



Laboratorio #2

Jeremy Cáceres y Gabriel Lemus

Ejercicio #1

Demostrar utilizando inducción:

$$\forall n. n^3 \geq n^2$$

donde $n \in \mathbb{N}$

Caso Base:

$$n = 0$$

$$\begin{aligned} 0^3 &\geq 0^2 \\ 0 * 0 * 0 &\geq 0 * 0 \\ 0 &\geq 0 \end{aligned}$$

Caso Inductivo:

- $n = n + 1$
- $(n + 1)^3 \geq (n + 1)^2 \rightarrow$ Hipótesis Inductiva

Demostración.

$$\begin{aligned} (n + 1)^3 &\geq (n + 1)^2 \\ (n + 1)(n + 1)(n + 1) &\geq (n + 1)(n + 1) \\ \cancel{(n + 1)(n + 1)} \overset{1}{\rightarrow} (n + 1) &\geq \cancel{(n + 1)(n + 1)} \overset{1}{\rightarrow} 1 \\ n + 1 &\geq 1 \\ n &\geq 0 \end{aligned}$$

□

Ejercicio #2

Demostrar utilizando inducción la desigualdad de Bernoulli:

$$\forall n. (1+x)^n \geq nx+1$$

donde $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{Q}$ y $x \geq -1$

Consejo: Es posible demostrar esto demostrando una propiedad más fuerte donde el lado izquierdo es mayor que $nx+1$

Caso Base:

$$n = 0$$

$$\begin{array}{rcl} (1+x)^0 & \geq & (0)(x)+1 \\ 1 & = & 1 \end{array}$$

Caso Inductivo:

- $n = n+1$
- $(1+x)^{n+1} \geq (n+1)(x)+1 \rightarrow$ Hipótesis Inductiva

Demostración.

$$\begin{array}{rcl} (1+x)^{n+1} & \geq & (n+1)(x)+1 \\ (1+x)^n(1+x) & \geq & (nx+1)(1+x) \quad \because (1+x)^n \geq nx+1 \\ (1+x)^n(1+x) & \geq & nx+nx^2+1+x \\ (1+x)^n(1+x) & \geq & 1+x(n+1)+nx^2 \\ (1+x)^n(1+x) & \geq & 1+x(n+1) \quad \because n \geq 0, x^2 \geq 0 \quad \therefore nx^2 \geq 0 \\ (1+x)^{n+1} & \geq & x(n+1)+1 \end{array}$$

□