}$$
   $$2 \text{ es par} \tag{2}$$

   □

   Caso Inductivo:
   - $n = n + 1$
   - **Hipótesis Inductiva:** $2 * n$ es par
   - *Demostrar que:* $2 * (n + 1)$ es par

Demostración.

$2 * (n+1)$	Multiplicar por 2.	(1)
$(2 * n) + 2$	Sumarle 2 a un número no cambia si es par o no; se puede omitir.	(2)
$2 * n$	Hipótesis inductiva: 2 * n es par	(3)
$2n$ es par		(4)

$\square$

2. $\forall n \geq 4.\ 2^n < n!$, donde $n! = 1 * 2 * 3 * ... * (n-1) * n$

Caso Base:

- $n = 4$

Demostración.

$$2^4 < 4! \quad (1)$$

$$16 < 24 \quad (2)$$

$\square$

Caso Inductivo:

- $n = n + 1$
- **Hipótesis Inductiva:** $2^n < n!$
- *Demostrar que:* $2^{n+1} < (n+1)!$

Demostración.

$2^{n+1} < (n+1)!$	Propiedad de los factoriales: $(n+1)! = n! * (n+1)$	(1)
$2^{n+1} < n! * (n+1)$	Propiedad de la exponenciación: $2^{n+1} = 2^n * 2$	(2)
$2^n * 2 < n! * (n+1)$	Usar un valor menor del lado izquierdo cumple con la desigualdad.	(3)
$2^n < n! * (n+1)$	Usar un valor menor del lado derecho cumple con la desigualdad.	(4)
$2^n < n!$	Hipótesis inductiva: $2^n < n!$.	(5)
$2^n < n!$		(6)

$\square$

Ejercicio #2: Definiciones inductivas (60 %)

Dar una definición inductiva para las siguientes funciones sobre los *números naturales unarios*. Consejo, se le recomienda definir y utilizar la suma y multiplicación de los números naturales unarios:

1. La función factorial ($n!$) en donde $n! = 1 \otimes 2 \otimes 3 \otimes ... \otimes (n-1) \otimes n$

$$n! := \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \vee n = 1 \\ x! * \sigma(x) & \text{si } n = \sigma(x) \end{cases}$$

2. La función resta ($\ominus$) en donde:

   - $a \ominus b = 0$ si $a \leq b$
   - $a \ominus b = a - b$ de lo contrario

$$a \ominus b := \begin{cases} 0 & \text{si } a \leq b \\ a & \text{si } b = 0 \\ 1 & \text{si } a = \sigma(b) \\ (x \ominus b) \oplus 1 & \text{si } a = \sigma(x) \end{cases}$$

3. La función sumatoria $\sum_i^n$ en donde $\sum_i^n = i \oplus (i \oplus 1) \oplus ... \oplus (n-1) \oplus n$. En otras palabras, la suma de los números empezando por i y terminando en n.

$$\sum_i^n := \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ \sum_i^x \oplus \sigma(x) & \text{si } n = \sigma(x) \wedge i \leq n \end{cases}$$

4. La función exponente a^b en donde $a^b = a \otimes a \otimes a...$ (b veces)

$$a^b := \begin{cases} 1 & \text{si } b = 0 \\ a & \text{si } b = 1 \\ a \otimes a^x & \text{si } b = \sigma(x) \end{cases}$$

Ejercicio #3: Inducción para números unarios (20 %)

A continuación se presenta la definición de la suma y multiplicación de números unarios:

$$a \oplus b := \begin{cases} a & \text{si } b = 0 \\ b & \text{si } a = 0 \\ 1 \oplus (x \oplus b) & \text{si } a = \sigma(x) \end{cases} \qquad a \otimes b := \begin{cases} 0 & \text{si } a = 0 \ \vee \ b = 0 \\ a & \text{si } b = 1 \\ b & \text{si } a = 1 \\ a \oplus (a \otimes x) & \text{si } b = \sigma(x) \end{cases}$$

Demostrar utilizando inducción que: $2 \otimes a = a \oplus a$. Puede utilizar una definición alterna (pero equivalente) de la suma o multiplicación si lo desea. Recuerde indicar claramente el caso base, el caso inductivo, la hipótesis inductiva y cada paso de la demostración.

Caso Base:

- $a = 0$

Demostración.

$$\begin{aligned} 2 \otimes 0 &= 0 \oplus 0 && (1) \\ 0 &= 0 && (2) \end{aligned}$$

□

Caso Inductivo:

- $a = \sigma(a)$
- **Hipótesis Inductiva:** $2 \otimes a = a \oplus a$
- *Demostrar que:* $2 \otimes \sigma(a) = \sigma(a) \oplus \sigma(a)$

Demostración.

$$\begin{aligned} 2 \otimes \sigma(a) &= \sigma(a) \oplus \sigma(a) && \text{Definición de la multiplicación.} && (1) \\ 2 \oplus (2 \otimes a) &= \sigma(a) \oplus \sigma(a) && \text{Hipótesis Inductiva: } 2 \otimes a = a \oplus a. && (2) \\ 2 \oplus (a \oplus a) &= \sigma(a) \oplus \sigma(a) && \text{Definición de la suma.} && (3) \\ 2 \oplus (a \oplus a) &= \sigma(a \oplus \sigma(a)) && \text{La suma es conmutativa.} && (4) \\ 2 \oplus (a \oplus a) &= \sigma(\sigma(a) \oplus a) && \text{Definición de la suma.} && (5) \\ 2 \oplus (a \oplus a) &= \sigma(\sigma(a \oplus a)) && \sigma(\sigma(0)) = 2 && (6) \\ 2 \oplus (a \oplus a) &= 2 \oplus (a \oplus a) && && (7) \end{aligned}$$

□