



**UFC**

**Universidade Federal do Ceará**  
**Departamento de Computação**

**Trabalho 01 de Métodos Numéricos I**  
Autores

Fortaleza, CE — Novembro de 2025

# Sumário

<b>1</b>	<b>Enunciado do problema</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Implementações</b>	<b>3</b>
2.1	Método de Newton-Raphson . . . . .	3
2.2	Método de Newton modificado . . . . .	3
2.3	Método da Secante . . . . .	3
2.4	Funcionalidades adicionais . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Achando raiz de <math>f</math> para <math>a = 1</math> e <math>d_0 = 0,5</math></b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Teoremas importantes</b>	<b>4</b>
<b>5</b>	<b>Aplicando métodos manualmente</b>	<b>4</b>
5.1	Isolamento . . . . .	4
5.1.1	Análise Teórica . . . . .	4
5.1.2	Análise gráfica . . . . .	6
5.2	Método de Newton-Raphson . . . . .	7
5.3	Método de Newton modificado . . . . .	8
5.4	Método da Secante tradicional . . . . .	10
<b>6</b>	<b>Resolução da IA</b>	<b>11</b>
6.1	ChatGPT . . . . .	11
6.2	DeepSeek . . . . .	12
6.3	Gemini . . . . .	12
6.4	Análise . . . . .	12
<b>7</b>	<b>Interpretação dos resultados para <math>a = 1</math></b>	<b>13</b>
<b>8</b>	<b>Análise dos efeitos do valor de <math>a</math> para cada método considerado</b>	<b>13</b>
<b>9</b>	<b>Estatísticas</b>	<b>14</b>
9.1	Comparando resultados da saída do programa, da resolução manual e da resolução da IA para cada método . . . . .	15
9.2	Comparando resultado dos métodos de refinamento . . . . .	15
9.3	Comparando eficiências dos métodos de refinamento . . . . .	16
9.4	Comparando resultados dos dois critérios de parada . . . . .	17

# 1 Enunciado do problema

## Tema2:

As oscilações causadas por ondas sísmicas são regidas pela função  $f(d) = ae^d - 4d^2$ , onde  $a$  são amplitudes devidas à oscilação encontrada em cada onda considerada e  $d$  é o deslocamento encontrado em cada onda considerada, variando com o valor de  $a$ . Caso esse deslocamento passe de  $0,7m$  essa oscilação amplifica, causando sérios danos e um problema gigantesco. O método de Newton modificado é tal que a função de iteração  $\phi(x)$  é dada por  $\phi(x) = x - (f(x)/f'(x_0))$ , onde  $x_0$  é uma aproximação inicial e é tal que  $f'(x_0) \neq 0$ . Desenvolva um sistema para calcular o valor do deslocamento  $d$ , que deve atender a todos requisitos abaixo:

- Implementar algoritmo para calcular  $d$  pelo método da Newton-Raphson.
- Implementar algoritmo para calcular  $d$  pelo método de Newton modificado.
- Implementar algoritmo para calcular  $d$  pelo método da Secante tradicional.
- Testar os resultados para  $d$  usando como padrão  $a = 1, d_0 = 0,5$  e  $\varepsilon = 10^{-4}$ .
- Fornecer um quadro resposta, com  $d$  calculado para cada método dado.
- Fornecer um quadro comparativo, com todos os dados para cada método.
- Analisar o efeito da variação do valor de  $a$  para cada método considerado.

**Dados de entrada:**  $n$  (número de valores de  $a$ ),  $a$  (para cada  $n$ ) e  $\varepsilon$  (precisão).

**Dados de saída:** quadros resposta (com  $d$  e erro para cada  $a$  e método) e comparativo.

## 2 Implementações

### 2.1 Método de Newton-Raphson

### 2.2 Método de Newton modificado

### 2.3 Método da Secante

### 2.4 Funcionalidades adicionais

## 3 Achando raiz de $f$ para $a = 1$ e $d_0 = 0,5$

Considere uma função  $f$  tal que  $f(d) = ae^d - 4d^2$  e  $a = 1, d_0 = 0,5$  e  $\varepsilon = 10^{-4}$ . Achamos uma raiz  $d$  de  $f(d)$  utilizando os seguintes métodos requeridos no enunciado:

- Método de Newton-Raphson
- Método de Newton modificado
- Método da Secante tradicional

## 4 Teoremas importantes

**Teorema 1**  $f(a) * f(b) < 0 \Rightarrow \varepsilon \in [a; b]$

**Corolário 1**  $f'(x) > 0, \forall x \in [a; b]$  **ou**  $f'(x) < 0, \forall x \in [a; b] \Rightarrow \xi$  é único em  $[a; b]$

**Teorema 2** *Seja  $f$  uma função e  $I$  um intervalo. Se  $f'(x) > 0, \forall x \in I$ , então  $f(x)$  é estritamente crescente em  $I$ . Já no caso de  $f'(x) < 0, \forall x \in I$ , então  $f(x)$  é estritamente decrescente em  $I$ .*

## 5 Aplicando métodos manualmente

Para tal, consideremos números reais de até 6 casas decimais e truncamento.

### 5.1 Isolamento

#### 5.1.1 Análise Teórica

Para o isolamento, façamos de início a análise teórica para chegarmos a um intervalo  $I$  válido.

Assim, para começarmos, testemos alguns valores de  $d$  para  $f(d)$ :

$$\begin{aligned}f(0) &= e^0 - 4 * 0 = 1 \\f(1) &= e^1 - 4 * 1 = -1,281719\end{aligned}$$

Como vemos,  $f(0) * f(1) < 0$  e, portanto, pelo **teorema (1)**, garantidamente há uma raiz no intervalo  $[0, 1]$ . Agora, é preciso garantir a unicidade da raiz contida nesse intervalo utilizando o **corolário (1)**, para assim darmos início aos métodos de refinamento. Para tal, provemos que  $f'(d) < 0, \forall d \in [0, 1]$  ou que  $f'(d) > 0, \forall d \in [0, 1]$ :

$$\text{Seja } f'(d) = e^d - 8d$$

Assim, devemos mostrar que  $e^d - 8d < 0, \forall d \in [0, 1]$  ou então que  $e^d - 8d > 0, \forall d \in [0, 1]$ . Entretanto, ao testarmos valores, vemos que essa afirmação não é verdade:

$$\begin{aligned}f'(0) &= e^0 - 8 * 0 < 0 \Rightarrow 1 < 0 \quad \textbf{(falso)} \\f'(1) &= e^1 - 8 * 1 > 0 \Rightarrow -5,281718 > 0 \quad \textbf{(falso)}\end{aligned}$$

Portanto, para garantirmos a unicidade pelo corolário, é ideal que apertemos o intervalo. Dito isso, vamos apertá-lo para  $[0, 5; 1]$  e verificar se esse intervalo é válido. Vale dizer que, como apertamos o intervalo pela extremidade esquerda, para a qual o valor de  $f$  era maior do que 0, enquanto o valor de  $f$  para a extremidade direita é menor do que 0, então devemos mostrar somente que  $e^d - 8d < 0, \forall d \in [0, 5; 1]$ .

Para tal, denotemos  $g(d) = f'(d) = e^d - 8d$  e vejamos se  $g(d)$  é uma função estritamente decrescente em  $[0, 5; 1]$ , utilizando o **teorema (2)**:

$$g'(d) = e^d - 8 < 0?$$

Como  $d \in [0, 5; 1]$ , então  $e^d \leq e^1 = 2,718281$ .

Daí,  $e^d - 8 < 0 \Rightarrow e^d < 8 \Rightarrow 2,718281 < 8$  (**verdade**).

Visto que todos os valores de  $e^d$  em  $[0, 5; 1]$  são menores ou iguais a 2,718281, logo provamos que  $e^d - 8 = g'(d) < 0, \forall d \in [0, 5; 1]$ . Ou seja,  $g(d)$  é uma função estritamente decrescente nesse intervalo. Para darmos continuidade, atente-se à seguinte definição:

Uma função  $f$  é estritamente decrescente em  $I$  se  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2), \forall x_1, x_2 \in I$ .

Portanto, como  $g(d)$  é decrescente em  $[0, 5; 1]$ , então seu maior valor encontra-se no menor  $d$  do intervalo, que corresponde a 0,5. Ou seja,

$$g(0,5) = e^{0,5} - 8 * 0,5 = -2,351279$$

é o menor valor que a função  $g$  assume em  $[0, 5; 1]$ . Além disso, considerando-se que  $g$  é estritamente decrescente em  $[0, 5; 1]$ , então todos os valores de  $g$  são menores do que  $-2,351279$  (e portanto menores do que 0),  $\forall d \in [0, 5; 1]$ . Isso nos diz que  $g(d) = f'(d) < 0, \forall d \in [0, 5; 1]$ , isto é, que  $f$  também é uma função estritamente decrescente em  $[0, 5; 1]$ . Por fim, como  $f$  é uma função estritamente decrescente em  $[0, 5; 1]$  e  $f(0,5) * f(1) < 0$ , significa que  $I = [0, 5; 1]$  **é um intervalo válido!**

A título de curiosidade, há outra forma de mostrar que  $e^d - 8d < 0, \forall d \in [0, 5; 1]$ , que consiste em analisar o crescimento de duas componentes da nossa função  $g$ :  $e^d$  e  $8d$ . Para isso, rearranjemos a inequação da seguinte maneira:

$$e^d < 8d$$

Se analisarmos o gráfico dessas duas componentes de  $g$ , veremos que, no intervalo  $[0, 5; 1]$ ,  $8d$ , apesar de ser uma função linear, está sempre acima de  $e^d$ , que é uma função exponencial, o que demonstra a validade de  $e^d - 8d < 0$ .

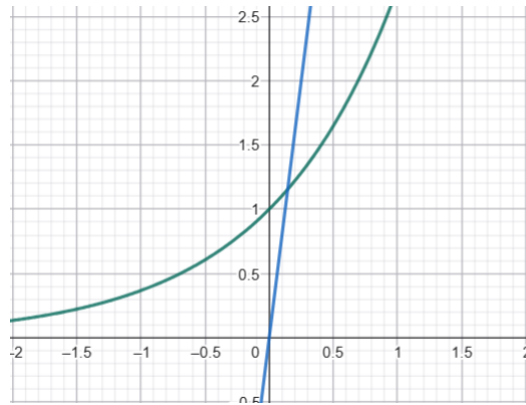


Figura 1: o gráfico em azul corresponde a  $8d$ , enquanto o gráfico em verde a  $e^d$

### 5.1.2 Análise gráfica

Utilizemos duas maneiras possíveis de realizar o isolamento por meio da análise gráfica:

- Achar os intervalos por meio do gráfico de  $f(d)$
- Achar os intervalos quebrando  $f$  em duas funções e procurar suas interseções

#### Primeira forma

Vejamos o gráfico de  $f$ :



Figura 2: gráfico de  $f(d)$

É notório que a função  $f$  possui três raízes, uma no intervalo  $A = [-0,5; 0]$ , uma no intervalo  $B = [0,5; 1]$  e outra no intervalo  $C = [4; 4,5]$ . Como vemos, a raiz que nos interessa encontra-se em  $B$ , uma vez que  $A$  contém uma raiz negativa, e o deslocamento  $d$  que buscamos há de ser positivo; além de que  $C$  contém uma raiz exageradamente superior ao limiar crítico  $0,7m$ , diferentemente de  $A$ . Outro fator diz respeito ao  $d_0$  fornecido como padrão, que vale  $0,5$ , o que é mais uma indicação de que o intervalo de interesse corresponde ao intervalo  $B$ .

#### Observação

É possível notar no gráfico que, no intervalo  $[0, 1]$ , há apenas uma raiz, então por que, ainda assim, tivemos que apertar esse intervalo na análise teórica para garantir a unicidade da raiz? Isso ocorre devido à implicação do **corolário 1**:

$$f'(x) > 0, \forall x \in [a; b] \quad \text{ou} \quad f'(x) < 0, \forall x \in [a; b] \Rightarrow \xi \text{ é único em } [a; b]$$

Pensando logicamente, se o lado esquerdo da implicação for verdadeiro, o lado direito também o é. Daí, se garantirmos que  $f(d)$  é estritamente crescente ou estritamente decrescente no intervalo em questão, garantimos que há uma só raiz nesse intervalo; já no caso em que o lado esquerdo da implicação é falso, não podemos tirar conclusão alguma sobre o lado direito, isto é,  $f'(x) > 0, \forall x \in [a; b]$  ou  $f'(x) < 0, \forall x \in [a; b]$  é uma **condição suficiente**, não necessária. Logo, pode até ser que, em um dado intervalo, haja apenas uma raiz mesmo que a função não seja estritamente decrescente ou estritamente crescente, como no caso de  $[0, 1]$ , entretanto para **garantir** por meio da análise teórica a unicidade da raiz, há de garantir a validade do lado esquerdo da implicação, isto é, apertar o intervalo, como fizemos para chegar em  $[0,5; 1]$ .

#### Segunda forma

Já no caso da segunda forma, faremos o seguinte: dividiremos a função  $f$  em duas subfunções  $h$  e  $g$ , de forma que  $h(d) = g(d)$ . Depois, acharemos os intervalos por meio das interseções das duas subfunções.

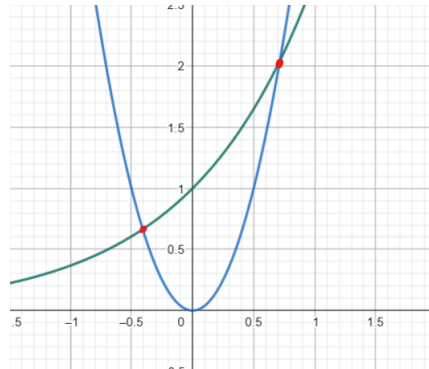


Figura 3: interseções de  $h(d) = e^d$  e  $g(d) = 4d^2$

Como podemos notar, há duas interseções visíveis, uma em  $[-0,5; 0]$  e outra em  $[0,5; 1]$ . Além disso, há também uma terceira interseção, que não é visível na imagem devido ao crescimento do gráfico, a qual está no intervalo  $[4; 5]$ .

## 5.2 Método de Newton-Raphson

Agora, após realizarmos o isolamento, podemos finalmente aplicar os métodos de refinamento para encontrar a raiz de  $f$  em  $I$ , iniciando-se pelo método de Newton-Raphson.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

Daí, consideremos  $I = [0,5; 1]$ ,  $f(d) = e^d - 4d^2$ ,  $\varepsilon = 10^{-4}$  e a aproximação inicial  $d_0 = 0,5$ :

$$d_1 = d_0 - \frac{f(d_0)}{f'(d_0)} = 0,5 - \frac{f(0,5)}{f'(0,5)} = 0,775901$$

$$|d_1 - d_0| = |0,775901 - 0,5| = 0,275901 > \varepsilon \rightarrow \text{continuar...}$$

$$|f(d_1)| = |f(0,775901)| = 0,235540 > \varepsilon \rightarrow \text{continuar...}$$

$$d_2 = d_1 - \frac{f(d_1)}{f'(d_1)} = 0,775901 - \frac{f(0,775901)}{f'(0,775901)} = 0,717521$$

$$|d_2 - d_1| = |0,717521 - 0,775901| = 0,05838 > \varepsilon \rightarrow \text{continuar...}$$

$$|f(d_2)| = |f(0,717521)| = 0,009998 > \varepsilon \rightarrow \text{continuar...}$$

$$d_3 = d_2 - \frac{f(d_2)}{f'(d_2)} = 0,717521 - \frac{f(0,717521)}{f'(0,717521)} = 0,714811$$

$$|d_3 - d_2| = |0,714811 - 0,717521| = 0,00271 > \varepsilon \rightarrow \text{continuar...}$$

$$|f(d_3)| = |f(0,714811)| = 0,186954 * 10^{-4} < \varepsilon \rightarrow \text{parar!}$$

Dai, temos  $\bar{d} = 0,714811$  como nossa aproximação!

Mas e se continuássemos até atingir o primeiro critério de parada?

$$d_4 = d_3 - \frac{f(d_3)}{f'(d_3)} = 0,714811 - \frac{f(0,714811)}{f'(0,714811)} = 0,714805$$

$$|d_4 - d_3| = |0,714805 - 0,714811| = 0,000006 < \varepsilon \rightarrow \text{parar!}$$

### 5.3 Método de Newton modificado

Agora, achemos a raiz de  $f$  em  $I$  utilizando o método de Newton modificado, proposto no enunciado do problema da seguinte maneira:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)}, \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

Assim, seja  $I = [0, 5; 1]$ ,  $f(d) = e^d - 4d^2$ ,  $f'(d_0) = e^{d_0} - 8d_0$ ,  $\varepsilon = 10^{-4}$  e a aproximação inicial  $d_0 = 0,5$ :

$$d_1 = d_0 - \frac{f(d_0)}{f'(d_0)} = 0,5 - \frac{f(0,5)}{f'(0,5)} = 0,775901$$

$$|d_1 - d_0| = |0,775901 - 0,5| = 0,275901 > \varepsilon \rightarrow \text{continuar...}$$

$$|f(d_1)| = |f(0,775901)| = 0,235540 > \varepsilon \rightarrow \text{continuar...}$$

$$d_2 = d_1 - \frac{f(d_1)}{f'(d_0)} = 0,775901 - \frac{f(0,775901)}{f'(0,5)} = 0,675725$$

$$|d_2 - d_1| = |0,675725 - 0,775901| = 0,100176 > \varepsilon \rightarrow \text{continuar...}$$

$$|f(d_2)| = |f(0,675725)| = 0,139040 > \varepsilon \rightarrow \text{continuar...}$$

$$d_3 = d_2 - \frac{f(d_2)}{f'(d_0)} = 0,675725 - \frac{f(0,675725)}{f'(0,5)} = 0,734858$$

$$|d_3 - d_2| = |0,734858 - 0,675725| = 0,059133 > \varepsilon \rightarrow \text{continuar...}$$

$$|f(d_3)| = |f(0,734858)| = 0,074879 > \varepsilon \rightarrow \text{continuar...}$$

$$d_4 = d_3 - \frac{f(d_3)}{f'(d_0)} = 0,734858 - \frac{f(0,734858)}{f'(0,5)} = 0,703011$$

$$|d_4 - d_3| = |0,703011 - 0,734858| = 0,031847 > \varepsilon \rightarrow \text{continuar...}$$

$$|f(d_4)| = |f(0,703011)| = 0,042927 > \varepsilon \rightarrow \text{continuar...}$$

$$d_5 = d_4 - \frac{f(d_4)}{f'(d_0)} = 0,703011 - \frac{f(0,703011)}{f'(0,5)} = 0,721268$$



$$|d_5 - d_4| = |0,721268 - 0,703011| = 0,018257 > \varepsilon \rightarrow \text{continuar...}$$

$$|f(d_5)| = |f(0,721268)| = 0,023870 > \varepsilon \rightarrow \text{continuar...}$$

$$d_6 = d_5 - \frac{f(d_5)}{f'(d_0)} = 0,721268 - \frac{f(0,721268)}{f'(0,5)} = 0,711115$$

$$|d_6 - d_5| = |0,711115 - 0,721268| = 0,010153 > \varepsilon \rightarrow \text{continuar...}$$

$$|f(d_6)| = |f(0,711115)| = 0,013522 > \varepsilon \rightarrow \text{continuar...}$$

$$d_7 = d_6 - \frac{f(d_6)}{f'(d_0)} = 0,711115 - \frac{f(0,711115)}{f'(0,5)} = 0,716866$$

$$|d_7 - d_6| = |0,716866 - 0,711115| = 0,005751 > \varepsilon \rightarrow \text{continuar...}$$

$$|f(d_7)| = |f(0,716866)| = 0,007582 > \varepsilon \rightarrow \text{continuar...}$$

$$d_8 = d_7 - \frac{f(d_7)}{f'(d_0)} = 0,716866 - \frac{f(0,716866)}{f'(0,5)} = 0,713641$$

$$|d_8 - d_7| = |0,713641 - 0,716866| = 0,003225 > \varepsilon \rightarrow \text{continuar...}$$

$$|f(d_8)| = |f(0,713641)| = 0,004276 > \varepsilon \rightarrow \text{continuar...}$$

$$d_9 = d_8 - \frac{f(d_8)}{f'(d_0)} = 0,713641 - \frac{f(0,713641)}{f'(0,5)} = 0,715459$$

$$|d_9 - d_8| = |0,715459 - 0,713641| = 0,001818 > \varepsilon \rightarrow \text{continuar...}$$

$$|f(d_9)| = |f(0,715459)| = 0,002401 > \varepsilon \rightarrow \text{continuar...}$$

$$d_{10} = d_9 - \frac{f(d_9)}{f'(d_0)} = 0,715459 - \frac{f(0,715459)}{f'(0,5)} = 0,714437$$

$$|d_{10} - d_9| = |0,714437 - 0,715459| = 0,001022 > \varepsilon \rightarrow \text{continuar...}$$

$$|f(d_{10})| = |f(0,714437)| = 0,001355 > \varepsilon \rightarrow \text{continuar...}$$

$$d_{11} = d_{10} - \frac{f(d_{10})}{f'(d_0)} = 0,714437 - \frac{f(0,714437)}{f'(0,5)} = 0,715013$$

$$|d_{11} - d_{10}| = |0,715013 - 0,714437| = 0,000576 > \varepsilon \rightarrow \text{continuar...}$$

$$|f(d_{11})| = |f(0,715013)| = 0,000761 > \varepsilon \rightarrow \text{continuar...}$$

$$d_{12} = d_{11} - \frac{f(d_{11})}{f'(d_0)} = 0,715013 - \frac{f(0,715013)}{f'(0,5)} = 0,714609$$

$$|d_{12} - d_{11}| = |0,714609 - 0,715013| = 0,000324 > \varepsilon \rightarrow \text{continuar...}$$

$$|f(d_{12})| = |f(0,714609)| = 0,000429 > \varepsilon \rightarrow \text{continuar...}$$

$$d_{13} = d_{12} - \frac{f(d_{12})}{f'(d_0)} = 0,714609 - \frac{f(0,714609)}{f'(0,5)} = 0,714871$$

$$|d_{13} - d_{12}| = |0,714871 - 0,714609| = 0,000182 > \varepsilon \rightarrow \text{continuar...}$$

$$|f(d_{13})| = |f(0,714871)| = 0,000239 > \varepsilon \rightarrow \text{continuar...}$$

$$d_{14} = d_{13} - \frac{f(d_{13})}{f'(d_0)} = 0,714871 - \frac{f(0,714871)}{f'(0,5)} = 0,714769$$

$$|d_{14} - d_{13}| = |0,714769 - 0,714871| = 0,000102 > \varepsilon \rightarrow \text{continuar...}$$

$$|f(d_{14})| = |f(0,714769)| = 0,000135 > \varepsilon \rightarrow \text{continuar...}$$

$$d_{15} = d_{14} - \frac{f(d_{14})}{f'(d_0)} = 0,714769 - \frac{f(0,714769)}{f'(0,5)} = 0,714826$$

$$|d_{15} - d_{14}| = |0,714826 - 0,714769| = 0,000057 < \varepsilon \rightarrow \text{parar!}$$

$$|f(d_{15})| = |f(0,714826)| = 0,738163 * 10^{-4} < \varepsilon \rightarrow \text{parar!}$$

Daí, chegamos a nossa aproximação  $\bar{d} = 0,714826$ .

## 5.4 Método da Secante tradicional

Por fim, façamos agora o refinamento de  $f$  utilizando o método da Secante, cuja função de iteração é

$$x_{k+1} = \frac{x_{k-1}f(x_k) - x_kf(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Assim, seja  $I = [0, 5; 1]$ ,  $f(d) = e^d - 4d^2$ ,  $\varepsilon = 10^{-4}$  e as aproximações iniciais  $d_0 = 0,5$  e  $d_1 = 1$ :

$$d_2 = \frac{d_0f(d_1) - d_1f(d_0)}{f(d_1) - f(d_0)} = \frac{0,5f(1) - 1f(0,5)}{f(1) - f(0,5)} = 0,668024$$

$$|d_2 - d_1| = |0,668024 - 1| = 0,331976 > \varepsilon \rightarrow \text{continuar...}$$

$$|f(d_2)| = |f(0,668024)| = 0,165355 > \varepsilon \rightarrow \text{continuar...}$$

$$d_3 = \frac{d_1f(d_2) - d_2f(d_1)}{f(d_2) - f(d_1)} = \frac{1f(0,668024) - 0,668024f(1)}{f(0,668024) - f(1)} = 0,705958$$

$$|d_3 - d_2| = |0,705958 - 0,668024| = 0,037934 > \varepsilon \rightarrow \text{continuar...}$$

$$|f(d_3)| = |f(0,705958)| = 0,032279 > \varepsilon \rightarrow \text{continuar...}$$

$$d_4 = \frac{d_2 f(d_3) - d_3 f(d_2)}{f(d_3) - f(d_2)} = \frac{0,668024 f(0,705958) - 0,705958 f(0,668024)}{f(0,705958) - f(0,668024)} = 0,715159$$

$$|d_4 - d_3| = |0,715159 - 0,705958| = 0,009201 > \varepsilon \rightarrow \text{continuar...}$$

$$|f(d_4)| = |f(0,715159)| = 0,001297 > \varepsilon \rightarrow \text{continuar...}$$

$$d_5 = \frac{d_3 f(d_4) - d_4 f(d_3)}{f(d_4) - f(d_3)} = \frac{0,705958 f(0,715159) - 0,715159 f(0,705958)}{f(0,715159) - f(0,705958)} = 0,714803$$

$$|d_5 - d_4| = |0,714803 - 0,715159| = 0,000356 > \varepsilon \rightarrow \text{continuar...}$$

$$|f(d_5)| = |f(0,714803)| = 0,107019 * 10^{-4} < \varepsilon \rightarrow \text{parar!}$$

Assim, encontramos nossa aproximação  $\bar{d} = 0,714803$  pelo método da Secante.

Mas e se continuássemos, tal como fizemos no método de Newton, até atingir o primeiro critério de parada?

$$d_6 = \frac{d_4 f(d_5) - d_5 f(d_4)}{f(d_5) - f(d_4)} = 0,714805$$

$$|d_6 - d_5| = |0,714805 - 0,714803| = 0,000002 < \varepsilon \rightarrow \text{parar!}$$

## 6 Resolução da IA

A título de comparação, vamos enviar o enunciado do nosso problema, correspondente ao tema 2, como prompt para algumas inteligências artificiais, visando verificar se o resultado que elas fornecem são confiáveis.

### 6.1 ChatGPT

O ChatGPT, inicialmente, forneceu resultados errados no que diz respeito às raízes encontradas pelos métodos de refinamento com os quais trabalhamos. A seguir, segue as respostas:

*Parâmetros:*

- $a = 1$
- $d_0 = 0,5$
- $d_1 = 0,6$  (escolha típica p/ Secante)
- $\varepsilon = 10^{-4}$

*Resultados:*

Método	Aproximação	Iterações
Newton-Raphson	0,52738	4
Newton modificado	0,53121	8
Secante tradicional	0,52740	5

*Resposta:*

”Todos ficam abaixo do limiar crítico de 0,7 m, então ainda seguros neste caso.”

É perceptível que o ChatGPT **errou**. As raízes encontradas sobre o erro fornecido estão longe da aproximação 0,714805, encontrada tanto por intermédio da resolução manual quanto pelo refinamento do programa.

## 6.2 DeepSeek

DeepSeek também forneceu resultados errados na primeira resposta (mais errados que o ChatGPT, diga-se de passagem).

*Resultados:*

Método	Aproximação	Iterações
Newton-Raphson	0.357403	4
Newton modificado	0.357403	6
Secante tradicional	0.357403	5

## 6.3 Gemini

No caso do Gemini, os resultados foram próximos às reais aproximações do deslocamento  $d$ .

*Resultados:*

Método	Aproximação	Iterações
Newton-Raphson	0.7148003	4
Newton modificado	0.7148000	5
Secante tradicional	0.7148003	6

## 6.4 Análise

Daí, por meio dos resultados acima, vemos que IA's nem sempre são confiáveis, principalmente se o usuário não tem plena noção do que está fazendo. Devido aos erros do ChatGPT e do DeepSeek, que parecem pequenos à vista de alguém leigo, poderia haver sérios danos, como dito no enunciado. Isso porque, considerando as aproximações corretas, o deslocamento  $d$  excede o limite seguro de 0,7m, o que indica a ocorrência de problemas. Já no caso das aproximações para o deslocamento  $d$  encontradas pelas duas primeiras IA's, isso não ocorre, visto que o  $d$  achado por ambas encontra-se abaixo do limite, o que indica falsa segurança, e pode causar um **desastre**.

Portanto, é importante, ao utilizar IA, entender o que está sendo feito, utilizando-a apenas como apoio. Além disso, vale dizer que, após pedir para o ChatGPT e para o DeepSeek corrigirem o resultado, eles deram a resposta correta, porém, caso, em um ambiente profissional, a primeira resposta fosse levada em consideração sem análise, problemas reais poderiam ocorrer.

## 7 Interpretação dos resultados para $a = 1$

Vimos que a melhor aproximação que obtivemos da raiz de  $f(d)$  para  $a = 1$  foi  $\bar{d} = 0,714805$ . Mas o que esse valor significa? Como podemos interpretá-lo? Primeiramente, entendamos o contexto do problema: oscilações causadas por ondas sísmicas foram modeladas pela função  $f(d) = ae^d - 4d^2$ , em que  $a$  representa a amplitude de cada onda considerada, isto é, indica o nível de sua intensidade, enquanto  $d$  representa o deslocamento da onda, ligado à deformação no solo. Assim, ao resolver  $f(d) = 0$ , descobrimos qual deslocamento final o modelo prevê para uma determinada amplitude  $a$ . Para melhor compreensão, vejamos o que é uma onda sísmica:

*”Quando ocorre uma ruptura na litosfera, são geradas vibrações sísmicas que se propagam em todas as direções na forma de ondas. O mesmo ocorre, por exemplo, quando explosivos são detonados. São estas ondas sísmicas que causam danos perto do epicentro e que podem ser registradas em sismógrafos no mundo todo.”* - Sismologia, Manoel S. D’Agrella Filho.

Isto é, ondas sísmicas se tratam de vibrações em forma de ondas que, a depender de certas variáveis, podem causar danos por onde passam. Como nos foi dito no enunciado, caso esse deslocamento  $d$  passe de  $0,7m$ , essa oscilação amplifica, causando sérios danos e um problema gigantesco, como colapso de edificações, instabilidades estruturais ou até rompimento de infraestruturas. Daí, ao procurarmos por um certo  $f(d)$  tal que  $e^d = 4d^2$ , estamos em busca do valor, em metros, do deslocamento previsto para uma dada onda sísmica de amplitude  $a = 1$ .

Dito isso, após entendermos o problema, podemos analisar a nossa aproximação  $\bar{d}$ . Como visto, o limiar do deslocamento  $d$  para um dado valor de  $a$  é de  $0,7m$ , enquanto a aproximação encontrada corresponde a  $\bar{d} = 0,714805m$ . A aproximação encontra-se acima do limite, o que indica uma amplificação da oscilação e, portanto, prevê-se que danos podem ser causados devido à oscilação da onda sísmica considerada. A saber dessa informação, obtida por meio dos métodos numéricos propostos, é preciso elencar medidas para minimizar os problemas que essa onda pode causar.

## 8 Análise dos efeitos do valor de $a$ para cada método considerado

Agora, testemos os métodos de refinamento para alguns valores de  $a$ , visando visualizar os efeitos que a amplitude causa no deslocamento  $d$ . Considere  $\varepsilon = 10^{-4}$ .

*Método de Newton-Raphson:*

$a$	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	2	3
$\bar{d}$	0	0.288845	0.440719	0.578163	0.714812	0.858870	1.019548	1.487962	null

*Método de Newton modificado:*

$a$	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	2	3
$\bar{d}$	0	0.288884	0.440748	0.578184	0.714827	0.858884	1.019544	1.487956	null

*Método da Secante:*

$a$	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	2	3
$\bar{d}$	0	0.288842	0.440724	0.578158	0.714803	0.858867	1.019548	1.487962	null



Figura 4: deslocamento da raiz  $\bar{d}$  ao longo do eixo  $x$  conforme  $a$  cresce.

Como é possível notar, entre cada método, os valores de  $\bar{d}$  encontrados, para cada  $a$ , não destoam muito. Entretanto, nota-se um certo padrão em relação ao valor de  $\bar{d}$  conforme  $a$  varia. Se prestarmos atenção, veremos que, conforme o valor da amplitude  $a$  aumenta, o valor do deslocamento  $\bar{d}$  também cresce. Isso ocorre pois, quanto maior a amplitude da onda sísmica, maior sua intensidade, logo o deslocamento da onda também tende a aumentar, causando mais deformações ao solo e extrapolando cada vez mais o limite seguro de  $0,7m$ .

Por que  $\bar{d}$  para  $a = 3$  é nulo? Isso acontece devido à restrição intervalar da raiz  $\bar{d}$  em relação a  $a$ . Se olharmos para um gráfico com algumas funções  $f$  para diferentes  $a$ , veremos que a raiz  $d$ , conforme  $a$  cresce, desloca-se para a direita ao longo do eixo  $x$ , até o momento em que o gráfico da função não intercepta mais o eixo  $x$  positivo. Por meio de testes, verificamos que esse "momento" inicia-se em  $a = 2.165364$  (considerando o valor truncado para 6 casas decimais). Além disso, para  $a < 0$ , o gráfico da função  $f$  não intercepta o eixo  $x$ . Logo, temos que o intervalo válido para  $a$  é  $[0, 2.165364]$ .

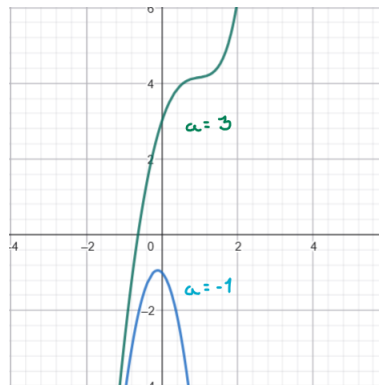


Figura 5: exemplos para  $a = 3$  e  $a = -1$ .

## 9 Estatísticas

Comparações e estatísticas dos resultados considerando padrão  $a = 1$ ,  $d_0 = 0,5$  e  $\varepsilon = 10^{-4}$ .

## 9.1 Comparando resultados da saída do programa, da resolução manual e da resolução da IA para cada método

Para tal, usemos as aproximações obtidas pelo seguinte critério de parada:

$$|f(d_{k+1} < \varepsilon)| \text{ ou } |d_{k+1} - d_k| < \varepsilon \rightarrow \text{parar!}$$

Além disso consideremos inicialmente apenas os resultados do Gemini, que foi a única IA testada que chegou a um valor próximo para  $d$ .

*Resultados:*

Método	Programa	Manual	IA
Newton-Raphson	0.714812	0,714811	0.7148003
Newton modificado	0.714827	0,714826	0.7148000
Secante tradicional	0.714803	0,714803	0.7148003

Como vemos, os resultados obtidos pela resolução manual são bem próximos da saída do programa, o que aumenta a confiabilidade das aproximações. Já no caso da IA, houve uma divergência maior, o que novamente nos serve de alerta para o uso cuidadoso dessa ferramenta.

Agora, façamos o seguinte: peçamos para que as IA's corrijam seus resultados, e então os comparemos.

*Resultados das IA's "corrigidos":*

Método	GPT	DeepSeek	Gemini
Newton-Raphson	0.714811	0.714753	0.715613
Newton modificado	0.714826	0.713205	0.715590
Secante tradicional	0.714806	0.714753	0.715590

Como podemos notar, o ChatGPT e o DeepSeek chegaram a valores muito mais próximos da raiz, sendo que o ChatGPT foi o mais preciso dentre as três após a correção. Já no caso do Gemini, os resultados pioraram, e mesmo com insistência, ele continuou chegando a resultados mais distantes da raiz do que os obtidos na primeira resposta.

## 9.2 Comparando resultado dos métodos de refinamento

Agora, comparemos as aproximações obtidas por cada um dos métodos de refinamento utilizados. Para isso, vamos utilizar os resultados da resolução manual (como os resultados do programa estão bem próximos, a diferença é irrisória). Além disso, consideremos o critério de parada

$$|f(d_{k+1} < \varepsilon)| \text{ ou } |d_{k+1} - d_k| < \varepsilon \rightarrow \text{parar!}$$

*Resultados:*

Newton-R	Newton-M	Secante
0.714811	0.714826	0.714803

### 9.3 Comparando eficiências dos métodos de refinamento

Agora, comparemos a eficiência e a precisão dos métodos de refinamento. Vale dizer que essa comparação está sendo realizada considerando o intervalo  $I = [0.5, 1]$  e as aproximações iniciais  $d_0 = 0.5$  e  $d_1 = 1$ , pois os valores de  $\bar{d}$  podem mudar minuciosamente a depender desses parâmetros.

*Resultados:*

Método	Newton-R	Newton-M	Secante
Aproximação	0.714811	0.714826	0.714803
Iterações	3	15	5

Como vemos, considerando que o valor mais preciso de  $\bar{d}$  encontrado até o momento foi  $\bar{d}_{min} = 0,714805$ , o método mais preciso foi o da Secante, com erro absoluto de  $0,2 * 10^{-5}$  em relação a  $\bar{d}_{min}$ , enquanto o segundo mais preciso foi o de Newton-Raphson, com erro de  $0,6 * 10^{-5}$ , e logo após o método de Newton modificado, com erro de  $0,21 * 10^{-4}$ . Já em relação ao número de iterações, nitidamente o método de Newton-Raphson é o mais eficiente, com apenas 3 iterações até atingir o critério de parada, logo após o da Secante com 5 iterações e o de Newton modificado com 15 iterações.

**Vantagens** do método de **Newton-Raphson**:

- Rápido (convergência quadrática) e estável
- O segundo mais preciso neste caso

**Desvantagens** do método de **Newton-Raphson**:

- Convergência não é assegurada
- Necessita do cálculo da derivada

**Vantagens** do método de **Newton modificado**:

- Só é preciso calcular a derivada uma vez

**Desvantagens** do método de **Newton modificado**:

- Método muito lento
- Baixa precisão
- Convergência não é assegurada
- Ainda necessita do cálculo da derivada

**Vantagens** do método da **Secante**:

- Método eficiente (Convergência  $p = 1.618$ )
- O mais preciso neste caso



- Não é preciso calcular a derivada

**Desvantagens** do método da **Secante**:

- Convergência não é assegurada
- É preciso duas aproximações iniciais
- Não é tão rápido quanto o Newton-Raphson

Vale ressaltar que o método de Newton modificado proposto é muito ineficiente, tanto no que diz respeito à precisão quanto à rapidez, pois além de ser o método menos preciso, ainda foi o mais lento, chegando ao critério de parada apenas na iteração 15. Além disso, testamos ainda quanto demoraria para o método de Newton modificado atingir  $\bar{d}_{min}$ , e ele levou 22 iterações, enquanto o de Newton-Raphson demorou 4 e o da Secante demorou 6. Isto é, o método de Newton modificado é muito pior do que os demais em vários aspectos, e portanto não é indicado.

Mas por que esse método é tão ruim? Isso acontece justamente porque ele mantém a derivada fixa, usando a tangente do ponto inicial em todas as iterações em vez de usar a do ponto atual. Assim, diferentemente do Newton-Raphson, a tangente não se ajusta à curva, e o método perde a convergência rápida. Isso se mostra pelos passos pequenos a cada iteração e também pelas frequentes oscilações em cada nova aproximação  $\bar{d}$ .

## 9.4 Comparando resultados dos dois critérios de parada

Há também algo muito importante de se comentar, que é a diferença entre os resultados obtidos utilizando cada um dos critérios de parada. Até o momento, consideramos a implicação

$$|f(d_{k+1} < \varepsilon)| \text{ ou } |d_{k+1} - d_k| < \varepsilon \rightarrow \text{parar!}$$

Isto é, quando qualquer um dos dois critérios forem atingidos, o refinamento é interrompido. Mas e se comparássemos a precisão dos critérios separadamente?

*Resultados:*

Critério	Newton-R	Newton-M	Secante
$ f(d_{k+1})  < \varepsilon$	0.714811	0.714826	0.714803
$ d_{k+1} - d_k  < \varepsilon$	0,714805	0,714826	0,714805

No caso dos métodos de Newton-Raphson e da Secante, o primeiro critério a ser atingido foi  $|f(d_{k+1})| < \varepsilon$ . Após isso, demos continuidade às iterações até atingir o critério  $|d_{k+1} - d_k| < \varepsilon$ , e chegamos à aproximação  $\bar{d} = 0,714805$ . Essa aproximação é evidentemente a mais precisa, o que se mostra tanto por realizarmos mais iterações até obtê-la quanto pelo valor do erro absoluto ser bem menor se comparado ao erro do outro critério. Já no caso do método de Newton modificado, os dois critérios foram atingidos simultaneamente.

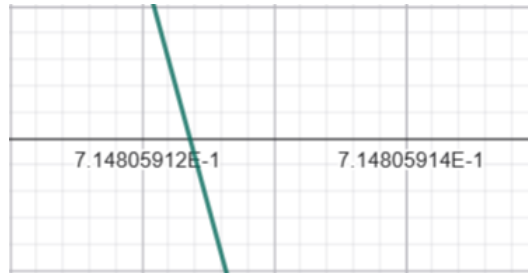


Figura 6: vê-se que, de fato, a raiz é aproximadamente 0,714805 (por truncamento)

Portanto, analisando a simultaneidade dos critérios de parada, vemos que ambos chegam a aproximações satisfatórias, visto que os dois, além de obterem resultados próximos, levam o problema à mesma conclusão. Entretanto, o critério de parada  $|d_{k+1} - d_k| < \varepsilon$  é levemente mais preciso neste caso.