Interseção de um raio com diversas geometrias

1. Raio

Equação do raio:

$$P(t) = P_0 + t\boldsymbol{d} \tag{1}$$

onde:

P_0 é o ponto de partida do raio;
$\boldsymbol{d}$ é o vetor que indica a direção e o sentido do raio; e
t é um escalar que indica a distância do ponto P_0 ao ponto $P(t)$ com relação ao comprimento de $\boldsymbol{d}$, isto é, t representa quantas vezes o comprimento de $\boldsymbol{d}$ deve ser multiplicado para obter a distância do ponto P_0 ao ponto $P(t)$. Assim, caso $\boldsymbol{d}$ seja um vetor unitário (vetor com comprimento igual a um), t é a distância na unidade de medida padrão considerada.

2. Interseção Raio-Plano

Equação do plano:

$$(P - P_{Pl}) \cdot \boldsymbol{n} = 0 \tag{2}$$

onde:

P é um ponto qualquer do plano;
P_{Pl} é um ponto específico (conhecido) do plano; e
$\boldsymbol{n}$ é o vetor unitário perpendicular ao plano, isto é, a todos os vetores paralelos ao plano.

Ponto de interseção:
O ponto de interseção deve satisfazer tanto a equação do raio quanto a equação do plano. Assim, por substituição de (1) em (2)

$$(P_0 + t_{Int}\boldsymbol{d} - P_{Pl}) \cdot \boldsymbol{n} = 0 \Rightarrow \boxed{t_{Int} = \frac{(P_{Pl} - P_0)\cdot \boldsymbol{n}}{\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{n}}} \; . \tag{3}$$

Consequentemente, o ponto de interseção é dado por

$$P_{int} = P(t_{Int}) = P_0 + t_{Int}\boldsymbol{d} \, . \tag{4}$$

3. Interseção Raio-Esfera

Equação da esfera:

$$(P - C) \cdot (P - C) = R^2 \tag{5}$$

onde:

P é um ponto qualquer da esfera;
C é centro da esfera; e
R é o raio da esfera.

A equação (5) diz que o quadrado da norma do vetor que sai do centro da esfera e vai até o ponto P na superfície da esfera deve ser igual ao quadrado do raio, isto é

$$\|P - C\|^2 = R^2. \tag{6}$$

Ponto de interseção:
O ponto de interseção deve satisfazer tanto a equação do raio quanto a equação da esfera. Assim, por substituição de (1) em (5)

$$(P_0 + t_{Int}\boldsymbol{d} - C) \cdot (P_0 + t_{Int}\boldsymbol{d} - C) = R^2 . \tag{7}$$

Aplicando-se a propriedade distributiva do produto escalar, obtém-se

$$(\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{d})t_{Int}^2 + 2\big((P_0 - C) \cdot \boldsymbol{d}\big)t_{Int} + \big((P_0 - C) \cdot (P_0 - C) - R^2\big) = 0 \tag{8}$$

A equação (8) é uma equação do segundo grau em t_{Int}, e, portanto, pode ser reescrita como

$$a\, t_{Int}^2 + 2b\, t_{Int} + c = 0 \tag{9}$$

onde:

$a = (\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{d})$;
$b = \big((P_0 - C) \cdot \boldsymbol{d}\big)$; e
$c = \big((P_0 - C) \cdot (P_0 - C) - \mathrm{R}^2\big)$.

Assim, calculando-se o discriminante $\Delta = b^2 - ac$, pode-se concluir que

$$\text{se } \Delta \begin{cases} < 0 & \text{reta não tem interseção com a esfera;} \\ = 0 & \text{reta tangencia a esfera em um ponto; ou} \\ > 0 & \text{reta tem dois pontos de interseção com a esfera.} \end{cases}$$

Nos dois últimos casos, t_{Int} é calculado como

$$\boxed{t_{Int} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{a}}. \tag{10}$$

Consequentemente, os pontos de interseção são dados por

$$P_{int} = P(t_{Int}) = P_0 + t_{Int}d . \tag{11}$$

No caso 2, existe apenas uma raiz e o ponto encontrado pela equação (11) é o ponto de tangência entre a reta e a esfera. Já no caso 3, a equação (11) encontra dois pontos de interseção distintos.

4. Interseção Raio-Cilindro

Equação do cilindro:

$$\big\|(P - B) - \big((P - B) \cdot \boldsymbol{u}\big)\boldsymbol{u}\big\|^2 = R^2 \tag{12}$$

com

$$0 \leq (P - B) \cdot \boldsymbol{u} \leq H, \tag{13}$$

onde:

P é um ponto qualquer da superfície do cilindro;
B é centro da base do cilindro;
$\boldsymbol{u}$ é o vetor unitário que define a direção e o sentido do eixo do cilindro;
H é a altura do cilindro; e
R é o raio do cilindro.

A equação (12) diz que o quadrado da norma do vetor que liga o ponto P à sua projeção sobre o eixo do cilindro deve ser igual ao quadrado do raio do cilindro. Já a equação (13) diz que o tamanho da projeção do vetor $(P - B)$ sobre o eixo do cilindro deve ser positiva e menor do que a altura do cilindro. Caso esta equação não seja satisfeita, o ponto P estaria na superfície cilíndrica, mas acima ou abaixo do cilindro.

Ponto de interseção:
O ponto de interseção deve satisfazer tanto a equação do raio quanto a equação do cilindro. Assim, por substituição de (1) em (12)

$$\left\|(P_0 + t_{Int}\boldsymbol{d} - B) - \left((P_0 + t_{Int}\boldsymbol{d} - B)\cdot\boldsymbol{u}\right)\boldsymbol{u}\right\|^2 = R^2\,. \tag{14}$$

Aplicando-se a propriedade distributiva do produto escalar, e reorganizando-se os termos, obtém-se

$$\left\|(P_0 - B) - \left((P_0 - B)\cdot\boldsymbol{u}\right)\boldsymbol{u} + t_{Int}(\boldsymbol{d} - (\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{u})\right\|^2 = R^2. \tag{15}$$

Para simplificar as expressões, é conveniente definir os seguintes vetores

$$\boldsymbol{v} = (P_0 - B) - \left((P_0 - B)\cdot\boldsymbol{u}\right)\boldsymbol{u} \tag{16}$$

e

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{d} - (\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}. \tag{17}$$

Assim, com a substituição dos vetores $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ (eqs. (16) e (17)) a equação (15) é reescrita como

$$\|\boldsymbol{v} + t_{Int}\boldsymbol{w}\|^2 = R^2. \tag{18}$$

Essa equação chega na seguinte forma final

$$(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w})t_{Int}^2 + 2(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w})t_{Int} + (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} - R^2) = 0 \tag{19}$$

A equação (19) é uma equação do segundo grau em t_{Int}, e, portanto, pode ser reescrita como

$$a\, t_{Int}^2 + 2b\, t_{Int} + c = 0 \tag{20}$$

onde:

$a = (\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w})$;
$b = (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w})$; e
$c = (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} - R^2)$.

Assim, calculando-se o discriminante $\Delta = b^2 - ac$, pode-se concluir que

$$\text{se } \Delta \begin{cases} < 0 & \text{reta não tem interseção com a superfície cilíndrica;} \\ = 0 & \text{reta tangencia a superfície cilíndrica em um ponto; ou} \\ > 0 & \text{reta tem dois pontos de interseção com a superfície cilíndrica.} \end{cases}$$

Nos dois últimos casos, t_{Int} é calculado como

$$\boxed{t_{Int} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{a}}. \tag{21}$$

Consequentemente, os pontos de interseção são dados por

$$P_{int} = P(t_{Int}) = P_0 + t_{Int}\boldsymbol{d}\,. \tag{22}$$

No caso 2, existe apenas uma raiz e o ponto encontrado pela equação (22) é o ponto de tangência entre a reta e a cilindro. Já no caso 3, a equação (22) encontra dois pontos de interseção distintos.

Note que, nem sempre os pontos encontrados satisfazem a equação (13). Note também que, se apenas um dos pontos satisfizer essa condição, o raio tem interseção com o círculo da base ou com o círculo do topo do cilindro. Se os vetores $\boldsymbol{d}$ e $\boldsymbol{u}$ forem paralelos, o raio interceptará apenas os planos da base e do topo do cilindro e os pontos de interseção serão válidos caso suas distâncias ao eixo do cilindro sejam menores do que o raio do cilindro.

Aviso importante: se o coeficiente a da equação do segundo grau for zero, o discriminante é zero, mas o raio não tangencia a superfície cilíndrica pois $a = (\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{w}) = 0$ significa que o vetor $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$, e isso implica que o raio é paralelo à superfície cilíndrica. Assim, só poderá haver interseção com os planos da base e do topo do cilindro.

5. Interseção Raio-Cone

Equação do cone:

$$(V - P) \cdot \boldsymbol{n} = \|V - P\| \cos\theta \tag{23}$$

com

$$0 \leq (V - P) \cdot \boldsymbol{n} \leq H, \tag{24}$$

onde:

P é um ponto qualquer da superfície do cone;
V é o vértice do cone;
$\boldsymbol{n}$ é o vetor unitário que define a direção e o sentido do eixo do cone;
θ é o ângulo que a geratriz forma com o eixo do cone;
H é a altura do cone; e
R é o raio da base do cone.

Caso o centro da base seja fornecido, o vértice V pode ser obtido como

$$V = C + H\boldsymbol{n}. \tag{25}$$

A equação (23) diz que a projeção do vetor $\overrightarrow{PV}$ sobre o eixo do cone deve ser igual ao produto de seu comprimento, $\|\overrightarrow{PV}\|$, pelo cosseno do ângulo θ. Já a equação (24) garante que o ponto P está entre o vértice e a base do cone. Caso esta equação não seja satisfeita, o ponto P estaria na superfície cônica, mas acima do vértice (no cone invertido oposto pelo vértice ao cone considerado) ou abaixo da base do cone.

Ponto de interseção:
O ponto de interseção deve satisfazer tanto a equação do raio quanto a equação do cone. Assim, por substituição de (1) em (23)

$$\left(V - (P_0 + t_{Int}\boldsymbol{d})\right) \cdot \boldsymbol{n} = \|V - (P_0 + t_{Int}\boldsymbol{d})\| cos\theta. \tag{26}$$

Aplicando-se a propriedade distributiva do produto escalar e a definição de norma, e reorganizando-se os termos, obtém-se

$$\left((V - P_0) \cdot \boldsymbol{n} - t_{Int}\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{n}\right)^2 = \left((V - P_0) - t_{Int}\boldsymbol{d}\right) \cdot \left((V - P_0) - t_{Int}\boldsymbol{d}\right) cos^2\theta. \tag{27}$$

Para simplificar as expressões, é conveniente definir o seguinte vetor

$$\boldsymbol{v} = V - P_0 \tag{28}$$

e substituí-lo na equação (27) para obter

$$(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}-t_{Int}\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{n})^2=(\boldsymbol{v}-t_{Int}\boldsymbol{d})\cdot(\boldsymbol{v}-t_{Int}\boldsymbol{d})cos^2\theta. \tag{29}$$

Expandindo-se a equação (29), obtém-se

$$(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})^2-2(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{n})t_{Int}+(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{n})^2t_{Int}^2=(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})cos^2\theta-2(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{d})cos^2\theta t_{Int}+(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{d})cos^2\theta t_{Int}^2. \tag{30}$$

Coletando-se os termos semelhantes, obtém-se

$$((\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{n})^2-(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{d})cos^2\theta)t_{Int}^2+2\big((\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{d})cos^2\theta-(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{n})\big)t_{Int}+((\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})^2-(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})cos^2\theta)=0. \tag{31}$$

A equação (31) é uma equação do segundo grau em t_{Int}, e, portanto, pode ser reescrita como

$$a\,t_{Int}^2+2b\,t_{Int}+c=0 \tag{32}$$

onde:

$a=(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{n})^2-(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{d})cos^2\theta$;
$b=(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{d})cos^2\theta-(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{n})$; e
$c=(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})^2-(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})cos^2\theta$.

Assim, calculando-se o discriminante $\Delta=b^2-ac$, pode-se concluir que

$$\text{se }\Delta\begin{cases}<0 & \text{reta não tem interseção com a superfície do cone;}\\ =0 & \text{reta tangencia a superfície do cone em um ponto; ou}\\ >0 & \text{reta tem dois pontos de interseção com a superfície do cone.}\end{cases}$$

Nos dois últimos casos, t_{Int} é calculado como

$$\boxed{t_{Int}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{a}}. \tag{33}$$

Consequentemente, os pontos de interseção são dados por

$$P_{int}=P(t_{Int})=P_0+t_{Int}\boldsymbol{d}\,. \tag{34}$$

No caso 2, existe apenas uma raiz e o ponto encontrado pela equação (33) é o ponto de tangência entre a reta e o cone. Já no caso 3, a equação (33) encontra dois pontos de interseção distintos.

Note que, nem sempre, os pontos encontrados satisfazem a equação (24). Note também que, se apenas um dos pontos satisfizer essa condição, o raio tem interseção com o círculo da base do cone.

Aviso importante: se o coeficiente a da equação do segundo grau for zero, a equação (32) fica

$$2b\,t_{Int}+c=0, \tag{35}$$

e

$$t_{Int}=-\frac{c}{2b}. \tag{36}$$

Isso acontece quando o raio é paralelo a alguma geratriz, isto é, quando $\boldsymbol{d}$ forma um ângulo θ com o vetor $\boldsymbol{n}$. Veja que, como $\boldsymbol{d}$ e $\boldsymbol{n}$ são vetores unitários, nesse caso

$$a=(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{n})^2-(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{d})cos^2\theta=(cos\theta)^2-(1)cos^2\theta=0.$$

Se, além disso, o ponto P_0 estiver sobre a superfície do cone, o vetor $\boldsymbol{v}$ também é paralelo ao vetor $\boldsymbol{d}$, e assim

$$b = (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{d}) cos^2\theta - (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n})(\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{n}) = \|\boldsymbol{v}\| cos^2\theta - (\|\boldsymbol{v}\| cos\theta) cos\theta = 0$$

e, portanto, o raio tem interseção com o plano da base (a equação (36) não deve ser usada).