Gabriel Eduardo Salvador Díaz Vásquez / 21.123.354-0

Universidad de O'Higgins

Escuela de Ingeniería
Semestre Primavera 2022

TAREA CAPITULO 2 Y CAPITULO 3
MMD2002 - ANÁLISIS PARA CIENCIAS DE DATOS

ANDRÉS ZÚÑIGA

P1. Dado $N \geq 1$ fijo, pruebe la siguiente convergencia de normas en el espacio producto $\mathbb{F}^N$

$$\lim_{p\to\infty} \|z\|_p = \|z\|_\infty, \quad \forall z \in \mathbb{F}^N$$

donde para $p \in [1,\infty)$, $\|z\|_p = (\sum_{i=1}^N |z_i|^p)^{1/p}$ denota la norma p, y $\|z\|_\infty = \max\{|z_i| : i = 1,\ldots,N\}$ denota la norma infinito.

P2. Dados $a < b$, considere el espacio $E := C([a,b];\mathbb{R})$ de funciones continuas, y las asignaciones

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}, \quad \|f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

a) Muestre que $\|f\|_2$ y $\|f\|_\infty$ son normas en E.

b) Pruebe que para todo $f \in E$, $\|f\|_2 \leq \sqrt{b-a}\|f\|_\infty$.

c) Muestre que $\|\cdot\|_\infty$ y $\|\cdot\|_2$ no son equivalentes.

Hint: Para *b*), puede utilizar sin demostración la desigualdad de Hölder en $L^2(\mathbb{R})$ la cual dice que

$$\int_a^b |f(x)\cdot g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right)^{1/2}.$$

P3. Dados $a, b \in \mathbb{Q}$, denote por $[a,b)_\mathbb{Q}$ el intervalo de racionales $\{x \in \mathbb{Q} : a \leq x < b\}$. Pruebe que $\forall \varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, existen intervalos racionales $[a_n, b_n)_\mathbb{Q}$ tales que

$$[0,1)_\mathbb{Q} \subset \bigcup_{n=1}^\infty [a_n, b_n)_\mathbb{Q} \quad \text{con} \quad \sum_{n=1}^\infty (b_n - a_n) < \varepsilon$$

Hint: Escriba $[0,1)_\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, q_3, \ldots\}$ y considere $a_n = q_n$, $b_n = q_n + \varepsilon/2^{n+1}$. Redefina a_n y b_n en caso de ser necesario.

P4. *a*) Suponga que $f_n \to f$ en $L^1(\mathbb{R})$, que $g_n \to g$ en $L^1(\mathbb{R})$, y que $\lambda \in \mathbb{R}$. Muestre que $f_n + \lambda g_n \to f + \lambda g$ en $L^1(\mathbb{R})$. Más aún, muestre que $|f_n| \to |f|$ en $L^1(\mathbb{R})$.

b) Si $f \simeq \sum_{n=1}^\infty f_n$ para $f \in L^1(\mathbb{R})$, muestre entonces que $\sum_{n=1}^N f_n \to f$ en $L^1(\mathbb{R})$, cuando $N \to \infty$.

P5. Pruebe que para toda $f \in L^1(\mathbb{R})$ se tiene que

$$\lim_{z\to 0} \int |\tau_z f - f| = 0.$$

Aquí, τ_z denota el operador de traslación en z, definido por $\tau_z f(x) = f(x-z)$.

Hint: Inicie probando la propiedad cuando f es una función escalonada. Además, estudie cómo reducir la integral $\int |\tau_z f_n|$ en el caso de funciones escalonadas.

P6. Sean f y g funciones localmente integrables. Si g es acotada sobre todo intevalo $[a,b]$, donde $-\infty < a < b < \infty$, entonces pruebe que el producto fg es una función localmente integrable.

Date: 10 de noviembre, 2022.

P1. Dado $N \geq 1$ fijo, pruebe la siguiente convergencia de normas en el espacio producto $\mathbb{F}^N$

$$\lim_{p\to\infty} \|z\|_p = \|z\|_\infty, \quad \forall z \in \mathbb{F}^N$$

donde para $p \in [1,\infty)$, $\|z\|_p = (\sum_{i=1}^N |z_i|^p)^{1/p}$ denota la norma p, y $\|z\|_\infty = \max\{|z_i| : i = 1,\dots,N\}$ denota la norma infinito.

pdq, $\lim_{p\to\infty} \|z\|_p = \|z\|_p \quad \forall z \in \mathbb{F}^n$

donde; $\|z\|_p = \left[\sum_{i=1}^{N} |z_i|^p\right]^{1/p} \Rightarrow \|z\|_p = \left[|z_1|^p + |z_2|^p + \dots + |z_N|^p\right]^{\frac{1}{p}}$

$\|z\|_\infty = \max\{|z_i| : i = 1, \dots, N\} = \sigma$ "elemento más grande del conjunto."

- $\sigma \in \{|z_i| : i = 1, \dots, N\}$ pertenece al conjunto.
- $\forall z_i \in \sigma$ se cumple $z_i \leq \sigma$ cota superior.

Entonces, nos dice el límite de la norma p debe ser igual al elemento más grande de la norma infinito.

$$\Rightarrow \lim_{p\to\infty} \left[\sum_{i=1}^{N} |z_i|^p\right]^{1/p} = \max\{|z_i| : i = 1, \dots, N\} = \sigma$$

$$\Rightarrow \|z\|_p = \left[\sum_{i=1}^{N} |z_i|^p\right]^{1/p} \cdot \frac{|\sigma_i|}{|\sigma_i|} = |\sigma_i| \cdot \left[\sum_{i=1}^{N} \frac{|z_i|^p}{|\sigma_i|^p}\right]^{1/p}$$

Sabemos que $i: 1, \dots, N \Rightarrow |z_i| \leq |\sigma_i| \;\; / \cdot \frac{1}{|\sigma_i|} ; |\sigma_i| > 0$

$\max\{|z_i| ; i: 1, \dots, N\}$

$$\frac{|z_i|}{|\sigma_i|} \leq 1 \qquad (\star)$$

lo que nos dice que $|z_i|$ es menor o igual al elemento más grande del conjunto $|\sigma_i|$.

$$\Rightarrow \lim_{p\to\infty}\left(|\sigma_i|\cdot\left[\sum_{j=1}^{N}\frac{|z_i|^p}{|\sigma_i|^p}\right]^{1/p}\right) = |\sigma_i|\cdot\lim_{p\to\infty}\cancel{\left(\left[\sum_{j=1}^{N}\frac{|z_i|^p}{|\sigma_i|^p}\right]^{1/p}\right)}^{\,1\ (\star)}$$

$$\boxed{\left(\frac{z_i}{\sigma_i}\right)^p \leq 1^p = 1}$$

$$= |\sigma_i|\cdot 1 = |\sigma_i| = \|z\|_\infty$$

$\Rightarrow$ Luego del respectivo desarrollo donde multiplicamos por $|\sigma_i/\sigma_i|$ y aplicamos el límite de $p\to\infty$ llegamos a que

$$\boxed{\lim_{p\to\infty}\|z\|_p} = \lim_{p\to\infty}\left(|\sigma_i|\cdot\left[\sum_{j=1}^{N}\frac{|z_i|^p}{|\sigma_i|^p}\right]^{1/p}\right) = |\sigma_i|\cdot 1 = |\sigma_i| = \boxed{\|z\|_\infty}$$

$\boxed{//}$

continuas

P2. Dados $a < b$, considere el espacio $E := C([a, b]; \mathbb{R})$ de funciones continuas, y las asignaciones

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}, \quad \|f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

a) Muestre que $\|f\|_2$ y $\|f\|_\infty$ son normas en E.

b) Pruebe que para todo $f \in E$, $\|f\|_2 \leq \sqrt{b-a}\|f\|_\infty$.

c) Muestre que $\|\cdot\|_\infty$ y $\|\cdot\|_2$ no son equivalentes.

Hint: Para *b*), puede utilizar sin demostración la desigualdad de Hölder en $L^2(\mathbb{R})$ la cual dice que

$$\int_a^b |f(x)\cdot g(x)| dx \leq \underbrace{\left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}}_{\|f\|_2\cdot} \underbrace{\left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right)^{1/2}}_{\|g\|_2}. \Big\} \Rightarrow \frac{\int_a^b |f(x)\cdot g(x)|\,dx}{\|g\|_2} \leq \|f\|_2$$

a) Sabemos que $a < b$

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} \qquad \|f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

pdq] i) $\|f\|_2$ es norma.

ii) $\|f\|_\infty$ es norma.

Para esto usaremos las propiedades de norma:

Una función $x \longrightarrow \|x\|$ es una norma si:

a) $\|x\| = 0 \iff x = 0$

b) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{F}, \forall x \in E$

c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in E$

↳ Desigualdad triángular.

i) $\|f\|_2$ es norma. y $\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$

a) $\|f\|_2 = 0 \iff f = 0$

$b > a$
$b - a > 0$

$(\Rightarrow)$ $\|f\|_2 = 0 \Rightarrow f = 0$

$(\star)$

$$\Rightarrow \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} = 0 \quad / ( )^2$$

$$\Rightarrow \int_a^b |f(x)|^2 dx = 0$$

Tomaremos 2 casos: $\underset{\text{puntual}}{f(x_0)} \neq 0$

caso 1: $f(x_0) > 0$

caso 2: $f(x_0) < 0$

<u>caso 1</u>: Entonces $f(x_0) > 0$: $\int_a^b |f(x_0)|^2 dx$ debe existir un intervalo (a,b) donde

$$\int_a^b |f(x_0)|^2 dx \Rightarrow TFC \Rightarrow f(x_0)^2 \cdot x \Big|_a^b = f(x_0)^2 \cdot (b-a) \ (\bar{\star})$$

Donde $(\bar{\star}) = 0 \iff f(x_0)^2 \cdot (b-a) = 0 \quad / \frac{1}{b-a}, [b > a]$

$$\Rightarrow f(x_0)^2 = 0 \quad / ( )^{1/2} \Rightarrow \boxed{f(x_0) = 0}$$

<u>Caso 2</u>: $f(x_0) < 0$: $\int_a^b |f(x_0)|^2 dx$

Análogamente

$$\Rightarrow \int_a^b |f(x_0)|^2 dx \overset{+FC}{\Rightarrow} (f(x_0))^2 (b-a) = 0 \Rightarrow (f(x_0))^2 = 0 \Rightarrow \boxed{f(x_0) = 0}$$

$$\therefore f = 0 \ //$$

$\Leftarrow]$ Si; $f=0 \Rightarrow \|f\|_2 = 0$

$$\Rightarrow \left(\int_a^b |f(x)|^2\,dx\right)^{1/2} = 0 \quad \Big\}\ \text{con } f=0$$

$$0^2 \cdot \int_a^b 1\,dx = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0_{//}$$

b) $\|\lambda \cdot f\|_2 = |\lambda| \cdot \|f\|_2 \qquad \lambda \in \mathbb{F}$ cte.

$$\Rightarrow \left(\int_a^b |\lambda \cdot f(x)|^2\,dx\right)^{1/2} = \left(\int_a^b |\lambda|^2 \cdot |f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$$

$$= \left(|\lambda|^2 \int_a^b |f(x)|\,dx\right)^{1/2} = |\lambda| \cdot \left(\int_a^b |f(x)|^2\,dx\right)^{1/2} = |\lambda| \cdot \|f\|_2$$

c) $\|f+g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2 \qquad$ Sea $f, g \in E$.

$\Rightarrow$ Elevamos $(\ )^2$:

$$\boxed{[\|f+g\|_2]^2} = \left[\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^2\,dx\right)^{1/2}\right]^2$$

$(\star)$

$$= \int_a^b |f(x)+g(x)|^2\,dx = \int_a^b f(x)^2 + 2f(x)\cdot g(x) + g(x)^2\,dx$$

<u>Por linealidad</u>: $\displaystyle\int_a^b f(x)^2\,dx + 2\underbrace{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}_{\text{Des. Hölder}} + \int_a^b g(x)^2\,dx$

$$\leq \int_a^b f(x)^2 dx + 2\left[\int_a^b |f(x)|^2\right]^{1/2} \cdot \left[\int_a^b |g(x)|^2 dx\right]^{1/2} + \int_a^b g(x)^2 dx$$

Si vemos desde fuera podemos notar que la ecuación es de la forma, "primero al cuadrado más el doble del primer término por el segundo término más el segundo al cuadrado", que es la def. de cuadrado de binomio.

$$\Rightarrow [\|f+g\|_2]^2 \leq \Big[\underbrace{\left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}}_{\|f\|_2} + \underbrace{\left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right)^{1/2}}_{\|g\|_2} \Big]^2$$

Elevamos $(\ )^{1/2}$:

$$\|f+g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$$

$\therefore$ $\|f\|_2$ es norma.

$\blacksquare$

ii) $\|f\|_\infty$ es norma y $\|f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$

a) $\|f\|_\infty = 0 \iff f = 0$

$\Rightarrow$] $\|f\|_\infty = 0 \Rightarrow f = 0$

$= \max_{x\in[a,b]} |f(x)| = 0$ entonces f solo puede ser $= 0$.

Por definición el máx de un conjunto es el elemento con mayor valor del conjunto, Sabemos que es positivo por el valor absoluto y:

$$b > a \quad y \quad b - a > 0$$

Entonces sea cual sea $f(x)$ en $[a,b]$ siempre será distinto de cero salvo el caso de que $f = 0$.

$$\max_{x\in[a,b]} |0| = 0$$

$\boxed{//}$

$\Leftarrow$] $f = 0 \Rightarrow \|f\|_\infty = 0$

Si $f = 0$: $\max_{x\in[a,b]} |0| = 0$ porque el máximo elemento del conjunto $[a,b]$ y la función cero es igual a cero.

b) $\|\lambda \cdot f\|_\infty = |\lambda| \, \|f\|_\infty \quad \forall \lambda \in \mathbb{F}$ cte.

$\Rightarrow$

$|\lambda| \cdot \|f\|_\infty$

Sabemos λ es cte por lo que solo amplifica el máx.

$$|\lambda| \cdot \left(\max_{x \in [a,b]} |f(x)| \right) = \left(\max_{x \in [a,b]} |\lambda| \cdot |f(x)| \right)$$

$$= \left(\max_{x \in [a,b]} |\lambda \cdot f(x)| \right) = \|\lambda \cdot f\|_\infty$$

$\boxed{///}$

c) $\|f_1 + f_2\|_\infty \leq \|f_1\|_\infty + \|f_2\|_\infty$ Sean $f_1, f_2 \in E$

$$\max_{x \in [a,b]} |f_1(x) + f_2(x)| \leq \max_{x \in [a,b]} |f_1(x)| + \max_{x \in [a,b]} |f_2(x)|$$

$$\Rightarrow \max_{x \in [a,b]} \left\{ |f_1(x) + f_2(x)| \right\} \leq \max_{x \in [a,b]} \left\{ |f_1(x)| + |f_2(x)| \right\}$$

$$\leq \max_{x \in [a,b]} \left(|f_1(x)| \right) + \max_{x \in [a,b]} \left(|f_2(x)| \right) = \|f_1\|_\infty + \|f_2\|_\infty$$

$\boxed{///}$

$\therefore \|f\|_\infty$ es norma

b) Pruebe que $\forall f \in E, \|f\|_2 \leq \sqrt{b-a} \cdot \|f\|_\infty$

Sea $f(x) \in E$ y $|f(z)| = \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$ } Valor máx en $[a,b]$

Entonces dado la premisa sabemos que:

$f(x) \leq f(z)$ / Aplicamos lo necesario para $\|\cdot\|_2$

$$\Rightarrow \left[\int_a^b |f(x)|^2 dx\right]^{1/2} \leq \left[\int_a^b |f(z)|^2 dx\right]^{1/2}$$

Sabemos que $f(z)$ no depende de x. Y por propiedad:

$$\Rightarrow \underbrace{\left[\int_a^b |f(x)|^2 dx\right]^{1/2}}_{\|} \leq \left[\underbrace{\int_a^b 1\, dx}_{\| \; x|_a^b} \cdot |f(z)|^2\right]^{1/2}$$

$$\Rightarrow \|f\|_2 \leq \left[(b-a) \cdot |f(z)|^2\right]^{1/2}$$

$$\Rightarrow \|f\|_2 \leq \left[(b-a)\right]^{1/2} \cdot |f(z)|$$

Y como dijimos en un inicio $|f(z)| = \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x)| = \|f\|_\infty$

$$\Rightarrow \|f\|_2 \leq \sqrt{b-a} \cdot \|f\|_\infty$$

$\boxed{//}$

c) Muestre que $\|\cdot\|_\infty$ y $\|\cdot\|_2$ no son equivalentes.

R// Para demostrar esto veremos cuando dos normas son equivalentes y debemos llegar a que no lo son (Contradicción).

Dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son equivalentes si $\exists \alpha > 0$ tq:

$$\alpha \|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \qquad \forall x \in E$$

$\Rightarrow$ Por def. ent. $= \sim\left(\exists c > 0 \text{ tq } \forall f \in C([0,1]) : \|f\|_\infty \cdot c \leq \|f\|_2\right)$

luego de usar Morgan

$$\Rightarrow \forall c > 0, \exists f = f_\mu \in C([0,1]) : \|f\|_\infty \cdot \mu > \|f_\mu\|_2$$

lo que nos dice que $\exists \mu$ tq es mayor que $\|f_\mu\|_2 \div \|f\|_\infty$ $\left\{ \mu > \dfrac{\|f_\mu\|_2}{\|f\|_\infty} \right.$

Basta con construir $\{f_n\} \subset C([0,1])$ tq:

$$\|f_n\|_\infty = 1 \quad \forall n \in E \;, \quad \lim_{n \to \infty} \|f_n\|_2 = 0 \quad \Big\} (i)$$

$\|f_n\|_\infty > \|f_n\|_2$

$$\Rightarrow 0 \leq c \leq \frac{\|f_n\|_2}{\|f_n\|_\infty} \longrightarrow 0 \quad \Big\} \text{con la construcción de } (i)$$

$\therefore c = 0$ lo que es contradicción

debido a que habíamos definido $c > 0$.

$\boxed{/\!/}$

P3. Dados $a, b \in \mathbb{Q}$, denote por $[a,b)_{\mathbb{Q}}$ el intervalo de racionales $\{x \in \mathbb{Q} : a \leq x < b\}$. Pruebe que $\forall \varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, existen intervalos racionales $[a_n, b_n)_{\mathbb{Q}}$ tales que

$$[0,1)_{\mathbb{Q}} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n)_{\mathbb{Q}} \quad \text{con} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) < \varepsilon$$

Hint: Escriba $[0,1)_{\mathbb{Q}} = \{q_1, q_2, q_3, \ldots\}$ y considere $a_n = q_n$, $b_n = q_n + \varepsilon/2^{n+1}$. Redefina a_n y b_n en caso de ser necesario.

$a, b \in \mathbb{Q}$, $[a,b) := \{x \in \mathbb{Q} : a \leq x < b\}$

Pruebe que $\forall \varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, $\exists [a_n, b_n)_{\mathbb{Q}}$ tq:

$$\underbrace{[0,1)_{\mathbb{Q}} \subset}_{\text{Sub-conjunto}} \underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty}}_{\text{Unión infinita}} [a_n, b_n)_{\mathbb{Q}} \quad \text{con} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) < \varepsilon$$

hint: $[0,1)_{\mathbb{Q}} = \{q_1, q_2, q_3, \ldots\}$

$a_n = q_n$, $b_n = q_n + \dfrac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ Redefinir a_n y b_n si es necesario.

$$[0,1)_{\mathbb{Q}} := \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x < 1\} = \{q_1, q_2, q_3, \ldots\}$$

$$[a_n, b_n)_{\mathbb{Q}} := \left[q_n, q_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right)_{\mathbb{Q}} = \left\{x \in \mathbb{Q} : q_n \leq x < q_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right\}$$

$$\Rightarrow \{q_1, q_2, \ldots\} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x \in \mathbb{Q} : q_n \leq x < q_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right\} \text{con} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) < \varepsilon\right)$$

Donde,
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(q_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right) - (q_n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right) = \frac{\varepsilon}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\right)$$

$$= \frac{\varepsilon}{2}\left[\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{2^n}\right)\right] = \frac{\varepsilon}{2}\left[\lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{2}\right)^i - 1\right)\right]$$

$$= \frac{\varepsilon}{2}\left[\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1-(1/2)^N}{1-(1/2)}\right)\right] \overset{N\to\infty}{\overset{!}{=}} \frac{\varepsilon}{2}\left[\frac{1-0}{1-(1/2)} - 1\right] = \frac{\varepsilon}{2}\cdot(2-1) = \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Lo que hacemos es: $\int \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} = 0$ "medida cero"

$$0 \leq \int \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \leq \int \sum_{n=1}^{\infty} 1\cdot \mathbb{1}_{[q_n, q_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}})} = \sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) < \varepsilon \quad [\star]$$

Y como ε es arbitrario podemos tomar el

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon = 0$$

$$\Rightarrow [\star]: \ 0 \leq \int \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \leq 0 \quad \therefore \int \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} = 0$$

Lo que nos dice el problema es si tenemos num. racionales podemos cubrirlos con intervalos (ε) arbitrariamente pequeños.

Lo que se nos cumple al llegar a $\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

$\boxed{///}$

P4. *a)* Suponga que $f_n \to f$ en $L^1(\mathbb{R})$, que $g_n \to g$ en $L^1(\mathbb{R})$, y que $\lambda \in \mathbb{R}$. Muestre que $f_n + \lambda g_n \to f + \lambda g$ en $L^1(\mathbb{R})$. Más aún, muestre que $|f_n| \to |f|$ en $L^1(\mathbb{R})$.

b) Si $f \simeq \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ para $f \in L^1(\mathbb{R})$, muestre entonces que $\sum_{n=1}^{N} f_n \to f$ en $L^1(\mathbb{R})$, cuando $N \to \infty$. N fijo

a) $f_n \xrightarrow{\text{convergencia en } L^1(\mathbb{R})} f \;/\; g_n \longrightarrow g \;/\; \lambda \in \mathbb{R}$

pdq] $f_n + \lambda g_n \longrightarrow f + \lambda g$ en $L^1(\mathbb{R})$ (i) y

$|f_n| \longrightarrow |f|$ en $L^1(\mathbb{R})$ (ii)

Entonces, nosotros sabemos que si $f \in (L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$ es un e.v. completo:

$$f_n \xrightarrow[n]{} f \text{ en } L^1(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \|f_n - f\| = \int |f_n - f| \xrightarrow[n]{} 0$$

Sabemos que la convergencia en L^1 es un Banach donde se caracteriza por la norma.

$$\|f_n + \lambda g_n - (f + \lambda g)\|_1 \longrightarrow 0 \quad \text{por def.}$$

$$\int |f_n + \lambda g_n - (f + \lambda g)| \leq \int |f_n| + |\lambda| \int |g_n| - \int |f| - |\lambda| \int |g| \quad (\star)$$

$$(\star) = \int |f_n| - \int |f| + |\lambda| \left[\int |g_n| - \int |g| \right]$$

$$= \int |f_n| - |f| + |\lambda| \int |g_n| - |g|$$

[Donde por enunciado $\|f_n - f\| \to 0$ y $\|g_n - g\| \to 0$]

$$(\star) \leq \underbrace{\int |f_n - f| + |\lambda| \int |g_n - g|}_{} \quad (\star\star)$$

Donde esto es por def

$(\star\star) = f + \lambda g$ cuando $\int |\cdot| \xrightarrow[n]{} 0$

(i) $\boxed{''}$

$|f_n| \longrightarrow |f|$ en $L^1(\mathbb{R})$

$\Rightarrow$ Al igual que en el paso anterior

$\| |f_n| - |f| \|_1 \longrightarrow 0 \iff \int | |f_n - f| | \xrightarrow[n]{} 0$

$\Rightarrow \int | |f_n| - |f| | \geq \int |(|f_n|)| - |(|f|)| \ (\alpha)$

Donde en (α) sabemos que el valor absoluto del valor absoluto es el valor absoluto.

$\Rightarrow (\alpha) = \int |f_n| - |f| \Rightarrow |f_n| \longrightarrow |f|$

b) $f \simeq \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ para $f \in L^1(\mathbb{R})$, muestre que

$\sum_{n=1}^{N} f_n \longrightarrow f$ en $L^1(\mathbb{R})$ cuando $N \to \infty$ (N fijo)

R// La convergencia en L^1 es un espacio de Banach, donde la convergencia se caracteriza por la norma.

$\Rightarrow$ Entonces por definición:

$$\left\| f - \sum_{n=1}^{N} f_n \right\|_1 \longrightarrow 0$$

Ahora por def $\|\cdot\|_1$: Sea N fijo.

"integral de Lebesgue"

$\Rightarrow \int \left| f - \sum_{n=1}^{N} f_n \right|$ "Nosotros sabemos que $f \simeq \sum_{n=1}^{\infty} f_n$"

$$\Rightarrow \int \left| \left[\lim_{M\to\infty} \sum_{n=1}^{M} f_n \right] - \left[\sum_{n=1}^{N} f_n \right] \right|$$

$$\Rightarrow \int \left| \lim_{M\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{M} f_n - \sum_{n=1}^{N} f_n \right) \right|$$ "Sabemos que $M > N$ y estamos restando N"

$$\Rightarrow \underbrace{\int \left| \lim_{M\to\infty} \sum_{n=N+1}^{M} f_n \right| \leq \limsup_{M\to\infty} \sum_{n=N+1}^{M} \int |f_n|}_{\text{el módulo de la suma es menor que la suma de los módulos.}} \quad (\star)$$

"el más grande de los límites."

Y nosotros sabemos que (☆) es arbitrariamente pequeño por nuestras hipótesis (a) y (b):

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| < +\infty$$

$$(b) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \ : \ \forall x \in \left\{ y : \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(y)| < +\infty \right\}$$

(☆)

$$\Rightarrow \limsup_{M \to \infty} \sum_{n=N+1}^{M} \int |f_n| < \varepsilon$$

por (a) si las sumas converge las colas tienen que irse a cero cuando $N \to \infty$.

$\Rightarrow$ Dado $\varepsilon > 0$, escoger $N(\varepsilon)$ tq $\displaystyle\sum_{n=N(\varepsilon)+1}^{\infty} \int |f_n| < \varepsilon$

Entonces cuando $N \to \infty$ "ε" cada vez será más pequeño y si tiramos límite $\varepsilon \to 0^+$.

$$\therefore 0 \leq \lim_{N \to \infty} \int \left| f - \sum_{n=1}^{N} f_n \right| \leq \lim_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon = 0$$

$$0 \leq \lim_{N \to \infty} \int \left| f - \sum_{n=1}^{N} f_n \right| \leq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{N \to \infty} \int \left| f - \sum_{n=1}^{N} f_n \right| = 0$$

$$\Rightarrow \left\| f - \sum_{n=1}^{N} f_n \right\| \to 0$$

$\boxed{///}$

P5. Pruebe que para toda $f \in L^1(\mathbb{R})$ se tiene que

$$\lim_{z \to 0} \int |\tau_z f - f| = 0.$$

Aquí, τ_z denota el operador de traslación en z, definido por $\tau_z f(x) = f(x - z)$.

Hint: Inicie probando la propiedad cuando f es una función escalonada. Además, estudie cómo reducir la integral $\int |\tau_z f_n|$ en el caso de funciones escalonadas.

$\mathbb{1}$ = característica

(Hint pt 1)

La característica sería: $\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$

y la función escalonada = Sea $f(x)$ cualesquiera:
(en representación básica)

$$\boxed{f(x) = \alpha_1 \cdot \mathbb{1}_{[a_1,b_1)}(x) + \alpha_2 \cdot \mathbb{1}_{[a_2,b_2)}(x) + \dots + \alpha_n \mathbb{1}_{[a_n,b_n)}(x)}$$

donde es importante destacar que:

$$\left.\begin{matrix}[a_i, b_i) \cap [a_j, b_j) = \emptyset \\ i \neq j\end{matrix}\right\} \text{son disjuntos.}$$

En el enunciado nos dicen que $\boxed{\tau_z f(x) = f(x - z)}$

$$\Rightarrow \tau_z f(x) = \alpha_1 \mathbb{1}_{[a_1,b_1)}(x - z) + \alpha_2 \mathbb{1}_{[a_2,b_2)}(x - z) + \dots + \alpha_n \mathbb{1}_{[a_n,b_n)}(x - z) \quad (\star)$$

Por def. de función escalonada:

$$\mathbb{1}_{[a_j,b_j)}(x - z) = 1 \iff a_j \leq (x - z) < b_j \quad / + z$$

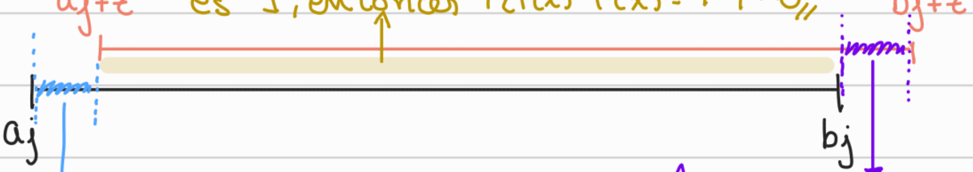
$$\iff a_j + z \leq x < b_j + z \iff \mathbb{1}_{[a_j+z,\, b_j+z)}(x) = 1$$

$$\Rightarrow (\star) = \tau_\varepsilon f(x) = \alpha_1 \mathbb{1}_{[a_1+\varepsilon, b_1+\varepsilon)}(x) + \alpha_2 \mathbb{1}_{[a_2+\varepsilon, b_2+\varepsilon)}(x) + \dots + \alpha_n \mathbb{1}_{[a_n+\varepsilon, b_n+\varepsilon)}(x)$$

$$\Rightarrow \left(\tau_\varepsilon f(x) - f(x)\right) = \alpha_1 \left(\mathbb{1}_{[a_1+\varepsilon, b_1+\varepsilon)}(x) - \mathbb{1}_{[a_1, b_1)}(x) \right) + \dots + \alpha_n \left(\mathbb{1}_{[a_n+\varepsilon, b_n+\varepsilon)}(x) - \mathbb{1}_{[a_n, b_n)}(x) \right)$$

Podemos simplificar el análisis al verlo de manera gráfica: (Asumimos ε pequeño >0)

Aquí la característica de ambos es 1, entonces $\tau_\varepsilon f(x) - f(x) = 1 - 1 = 0$



Aquí la característica ($\mathbb{1}$) de $f(x)$ vale 1 y $\tau_\varepsilon f(x)$ (la translación) vale 0, entonces: $\tau_\varepsilon f(x) - f(x) = 0 - 1 = -1$

Aquí es al revés $\tau_\varepsilon f(x) = 1$ y $f(x) = 0$, entonces $\tau_\varepsilon f(x) - f(x) = 1 - 0 = 1$

Con lo anterior logramos ver que los intervalos son disjuntos:

$$\text{Entonces, } \left(\tau_\varepsilon f(x) - f(x)\right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left(\mathbb{1}_{[b_j, b_j+\varepsilon)}(x) - \mathbb{1}_{[a_j, a_j+\varepsilon)}(x) \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbb{1}_{[b_j, b_j+\varepsilon)}(x) + \sum_{j=1}^{n} -\alpha_j \mathbb{1}_{[a_j, a_j+\varepsilon)}(x)$$

Y ahora al tener los intervalos disjuntos conocemos su representación básica, junto a ello podemos calcular su integral de Lebesgue:

$$\int |\tau_\varepsilon f - f| = \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j| \cdot \left[(\cancel{b_j} + \varepsilon - \cancel{b_j}) + (\cancel{a_j} + \varepsilon - \cancel{a_j})\right]$$

$$= 2\varepsilon \left[\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|\right] \text{ "y tomamos } \lim_{\varepsilon \to 0}\text{"}$$

$$= 0.$$

(Hint pt2) Reducir la integral $\int |\tau_\varepsilon f_n|$

Entonces: Por def.

$$\int |\tau_\varepsilon f| = |\alpha_1| \left[(b_1 + \cancel{\varepsilon}) - (a_1 + \cancel{\varepsilon})\right] + |\alpha_2| \left[(b_2 + \cancel{\varepsilon}) - (a_2 + \cancel{\varepsilon})\right] + \dots$$
$$+ |\alpha_n| \left[(b_n + \cancel{\varepsilon}) - (a_n + \cancel{\varepsilon})\right]$$

$$= |\alpha_1| [b_1 - a_1] + |\alpha_2| [b_2 - a_2] + \dots + |\alpha_n| [b_n - a_n]$$

$$= \int |f| \rightarrow$$ def de integral de $|f|$ L^1 sin translación.

Hasta ahí quedan desarrollados los 2 hints.

Ahora pdq: $\lim_{\varepsilon \to 0} \int |\tau_\varepsilon f - f| = 0$

Sabemos que $f \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow f \simeq \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ [f_n escalonada]

$$\Rightarrow \int |\tau_\varepsilon f - f| = \int \left|\tau_\varepsilon \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) - \sum_{n=1}^{\infty} f_n\right|$$

$$= \int \left| \sum_{n=1}^{\infty} \tau_z f_n - \sum_{n=1}^{\infty} f_n \right|$$ "Separamos en cant finita de términos"

Des. triangular → Suma finita

$$\le \underbrace{\int \left| \sum_{n=1}^{N} \tau_z f - \sum_{n=1}^{N} f_n \right|}_{(i)} + \int \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \tau_z f + \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n \right| \quad (ii)$$

• llamemos $\phi = \sum_{n=1}^{N} f_n$ con ϕ sigue siendo escalonada.

$$= \int |\tau_z \phi - \phi|$$ cuando $z \to 0$ la integral es $= 0$ (Hint 1)"

$$\Rightarrow \le (i) = 0 + \sum_{n=N+1}^{\infty} \int |\tau_z f_n| + \sum_{n=N+1}^{\infty} \int |f_n|$$

y por el hint 2: $\int |\tau_z f_n| = \int |f_n|$

$$\Rightarrow \le 0 + 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \int |f_n|$$

$$\le 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \int |f_n|$$ Donde por hipótesis (a) $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| < +\infty$

$$\Rightarrow \le 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \int |f_n| < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2}$$ → "Arbitrariamente pequeña"

$$\Longrightarrow 0 \le \lim_{z \to 0} \int |\tau_z f_n - f| \le \underbrace{\lim_{z \to 0} \int |\tau_z \phi - \phi|}_{0} + \varepsilon = \varepsilon$$

y sabemos que ε es un término libre, $\varepsilon \to 0$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{z \to 0} \int |\tau_z f_n - f| \leq 0$$

$$\therefore \lim_{z \to 0} \int |\tau_z f_n - f| = 0$$

$\boxed{/\!/\!/}$

Lebesgue

P6. Sean f y g funciones localmente integrables. Si g es acotada sobre todo intevalo $[a, b]$, donde $-\infty < a < b < \infty$, entonces pruebe que el producto fg es una función localmente integrable.

R// f y g localmente integrables se refiere a

f loc. integrable $\left(f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})\right)$:

Def.

$$\Leftrightarrow \int_a^b |f| = \int |f| \cdot \mathbb{1}_{[a,b]} \underbrace{< +\infty}_{\text{es finita}} \quad \forall [a,b] \text{ finito} \subset \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow |f| \cdot \mathbb{1}_{[a,b]} \in L^1(\mathbb{R}) \quad \forall [a,b] \text{ finito}$$

$(a > -\infty, b > +\infty)$

"Cuando restringimos la función a un intervalo finito es Lebesgue integrable"

$f \cdot g \in L^1_{loc} \Rightarrow$ PDQ. $|f| \cdot |g| \cdot \mathbb{1}_{[a,b]} \in L^1(\mathbb{R}) \quad \forall [a,b]$ finito.

que g sea acotada significa que:

$|g(x)| \leq M_{a,b} \quad \forall x \in [a,b] \Leftrightarrow g$ acotada en $[a,b]$

cte $\in \mathbb{R}$ que depende de a, b. "cte."

$$\Rightarrow \int_a^b |f \cdot g| \leq M_{a,b} \int_a^b |f| < +\infty$$

$$\Rightarrow |f| \cdot |g| \cdot \mathbb{1}_{[a,b]} \in L^1(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \int_a^b |f| \cdot |g| \leq M_{a,b} \int_a^b |f| < +\infty$$

De aquí vemos que $f \cdot g$ en $[a,b]$ es finita.

lo que es propiedad de función loc. integrable.

Ahora, digamos que podemos expresar

$$|f|\cdot|g|\cdot \mathbb{1}_{[a,b]} \simeq \sum_{n}^{\infty} \phi_n = (\phi_1+\phi_2+\dots) \simeq \phi$$

La función ϕ viene a ser $\sum_{n}^{\infty} \phi_n$ que es la representación escalonada localmente integrable del producto $f\cdot g$ en el intervalo $[a,b]$.

$\Rightarrow f \simeq \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ (f en función escalonada

$$\boxed{\therefore\ \phi = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cdot |g| \cdot \mathbb{1}_{[a,b]}}$$

$\square$