Unidade 2.0 Representação de Objetos

2.1 Curvas paramétricas

Uma curva paramétrica no R^3 é uma curva em que as coordenadas de seus pontos são representadas por funções de uma única variável (parâmetro), i.e.,

$$(1)\quad P(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

2.1.1 Curvas de Bézier Cúbicas

$$(2)\quad P(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}t + \boldsymbol{c}t^2 + \boldsymbol{d}t^3$$

onde $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ e $\boldsymbol{d}$ arrays com três componentes x, y e z. Para determinar esses arrays, são necessárias quatro condições de contorno, i.e., quatro informações sobre o polinômio $P(t)$.

Para as curvas cúbicas de Bézier, as condições de contorno são as coordenadas de quatro pontos de controle P_0, P_1, P_2 e P_3 em que P_0 e P_3 são, respectivamente, os pontos inicial e final da curva de Bézier e P_1 e P_2 definem os vetores tangentes à curva no início e no fim da curva, i.e., o vetor tangente à curva em t=0 é definido como $3(P_1 - P_0)$ e o vetor tangente à curva em t = 1 é definido como $3(P_3 - P_2)$. Assim,

$$(3)\quad P(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\,0 + \boldsymbol{c}0^2 + \boldsymbol{d}0^3 = P_0 \rightarrow \boldsymbol{a} = P_0;$$

$$(4)\quad P(1) = \begin{pmatrix} x(1) \\ y(1) \\ z(1) \end{pmatrix} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\,1 + \boldsymbol{c}1^2 + \boldsymbol{d}1^3 = P_3 \rightarrow P_0 + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d} = P_3;$$

$$(5)\quad P'(0) = \begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \\ z'(0) \end{pmatrix} = \boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{c}0 + 3\boldsymbol{d}0^2 = 3(P_1 - P_0) \rightarrow \boldsymbol{b} = 3(P_1 - P_0);$$

$$(6)\quad P'(1) = \begin{pmatrix} x'(1) \\ y'(1) \\ z'(1) \end{pmatrix} = \boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{c}1 + 3\boldsymbol{d}1^2 = 3(P_3 - P_2) \rightarrow \boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{c} + 3\boldsymbol{d} = 3(P_3 - P_2).$$

Substituindo-se (5) em (4) e (6), obtém-se

$$(7)\quad \begin{cases} \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d} & = & P_3 - P_0 + 3P_0 - 3P_1 = P_3 - 3P_1 + 2P_0 \\ 2\boldsymbol{c} + 3\boldsymbol{d} & = & 3P_3 - 3P_2 + 3P_0 - 3P_1. \end{cases}$$

Subtraindo-se duas vezes a primeira equação da segunda equação do sistema (7), obtém-se

$$(8)\quad \boldsymbol{d} = P_3 - 3P_2 - P_0 + 3P_1.$$

Substituindo-se (8) na primeira equação de (7), obtém-se

(9) $\boldsymbol{c} \quad = \quad P_3 - 3P_1 + 2P_0 - (P_3 - 3P_2 - P_0 + 3P_1) = 3P_0 - 6P_1 + 3P_2.$

Finalmente, substituindo-se as constantes de volta no polinômio da equação (2) obtém-se

(10) $P(t) = P_0 + 3(P_1 - P_0)t + (3P_0 - 6P_1 + 3P_2)t^2 + (P_3 - 3P_2 - P_0 + 3P_1)t^3$

Isolando-se os pontos de controle, o polinômio de Bézier é expresso como

(11) $\boxed{P(t) = P_0[(1-t)^3] + P_1[3(1-t)^2 t] + P_2[3(1-t)t^2] + P_3\,[t^3].}$

Uma forma alternativa de desenvolver o polinômio de Bézier é usando a construção recursiva de Casteljau, isto é, o polígono de controle de um polinômio de Bézier tem três segmentos

(12) $$\begin{cases} S_1(t) = P_0(1-t) + P_1 t; \\ S_2(t) = P_1(1-t) + P_2 t; \\ S_3(t) = P_2(1-t) + P_3 t. \end{cases}$$

Para um dado valor de t ligam-se os pontos $S_1(t)$ a $S_2(t)$ por um segmento $S_{12}(t)$ e os pontos $S_2(t)$ a $S_3(t)$ por um segmento $S_{23}(t)$. Assim

(13) $$\begin{cases} S_{12}(t) = S_1(t)(1-t) + S_2(t)t = (P_0(1-t) + P_1 t)(1-t) + (P_1(1-t) + P_2 t)t; \\ S_{23}(t) = S_2(t)(1-t) + S_3(t)t = (P_1(1-t) + P_2 t)(1-t) + (P_2(1-t) + P_3 t)t. \end{cases}$$

Finalmente, conectam-se os pontos $S_{12}(t)$ e $S_{23}(t)$ por um segmento de reta $P(t)$. Assim,

(14) $$\begin{aligned} P(t) &= S_{12}(t)(1-t) + S_{23}(t)t \\ &= [(P_0(1-t) + P_1 t)(1-t) + (P_1(1-t) + P_2 t)t](1-t) \\ &+ [(P_1(1-t) + P_2 t)(1-t) + (P_2(1-t) + P_3 t)t]t. \end{aligned}$$

Aplicando-se a propriedade distributiva da multiplicação com relação à adição em (14) tem-se

(15) $$\begin{aligned} P(t) &= P_0(1-t)(1-t)(1-t) \\ &+ P_1[t(1-t)(1-t) + (1-t)t(1-t) + (1-t)(1-t)t] \\ &+ P_2[tt(1-t) + t(1-t)t + (1-t)tt] \\ &+ P_3 ttt. \end{aligned}$$

Logo,

(16) $$\begin{aligned} P(t) &= P_0[(1-t)^3] \\ &+ P_1[3(1-t)^2 t] \\ &+ P_2[3(1-t)t^2] \\ &+ P_3[t^3], \end{aligned}$$

que é idêntica à equação (11).

2.1.2 Curvas de Hermite Cúbicas

(17) $$P(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}t + \boldsymbol{c}t^2 + \boldsymbol{d}t^3$$

onde $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ e $\boldsymbol{d}$ arrays com três componentes x, y e z. Para determinar esses arrays, são necessárias quatro condições de contorno, i.e., quatro informações sobre o polinômio $P(t)$.

Para as curvas cúbicas de Hermite, as condições de contorno são as coordenadas de dois pontos de controle P_0, P_1 (ponto inicial e final da curva de Hermite) e as componentes de dois vetores tangentes à curva de Hermite no início e no final da curva, i.e., T_0 e T_1. Assim,

(18) $P(0)=\begin{pmatrix}x(0)\\y(0)\\z(0)\end{pmatrix}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\,0+\boldsymbol{c}0^2+\boldsymbol{d}0^3=P_0\rightarrow\boldsymbol{a}=P_0;$

(19) $P(1)=\begin{pmatrix}x(1)\\y(1)\\z(1)\end{pmatrix}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\,1+\boldsymbol{c}1^2+\boldsymbol{d}1^3=P_1\rightarrow P_0+\boldsymbol{b}\,+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=P_1;$

(20) $P'(0)=\begin{pmatrix}x'(0)\\y'(0)\\z'(0)\end{pmatrix}=\boldsymbol{b}\,+2\boldsymbol{c}0+3\boldsymbol{d}0^2=T_0\rightarrow\boldsymbol{b}\,=T_0;$

(21) $P'(1)=\begin{pmatrix}x'(1)\\y'(1)\\z'(1)\end{pmatrix}=\boldsymbol{b}\,+2\boldsymbol{c}1+3\boldsymbol{d}1^2=T_1\rightarrow\boldsymbol{b}\,+2\boldsymbol{c}+3\boldsymbol{d}=T_1.$

Substituindo-se (20) em (19) e (21), obtém-se

(22) $\begin{cases}\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d} & = & P_1-P_0-T_0\\2\boldsymbol{c}+3\boldsymbol{d} & = & T_1-T_0.\end{cases}$

Subtraindo-se duas vezes a primeira equação da segunda equação do sistema (22), obtém-se

(23) $\boldsymbol{d}=T_1+T_0-2P_1+2P_0.$

Substituindo-se (23) na primeira equação de (22), obtém-se

(24) $\boldsymbol{c}\quad=\quad P_1-P_0-T_0-(T_1+T_0-2P_1+2P_0)=-3P_0+3P_1-2T_0-T_1.$

Finalmente, substituindo-se as constantes de volta no polinômio da equação (17), obtém-se

(25) $P(t)=P_0+T_0t+(-3P_0+3P_1-2T_0-T_1)t^2+(T_1+T_0-2P_1+2P_0)t^3.$

Isolando-se os pontos de controle e os vetores tangentes, o polinômio de Hermite é expresso como

(26) $P(t)=P_0(1-3t^2+2t^3)+P_1(3t^2-2t^3)+T_0(t-2t^2+t^3)+T_1\,(-t^2+t^3).$