TAREA CAPÍTULO 4
MMD2002 - ANÁLISIS PARA CIENCIAS DE DATOS

ANDRÉS ZÚÑIGA

P1. *a*) Pruebe que el espacio de funciones continuas $C([0,1])$, dotado del producto interno en L^2,

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx,$$

no es un espacio de Hilbert.

b) Pruebe que el espacio de matrices

$$(\mathcal{M}_{m\times n}, \langle\cdot,\cdot\rangle) \quad \text{donde} \quad \langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB^t) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}B_{ij}$$

es un espacio de Hilbert.

P2. *a*) Muestre que para cualquier $x \in E$ en un e.v.p.i. se tiene la caracterización

$$\|x\| = \sup_{\|y\|=1} |\langle x, y\rangle|$$

b) Muestre que en cualquier e.v.p.i $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ se tiene lo siguiente:

$$x \perp y \quad \Longleftrightarrow \quad \|x + \alpha y\| = \|x - \alpha y\|, \ \ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

c) Demuestre la así llamada *identidad de Apolonio*, la cual asevera que para toda elección de elementos x, y, z en un e.v.p.i E, se satisface la relación

$$\|z - x\|^2 + \|z - y\|^2 = \frac{1}{2}\|x - y\|^2 + 2\left\|z - \frac{x+y}{2}\right\|^2$$

P3. Muestre que para cualquier e.v.p.i $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, se tiene que

$$\|x - y\| + \|y - z\| = \|x - z\| \quad \Longleftrightarrow \quad y = \alpha x + (1-\alpha)z \text{ para algún } \alpha \in [0,1].$$

¿Es esto cierto en un espacio normado (sin producto interno)?

Hint: *La implicancia $\Leftarrow$ puede demostrarla por contrarrecíproca. Puede, además, serle útil considerar las proyeccion Π_ℓ sobre la línea (convexo cerrado) $\ell := \{z + \alpha(x - z) : \ \alpha \in \mathbb{R}\}$, y separar el análisis en los casos $\alpha \in (-\infty, 0) \cup [0,1] \cup (1, +\infty)$.*

P4. ¿Es $C([0,2])$ con la norma $\|f\| = \max_{x\in[0,2]} |f(x)|$ un espacio con producto interno?

P5. *a*) Sea $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de dimensión finita. Demuestre que la convergencia débil coincide con la convergencia fuerte. Esto es, pruebe que

$$x_n \rightharpoonup x \quad \Longleftrightarrow \quad x_n \to x.$$

b) Suponga que, en un espacio de Hilbert H, $x_n \rightharpoonup x$ e $y_n \rightharpoonup y$ cuando $n \to \infty$, y además que $\alpha_n \to \alpha$. Pruebe las siguientes propiedades, o en su defecto exhiba un contra-ejemplo:

1) $x_n + y_n \rightharpoonup x + y$.
2) $\alpha_n x_n \rightharpoonup \alpha x$.
3) $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$.

Date: 20 de noviembre, 2022.

4) $\|x_n\| \to \|x\|$.

5) Si $x_n = y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $x = y$.

P6. Si $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ en un e.v.p.i. E, muestre que $\langle u, x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\langle u_n, x\rangle$, para cualquier $x \in E$.

Gabriel Díaz Vásquez
21.123.354-0

P1. *a*) Pruebe que el espacio de funciones continuas $C([0,1])$, dotado del producto interno en L^2,

$$\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx,$$

no es un espacio de Hilbert.

b) Pruebe que el espacio de matrices $\longrightarrow$ Dim Finita!

$$(\mathcal{M}_{m\times n}, \langle\cdot,\cdot\rangle) \quad \text{donde} \quad \langle A,B\rangle = \mathrm{tr}(AB^t) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}B_{ij}$$

es un espacio de Hilbert.

a) Lo primero que debemos saber es la def. de un espacio de Hilbert:

Un e.v.p.i $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ se dice un Hilbert cuando es un Banach respecto $\|\cdot\|$ inducido por el p.i. (Dim. Finita)

$\Rightarrow$ Para probar que el espacio de funciones continuas $C([0,1])$ dotado de p.i. en L^2

$$\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)\cdot g(x)\,dx$$

no es un Hilbert, debemos encontrar funciones que no cumplan dicha definición.

También lo que debemos recordar es que por def. un espacio de Banach:

Un $(E, \|\cdot\|)$ evn es un espacio de Banach (completo) si toda sucesión de Cauchy converge en E.

Y por último definir lo que es una sucesión de Cauchy:

Sea $(E, \|\cdot\|)$ evn. Una sucesión $(x_n)_n \subseteq E$ se dice de Cauchy cuando

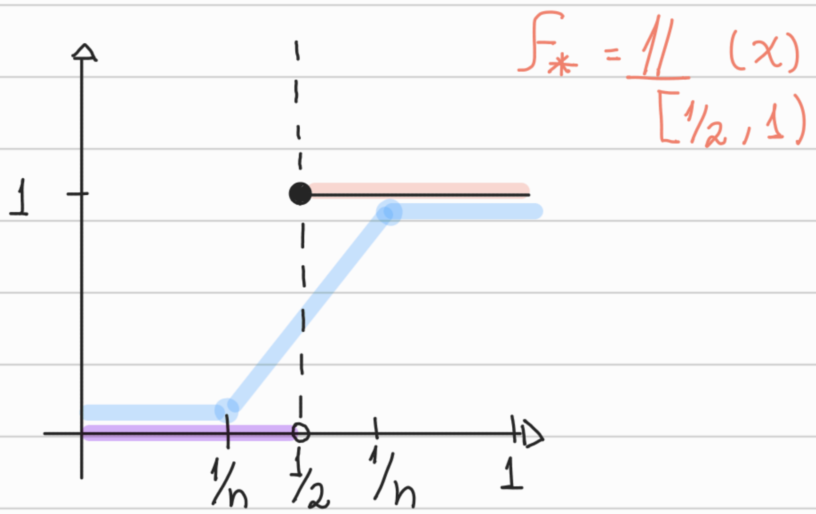
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) \text{ tq } \forall n, m \geq n_0 : \|x_n - x_m\| \leq \varepsilon$$

"Los términos de la cola de la sucesión están arbitrariamente cerca"

$\Rightarrow$ Sea f función escalonada con $\{f_n\}_n \subset C([0,1])$

con $f_n \xrightarrow{L^2} f_*$ y $f_* \notin C([0,1])$

Gráficamente,



Tomamos distancia "$1/n$" para definir f_n.

Sea $\boxed{f_n(x)} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}] \\ 1 & \text{si } x \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1] \end{cases}$

(es lineal $\therefore$ Continua

linealmente $f_n(x)$ con $p_1 = (\underset{x_1}{1/2 - 1/n}, \underset{y_1}{0})$ y $p_2 = (\underset{x_2}{1/2 + 1/n}, \underset{y_2}{1})$

$\Rightarrow$ $y = mx + n$ donde $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

<u>Ec. de la recta</u>: $y - y_1 = \left(\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)$

$$y - 0 = \left(\frac{1 - 0}{\cancel{1/2} + 1/n - \cancel{1/2} + 1/n}\right)(x - 1/2 + 1/n)$$

$$\boxed{y = \frac{n}{2}\,(x - 1/2 + 1/n)} \Big\}\ \text{Ec. de la recta } (☆)$$

$\Rightarrow$ Tenemos la aproximación, tenemos $\{f_n\}$ es Cauchy

Debemos comprobar que $f_n \xrightarrow{L^2} f_*$:

Entonces: $\displaystyle\int_0^1 |f_n - f_*|^2 dx$

y como nosotros sabemos que:

$$\lim_{n \to [0, 1/2 - 1/n)} f_n = \lim_{n \to [1, 1/2 + 1/n)} f_n$$

Podemos decir que:

$$\int_{1/2 - 1/n}^{1/2 + 1/n} |☆_n - f_*(x)|^2 dx \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\Rightarrow \int_{1/2-1/n}^{1/2+1/n} \left| \frac{n}{2}(x - 1/2 + 1/n) - f_*(x) \right|^2 dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Donde nosotros sabemos que si $n \to \infty$ tiende a ser la característica f_* la cual no es $C[0,1]$

∴ El espacio de funciones continuas $C[0,1]$ dotado del producto interno en L^2 no es completo y por lo tanto no es Banach lo que significa que no es Hilbert.

$\square$

b) Pruebe que el espacio de Matrices

$(M_{m\times n}, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ donde $\langle A,B\rangle = tr(AB^t) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}B_{ij}$

es un Hilbert.

Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Sucesión Matricial Cauchy.
Converge en $M_{m\times n}(\mathbb{R})$

Que sea Cauchy significa que:

$$0 = \lim_{N,M\to\infty} \|A_N - A_M\|^2 = \lim_{N,M\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |(A_N - A_M)_{ij}|^2$$

enunciado

def. $\|M\|^2 = \langle M, M\rangle$

Debemos apreciar que tenemos sumas finitas,

$\sum^{m}\sum^{n}$ con m y n finitos.

pq es Cauchy

$$\Rightarrow = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(\lim_{M,N\to\infty} |(A_N)_{ij} - (A_M)_{ij}|^2\right) = 0$$

y que sea igual a cero, significa que cada término ij es igual a cero puesto que:

$$\boxed{\lim_{M,N\to\infty} |(A_N)_{ij} - (A_M)_{ij}|^2 \quad \text{Donde cada elemento es } \geq 0}$$

$\Rightarrow$ Para cada término i,j: $\lim_{M,N\to\infty} \|(A_N)_{ij} - (A_M)_{ij}\|^2 = 0$

La sucesión $\{(A_N)_{ij}\}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$, lo que significa que es para esa entrada de la matriz.

Y que la sucesión sea de Cauchy, nos dice que es de Banach y eso nos dice completitud lo que significa que converge:

$\{(A_n)_{ij}\}$ converge en $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\lim_{N\to\infty} \{(A_N)_{ij}\} = a_{ij}$

$\Rightarrow$ $\{A_N\}_N$ converge a $A_* = (a_{ij})_{ij}$

Como tenemos el espacio de Matrices Cauchy y tenemos que la sucesión Matricial es Cauchy en $\mathbb{R}$, convergen y definimos A_*.

P2. *a*) Muestre que para cualquier $x \in E$ en un e.v.p.i. se tiene la caracterización

$$\|x\| = \sup_{\|y\|=1} |\langle x, y\rangle|$$

b) Muestre que en cualquier e.v.p.i $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se tiene lo siguiente:

$$x \perp y \iff \|x + \alpha y\| = \|x - \alpha y\|, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

c) Demuestre la así llamada *identidad de Apolonio*, la cual asevera que para toda elección de elementos x, y, z en un e.v.p.i E, se satisface la relación

$$\|z - x\|^2 + \|z - y\|^2 = \frac{1}{2}\|x - y\|^2 + 2\left\|z - \frac{x+y}{2}\right\|^2$$

a) Donde si nos damos cuenta

$\|x\| = \sup_{\|y\|=1} |\langle x,y\rangle| \iff$ 1) $\sup_{\|y\|=1} |\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \quad \forall y \in E, \|y\|=1$

2) $\|x\| \leq \langle x, \hat{y}\rangle$ para algún $\|\hat{y}\| = 1$

Por lo tanto demostraremos (1) y (2)

<u>Dem</u>: (1): $\sup_{\|y\|=1} |\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \quad \forall y \in E, \|y\|=1$

$\Rightarrow |\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \cdot \cancelto{1}{\|y\|}$ $\Rightarrow \sup_{\|y\|=1} |\langle x,y\rangle| \leq |\langle x,y\rangle| \leq \|x\|$

Cauchy-Schwarz

$\boxed{//}$

(2): $\|x\| \leq \sup_{\|y\|=1} |\langle x,\hat{y}\rangle| \iff \|x\| \leq |\langle x,\hat{y}\rangle|$ algún $\|\hat{y}\|=1$

$\|x\| \leq |\langle x,\hat{y}\rangle| \leq \sup |\langle x,\hat{y}\rangle|$ Debemos escoger $\hat{y}$

Si $\hat{y} = x \Rightarrow \langle x,x\rangle = \|x\|^2$

$\|x \cdot 1\|^2 = \|1\|^2 \cdot \|x\|^2$ //

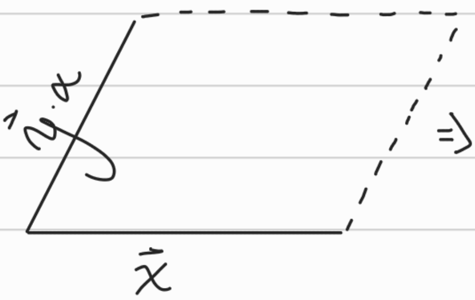
$\boxed{//}$

b) $x \perp y \iff \|x+\alpha y\| = \|x-\alpha y\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Def. en primera instancia que significa $x \perp y$:

$x \perp y \iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ $(\star)$

Paralelogramo.



$\Rightarrow \|\vec{x}+(\alpha\vec{y})\|^2 + \|\vec{x}-(\alpha\vec{y})\|^2 = 2\|\vec{x}\|^2 + 2\|(\alpha\vec{y})\|^2$

$\Rightarrow \|\vec{x}+(\alpha\vec{y})\|^2 + \|\vec{x}-(\alpha\vec{y})\|^2 = 2(\|\vec{x}\|^2 + \|\alpha\vec{y}\|^2)$ $\big/ (\star) = x \perp y$

$\|\vec{x}+(\alpha\vec{y})\|^2 + \|\vec{x}-(\alpha\vec{y})\|^2 = 2(\|\vec{x}+\alpha\vec{y}\|^2) \big/ -(\|\vec{x}+\alpha\vec{y}\|^2)$

$\|\vec{x}-(\alpha\vec{y})\|^2 = \|\vec{x}+\alpha\vec{y}\|^2$

$\boxed{//}$

c)

Paralelógramo: $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2+\|\vec{x}-y\|^2=2\|\vec{x}\|^2+2\|\vec{y}\|^2$

Identidad de Apolonio

$$\Rightarrow \underbrace{\|z-x\|^2}_{\hat{x}}+\underbrace{\|z-y\|^2}_{\hat{y}}=\frac{1}{2}\|x-y\|^2+2\left\|z-\frac{x+y}{2}\right\|^2$$

$\Rightarrow$ Paralelógramo

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\|\hat{x}+\hat{y}\|^2}{2}}_{1}+\underbrace{\frac{\|\hat{x}-\hat{y}\|^2}{2}}_{2}=\|\hat{x}\|^2+\|\hat{y}\|^2$$

$(2)^2=4$

$$1)\ \frac{\|\hat{x}+\hat{y}\|^2}{2}=\frac{2}{4}\|\hat{x}+\hat{y}\|^2=2\left\|\frac{\hat{x}+\hat{y}}{2}\right\|^2 \quad //$$

$$2)\ \frac{\|\hat{x}-\hat{y}\|^2}{2}=\frac{1}{2}\|\hat{x}-\hat{y}\|^2$$

$$\Rightarrow 2\left\|\frac{\hat{y}+\hat{x}}{2}\right\|^2+\frac{1}{2}\|\hat{y}-\hat{x}\|^2=\|\hat{y}\|^2+\|\hat{x}\|^2$$

Reemplazando...

$$2\left\|\frac{(z-y)+(z-x)}{2}\right\|^2+\frac{1}{2}\|(z-y)-(z-x)\|^2=\|(z-y)\|^2+\|(z-x)\|^2$$

$$2\left\|z-\frac{(y+x)}{2}\right\|^2+\frac{1}{2}\|x-y\|^2=\|(z-x)\|^2+\|(z-y)\|^2$$

$\boxed{//}$

P3. Muestre que para cualquier e.v.p.i $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, se tiene que

$$\|x-y\| + \|y-z\| = \|x-z\| \iff y = \alpha x + (1-\alpha)z \text{ para algún } \alpha \in [0,1].$$

¿Es esto cierto en un espacio normado (sin producto interno)?

$(\Rightarrow)$ **Hint:** *La implicancia puede demostrarla por contrarrecíproca. Puede, además, serle útil considerar las proyeccion Π_ℓ sobre la línea (convexo cerrado) $\ell := \{z + \alpha(x-z) : \alpha \in \mathbb{R}\}$, y separar el análisis en los casos $\alpha \in (-\infty, 0) \cup [0,1] \cup (1, +\infty)$.*

Entonces pdq:

$$\|x-y\| + \|y-z\| = \|x-z\| \Leftrightarrow y = \alpha x + (1-\alpha)z \quad \text{para algún } \alpha \in [0,1]$$

Entonces demostraremos $\Rightarrow$ y $\Leftarrow$:

$\Leftarrow$] Si $y = \alpha x + (1-\alpha)z$ para $\alpha \in [0,1] \Rightarrow \|x-y\| + \|y-z\| = \|x-z\|$

$$\Rightarrow \|x - (\alpha x + (1-\alpha)z)\| + \|(\alpha x + (1-\alpha)z) - z\| = \|x-z\|$$

$$\underbrace{\|x - (\alpha x + (1-\alpha)z)\| + \|(\alpha x + (1-\alpha)z) - z\|}_{= \|x-z\|} \geq \text{Des. triángular}$$

$$\|x - (\cancel{\alpha x + (1-\alpha)} z) + \cancel{(\alpha x + (1-\alpha)} z) - z\| = \|x-z\|$$

$$\therefore \|x-z\| \geq \|x-z\| \Rightarrow \|x-z\| = \|x-z\|$$

$\boxed{/\!/\!/}$

$\Rightarrow$] Si $\|x-y\| + \|y-z\| = \|x-z\| \Rightarrow y = \alpha x + (1-\alpha)z$ para $\alpha \in [0,1]$

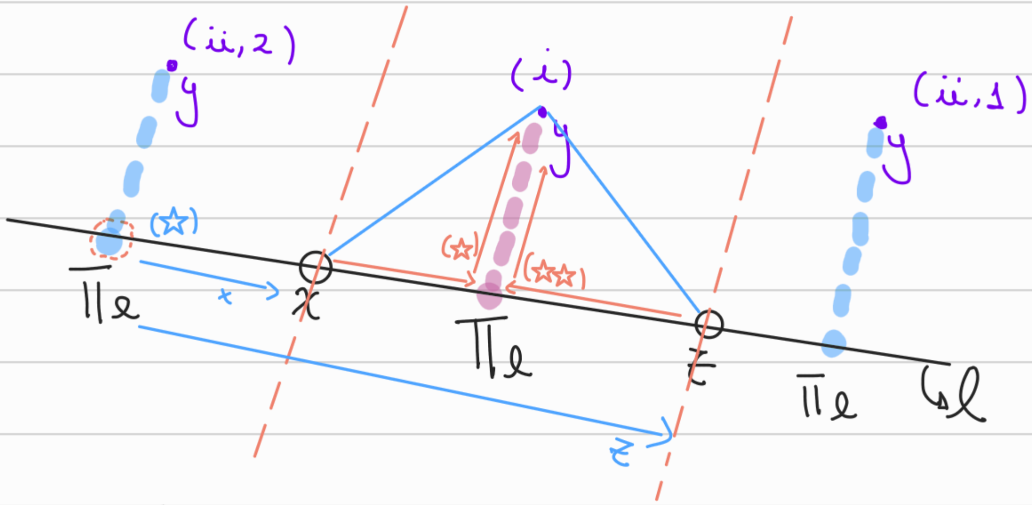
Por contrarrecíproca nosotros decimos que

$$y \neq \alpha x + (1-\alpha)z \ \forall \alpha \in [0,1] \Rightarrow \|x-y\| + \|y-z\| \neq \|x-z\|$$

pero por des. triángular basta decir que

$y \neq \underbrace{\alpha x + (1-\alpha) z}_{\text{conv. convexa}} \;\; \forall \alpha \in [0,1] \Rightarrow \|x-y\| + \|y-z\| > \|x-z\|$ ($\star$)

Para aclarar ideas haremos la idea gráfica:



donde la linea de todos los puntos será ℓ y

$\ell = \{ w : w = \lambda x + (1-\lambda) z, \lambda \in \mathbb{R} \}$

A la izquierda de la demostración se nos dice que entonces hay 2 posibilidades:

i) El punto esté fuera de la linea entre x y z.

ii) El punto esté fuera de la linea y fuera de x y z.

Donde $\Pi_\ell :: \alpha x + (1-\alpha) z \; , \; \alpha \in [0,1]$

En el caso:

i) $(y-\Pi_e) \perp (\Pi_e - z)$ y $(y-\Pi_e) \perp (\Pi_e - x)$

($\star$) ($\star\star$)

Donde debemos usar pitágoras:

$\Rightarrow \vec{x} \perp \vec{y} \iff \|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$

ii,1) y ii,2): $\|y-\Pi_e\| > 0$ "hay distancia entre "y" y la linea".

Donde comparamos $\|\Pi_e - x\|$, $\|\Pi_e - z\|$ versus $\|x-z\|$

Si uno considera ($\star$) y vemos distancias entre "x" y "z" vemos geométricamente que la desigualdad es estricta.

Usaremos pitágoras, que nos dice:

$x \perp y : \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

$\Rightarrow$ para i) $\underbrace{(y-\Pi_e) \perp (\Pi_e - z)}_{1)}$ y $\underbrace{(y-\Pi_e) \perp (\Pi_e - x)}_{2)}$

1) $\|y - \cancel{\Pi_e} + \cancel{\Pi_e} - z\|^2 = \|y-\Pi_e\|^2 + \|\Pi_e - z\|^2$

$\|y-z\|^2 = \|y-\Pi_e\|^2 + \|\Pi_e - z\|^2$

($\star$) $= \|x-y\| + \|y-z\| > \|x-z\|$

2) $\| y - \cancel{\Pi e} + \cancel{\Pi e} - x \|^2 = \| y - \Pi e \|^2 + \| \Pi e - x \|^2$

$\| y - x \|^2 = \| y - \Pi e \|^2 + \| \Pi e - x \|^2$ es lo mismo que...

$\| x - y \|^2 = \| y - \Pi e \|^2 + \| \Pi e - x \|^2$

P4. ¿Es $C([0,2])$ con la norma $\|f\| = \max_{x\in[0,2]} |f(x)|$ un espacio con producto interno?

<u>hint</u>: Pruebelo por contrarrecíproca, probar que sí es un producto interno y que por lo tanto al probar la ley del paralelógramo o la ley pitagórica.

$\Rightarrow$ Por contrarrecíproca: Asumimos que es un producto interno, e intentaremos probar ley del paralelogramo.

Pero antes de eso un análisis a

$$\|f\| = \max_{x\in[0,2]} |f(x)| \qquad f \in C([0,2])$$

toma el máximo valor puntual de las $f \in C[0,2]$.

$\Rightarrow$ Sea $\|f\|$ debemos probar ley del paralelógramo:

Ley del paralelógramo:

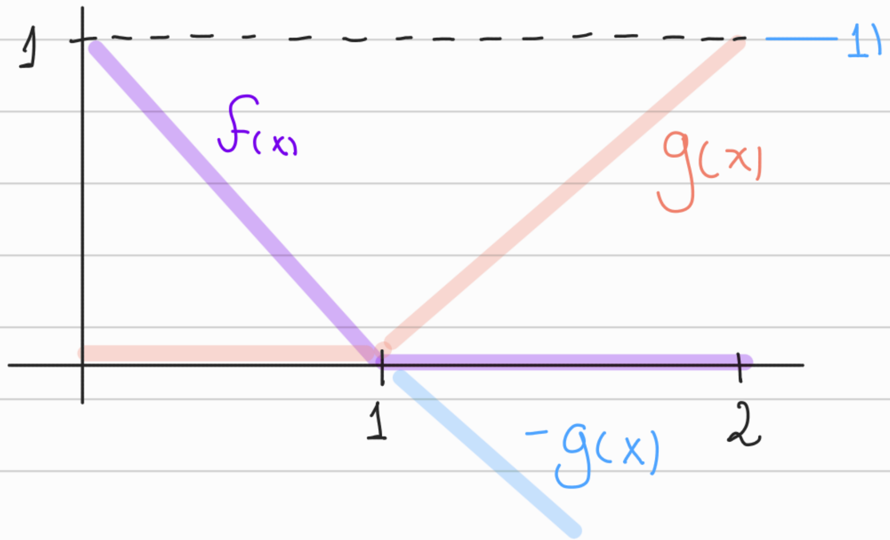
$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2$$

Entonces,

$$\underbrace{\left(\sup_{x\in[0,2]} |f(x)+g(x)|\right)^2}_{1} + \underbrace{\left(\sup_{x\in[0,2]} |f(x)-g(x)|\right)^2}_{2} = 2\underbrace{\left(\sup_{x\in[0,2]} |f(x)|\right)^2}_{3} + 2\underbrace{\left(\sup_{x\in[0,2]} |g(x)|\right)^2}_{4}$$

Si queremos trabajar con los supremos, debemos trabajar con el soporte de las funciones, y siempre y cuando sean soportes disjuntas las operaciones serán simples.

Gráficamente y siguiendo con la indicación del profe:



Analizaremos 1) 2) 3) 4):

1) Vemos que la suma de $f(x) + g(x)$ es 1.

2) La resta de $f(x) - g(x)$, nos queda $\max\{|1|^2, |-1|^2\} = 1$.

3) El valor max de $f(x)$ es 1 (valor máx).

4) El valor max de $g(x)$ es 1 (valor máx).

$\Rightarrow$ $1^2 + 1^2 = 2(1)^2 + 2(1)^2$

$2 = 4$? ¡¡ No, entonces al no cumplir paralelógramo no es un e.v.p.i.

P5. *a*) Sea $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de dimensión finita. Demuestre que la convergencia débil coincide con la convergencia fuerte. Esto es, pruebe que

$$x_n \rightharpoonup x \iff x_n \to x.$$

b) Suponga que, en un espacio de Hilbert H, $x_n \rightharpoonup x$ e $y_n \rightharpoonup y$ cuando $n \to \infty$, y además que $\alpha_n \to \alpha$. Pruebe las siguientes propiedades, o en su defecto exhiba un contra-ejemplo:

1) $x_n + y_n \rightharpoonup x + y$.
2) $\alpha_n x_n \rightharpoonup \alpha x$.
3) $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$.
4) $\|x_n\| \to \|x\|$.
5) Si $x_n = y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $x = y$.

a) Se nos pide demostrar convergencia débil es equivalente a la fuerte:

$$x_n \rightharpoonup x \iff x_n \longrightarrow x$$

Donde tomaremos una base, la cual será ortonormal y usaremos gram-smith para demostrar "$\Rightarrow$"

En cambio para "$\Leftarrow$" es más directo. $\boxed{\text{"}\Leftarrow\text{"}}$

Entonces, Si $\underset{\text{Convergencia Fuerte}}{x_n \longrightarrow x} \Rightarrow \underset{\text{Convergencia débil}}{x_n \rightharpoonup x}$

Def. convergencia fuerte: $\{x_n\} \subseteq E$ se dice fuertemente convergente a x_* si

$x_n \xrightarrow{n} x_*$ en norma. $\rightsquigarrow \|x_n - x_*\| \xrightarrow{n} 0$

Def. convergencia débil: $\{x_n\} \subseteq E$ se dice debilmente convergente a x_* si

$$\langle x_n, y\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle x_*, y\rangle \quad \forall y \in E$$

Como vimos en clases hay un teorema que explica la convergencia débil a partir de la fuerte.

Teo. Conv. Fuerte implica Conv. débil

Si $x_n \xrightarrow[n]{} x_*$ entonces $x_n \underset{n}{\rightharpoonup} x_*$

Dem: $(\forall y \in E)\ |\langle x_n, y\rangle - \langle x_*, y\rangle|$

$$= |\langle x_n - x_*, y\rangle| \underset{\text{Schwarz}}{\leq} \underbrace{\|x_n - x_*\|}_{\longrightarrow 0} \cdot \|y\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\therefore (\forall y \in E)\ \langle x_n, y\rangle \xrightarrow[n]{} \langle x_n, y\rangle$$

$\square$

Ahora nos falta dem: $\boxed{\Rightarrow}$

Entonces, Si $x_n \rightharpoonup x \Rightarrow x_n \longrightarrow x$

Sabemos que estamos trabajando en dimensión finita.

E es de dim finita, $\exists \{e_i\}_{i=1}^{n}$ es una base ortonormal.

$$x_n = \sum_{i=1}^{N} \alpha_n^i \cdot \vec{e}_i \quad , \quad x = \sum_{i=1}^{N} \alpha_*^i \, \vec{e}_i$$

PDQ: $x_n \rightharpoonup x \Rightarrow x_n \longrightarrow x$

$$\|x_n - x\|^2 = \left\|\sum_{i=1}^{N} \alpha_n^i \vec{e}_i - \sum_{i=1}^{N} \alpha_*^i \vec{e}_i \right\|^2$$

y recordemos que los $\vec{e}_i$ son ortonormales

$$\Rightarrow = \left\|\sum_{i=1}^{N} (\alpha_n^i - \alpha_*^i)\, \vec{e}_i \right\|^2$$

y por teorema pitagórico:

$$\Rightarrow = \sum_{i=1}^{N} |\alpha_n^i - \alpha_*^i|^2 \cancel{\|\vec{e}_i\|^2}$$

al ser ortonormal $\longrightarrow 1$.

$(\star)$

Por def de $x_n \rightharpoonup x$:

$$\langle x_n, \vec{e}_j \rangle \xrightarrow[n]{} \langle x, \vec{e}_j \rangle \quad \forall j = 1, \dots, N$$

$$= \underbrace{\left\langle \sum_{i=1}^{N} \alpha_n^i \vec{e}_j, \vec{e}_j \right\rangle}_{\star} \xrightarrow[n]{} \left\langle \sum_{i=1}^{N} \alpha_*^i \vec{e}_j, \vec{e}_j \right\rangle$$

Aquí recordamos que son ortonormales, lo que nos dice que $\langle e_i \cdot e_j \rangle = 0$ siempre, salvo cuando $i = j$, que en esos casos vale 1.

$$= \star = \alpha_n^i \cdot \|\vec{e}_j\|^2 \xrightarrow[n]{} \alpha_*^i \quad (\star)$$

Convergencia coordenada a coordenada.

Entonces gracias a ☆

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{N} |\alpha_n^i - \alpha_*^i|^2$$

Recordando que estamos en $\boxed{\text{dim finita}}$.

$$= \sum_{i=1}^{N} \Big[\underbrace{\lim_{n\to\infty} |\alpha_n^i - \alpha_*^i|^2}_{\longrightarrow 0} \Big] = \sum_{i=1}^{N} 0 = 0$$

Conclusión: Decimos que de $x_n \rightharpoonup x$ llegamos a $x_n \longrightarrow x$ gracias a que estamos en dimensión finita puesto que no en todos los casos se cumplirá.

b) Suponga $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert $x_n \rightharpoonup x$ e $y_n \rightharpoonup y$ cuando $n \to \infty$ y además $\alpha_n \to \alpha$

Pruebe lo siguiente o de un contraejemplo.

1) $x_n + y_n \rightharpoonup x + y$

$\underbrace{|(x_n + y_n) - (x+y)|}_{\text{Def}} = |x_n + y_n - x - y| = |x_n - x + y_n - y|$

Des. triángular

$\leq |x_n - x| + |y_n - y| \Rightarrow$ por def e hipótesis.

$= \longrightarrow 0 + \longrightarrow 0 = 0$ Entonces sabemos que está acotado y

$\therefore$ $x_n + y_n \rightharpoonup x + y$ se cumple. //

2) $\alpha_n x_n \rightharpoonup \alpha x$

ya que sabemos que x_n y α_n cumplen bien la convergencia.

$|\alpha_n x_n - \alpha x|$ podemos definir $\varepsilon_n = \alpha_n x_n$ y $\varepsilon = \alpha x$ entonces $\varepsilon_n \xrightarrow{n} \varepsilon$

$\Rightarrow |\varepsilon_n - \varepsilon|$ que por def $\longrightarrow 0$ es acotado

$\therefore$ $\alpha_n x_n \rightharpoonup \alpha x$ se cumple. //

3) $\langle x_n, y_n \rangle \xrightarrow[n]{} \langle x, y \rangle$

Asumiremos que se cumple cuando $x_n \xrightarrow[n]{} x$ y $y_n \xrightarrow[n]{} y$

$$\Rightarrow |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| = |\langle x_n, y_n\rangle \underbrace{- \langle x_n, y\rangle + \langle x_n, y\rangle}_{+0} - \langle x, y\rangle|$$

$$= |\langle x_n, y_n - y\rangle - \langle x_n - x, y\rangle|$$

$$\leq |\langle x_n, y_n - y\rangle + \langle x_n - x, y\rangle|$$

$$\leq \|x_n\| \cdot \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \cdot \|y\| \longrightarrow 0 \,?$$

No podemos decir que converge debido a que necesariamente x e y deben tener convergencia fuerte para decir que $\|y_n - y\|$ y $\|x_n - x\| \longrightarrow 0$

$\therefore \langle x_n, y_n\rangle \xrightarrow[n]{} \langle x, y\rangle$ no se cumple //

4) $\|x_n\| \longrightarrow \|x\|$

Haremos parecido a 4) Diremos que cumple para x e y convergencia débil.

$$\|x_n - x\|^2 = \langle x_n - x, x_n - x\rangle$$

$$= \langle x_n, x_n\rangle - 2\langle x_n, x\rangle + \langle x, x\rangle$$

$\vdots$

5) Si $x_n = y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $x = y$

Esta pregunta nos dice que los límites son iguales y es más, el límite es único.

P6. Si $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ en un e.v.p.i. E, muestre que $\langle u, x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\langle u_n, x\rangle$, para cualquier $x \in E$.

R//

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad [\text{Una serie}]$$

muestre que $\langle u, x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\langle u_n, x\rangle \quad \forall x \in E$.

Entonces, $\boxed{u = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} u_n}$

y pdq// $\boxed{\langle u, x\rangle = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N}\langle u_n, x\rangle}$

Tenemos que $\langle u, x\rangle = \left\langle \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} u_n , x\right\rangle$

$\Rightarrow$ Como estamos trabajando en un e.v.p.i.

$$\langle \cdot, \cdot\rangle = \|\cdot\|^2$$

Partimos de la idea

$$\left| \langle u, x\rangle - \sum_{i=1}^{N} \langle u_i, x\rangle \right|$$

$$= \left| \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} u_j, x\right\rangle - \left\langle \sum_{i=1}^{N} u_i, x\right\rangle \right|$$

linealidad

$$= \left| \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} u_j - \sum_{i=1}^{N} u_i , x \right\rangle \right|$$

$$= \left| \left\langle \sum_{i=N+1}^{\infty} u_i , x \right\rangle \right| \underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \left(\left\| \sum_{i=N+1}^{\infty} u_i \right\| \right) \cdot \|x\| \longrightarrow 0$$

$\therefore$ Todo $\longrightarrow 0$

$\square$