UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

CAMPUS DE JOINVILLE

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIAS DA MOBILIDADE

CURSO: ENGENHARIA MECATRÔNICA

EMB 5016: CÁLCULO NUMÉRICO

PROF.: ALEXANDRE ZABOT

GABRIEL SARTORI MAÇANEIRO

MATRÍCULA: 20101957

TRABALHO PRÁTICO FINAL

2021

Sumário

1 INTRODUÇÃO

No trabalho a seguir, será apresentado a solução para o problema proposto da órbita do satélite. A partir das coordenadas de três pontos do satélite, foi calculado todos os parâmetros que descrevem sua órbita elíptica, assim como foram criadas duas figuras: a primeira, representa a órbita simples do satélite ao redor do planeta Terra, a segunda, representa trinta pontos equidistantes em tempo por onde o satélite percorre. Logo após, foi comprovado a segunda lei de Kepler, primeiramente, integrando a equação da elipse, depois, interpolando polinômios de terceiro grau entre quatro pontos pelo método da Spline Cúbica. Por fim, foram criadas mais três figuras para representar as áreas de seções entre pontos equidistantes.

2 SOLUÇÕES DOS PROBLEMAS PROPOSTOS

2.1 Parâmetros da órbita

Primeiramente, foram obtidos três pontos - que pertencem a elipse a qual representa a órbita do satélite - a partir do arquivo chamado “pontos.dat” e salvos em uma matriz A do tipo “float”, como mostra a figura a seguir.

Figura 1 – Pontos pertencentes à órbita

```
A = [20621.3        5214.2009061]
    [34642.3        3201.7095080]
    [21168.5        5193.6201775]
```

Fonte: Elaborado pelo autor.

A seguir, a partir da equação da elipse, foi construído um sistema linear com os três pontos e armazenado na matriz “matrix” como mostra a Figura 2.

Figura 2 – Sistema linear com a equação da elipse

```
Matrix = [425238013.69, 20621.3, 1, 27187891.08917406]
         [1200088949.2900002, 34642.3, 1, 10250943.773617601]
         [448105392.25, 21168.5, 1, 26973690.54813513]
```

Fonte: Elaborado pelo autor.

Então, essa matriz com os coeficientes do sistema linear foi enviada para um algoritmo de eliminação gaussiana, isto é, que resolve o sistema linear e retorna um vetor com o valor das variáveis A, B e C. O valor dessas variáveis é representado na Figura 3.

Figura 3 - Soluções do sistema linear

```
Parâmetros = [-0.060600694603988904, 2141.0425502000007, 8806529.350369325]
```

Fonte: Elaborado pelo autor.

Com esses valores, é possível calcular todos os parâmetros da elipse que representa a órbita do satélite. A tabela 1, mostra todos os cálculos necessários para encontrar os parâmetros.

Tabela 1 - Cálculos utilizados para determinar os parâmetros da órbita

```
yc = 0  # coordenada y do centro
xc = - ABC[1] / float(2 * ABC[0])  # coordenada x do centro
a = np.sqrt(xc**2 - ABC[2] / ABC[0])  # calcula semi-eixo maior
b = a * np.sqrt(- ABC[0])  # calcula semi-eixo menor
e = np.sqrt(1 - (b ** 2 / a ** 2))  # calcula a excentricidade
f = a * e  # calcula o foco
```

Fonte: Elaborado pelo autor.

Portanto, a tabela 2 representa os valores dos parâmetros encontrados a partir dos cálculos acima.

Tabela 2 - Parâmetros da órbita

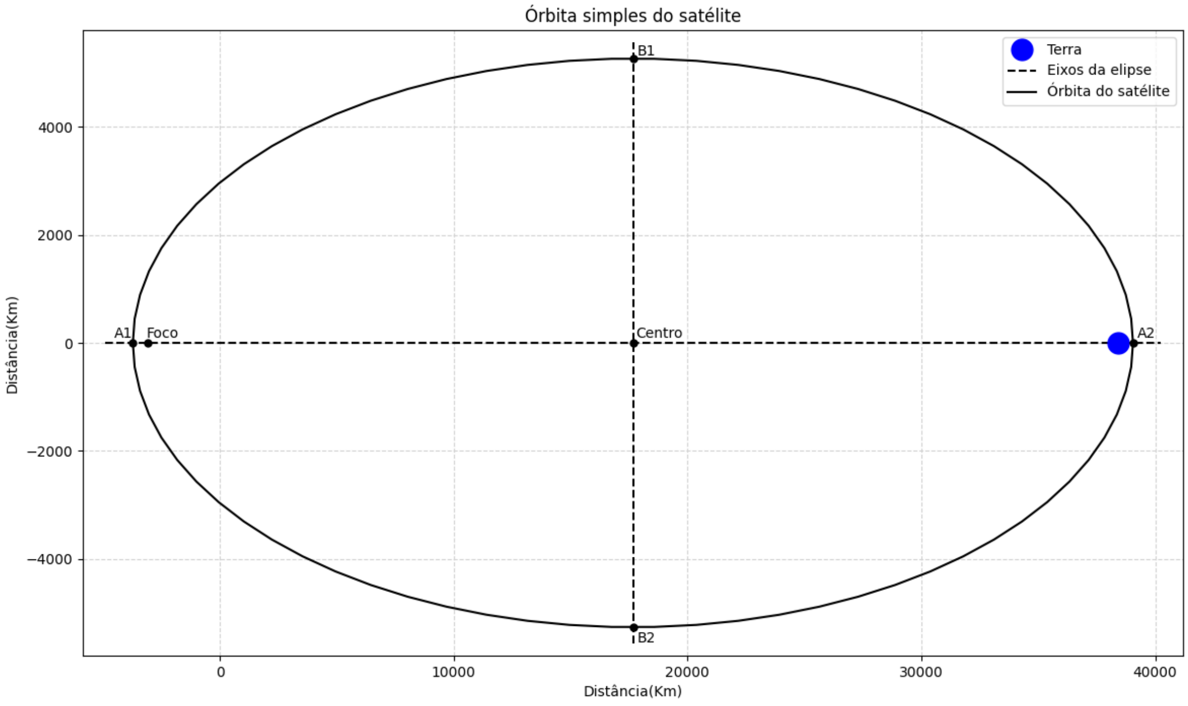
```
Coordenada Y do centro:  0km
Coordenada X do centro:  17665.165095806275km
Semi-eixo maior:  21386.412945812823km
Semi-eixo menor:  5264.737829520467km
Excentricidade:  0.9692261373879736
Distância focal:  20728.270412054317km
```

Fonte: Elaborado pelo autor.

2.2 Figura da órbita simples

A partir dos parâmetros da órbita obtidos acima, é feita uma figura representativa do movimento do satélite no espaço. Uma observação importante é que os eixos estão em escalas diferentes para facilitar a visualização.

Figura 4 - Órbita do satélite



Fonte: Elaborado pelo autor.

2.3 Figura da órbita pontual

Para fazer a figura dos trinta pontos equidistantes em tempo, primeiramente se converte todos parâmetros para metros e logo após se calcula o período orbital P a partir da fórmula expressa na figura 5.

Figura 5 – Fórmula para calcular o período orbital

```
mass_earth = 5.9722e24
P = 2 * np.pi * np.sqrt(a ** 3 / (constants.G * mass_earth))
```

Fonte: Elaborado pelo autor.

A seguir, divide-se esse período em trinta vezes e se armazena num vetor “t” que é utilizado para calcular a anomalia média “M” a partir da fórmula $M = (2\pi * t) / P$. O resultado dessa contas está expresso na figura abaixo.

Figura 6 – Vetor tempo e anomalia média

```
Vetor tempo:  [    0.          1037.51767167  2075.03534335  3112.55301502
  4150.0706867   5187.58835837  6225.10603004  7262.62370172
  8300.14137339  9337.65904507 10375.17671674 11412.69438842
 12450.21206009 13487.72973176 14525.24740344 15562.76507511
 16600.28274679 17637.80041846 18675.31809013 19712.83576181
 20750.35343348 21787.87110516 22825.38877683 23862.90644851
 24900.42412018 25937.94179185 26975.45946353 28012.9771352
 29050.49480688 30088.01247855]
Anomalia média:  [0.         0.20943951 0.41887902 0.62831853 0.83775804 1.04719755
 1.25663706 1.46607657 1.67551608 1.88495559 2.0943951  2.30383461
 2.51327412 2.72271363 2.93215314 3.14159265 3.35103216 3.56047167
 3.76991118 3.97935069 4.1887902  4.39822972 4.60766923 4.81710874
 5.02654825 5.23598776 5.44542727 5.65486678 5.86430629 6.0737458 ]
```

Fonte: Elaborado pelo autor.

A partir desses trinta valores da anomalia média, e a partir da fórmula

$M = E - e * \sin(E)$, utiliza-se um algoritmo de bissecção, isto é, um algoritmo que encontra as raízes de funções para chegar aos trinta valores da anomalia excêntrica E, como é mostrado na figura 7.

Figura 7 – Anomalia excêntrica

```
Anomalia excêntrica:  [8.27179613e-10 1.05032589e+00 1.36830189e+00 1.59720667e+00
 1.78486191e+00 1.94821028e+00 2.09548355e+00 2.23139926e+00
 2.35896267e+00 2.48023979e+00 2.59673854e+00 2.70961670e+00
 2.81980471e+00 2.92808356e+00 3.03513749e+00 3.14159265e+00
 3.24804781e+00 3.35510175e+00 3.46338059e+00 3.57356861e+00
 3.68644676e+00 3.80294552e+00 3.92422264e+00 4.05178605e+00
 4.18770176e+00 4.33497503e+00 4.49832340e+00 4.68597864e+00
 4.91488342e+00 5.23285941e+00]
```

Fonte: Elaborado pelo autor.

Então, a partir dos trinta valores da anomalia excêntrica e a partir das fórmulas apresentadas nas figura 8 e 9 e dos parâmetros da elipse, chega-se aos valores da anomalia verdadeira “theta” e a distância “r” dos pontos até o planeta Terra representados na figura 10.

Figura 8 – Fórmula da anomalia verdadeira

$$\tan(\theta/2) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan(E/2)$$

Fonte: roteiro elaborado pelo professor Zabot.

Figura 9 – Fórmula para cálculo da distância do ponto à Terra

$$r = a\left(\frac{1-e^2}{1+e\cos\theta}\right)$$

Fonte: roteiro elaborado pelo professor Zabot.

Figura 10 – Anomalia verdadeira e distância do ponto à Terra

```
Anomalia verdadeira:  [ 6.61693110e-09  2.71662046e+00  2.83739528e+00  2.89928352e+00
  2.94076462e+00  2.97216357e+00  2.99767434e+00  3.01939643e+00
  3.03852787e+00  3.05581851e+00  3.07177248e+00  3.08674958e+00
  3.10102091e+00  3.11480172e+00  3.12827236e+00  3.14159265e+00
 -3.12827236e+00 -3.11480172e+00 -3.10102091e+00 -3.08674958e+00
 -3.07177248e+00 -3.05581851e+00 -3.03852787e+00 -3.01939643e+00
 -2.99767434e+00 -2.97216357e+00 -2.94076462e+00 -2.89928352e+00
 -2.83739528e+00 -2.71662046e+00]
Distância do ponto à Terra:  [  658142.53375851 11078485.8784769  17217679.55611729 21933789.98099864
 25789811.22560048 29025146.64663919 31770080.91181779 34105135.66856024
 36084030.79387839 37744377.19999661 39113290.20575929 40210589.80142444
 41050731.81481518 41644014.57468026 41997340.5935508  42114683.35786715
 41997340.59222589 41644014.57203798 41050731.81087121 40210589.81056016
 39113290.19929581 37744377.21339895 36084030.80926568 34105135.6587132
 31770080.90102477 29025146.6350463  25789811.21341448 21933789.96853226
 17217679.5439014  11078485.86765753]
```

Fonte: Elaborado pelo autor.

A partir da anomalia verdadeira, da distância do ponto até a terra, dos parâmetros da elipse e da fórmula apresentada na figura 11, é possível obter as coordenadas no eixo x e y dos trinta pontos equidistantes em tempo representados na figura 12.

Figura 11 – Fórmula das coordenadas x e y

$$\begin{cases} x = r\cos\theta + x_c + f \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

Fonte: roteiro elaborado pelo professor Zabot.

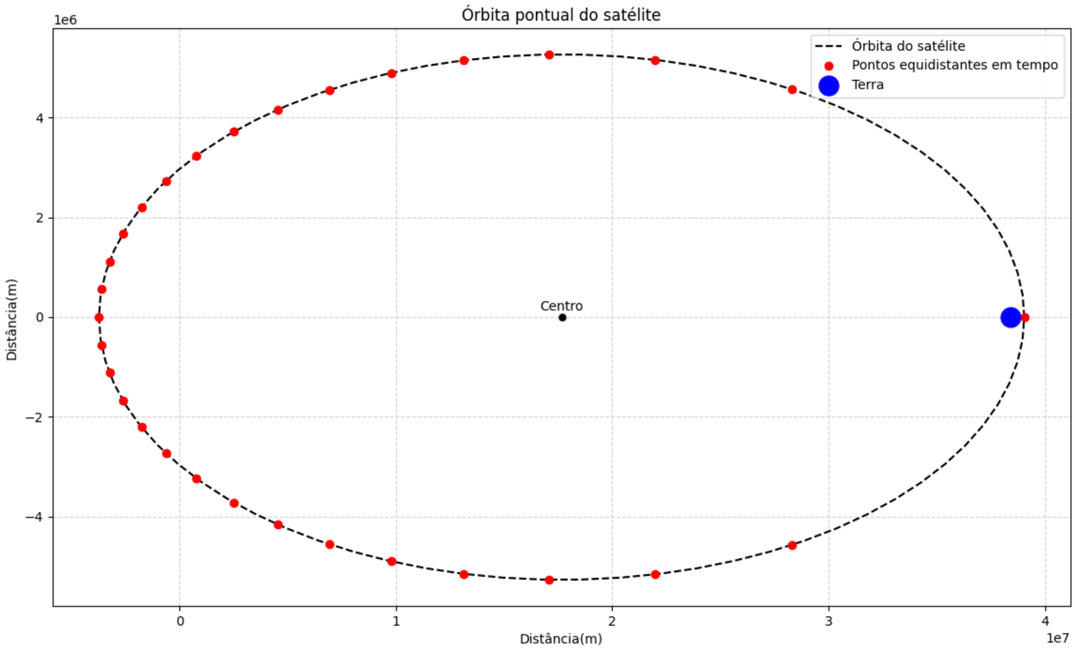
Figura 12 – Coordenadas x e y dos pontos equidistantes em tempo

```
Coordenadas no eixo x:  [39051578.04161909 28300378.76752522 21966259.78247053 17100408.31297644
 13121954.68295604  9783894.24872362  6951805.6789951   4542610.68654956
  2500883.73658182   787819.73420897  -624557.57688156 -1756697.49071252
 -2623514.82155225 -3235634.87999801 -3600179.33999652 -3721247.85000656
 -3600179.33862953 -3235634.87727183 -2623514.81748306 -1756697.50013832
  -624557.57021285   787819.7203811   2500883.72070597  4542610.69670924
  6951805.69013081  9783894.2606846  13121954.69552895 17100408.32583864
 21966259.79507428 28300378.77868812]
Coordenadas no eixo y:  [ 4.35488380e-03  4.56760933e+06  5.15716850e+06  5.26290184e+06
  5.14457189e+06  4.89420952e+06  4.55652882e+06  4.15715502e+06
  3.71241238e+06  3.23352323e+06  2.72867850e+06  2.20416705e+06
  1.66504300e+06  1.11554854e+06  5.59400519e+05  2.77118073e-03
 -5.59400522e+05 -1.11554854e+06 -1.66504301e+06 -2.20416704e+06
 -2.72867850e+06 -3.23352323e+06 -3.71241238e+06 -4.15715503e+06
 -4.55652882e+06 -4.89420952e+06 -5.14457189e+06 -5.26290184e+06
 -5.15716850e+06 -4.56760933e+06]
```

Fonte: Elaborado pelo autor.

Por fim, com as coordenadas dos trinta pontos equidistantes em tempo é possível construir a figura 13 representada logo abaixo.

Figura 13 – Órbita pontual do satélite



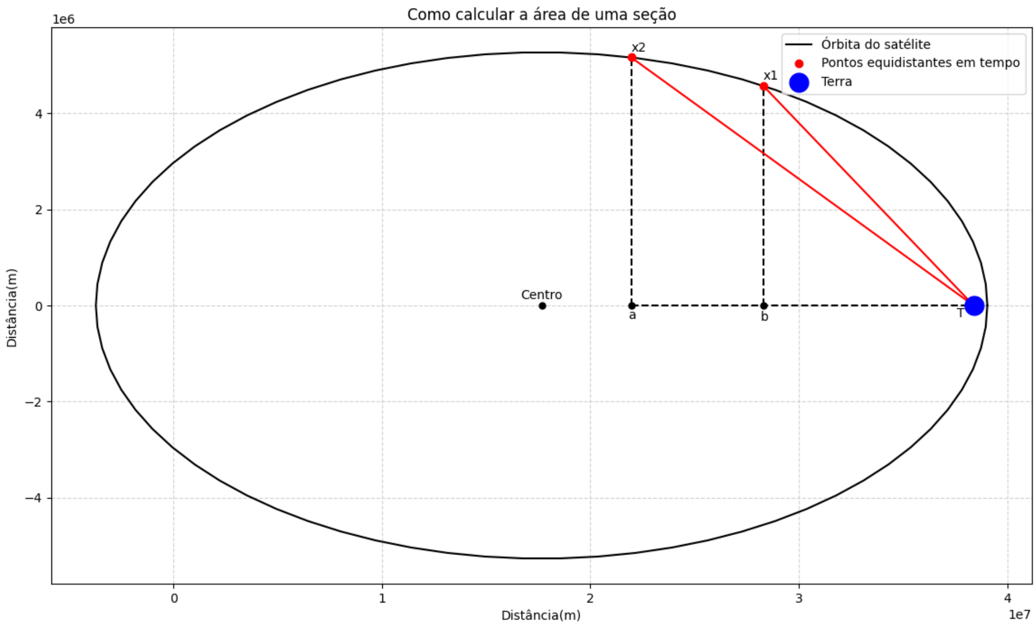
Fonte: Elaborado pelo autor.

3 VERIFICAÇÃO DA SEGUNDA LEI DE KEPLER

3.1 Comprovação das áreas iguais pela equação da elipse

Para comprovar que as áreas são iguais pela equação da elipse, primeiro se define uma forma de calcular essa área. A figura 14 será utilizada para facilitar a explicação do método utilizado para calcular a área de uma seção.

Figura 14 – Como calcular a área de uma seção



Fonte: Elaborado pelo autor.

Dessa forma, para calcular a área da seção Tx1x2, separamos em uma seção denominada abx1x2, um triângulo retângulo Tx1b e outro triângulo retângulo Tx2a. Então, a área da seção Tx1x2 é a soma da área da seção abx1x2 com o triângulo retângulo Tx1b seguida da subtração do triângulo retângulo Tx2a. A área dos triângulos retângulos é calculada pela fórmula “base*altura/2”. Já a área da seção abx1x2 é calculada a partir da integral da equação da elipse no intervalo de a até b. Essa integral foi calculada utilizando método de Gauss Legendre com um grau de integração n = 5. A figura 15 mostra o resultado do cálculo das áreas da seção Tx1x2 e da seção Tx7x8.

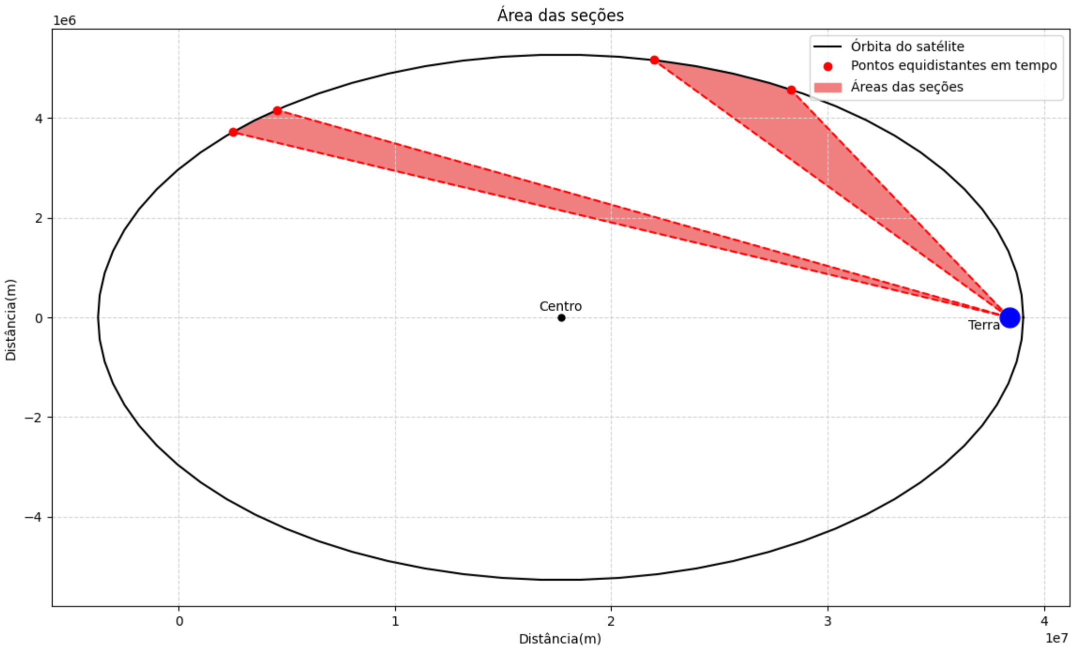
Figura 15 – Áreas das seções Tx1x2 e Tx7x8

```
Área da seção Tx1x2:  11790801169095.703m^2
Área da seção Tx7x8:  11790801076521.133m^2
```

Fonte: Elaborado pelo autor.

Por fim, a figura 16 traz uma representação das áreas das seções Tx1x2 e Tx7x8 e a figura 17 traz algumas observações importantes sobre o método adotado para calcular a área.

Figura 16 – Representação das áreas das seções Tx1x2 e Tx7x8



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 17 – Observações importantes sobre o método adotado para calcular uma área

```
# OBS: PARA O CÁLCULO DE SEÇÕES ABAIXO DO EIXO X, INVERTER O INTERVALO DE INTEGRAÇÃO
# EXEMPLO: AO INVÉS DE INTEGRAR DE X[2] A X[1], INTEGRAR DE X[18] A X[19]
# SE SE DESEJA UTILIZAR O PONTO X[15] PARA CALCULAR UMA SEÇÃO, É NECESSÁRIO ADOTAR
# UM NOVO MÉTODO PARA CALCULAR A ÁREA
```

Fonte: Elaborado pelo autor.

3.2 Comprovação das áreas iguais interpolando pontos pelo método da Spline Cúbica

Para comprovar que as áreas são iguais interpolando pontos na elipse, foram escolhidos os pontos x1, x2, x3 e x4 equidistantes em tempo para interpolar três polinômios de terceiro grau pelo método da Spline Cúbica. Logo, chama-se o algoritmo da Spline Cúbica passando as coordenadas dos quatro pontos e se recebe uma matriz com os coeficientes dos três polinômios assim como representado pela figura 18.

Figura 18 – Matriz dos coeficientes dos polinômios

```
Matriz dos Coeficientes:  [[ 4.56760933e+06 -1.10275710e-01  0.00000000e+00  4.28676709e-16]
 [ 5.15716850e+06 -5.86788137e-02 -8.14586784e-09 -1.13506489e-16]
 [ 5.26290184e+06  1.25320395e-02 -6.48895069e-09 -5.43674443e-16]]
```

Fonte: Elaborado pelo autor.

Com esses coeficientes, para calcular a área da seção entre os pontos 1 e 4, adota-se o mesmo método citado no cálculo das seções pela equação da elipse. Entretanto, dessa vez, integra-se os três polinômios cada um em seu intervalo específico. E se integra a equação da elipse entre os pontos 7 e 10 para efeito de comparação. O resultado do cálculo dessas áreas pode ser visto na figura 19.

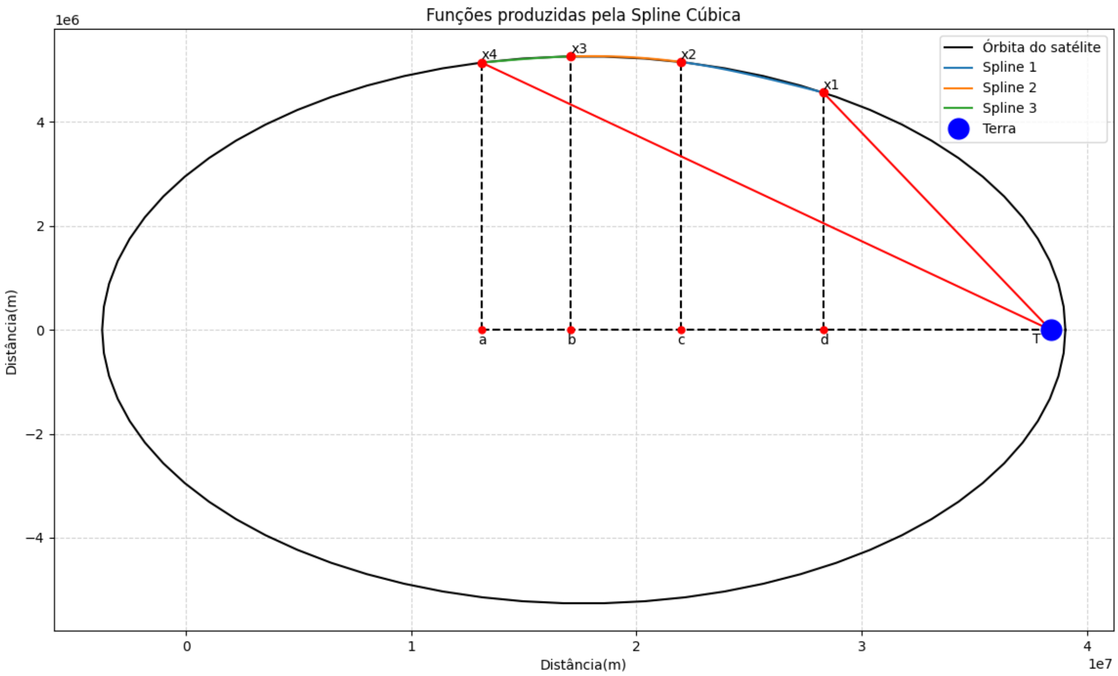
Figura 19 – Áreas das seções Tx1x4 e da seção Tx7x10

```
Área da seção Tx1x4 pela Spline Cúbica:  35245191912358.78m^2
Área da seção Tx7x10 pela Equação da Elipse:  35372403614699.2m^2
```

Fonte: Elaborado pelo autor.

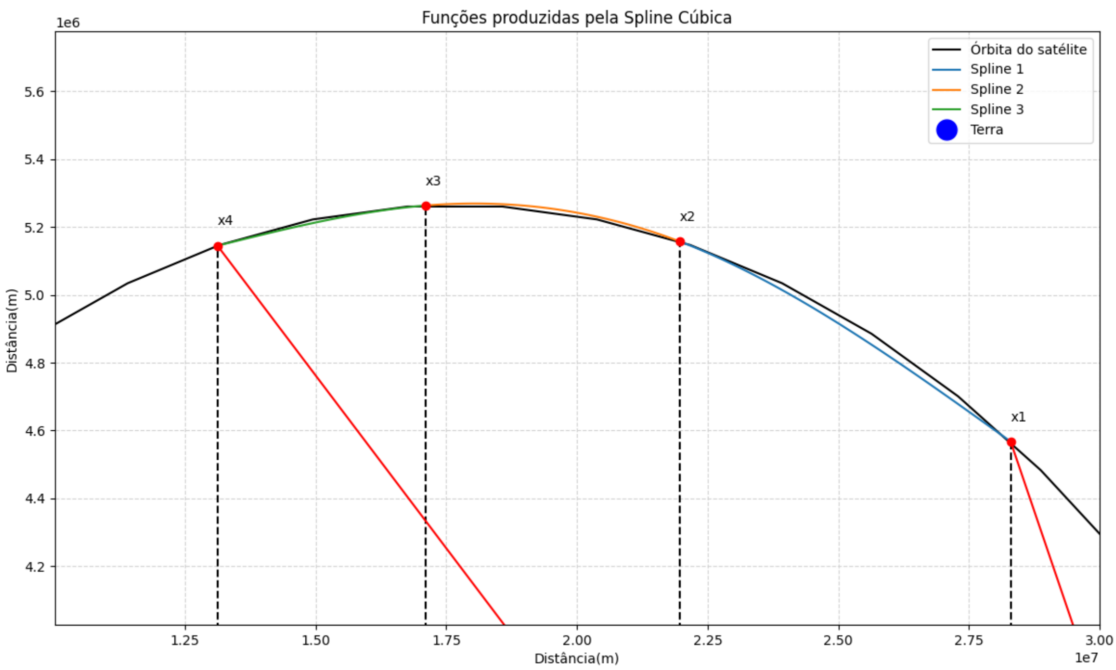
Por fim, a figura 20 traz uma representação dos três polinômios encontrados por meio da Spline Cúbica. Já a figura 21 traz a mesma representação mas com uma aproximação mostrando o porquê de a área das seções ter uma diferença de aproximadamente 0.36%, já que os três polinômios não interpolam os pontos exatamente sobre a equação da elipse.

Figura 20 – Representação dos polinômios encontrados pela Spline Cúbica



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 21 – Aproximação da representação dos polinômios



Fonte: Elaborado pelo autor.

4 CONCLUSÃO

Então a partir do trabalho exposto acima, foi possível calcular todos os parâmetros da elipse que representa a órbita do satélite que será lançado ao redor do planeta Terra. Assim como fazer uma figura demonstrativa dessa órbita e também fazer uma figura representando os trinta pontos equidistantes em tempo que foram calculados a partir da Lei do período orbital proposta por Johannes Kepler e das fórmulas mostradas durante a apresentação. Além disso, foi possível comprovar a segunda lei de Kepler de duas formas distintas, uma delas a partir da integração da equação da elipse e, a outra, interpolando quatro pontos equidistantes em tempo por meio da Spline Cúbica.