Universidad del Istmo de Guatemala
Facultad de Ingenieria
Informatica 1

Laboratorio #2

Jeremy Cáceres y Gabriel Lemus

Ejercicio #1

Demostrar utilizando inducción:

$$\forall\ n.\ n^3 \geq n^2$$

donde $n \in \mathbb{N}$

Caso Base:

$n = 0$

$$\begin{aligned} 0^3 &\geq 0^2 \\ 0 * 0 * 0 &\geq 0 * 0 \\ 0 &\geq 0 \end{aligned}$$

Caso Inductivo:

- $n = n + 1$
- $n^3 \geq n^2 \rightarrow$ Hipótesis Inductiva
- *Demostrar que:* $(n+1)^3 \geq (n+1)^2$

Demostración.

$$\begin{aligned} (n+1)^3 &\geq (n+1)^2 \\ (n+1)(n+1)(n+1) &\geq (n+1)(n+1) \\ \frac{(n+1)\cancelto{1}{(n+1)(n+1)}}{\cancelto{1}{(n+1)(n+1)}} &\geq \frac{\cancelto{1}{(n+1)(n+1)}}{\cancelto{1}{(n+1)(n+1)}} \\ n+1 &\geq 1 \\ n &\geq 0 \end{aligned}$$

$\square$

Ejercicio #2

Demostrar utilizando inducción la desigualdad de Bernoulli:

$$\forall\ n.\ (1+x)^n \geq nx+1$$

donde $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{Q}$ y $x \geq -1$

Consejo: Es possible demostrar esto demostrando una propiedad más fuerte donde el lado izquierdo es mayor que $nx+1$

Caso Base:

$n = 0$

$$\begin{aligned} (1+x)^0 &\geq (0)(x)+1 \\ 1 &\geq 1 \end{aligned}$$

Caso Inductivo:

- $n = n+1$
- $(1+x)^n \geq nx+1 \rightarrow$ Hipótesis Inductiva
- *Demostrar que:* $(1+x)^{n+1} \geq (n+1)(x)+1$

Demostración.

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &\geq (n+1)(x)+1 \\
(1+x)^n(1+x) &\geq (nx+1)(1+x) && \because (1+x)^n \geq nx+1\ \wedge\ nx+1 > n+1 \\
(1+x)^n(1+x) &\geq nx+nx^2+1+x \\
(1+x)^n(1+x) &\geq 1+x(n+1)+nx^2 \\
(1+x)^n(1+x) &\geq 1+x(n+1) && \because n \geq 0,\ x^2 \geq 0 \qquad \therefore nx^2 \geq 0 \\
(1+x)^{n+1} &\geq x(n+1)+1
\end{aligned}$$

$\square$