TAREA CAPITULO 2 Y CAPITULO 3
MMD2002 - ANÁLISIS PARA CIENCIAS DE DATOS

ANDRÉS ZÚÑIGA

P1. Dado $N \geq 1$ fijo, pruebe la siguiente convergencia de normas en el espacio producto $\mathbb{F}^N$

$$\lim_{p\to\infty} \|z\|_p = \|z\|_\infty, \quad \forall z \in \mathbb{F}^N$$

donde para $p \in [1, \infty)$, $\|z\|_p = (\sum_{i=1}^N |z_i|^p)^{1/p}$ denota la norma p, y $\|z\|_\infty = \text{máx}\{|z_i| : i = 1, \ldots, N\}$ denota la norma infinito.

Solución: Notemos que, para $p \geq 1$ arbitrario, tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
\|z\|_\infty = (\|z\|_\infty^p)^{1/p} &\leq \left(\sum_{i=1}^N |z_i|^p\right)^{1/p} \\
&= \left(\|z\|_\infty^p \sum_{i=1}^N \left(\frac{|z_i|}{\|z\|_\infty}\right)^p\right)^{1/p} \leq \|z\|_\infty \left(\sum_{i=1}^N 1^p\right)^{1/p} \\
&= \|z\|_\infty N^{1/p}
\end{aligned}$$

tomando el límite cuando $p \to \infty$ se deduce que

$$\|z\|_\infty \leq \lim_{p\to\infty} \|z\|_p \leq \|z\|_\infty (\lim_{p\to\infty} N^{1/p}) = \|z\|_\infty \cdot 1 \qquad \square$$

P2. Dados $a < b$, considere el espacio $E := C([a, b]; \mathbb{R})$ de funciones continuas, y las asignaciones

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}, \quad \|f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

a) Muestre que $\|f\|_2$ y $\|f\|_\infty$ son normas en E.

b) Pruebe que para todo $f \in E$, $\|f\|_2 \leq \sqrt{b-a}\|f\|_\infty$.

c) Muestre que $\|\cdot\|_\infty$ y $\|\cdot\|_2$ no son equivalentes.

Hint: Para *b*), puede utilizar sin demostración la desigualdad de Hölder en $L^2(\mathbb{R})$ la cual dice que

$$\int_a^b |f(x) \cdot g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right)^{1/2}.$$

Solución:

a) Primero veamos para la norma infinito: Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ cualquiera.

(*a*) $\|f\|_\infty = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \max_{x\in[a,b]} |f(x)| = 0 \quad \Rightarrow \quad |f(x)| = 0 \;\; \forall x \in [a, b] \quad \Rightarrow \quad f \equiv 0.$

Además,

(*b*) $\|\lambda f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |\lambda f(x)| = \max_{x\in[a,b]} |\lambda| \cdot |f(x)| = |\lambda| \max_{x\in[a,b]} \cdot |f(x)| = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty.$

Date: 10 de noviembre, 2022.

Por último, la desigualdad triangular

$$
\begin{aligned}
(c)\quad \|f+g\|_\infty &= \max_{x\in[a,b]} |f(x)+g(x)| \\
&\le \max_{x\in[a,b]} (|f(x)|+|g(x)|) \\
&\le \max_{x\in[a,b]} |f(x)| + \max_{x\in[a,b]} |g(x)| = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty
\end{aligned}
$$

Ahora veamos para la norma dos.
Primero, asumamos (a): $\|f\|_2 = 0$, es decir $\int |f(x)|dx = 0$. Por contradicción, si $f \neq 0$ podemos suponer sin pérdida de generalidad que existe un $x_\star \in (a,b)$ tal que $|f(x_\star)| > 0$. Entonces por continuidad sabemos que $\exists \delta > 0$ tal que

$$
I_\delta := (x_\star - \delta, x_\star + \delta) \subset (a,b) \quad \text{ y } \quad |f(x)| > |f(x_\star)|/2, \;\; \forall x \in I_\delta.
$$

Pero entonces se sigue que

$$
\begin{aligned}
\|f\|_2^2 = \int_a^b |f(x)|^2 dx &\ge \int_{x_\star-\delta}^{x_\star+\delta} |f(x)|^2 dx \\
&> \int_{x_\star-\delta}^{x_\star+\delta} \frac{|f(x_\star)|^2}{4} dx = \delta \cdot \frac{|f(x_\star)|^2}{2} > 0.
\end{aligned}
$$

lo cual contradice nuestra hipótesis de que $\|f\|_2 = 0$. Se concluye que necesariamente $f \equiv 0$.
Segundo,

$$
(b)\quad \|\lambda f\|_2 = \left(\int_a^b |\lambda f(x)|^2\right)^{1/2} = \left(\int_a^b |\lambda|^2 \cdot |f(x)|^2\right)^{1/2} = |\lambda| \left(\int_a^b |f(x)|^2\right)^{1/2} = |\lambda| \cdot \|f\|_2.
$$

Tercero, utilizando la desgualdad de Hölder en el caso $L^2(\mathbb{R})$ tenemos

$$
\begin{aligned}
(c)\quad \|f+g\|_2^2 &= \int_a^b |f(x)+g(x)|^2 dx \le \int_a^b (|f(x)|+|g(x)|)^2 dx \\
&= \int_a^b (|f(x)|^2 + |g(x)|^2 + 2|f(x)||g(x)|) dx \\
&= (\int_a^b |f(x)|^2 dx) + (\int_a^b |g(x)|^2 dx) + 2\int_a^b |f(x)||g(x)| dx) \\
&= (\int_a^b |f(x)|^2 dx) + (\int_a^b |g(x)|^2 dx) + 2(\int_a^b |f(x)|^2 dx)^{1/2} (\int_a^b |g(x)|^2 dx)^{1/2} \\
&= (\|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 + 2\|f\|_2\|g\|_2) = (\|f\|_2 + \|g\|_2)^2
\end{aligned}
$$

De aquí se desprende la desigualdad triangular

$$
\|f+g\|_2^2 \le \|f\|_2 + \|g\|_2. \qquad \square
$$

b) Notemos que directamente se tiene

$$
\|f\|_2^2 = \int_a^b |f(x)|^2 dx \le \int_a^b (\max_{x\in[a,b]} |f(x)|)^2 dx = (b-a)(\max_{x\in[a,b]} |f(x)|)^2 = (b-a)\|f\|_\infty^2 \qquad \square.
$$

c) Para probar que la cota

$$
c\|f\|_\infty \le \|f\|_2
$$

es imposible (para cualquier $c > 0$), basta con mostrar que la cantidad

$$
\inf_{f\in E} \frac{\|f\|_2}{\|f\|_\infty} = 0.
$$

Como este ínfimo es alcazado mediante sucesiones, consideremos construir una sucesión $\{f_n\} \subset E$ de modo que

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{\|f_n\|_2}{\|f_n\|_\infty} = 0.
$$

Para esto, podemos considerar por ejemplo la siguiente familia de funciones

$$
f_n \in C([a,b];\mathbb{R}), \quad f_n(x) = (x-a)^n/(b-a)^n
$$

Es fácil observar que por un lado:

$$\|f_n\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} \frac{(x-a)^n}{(b-a)^n} = \frac{(b-a)^n}{(b-a)^n} \equiv 1, \quad \forall n \geq 1$$

pero por otro lado,

$$\|f_n\|_2^2 = \int_a^b \frac{(x-a)^{2n}}{(b-a)^{2n}} dx = \frac{1}{(b-a)^{2n}} \int_0^{b-a} x^{2n} dx = \frac{1}{(b-a)^{2n}} \cdot \frac{(b-a)^{2n+1}}{2n+1} = \frac{(b-a)}{2n+1} \to 0. \qquad \square$$

P3. Dados $a, b \in \mathbb{Q}$, denote por $[a,b)_{\mathbb{Q}}$ el intervalo de racionales $\{x \in \mathbb{Q} : a \leq x < b\}$. Pruebe que $\forall \varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, existen intervalos racionales $[a_n, b_n)_{\mathbb{Q}}$ tales que

$$[0,1)_{\mathbb{Q}} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n)_{\mathbb{Q}} \quad \text{con} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) < \varepsilon$$

Hint: Escriba $[0,1)_{\mathbb{Q}} = \{q_1, q_2, q_3, \ldots\}$ y considere $a_n = q_n$, $b_n = q_n + \varepsilon/2^{n+1}$. Redefina a_n y b_n en caso de ser necesario.

Solución: Consideremos el conjunto de racionales entre cero y uno,

$$[0,1)_{\mathbb{Q}} = \{q_1, q_2, q_3, \ldots\}$$

Dado $\varepsilon > 0$, defina para todo natural $n \in \mathbb{N}$ el intervalo $[a_n, b_n)_{\mathbb{Q}}$ mediante

$$a_n := q_n \quad \text{y} \quad b_n := q_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Es claro que $q_n \in [a_n, b_n)_{\mathbb{Q}}$ y por lo tanto

$$[0,1)_{\mathbb{Q}} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{q_n\} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n)_{\mathbb{Q}}$$

Finalmente, también es directo comprobar que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} (q_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} - q_n) \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 \right) = \frac{\varepsilon}{2} \cdot (2-1) \\ &= \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \qquad \square\end{aligned}$$

P4. *a)* Suponga que $f_n \to f$ en $L^1(\mathbb{R})$, que $g_n \to g$ en $L^1(\mathbb{R})$, y que $\lambda \in \mathbb{R}$. Muestre que $f_n + \lambda g_n \to f + \lambda g$ en $L^1(\mathbb{R})$. Más aún, muestre que $|f_n| \to |f|$ en $L^1(\mathbb{R})$.

b) Si $f \simeq \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ para $f \in L^1(\mathbb{R})$, muestre entonces que $\sum_{n=1}^{N} f_n \to f$ en $L^1(\mathbb{R})$, cuando $N \to \infty$.

Solución:

a) Bajo las hipótesis del problema, tenemos que

$$\begin{aligned}\|(f_n + \lambda g_n) - (f + \lambda g)\|_1 &= \|(f_n - f) + \lambda(g_n - g)\|_1 \\ &\leq \|f_n - f\|_1 + |\lambda| \|g_n - g\| \to 0 + \lambda \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

Además, utilizando la desigualdad triangular reversa de la norma uno:

$$\||f_n| - |f|\|_1 = \int ||f_n| - |f|| \leq \int |f_n - f| = \|f_n - f\|_1 \to 0.$$

b) Observemos que como $f \simeq \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ es una descomposición válida, entonces la hipótesis (a) de la definición implica que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| < \infty.$$

Ahora, sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Por la convergencia anterior, $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=N_\varepsilon+1}^{\infty} \int |f_n| < \varepsilon.$$

Dado $\varepsilon > 0$ consideremos $N = N_\varepsilon$ como arriba, entonces

$$\begin{aligned}\|\sum_{n=1}^{N} f_n - f\|_1 &= \int |\sum_{n=1}^{N} f_n - \sum_{n=1}^{\infty} f_n| \\ &= \int |\sum_{n=N+1}^{\infty} f_n| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \int |f_n| < \varepsilon\end{aligned}$$

lo que prueba la validez del límite deseado.

P5. Pruebe que para toda $f \in L^1(\mathbb{R})$ se tiene que

$$\lim_{z\to 0} \int |\tau_z f - f| = 0.$$

Aquí, τ_z denota el operador de traslación en z, definido por $\tau_z f(x) = f(x-z)$.

Hint: Inicie probando la propiedad cuando f es una función escalonada. Además, estudie cómo reducir la integral $\int |\tau_z f_n|$ en el caso de funciones escalonadas.

Solución: Primero, supongamos que $f_e = \lambda_1 \mathbf{1}_{[a_1,b_1)} + \ldots + \lambda_n \mathbf{1}_{[a_n,b_n)}$ es una función escalonada escrita en representación estándar. Entonces su traslación es igual a

$$\begin{aligned}\tau_z f_e(x) &= \lambda_1 \cdot \tau_z \mathbf{1}_{[a_1,b_1)}(x) + \ldots + \lambda_n \cdot \tau_z \mathbf{1}_{[a_n,b_n)}(x) \\ &= \lambda_1 \cdot \mathbf{1}_{[a_1,b_1)}(x-z) + \ldots + \lambda_n \cdot \mathbf{1}_{[a_n,b_n)}(x-z) \\ &= \lambda_1 \cdot \mathbf{1}_{[a_1+z,b_1+z)}(x) + \ldots + \lambda_n \cdot \mathbf{1}_{[a_n+z,b_n+z)}(x)\end{aligned}$$

Como los intervalos se asumen disjuntos, se sigue entonces que

$$\begin{aligned}\int |\tau_z f_e| &= \int \big(|\lambda_1| \mathbf{1}_{[a_1+z,b_1+z)}(x) + \ldots + |\lambda_n| \mathbf{1}_{[a_n+z,b_n+z)}(x)\big) \\ &= |\lambda_1|((b_1+z)-(a_1+z)) + \ldots + |\lambda_n|((b_n+z)-(a_n+z)) \\ &= |\lambda_1|(b_1-a_1) + \ldots + |\lambda_n|(b_n-a_n) \\ &= \int |f_e|.\end{aligned}$$

Entonces, probaremos la propiedad deseada en el caso de funciones escalonadas: Notemos que

$$\begin{aligned}\tau_z f_e(x) - f_e(x) &= \lambda_1 \cdot \mathbf{1}_{[a_1+z,b_1+z)}(x) + \ldots + \lambda_n \cdot \mathbf{1}_{[a_n+z,b_n+z)}(x) - \big(\lambda_1 \cdot \mathbf{1}_{[a_1,b_1)}(x) + \ldots + \lambda_n \cdot \mathbf{1}_{[a_n,b_n)}(x)\big) \\ &= \lambda_1(\mathbf{1}_{[a_1+z,b_1+z)}(x) - \mathbf{1}_{[a_1,b_1)}(x)) + \ldots + \lambda_n(\mathbf{1}_{[a_n+z,b_n+z)}(x) - \mathbf{1}_{[a_n,b_n)}(x)) \\ &= \lambda_1(\mathbf{1}_{[a_1,a_1+z)}(x) + \mathbf{1}_{[b_1,b_1+z)}(x)) + \ldots + \lambda_n(\mathbf{1}_{[a_n,a_n+z)}(x) + \mathbf{1}_{[b_n,b_n+z)}(x))\end{aligned}$$

Por lo tanto, la propiedad se cumple para funciones escalonadas:

$$\begin{aligned}&\lim_{z\to 0} \int |\tau_z f_e - f_e| \\ &= \lim_{z\to 0} \{|\lambda_1|((a_1+z-a_1) + (b_1+z-b_1)) + \ldots + |\lambda_1|((a_n+z-a_n) + (b_n+z-b_n))\} \\ &= \lim_{z\to 0} (|\lambda_1| + \ldots + |\lambda_n|)(2z) = 0.\end{aligned}$$

Finalmente, probemos el caso general cuando $f \in L^1(\mathbb{R})$. Tomando una descomposición ad-hoc $f \simeq \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ donde cada f_n es una función escalonada, recordemos la hipótesis $\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| < \infty$ lo que implica que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ de modo que

$$\sum_{n=N_\varepsilon+1}^{\infty} \int |f_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Entonces, para ese valor de $N = N_\varepsilon$ tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}\int |\tau_z f - f| &= \int \left|\sum_{n=1}^{\infty} \tau_z f_n - \sum_{n=1}^{\infty} f_n\right| \\ &\leq \int \left|\sum_{n=1}^{N} \tau_z f_n - \sum_{n=1}^{N} f_n\right| + \sum_{n=N+1}^{\infty} \int |\tau_z f_n| + \sum_{n=N+1}^{\infty} \int |f_n| \\ &\leq \int \left|\sum_{n=1}^{N} \tau_z f_n - \sum_{n=1}^{N} f_n\right| + 2\sum_{n=N+1}^{\infty} \int |f_n| \\ &\leq \int \left|\tau_z\left(\sum_{n=1}^{N} f_n\right) - \sum_{n=1}^{N} f_n\right| + \varepsilon\end{aligned}$$

donde en la tercera línea utilizamos la caracterización de la integral $\int |\tau_z f_n|$ probada anteriormente. Para finalizar, observemos que $f_\star := \sum_{n=1}^{N} f_n$ es una función escalonada, lo que significa que el límite $\lim_{z\to 0} \int |\tau_z f_\star - f_\star| = 0$. Tomando el límite cuando $z \to 0$ en la expresión anterior, concluimos que

$$\lim_{z\to 0} \int |\tau_z f - f| \leq 0 + \varepsilon$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitario, se concluye la propiedad deseada.

P6. Sean f y g funciones localmente integrables. Si g es acotada sobre todo intevalo $[a, b]$, donde $-\infty < a < b < \infty$, entonces pruebe que el producto fg es una función localmente integrable.

Solución: Sea $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo (finito) arbitrario. Entonces por definición

$$\int_a^b f = \int f\mathbf{1}_{[a,b]} < \infty \quad \text{y} \quad \int_a^b g = \int g\mathbf{1}_{[a,b]} < \infty$$

Consideremos la descomposición en $L^1(\mathbb{R})$ para $f\mathbf{1}_{[a,b]} \simeq \sum_{n=1}^{\infty} f_n$, donde cada f_n es una función escalonada con soporte contenido en $[a, b]$. Mostraremos que

$$(f\mathbf{1}_{[a,b]})(g\mathbf{1}_{[a,b]}) \simeq \sum_{n=1}^{\infty}(f_n \cdot g)$$

En efecto, primero veamos que $\{f_n \cdot g\}_n$ son uniformemente integrables. Como $g(x)$ es acotada en $[a, b]$, existe una constante $M_{a,b} > 0$ tal que $\sup_{x\in[a,b)} g(x) < M_{a,b}$ y entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n \cdot g| < \sum_{n=1}^{\infty} \int M_{a,b}|f_n| = M_{a,b}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n|\right) < \infty$$

Además, si $x \in \mathbb{R}$ es tal que $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)g(x)| < \infty$ entonces, o bien $g(x) = 0$ o $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| < \infty$. En cualquier caso, se tiene que $(f(x)\mathbf{1}_{[a,b]})(g(x)\mathbf{1}_{[a,b]}) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)g(x)$ para ese valor de $x \in \mathbb{R}$, lo que muestra que $(f\mathbf{1}_{[a,b]})(g\mathbf{1}_{[a,b]}) = (fg\mathbf{1}_{[a,b]}) \in L^1(\mathbb{R})$.