Validação de um ponto de interseção raio/ triângulo

Prof. Creto Augusto Vidal

1.0 Cálculo do vetor unitário normal ao plano do triângulo

1.1 Determinação da sequência anti-horária dos vértices

Lembre-se que, na **Lista de Faces**, as arestas da borda da face triangular são listadas na sequência anti-horária. Assim, supondo que o triângulo seja a face i da lista de faces, suas três arestas são:

$\text{idAresta1} \; = L_{faces}[i].aresta1$,
$\text{idAresta2} \; = L_{faces}[i].aresta2$, e
$\text{idAresta3} \; = L_{faces}[i].aresta3$.

Os identificadores dos vértices das duas primeiras arestas são encontrados na **Lista de Arestas**:

Para a aresta 1

$\text{idVertice11} \; = L_{arestas}[\text{idAresta1}].vertice1$, e
$\text{idVertice12} \; = L_{arestas}[\text{idAresta1}].vertice2$.

Para a aresta 2

$\text{idVertice21} \; = L_{arestas}[\text{idAresta2}].vertice1$, e
$\text{idVertice22} \; = L_{arestas}[\text{idAresta2}].vertice2$.

Assim, podemos determinar o vértice comum V_1 e os vértices da sequência anti-horária (Figura 1) com o seguinte algoritmo:

```
n1   = idVertice11* idVertice12;
n    = n1/ idVertice21
if ( n == idVertice11 || n == idVertice12) {
     v1 = idVertice21;
     v2 = idVertice22;
     v3 = n;
}
else {
     v1 = idVertice22;
     v2 = idVertice21;
     v3 = n1/v1;
}
```

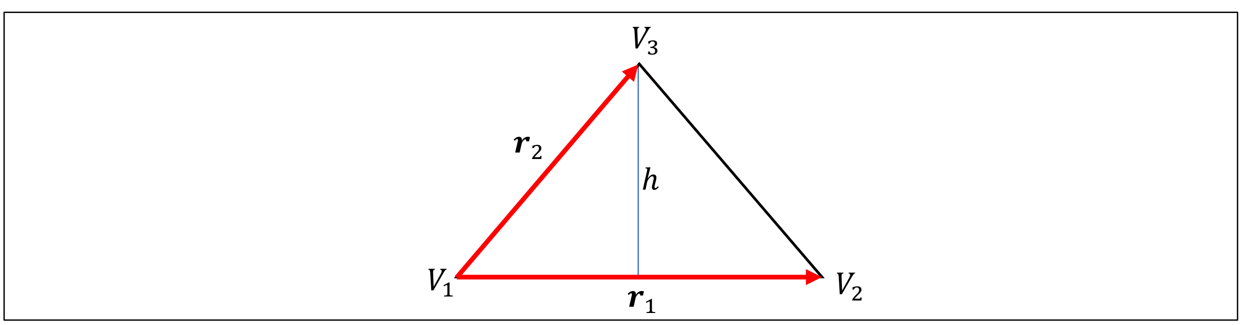

Figura 1. Face triangular com os ids dos vértices no sentido anti-horário

1.2 Definição dos vetores r_1 e r_2 a partir do vértice comum V_1

As coordenadas dos vértices do triângulo são obtidas na **Lista de Vértices**. Aqui vamos definir os pontos P_1, P_2 e P_3 como sendo os vértices do triângulo com os respectivos ids V_1, V_2 e V_3. Assim

$P_1.x = L_{vertices}[V_1].x$	$P_2.x = L_{vertices}[V_2].x$	$P_3.x = L_{vertices}[V_3].x$
$P_1.y = L_{vertices}[V_1].y$	$P_2.y = L_{vertices}[V_2].y$	$P_3.y = L_{vertices}[V_3].y$
$P_1.z = L_{vertices}[V_1].z$	$P_2.z = L_{vertices}[V_2].z$	$P_3.z = L_{vertices}[V_3].z$

Portanto, os vetores $\boldsymbol{r}_1$ e $\boldsymbol{r}_2$ são determinados como

(1) $\boldsymbol{r}_1 = P_2 - P_1$ e

(2) $\boldsymbol{r}_2 = P_3 - P_1$.

1.3 Cálculo do vetor normal ao plano do triângulo com a convenção da regra da mão direita

O vetor $\boldsymbol{N}$ (não normalizado, isto é, não unitário) é calculado pelo produto vetorial dos vetores $\boldsymbol{r}_1$ e $\boldsymbol{r}_2$ como

(3) $$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{r}_1.x & \boldsymbol{r}_1.y & \boldsymbol{r}_1.z \\ \boldsymbol{r}_2.x & \boldsymbol{r}_2.y & \boldsymbol{r}_2.z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_1.y * \boldsymbol{r}_2.z - \boldsymbol{r}_1.z * \boldsymbol{r}_2.y \\ \boldsymbol{r}_1.z * \boldsymbol{r}_2.x - \boldsymbol{r}_1.x * \boldsymbol{r}_2.z \\ \boldsymbol{r}_1.x * \boldsymbol{r}_2.y - \boldsymbol{r}_1.y * \boldsymbol{r}_2.x \end{pmatrix}.$$

O vetor unitário normal ao plano do triângulo é obtido pela normalização de $\boldsymbol{N}$ como

(4) $$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{N}}{\|\boldsymbol{N}\|} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{N}.x \\ \boldsymbol{N}.y \\ \boldsymbol{N}.z \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{(\boldsymbol{N}.x)^2 + (\boldsymbol{N}.y)^2 + (\boldsymbol{N}.z)^2}}.$$

2.0 Cálculo da interseção do raio com o plano do triângulo

O valor de t_I associado ao ponto de interseção do raio que sai do olho do observador em P_0 e tem o vetor unitário $\boldsymbol{d}_r$ com o plano do triângulo contendo três pontos P_1, P_2 e P_3 e cujo vetor unitário normal é $\boldsymbol{n}$ é

(5) $$t_I = -\frac{(P_0 - P_1) \cdot \boldsymbol{n}}{\boldsymbol{d}_r \cdot \boldsymbol{n}}$$

E consequentemente o ponto de interseção é calculado como

(6) $$P_I = P_0 + t_I \boldsymbol{d}_r.$$

3.0 Verificação da posição do ponto P_I em relação ao triângulo (interior ou exterior)

O ponto de interseção com o plano do triângulo pode estar dentro ou fora do triângulo. Como saber se o ponto P_I está dentro ou fora da face triangular?

Como os vetores $\boldsymbol{r}_1$ e $\boldsymbol{r}_2$ são vetores linearmente independentes (não têm o mesmo alinhamento), da álgebra linear, sabemos que eles podem gerar qualquer vetor do plano, isto é, qualquer vetor do plano pode ser escrito como uma combinação linear de $\boldsymbol{r}_1$ e $\boldsymbol{r}_2$. Assim, o vetor

(7) $$\boldsymbol{v} = P_I - P_1 = c_1 \boldsymbol{r}_1 + c_2 \boldsymbol{r}_2.$$

Precisamos determinar as componentes c_1 e c_2 do vetor $\boldsymbol{v}$ em relação à base formada pelos vetores $\boldsymbol{r}_1$ e $\boldsymbol{r}_2$. Porém, como os vetores $\boldsymbol{r}_1$ e $\boldsymbol{r}_2$ não são ortogonais, c_1 e c_2 não são as projeções de $\boldsymbol{v}$ sobre os vetores $\boldsymbol{r}_1$ e $\boldsymbol{r}_2$. Vamos construir uma outra base chamada **base dual** de $\boldsymbol{r}_1$ e $\boldsymbol{r}_2$ formada por vetores $\boldsymbol{w}_1$ e $\boldsymbol{w}_2$ de tal forma que

(8) $c_1 = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}_1$ e

(9) $c_2 = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}_2$.

Os vetores dessa **base dual** são calculados de forma bastante simples como

(10) $\boldsymbol{w}_1 = \frac{\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{n}}{\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{n}}$ e

(11) $\boldsymbol{w}_2 = \frac{\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{r}_1}{\boldsymbol{r}_2 \cdot \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{r}_1}$.

Substituindo-se as equações (7) e (10) na equação (8), obtemos

(12) $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}_1 = (c_1 \boldsymbol{r}_1 + c_2 \boldsymbol{r}_2) \cdot \frac{\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{n}}{\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{n}} = c_1 \frac{\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{n}}{\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{n}} + c_2 \frac{\boldsymbol{r}_2 \cdot \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{n}}{\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{n}} = c_1$

onde o multiplicador de c_1 é 1 porque o numerador e o denominador são iguais, e o multiplicador de c_2 é 0 porque, no numerador, o vetor $\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{n}$ é perpendicular ao vetor $\boldsymbol{r}_2$. Analogamente, substituindo-se as equações (7) e (11) na equação (9), obtemos

(13) $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}_2 = (c_1 \boldsymbol{r}_1 + c_2 \boldsymbol{r}_2) \cdot \frac{\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{r}_1}{\boldsymbol{r}_2 \cdot \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{r}_1} = c_1 \frac{\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{r}_1}{\boldsymbol{r}_2 \cdot \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{r}_1} + c_2 \frac{\boldsymbol{r}_2 \cdot \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{r}_1}{\boldsymbol{r}_2 \cdot \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{r}_1} = c_2$

onde o multiplicador de c_1 é 0 porque, no numerador, o vetor $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{r}_1$ é perpendicular ao vetor $\boldsymbol{r}_1$ e o multiplicador de c_2 é 1 porque o numerador e o denominador são iguais.

Note que o denominador na equação (10) é um escalar que tem uma interpretação geométrica após fazermos sua expansão como

(14)
$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_1 \cdot (\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{n}) &= \|\boldsymbol{r}_1\| \|(\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{n})\| \cos(\propto) \\
&= \|\boldsymbol{r}_1\| (\|\boldsymbol{r}_2\| \|\boldsymbol{n}\| \sin(90^{\mathrm{o}})) \cos(\propto) \\
&= \|\boldsymbol{r}_1\| \|\boldsymbol{r}_2\| \sin(90 - \propto) \\
&= \|\boldsymbol{r}_1\| h = 2 \text{ Área da face triangular}
\end{aligned}$$

onde α é o ângulo entre $\boldsymbol{r}_1$ e $(\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{n})$, e $(90 - \propto)$ é o ângulo entre os vetores $\boldsymbol{r}_1$ e $\boldsymbol{r}_2$.

Analogamente, o denominador na equação (11) é um escalar que tem uma interpretação geométrica após fazermos sua expansão como

(15)
$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_2 \cdot \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{r}_1 &= \|\boldsymbol{r}_2\| \|(\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{r}_1)\| \cos(\propto) \\
&= \|\boldsymbol{r}_2\| (\|\boldsymbol{r}_1\| \|\boldsymbol{n}\| \sin(90^{\mathrm{o}})) \cos(\propto) \\
&= \|\boldsymbol{r}_1\| \|\boldsymbol{r}_2\| \sin(90 - \propto) \\
&= \|\boldsymbol{r}_1\| h = 2 \text{ Área da face triangular}
\end{aligned}$$

Agora vamos analisar como ficam as equações (12) e (13), isto é

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}_1 = \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{n}}{\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{n}} = \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{n}}{2A_{triangulo}} = \frac{\|\boldsymbol{r}_2\| \|\boldsymbol{v}\| \cos(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{n})}{2A_{triangulo}} = \frac{\|\boldsymbol{r}_2\| \|\boldsymbol{v}\| \sin(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{r}_2)}{2A_{triangulo}} = \frac{\|\boldsymbol{r}_2\| h_2}{2A_{triangulo}} = \frac{2A_1}{2A_{triangulo}} = c_1$$

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}_2 = \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{r}_1}{\boldsymbol{r}_2 \cdot \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{r}_1} = \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{r}_1}{2A_{triangulo}} = \frac{\|\boldsymbol{v}\| \|\boldsymbol{r}_1\| \cos(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{r}_1)}{2A_{triangulo}} = \frac{\|\boldsymbol{r}_1\| \|\boldsymbol{v}\| \sin(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{r}_1)}{2A_{triangulo}} = \frac{\|\boldsymbol{r}_1\| h_1}{2A_{triangulo}} = \frac{2A_2}{2A_{triangulo}} = c_2$$

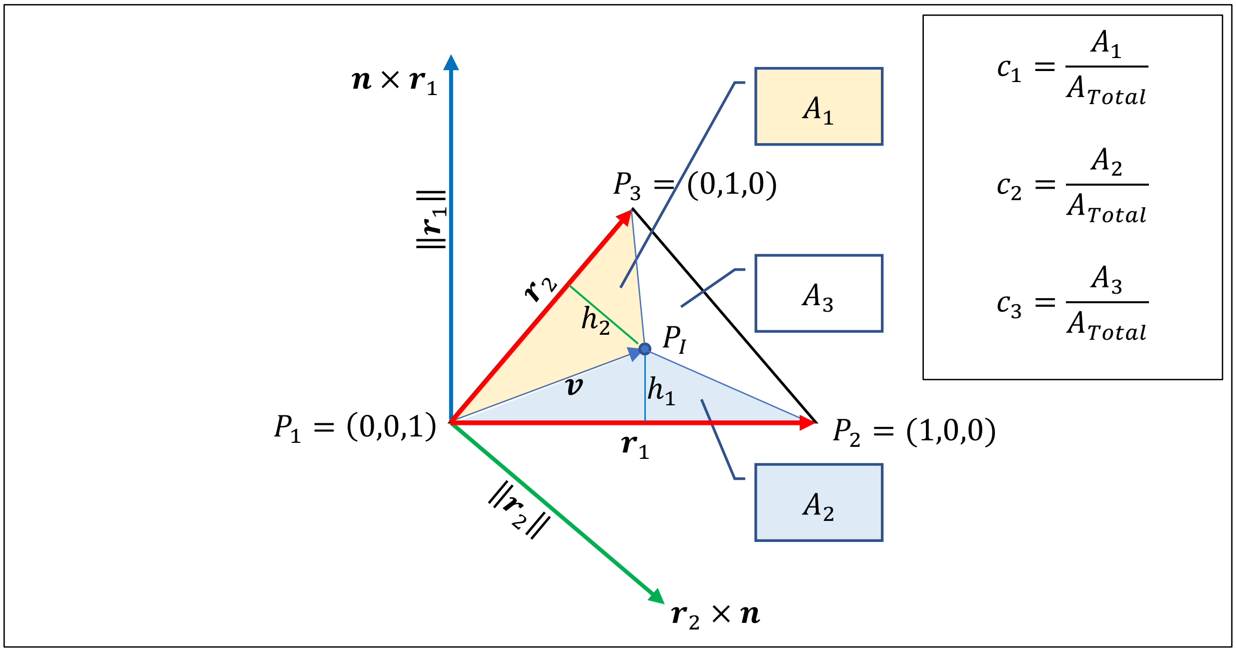

Figura 2. Base dual para determinação de c_1 e c_2 e suas interpretações geométricas

A interpretação das equações (12) e (13) com o auxílio da Figura 2, indica que os coeficientes da equação (7)

$$\boldsymbol{v} = P_I - P_1 = c_1\boldsymbol{r}_1 + c_2\boldsymbol{r}_2\ ,$$

os quais permitem a localização do ponto de interseção P_I com relação ao triângulo, representam as razões das áreas dos três triângulos com vértice em P_I e bases nas arestas da face triangular, e definem as chamadas **coordenadas baricêntricas**, isto é,

$$c_1 = \frac{A_1}{A_{Total}} = \frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{n}} \equiv \frac{\big((P_3-P_I)\times(P_1-P_I)\big)\cdot\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{n}}$$

$$c_2 = \frac{A_2}{A_{Total}} = \frac{\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{n}} \equiv \frac{\big((P_1-P_I)\times(P_2-P_I)\big)\cdot\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{n}}$$

$$c_3 \overset{(16)}{\widehat{=}} 1 - c_1 - c_2 \equiv \frac{\big((P_2-P_I)\times(P_3-P_I)\big)\cdot\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{n}}.$$

A soma das coordenadas baricêntricas de um ponto é

(16) $$c_1 + c_2 + c_3 = \frac{A_1+A_2+A_3}{A_{Total}} = \frac{A_{Total}}{A_{Total}} = 1\ .$$

Nota:

1) As coordenadas baricêntricas de todo ponto do plano da face triangular devem satisfazer a equação (16), e
2) Todo ponto no interior da face triangular deve ter $0 \le c_i, \forall i = 1, 2, 3$. Logo, se o ponto testado tiver **alguma de suas coordenadas baricêntricas menor do que zero, ele está fora da face triangular**.