TAREA CAPITULO 1
MMD2002 - ANÁLISIS PARA CIENCIA DE DATOS

(1) Demostrar que la intersección finita de s.e.v. es un sub espacio vectorial. ¿Es este resultado válido para cualquier tipo de intersección?

(2) Determinar el valor de verdad de la siguiente proposición: si U_1, U_2 y W son s.e.v. de un espacio vectorial E tales que
$$U_1 + W = U_2 + W,$$
entonces $U_1 = U_2$. ¿Cambia su respuesta si la suma es directa?

(3) Suponga que E es un espacio finito dimensional. Pruebe que si $U_1, \ldots, U_m$ son s.e.v. de E tales que $E = U_1 \oplus \ldots \oplus U_m$, entonces
$$\dim V = \dim U_1 + \ldots + \dim U_m.$$

(4) Encontrar la descomposición en valores singulares para
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

(5) En el presente problema vamos a ver una aplicación de los conceptos de descomposición en valores singulares. En particular, nos interesa analizar alguna de las tantas bases de datos disponibles en el sitio web del INE. Para el análisis se le solicita lo siguiente
   (a) Navegar la página web, diseñar un experimento numérico a partir de la pestaña estadísticas. Una vez decidido el tópico, escribir al profesor para que lo asesore en la comprensión de la BBDD.
   (b) Calcule la matriz de co-varianza asociada a la tabla resultante resultado el paso anterior.
   (c) Aplique la técnica de SVD a la matriz de covarianza anterior, haga un gráfico en dos dimensiones con los dos primeros valores singulares. Haga lo mismo para los primeros 3 valores singulares.
   (d) Interprete los resultados.

Alumno: Gabriel Díaz Vásquez
Rut: 21.123.354-0

(1) Demostrar que la intersección finita de s.e.v. es un sub espacio vectorial. ¿Es este resultado válido para cualquier tipo de intersección?

R// Primero definimos s.e.v.: Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo.

Def: Sea S s.e.v. de $\mathcal{E}$, entonces decimos que S cumple:

i) $0 \in S$.

ii) $\forall u, v \in S$ se tiene que $(u+v) \in S$.

iii) $\forall \lambda \in \mathbb{F}$ (cuerpo) y $u \in S$ se tiene que $\lambda \cdot u \in S$.

Entonces, S es s.e.v. de $\mathcal{E}$.

Sea $W = \{W_1, W_2, \dots, W_k\}$ donde W_i es s.e.v. $\boxed{\forall\, i = 1, \dots, k}$

$W_i \neq \emptyset$

Entonces la intersección finita: $\bigcap_{i \in \{1,\dots,k\}} W_i \quad (1)$

pdq] (1) es s.e.v., llamemos a $(1) = Z$.

$\Rightarrow$ Sabemos que Z es la intersección de los subespacios entonces digamos que existe $\vec{x}$ e $\vec{y}$ perteneciente a Z, por def: $\vec{x} \in \bigcap W_i$ y $\vec{y} \in \bigcap W_i$ osea, que $\vec{x} \in W_i$ y $\vec{y} \in W_i$. $\boxed{\forall i = 1, \dots, k}$

Entonces debemos hacer el análisis para las propiedades.

i) $0 \in Z$: Digamos que $\exists \vec{f} \in Z$ tq $\vec{f}$ es el vector de ceros, entonces $\vec{f} \in W_i, \dots, W_K$ y dado que pertenece a todos:

$\Rightarrow \vec{0}(\vec{f}) \in Z_{//}$

ii) Sea $\vec{x}, \vec{y} \in Z \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in Z$:

Sabemos que $\vec{x} \in Z$ y que $\vec{y} \in Z$ lo que nos dice que $\vec{x}$ e $\vec{y}$ pertenecen a todos W_i, dado que los definimos que pertenecen a la intersección de W_i quienes recordemos son s.e.v.

Entonces: $x \in W_1, W_2, \dots, W_K$
$y \in W_1, W_2, \dots, W_K$

Como $W_1, \dots, W_K$ son s.e.v.:

$$x + y \in W_1, W_2, \dots, W_K$$

$\therefore \vec{x} + \vec{y} \in Z_{//}$

iii) Sea $\lambda \in \mathbb{F}$ y $\vec{x} \in Z \Rightarrow \lambda \cdot \vec{x} \in Z$:

Siguiendo la idea anterior:

Si tengo $\vec{x} \in Z : x \in W_1, W_2, \dots, W_k$

Y dado que $W_1, \dots, W_k$ son s.e.v.: Sea $\lambda \in \mathbb{F}$

Entonces $\lambda\vec{x} \in W_1, \dots, W_k$

$\Rightarrow \lambda\vec{x} \in Z$.

En conclusión, dado que demostramos cada una de las propiedades necesarias para que sea s.e.v.

$$Z = \bigcap_{i \in \{1, \dots, k\}} W_i \quad \text{es un s.e.v.}$$

$\boxed{//}$

¿Este resultado es válido para cualquier tipo de intersección?

R// Debería serlo siempre y cuando cumpla la condición de que sean elementos s.e.v. de un E.v. de lo contrario no siempre se cumplirá.

(2) Determinar el valor de verdad de la siguiente proposición: si U_1, U_2 y W son s.e.v. de un espacio vectorial E tales que

$$U_1 + W = U_2 + W, \quad [\star]$$

entonces $U_1 = U_2$. ¿Cambia su respuesta si la suma es directa?

R// Dado el ejercicio sabemos las propiedades de un s.e.v. (i), (ii), (iii).

Sea $x \in E$ tq $\exists\ v_i \in U_1, y_i \in U_2, z_i \in W$ entonces $x = v_i + y_i + z_i$

Def: Sea $v_i \in U_1, y_i \in U_2, z_i \in W,\ \forall i \in \{1, \dots, n\}$

$$U_1 = v_1 + v_2 + \dots + v_n$$

$$U_2 = y_1 + y_2 + \dots + y_n$$

$$W = z_1 + z_2 + \dots + z_n$$

$$\Rightarrow U_1 + W = (v_1 + v_2 + \dots + v_n) + (z_1 + z_2 + \dots + z_n)$$

reordenando

$$= (v_1 + z_1) + (v_2 + z_2) + \dots + (v_n + z_n) \quad (2)$$

$$U_2 + W = (y_1 + y_2 + \dots + y_n) + (z_1 + z_2 + \dots + z_n)$$

$$= (y_1 + z_1) + (y_2 + z_2) + \dots + (y_n + z_n) \quad (3)$$

$[\star] \Rightarrow U_1 + W = U_2 + W$:

$$(v_1 + v_2 + \dots + v_n) + \cancel{(z_1 + z_2 + \dots + z_n)} = (y_1 + y_2 + \dots + y_n) + \cancel{(z_1 + z_2 + \dots + z_n)}$$

$$\Rightarrow (v_1 + v_2 + \dots + v_n) = (y_1 + y_2 + \dots + y_n)$$

$$U_1 = U_2$$ //

La proposición es Verdadera.

¿Cambia su respuesta si la suma es directa?

R// Como sabemos que sea Suma directa significa que

$$U_1 \oplus W = U_2 \oplus W$$

$U_1 \cap W = \{0\}$ $\quad$ $U_2 \cap W = \{0\}$

es decir, (2) y (3) la única manera de ser = cero:

$$U_1 \oplus W = (v_1 + z_1) + (v_2 + z_2) + \dots + (v_n + z_n)$$

$\hookrightarrow 0 \quad \hookrightarrow 0 \quad \hookrightarrow 0 \quad \hookrightarrow 0$

es decir ... $= v_1 + z_1 = 0,\ v_2 + z_2 = 0, \dots, v_n + z_n = 0$

$= v_1 = -z_1,\ v_2 = -z_2, \dots, v_n = -z_n$

$= -v_1 = z_1,\ -v_2 = z_2, \dots, -v_n = z_n$

$\Rightarrow U_1 \oplus W = (v_1 + (-v_1)) + (v_2 + (-v_2)) + \dots + (v_n + (-v_n))$

$= 0 + 0 + \dots + 0$ //

Analogamente para $U_2 \oplus W$

$\therefore$ queda $0 = 0$ //

(3) Suponga que E es un espacio finito dimensional. Pruebe que si $U_1, \ldots, U_m$ son s.e.v. de E tales que $E = U_1 \oplus \ldots \oplus U_m$, entonces

$$\dim \overset{E}{\blacksquare} = \dim U_1 + \ldots + \dim U_m.$$

R//

Def: Que $U_1, \ldots, U_m$ sean S.e.v. de E nos dice que cumplen i), ii) y iii).

Y que sea

$$E = U_1 \oplus \ldots \oplus U_m$$

nos dice que la descomposición es única y para ser suma directa cumple:

iv) $E = U_1 + \ldots + U_m$

v) La única forma de escribir cero es $y_1 \in U_1, \ldots, y_m \in U_m$ cuando $y_i = 0$ $\forall i \{1, \ldots, m\}$

pdq] $\dim E = \dim U_1 + \ldots + \dim U_m$

Por inducción:

Si sacamos 2 elementos de $E = U_1 \oplus U_2$

Entonces,

$$\dim (U_1 \oplus U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim (U_1 \cap U_2)$$

$$= \dim U_1 + \dim U_2 \quad (1)$$

Como es suma directa $U_1 \cap U_2$ es el 0 por definición.

Digamos que este patrón (1) se repite hasta $m-1$. (2)

Tomamos el caso $U_1 \oplus \dots \oplus U_m$ entonces la única manera de escribir cero es $u_1 + \dots + u_m$ donde cada u_j, $j \in \{1, \dots, m\}$ es $u_j = 0$ y ya dijimos que

$$\dim U_1 \oplus \dots \oplus \dim U_{m-1} = \dim U_1 + \dots + \dim U_{m-1}$$

Sea $W = U_1 \oplus \dots \oplus U_{m-1}$

después $U_1 \oplus \dots \oplus U_m = W + U_m$

Sea: $x = x_1 + \dots + x_{m-1}$ con $x \in W$

$y \in U_m$

Donde cada $x_j \in U_j$

Sabemos de la def. de suma directa que $x_i = 0$, porque la única manera de escribir la suma de cero es que todos sean cero y por enunciado sabemos que U_m también cumple esa propiedad entonces $x + y = 0$

Por eso $W + U_m$ es suma directa.

Y entonces por inducción se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\dim U_1 \oplus \dots \oplus U_m &= \dim (W \oplus U_m) \\
&= \dim W + \dim U_m \\
&= \dim U_1 + \dots + \dim U_{m-1} + \dim U_m
\end{aligned}
$$

$\boxed{//}$

(4) Encontrar la descomposición en valores singulares para

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

3×2 3×2 2×3

R// Para encontrar SVD de A:

$$\boxed{A = U \Sigma V^{T}}$$

$$\left.\begin{array}{l} U \to 3 \times 3 \\ V \to 2 \times 2 \end{array}\right\} \text{ortogonales}$$

$$\Sigma \to 3 \times 2$$

Entonces,

$$M = A^{T} \cdot A = \underset{2 \times 3}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}} \cdot \underset{3 \times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} = \begin{bmatrix} 1+4+0 & 2+0+0 \\ 2+0+0 & 4+0+4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} //$$

Con $\det(M - \lambda I) = 0$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0$$

$$(\lambda - 9)(\lambda - 4) = 0$$

$$\lambda_1 = 9 \quad \lambda_2 = 4 \longrightarrow \text{Valores propios } M.$$

Valores singulares de A: $\sigma_1 = \sqrt{9} = 3$

$$\sigma_2 = \sqrt{4} = 2$$

$$\Rightarrow \Sigma_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} //$$

Para V debemos calular los vectores propios de M que generen una base.

$$\vec{V}_{\lambda_1} = \vec{v}_9 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{V}_{\lambda_2} = \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ahora lo que debemos hacer es bases ortonormales

$$\frac{\vec{v}_9}{\|\vec{v}_9\|} \text{ y } \frac{\vec{v}_4}{\|\vec{v}_4\|} \Rightarrow \|\vec{v}_9\| = \sqrt{5}$$

$$\|\vec{v}_4\| = \sqrt{5}$$

$\Rightarrow$ Base ortonormal $\vec{v}_9 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$

Base ortonormal $\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$

Columnas de Matriz V.

$$V = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \Big\} 2 \times 2$$

Y Ahora nos Falta calcular la matriz U:

$A \cdot A^T$:

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (1+4) & (2+0) & (0+4) \\ (2+0) & (4+0) & (0+0) \\ (0+4) & (0+0) & (0+4) \end{bmatrix}$$

$$(3 \times \boxed{2}) \cdot (\boxed{2} \times 3)$$

$$N = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \Big\} 3 \times 3 \quad //$$

Al igual que hicimos para obtener Σ, primero debemos sacar los valores propios de N con

$$\det(N - \lambda I) = 0$$

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = a \cdot \det \begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} - b \cdot \det \begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix} + c \cdot \det \begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & 4-\lambda & 0 \\ 4 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} \rightarrow -\lambda^3 + 13\lambda^2 - 36\lambda$$

donde $\lambda_1 = 0$
$\lambda_2 = 4$
$\lambda_3 = 9$

Ahora debemos sacar los vectores propios de N.

$$\vec{v}_{\lambda_1} = \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_{\lambda_2} = \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_{\lambda_3} = \vec{v}_9 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{v}_0\| = \sqrt{9} = 3 \; ; \; \|\vec{v}_4\| = \sqrt{5} \; ; \; \|\vec{v}_9\| = 3\sqrt{5}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Base ortonormal } \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \\ \text{Base ortonormal } \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \\ \text{Base ortonormal } \vec{v}_9 = \begin{pmatrix} 5/3\sqrt{5} \\ 2/3\sqrt{5} \\ 4/3\sqrt{5} \end{pmatrix} \end{array}\right\} \text{Col de } U.$$

Entonces, la matriz U queda:

$$U = \begin{pmatrix} 5/3\sqrt{5} & 0 & -2/3 \\ 2/3\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} & 1/3 \\ 4/3\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 2/3 \end{pmatrix}$$

Pero antes recordemos que debemos trasponer la matriz V:

$$V^t = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Entonces su DVS:

$A = U \Sigma V^{+}$

$$= \begin{pmatrix} 5/3\sqrt{5} & 0 & -2/3 \\ 2/3\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} & 1/3 \\ 4/3\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} //$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Su descomposición en valores singulares:

$$\boxed{B = U \Sigma V^{+}}$$

$B \rightarrow 3 \times 2$

$\Sigma \rightarrow 3 \times 2$

$U \rightarrow 3 \times 3$

$V \rightarrow 2 \times 2$

Entonces,

$$M = B^{+} \cdot B = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{2 \times 3} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sacamos los valores propios:

$$\det(M - \lambda I) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = 1$ $\rightarrow$ Valores propios de M.

Valores Singulares de B:

$$\sigma_1 = \sqrt{3} \qquad \sigma_2 = \sqrt{1} = 1$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para V debemos calcular los vectores propios de M que generen una base.

$$v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ahora lo que debemos hacer es bases ortonormales

$$\frac{\vec{v}_3}{\|\vec{v}_3\|} \text{ y } \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} \Rightarrow \|\vec{v}_3\| = \sqrt{2}$$

$$\|\vec{v}_1\| = \sqrt{2}$$

$\Rightarrow$ Base ortonormal $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Base ortonormal $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$\Big\}$ Columnas de Matriz V.

$$V = \underbrace{\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}_{2\times 2}$$

Y Ahora nos Falta calcular la matriz U:

$$B \cdot B^t = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{N}$$

Al igual que hicimos para obtener Σ, primero debemos sacar los valores propios de N con

$$\det(N - \lambda I) = 0$$

donde:

$$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = 1 \qquad \lambda_3 = 3$

Ahora debemos sacar los vectores propios de N.

$$\vec{V}_{\lambda_1} = \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{V}_{\lambda_2} = \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{V}_{\lambda_3} = \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\|\vec{v}_0\| = \sqrt{3}$; $\|\vec{v}_1\| = \sqrt{2}$; $\|\vec{v}_3\| = \sqrt{6}$

Base ortonormal $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$

Base ortonormal $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Base ortonormal $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$

Entonces, la matriz U queda:

$$U = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Debemos transponer V

$$V^{t} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Entonces su DVS: $B = U \Sigma V^{t}$

$$\begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{C = U \Sigma V^{t}}$ Su DVS: $C_{2\times 3}$

$\Sigma_{2\times 3}$

$U_{2\times 2}$

$V^{t}_{3\times 3}$

Primero sacamos la matriz Σ:

Entonces, $M = C^{t} \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora necesitamos los valores propios de M:

$$\det(M - \lambda I) = 0$$

$\lambda_1 = 0$ con multiplicidad 2 $\quad \lambda_2 = 9$

y los valores singulares de C son:

$$\sigma_1 = \sqrt{9} = 3 \qquad \sigma_2 = \sqrt{0} = 0$$

$$\Rightarrow \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora debemos obtener la matriz V:

Vectores propios de M:

$$\vec{v}_{\lambda_1} = \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_{\lambda_2} = \vec{v}_9 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El siguiente paso es bases ortonormales

$$\frac{\vec{v}_{0(1)}}{\|\vec{v}_{0(1)}\|}, \quad \frac{\vec{v}_{0(2)}}{\|\vec{v}_{0(2)}\|}, \quad \frac{\vec{v}_9}{\|\vec{v}_9\|} \qquad \Rightarrow \begin{array}{l} \|\vec{v}_{0(1)}\| = 1 \\ \|\vec{v}_{0(2)}\| = 1 \\ \|\vec{v}_9\| = 1 \end{array}$$

$\Rightarrow$ Base ortonormal $\vec{v}_{0(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Base ortonormal $\vec{v}_{0(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Base ortonormal $\vec{v}_9 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $V^t = \left.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right\} 3x3$

Para la matriz U:

$C \cdot C^t = \left.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}\right\} U$

los Valores propios de U son:

$\lambda_1 = 9 \qquad \lambda_2 = 0$

y los vectores propios son

$\vec{v}_9 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\|\vec{v}_9\| = 1 \qquad \|\vec{v}_0\| = 1$

Base ortonormal $\vec{v_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Base ortonormal $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Entonces, $\quad C = U \Sigma V^{\dagger}$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$