

P2 – 09 de Maio de 2025

ACH2053 – Introdução à Estatística (Valdinei Freire da Silva)

Nome: _____ NUSP: _____

1. [5.0] Suponha que a variável aleatória X tenha a seguinte função de distribuição de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(1 + 3x^2 + x), & x \in [-1, 1] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- (a) [1.0] Qual é a probabilidade de que X esteja entre -0.5 e 0.5 ?
- (b) [1.0] Qual é a esperança de X ?
- (c) [1.5] Qual é a variância de X ?
- (d) [1.5] Qual é a esperança de X , sabendo que $X > 0$?
2. [5.0] Considere um exame com três questões. Cada questão i é modelada por uma dificuldade $b_i \in R$ e cada aluno é modelado por uma habilidade $\theta \in (-\infty, +\infty)$. Considere então o seguinte experimento: sorteie uma habilidade θ da distribuição $f(\theta) = \frac{e^\theta}{(1+e^\theta)^2}$ e aplique o exame. Considere as variáveis aleatórias binárias independentes X_i que indicam se o aluno acertou ou não a questão i com distribuição condicional

$$f(x_i = 1|\theta) = \begin{cases} 0, & \theta < b_i - 2 \\ 0.5 + 0.25(\theta - b_i), & \theta \in [b_i - 2, b_i + 2] \\ 1, & \theta > b_i + 2 \end{cases}$$

Considere que o exame é formado por questões com as seguintes dificuldades: $b_1 = -0.7$, $b_2 = 0.1$, $b_3 = 0.5$ e que T é a variável aleatória que representa a habilidade do aluno. Resolva:

- (a) [1.0] Calcule $Pr(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0|T = 0.5)$.
- (b) [2.0] Seja $s(\theta) = Pr(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0|T = \theta)$, encontre θ que maximize $s(\theta)$.
- (c) [2.0] Calcule $Pr(X_3 = 1)$.

¹Nota: O professor tinha dado a integral indefinida de $\frac{e^\theta}{(1+e^\theta)^2}$ e sua variância, mas esta informação foi perdida e não se há esperanças de recuperá-la (eu esqueci de anotar), então tente descobrir você mesmo.