Introduction au signal et bruit
Exercices

Gabriel Dauphin

September 3, 2025

Contents

Chapter 1

Relations entrées-sorties sans effet mémoire

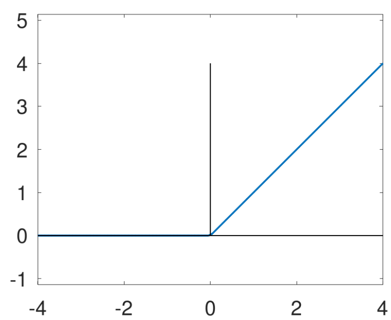

Figure 1.1

Exercice 1 *Le graphique représente la relation entrée-sortie d'un* `Relu` *pour* `Rectified Linear Unit`*.*

1. *En utilisant la figure 1.1, combien valent les signaux en sortie lorsque respectivement, les signaux en entrées valent* -3 *et* 3 *?*
2. *Combien valent les puissances de ces signaux ?*
3. *Proposez une formule utilisant la valeur absolue, l'addition et la multiplication pour modéliser cette relation ?*
4. *On considère le filtre* $\mathcal{H}_1(x) = 0.5x$ *et* $\mathcal{H}_2(x) = |x|$*, montrez comment en les associant on peut fabriquer le filtre* `Relu`*.*
5. *Écrire le pseudo-code permettant de générer la figure 1.1.*

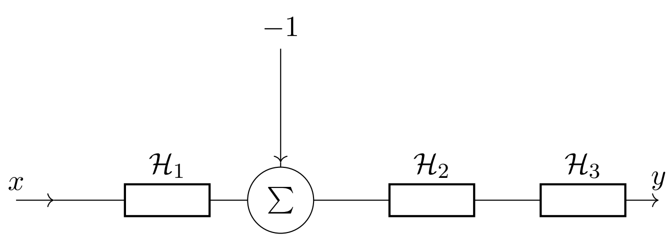

Figure 1.2

Exercice 2 *Les filtres* $\mathcal{H}_1$*,* $\mathcal{H}_2$ *et* $\mathcal{H}_3$ *sont définis par*

$$\mathcal{H}_1(x) = |x| \quad \mathcal{H}_2(x) = \min(1, x) \quad \mathcal{H}_3(x) = \max(0, x) \tag{1.1}$$

On appelle $\mathcal{H}$ *le filtre décrit par la figure 1.2 et associé à la relation transformant* x *en* y*.*

1. *Calculez les sorties* y *associées aux valeurs* $-2, -1, 0, 1, 2$ *pour* x*.*
2. *Écrivez la formule modélisant* $\mathcal{H}$ *?*
3. *Dessinez la relation transformant* x *en* y *sur un graphe.*

Chapter 2

Signaux temps continu, fonction affine par morceaux

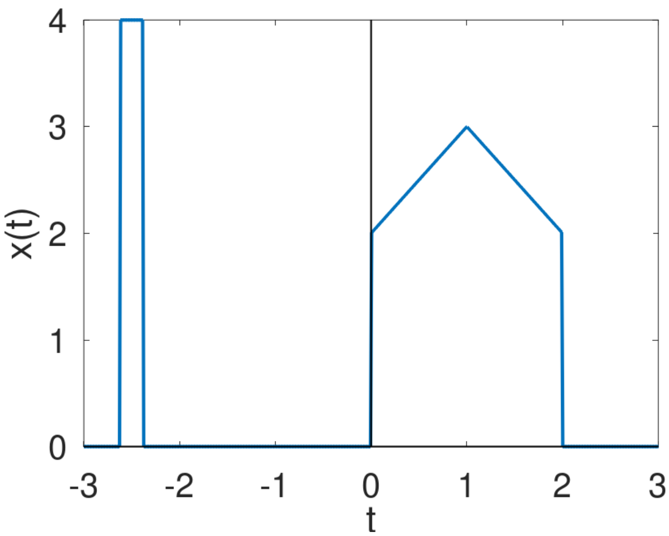

Figure 2.1: Visualisation de $x(t)$ qui a la forme d'une maison avec son lampadaire

Exercice 3 *On considère le signal $x(t)$ décrit par la figure 2.1.*

1. *Calculez les valeurs de $x(t)$ pour les valeurs de t $-2.5, 0.5, 1, 2.5$.*
2. *Écrivez une formule décrivant $x(t)$ au moyen de différents intervalles de temps.*
3. *Utilisez quelques unes des fonctions de base présentées en cours pour définir $x(t)$.*
4. *Utilisez le crochet d'Iverson pour décrire $x(t)$.*

Exercice 4 *On considère le signal $x(t)$ ainsi défini*

$$x(t) = (at+b)\,[\![t_1 \leq t \leq t_2]\!] \tag{2.1}$$

1. *Représentez ce signal pour $a=1$, $b=0$ et $t_1=2$, $t_2=3$.*
2. *Représentez ce signal pour $a=-1$, $b=1$ et $t_1=0$, $t_2=1$.*
3. *Montrez que pour $a=0$, $x(t)$ peut se mettre sous la forme*
$$x(t) = \alpha\Pi(\gamma t+\delta) \tag{2.2}$$
4. *Montrez que pour $a>0$, $x(t)$ peut se mettre sous la forme*
$$x(t) = \alpha\Pi(\gamma t+\delta) + \beta\mathbb{C}(\gamma t+\delta) \tag{2.3}$$
5. *Donnez un pseudo-code permettant de visualiser de signal.*

Chapter 3

Utilisation de la transformée de Fourier

Chapter 4

Diracs

Exercice 5 *On considère le signal* $x(t) = \Pi(t) = [\![-0.5 \leq t \leq 0.5]\!](t)$.

1. *Calculez sa dérivée* $y(t)\frac{d}{dt}x(t)$.
2. *Calculez* $z(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$.
3. *Calculez la transformée de Fourier de* $y(t)$ *notée* $\widehat{Y}(f)$ *et en déduire celle de* $x(t)$ *notée* $\widehat{X}(f)$.
4. *Représentez les signaux* $x(t), y(t), z(t)$.

Chapter 5

Transformées de Fourier, dérivation et équations différentielles

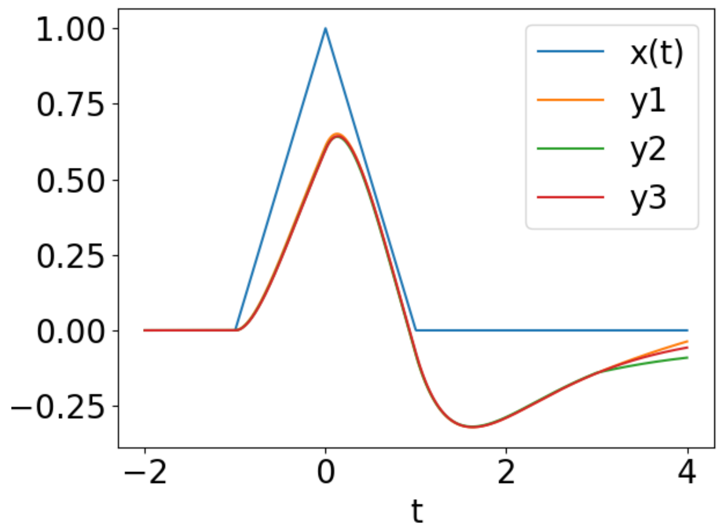

Figure 5.1: Visualisation de l'entrée $x(t)$ et de la sortie $y(t)$ illustrant l'exercice 6.

Exercice 6 *On considère un filtre défini par l'équation différentielle*

$$LC\frac{d^2}{dt^2}y(t) + RC\frac{d}{dt}y(t) + y(t) = RC\frac{d}{dt}x(t) \tag{5.1}$$

avec $R = 3$, $C = 0.5$, $L = 1$. On considère un signal en entrée défini par $x(t) = \mathbb{T}(t)$ et on cherche à simuler le signal de sortie $y(t)$ associé à ce filtre décrit par l'équation (5.1).

1. *Montrez que*

$$\frac{d}{dt}\mathbb{T}(t) = \int_{-\infty}^{t} \left[\delta(\tau-1) - 2\delta(\tau) + \delta(\tau+1)\right]\, d\tau \tag{5.2}$$

2. *On appelle $\tilde{y}(t)$ la solution de cette deuxième équation différentielle*

$$LC\frac{d^2}{dt^2}\tilde{y}(t) + RC\frac{d}{dt}\tilde{y}(t) + \tilde{y}(t) = \delta(t) \tag{5.3}$$

   Exprimez $y(t)$ en fonction de $\tilde{y}(t)$.

3. *En utilisant les fonctions* `sol_eq_diff`, `deriver`, `integrer` *et* `retarder` *de* `seb`, *donnez un pseudo-programme permettant de simuler $y(t)$.*

Exercice 7 *On considère un filtre dont la réponse fréquentielle vérifie*

$$\widehat{H}(f) = \frac{j2\pi f \texttt{RC}}{1 - 4\pi^2 f^2 + 4j\texttt{RC}\pi f} \tag{5.4}$$

1. *Trouvez l'équation différentielle associée à la relation entrée-sortie ?*
2. *Trouvez l'équation différentielle associée à la réponse impulsionnelle ?*
3. *Proposez un algorithme permettant de caculer la réponse impulsionnelle.*

Exercice 8 *On considère l'équation différentielle associée à une relation entrée-sortie :*

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) + 3\frac{d}{dt} y(t) + y(t) = x(t) \tag{5.5}$$

1. *Donnez la réponse fréquentielle.*
2. *Donnez un algorithme donnant la réponse impulsionnelle.*
3. *Écrivez le polynôme caractéristique.*
4. *Trouvez les solutions de ce polynôme.*
5. *En déduire la réponse impulsionnelle.*

Chapter 6

Filtres et effet mémoire

Chapter 7

Description fréquentielle des filtres

Chapter 8

Signaux périodiques

Chapter 9

Filtres agissant sur des signaux périodiques

Chapter 10

Échantillonnage

Chapter 11

Peigne de Diracs

Chapter 12

Modélisation stochastique du bruit

Chapter 13

Résumé du cours

13.1 Exercices

Exercice 9 *Le signal montré sur la figure 13.1 est noté $x(t)$. Sa transformée de Fourier est notée $\widehat{X}$.*

1. *$x(t)$ est-il un signal temps continu, temps discret, périodique, non-périodique, déterministe ou aléatoire.*
2. *Donnez une expression de $x(t)$ sous la forme de sa description sur plusieurs intervalles.*
3. *Donnez une expression de $x(t)$ en fonction de $\mathbf{1}()$.*
4. *Calculez $x(0)$, $x(1)$, E_x.*
5. *Calculez $\widehat{X}(0)$ et $\widehat{X}(1)$.*
6. *Construire $y_1(t) = x\left(\frac{t}{2}\right)$*
7. *Construire $y_1(t) = x\left(t-1\right)$*
8. *Construire $y_1(t) = \frac{1}{2}x\left(t\right)$*
9. *Construire $y_1(t) = x\left(t\right) - x\left(t-2\right)$*

Exercice 10 *Le signal montré sur la figure 13.2 est noté $x(t)$. Sa transformée de Fourier est notée $\widehat{X}$. Ce signal est de la forme $x(t) = ae^{-bt}\mathbf{1}(t \geq 0)$.*

1. *$x(t)$ est-il un signal temps continu, temps discret, périodique, non-périodique, déterministe ou aléatoire.*
2. *Justifiez la valeur de a avec la courbe exponentielle sur la figure 13.2.*
3. *Justifiez la valeur de b avec la ligne tangente à la courbe exponentielle sur la figure 13.2.*
4. *Donnez une expression de $x(t)$ en fonction de $\mathbf{1}()$.*
5. *Calculez $x(0)$, $x(1)$, E_x.*
6. *Calculez $\widehat{X}(0)$ et $\widehat{X}(1)$.*
7. *Construire $y_1(t) = x\left(\frac{t}{2}\right)$*
8. *Construire $y_1(t) = x\left(t-1\right)$*
9. *Construire $y_1(t) = \frac{1}{2}x\left(t\right)$*
10. *Construire $y_1(t) = x\left(t\right) - x\left(t-2\right)$*

Exercice 11 *Le signal étudié ici est $x(t) = t\mathbf{1}(t \in [0,1[) + (2-t)\mathbf{1}(t \in [1,2[)$ On considère $y(t)$ obtenu en périodisant le signal $x(t)$ pour $t \in [0,3]$.*

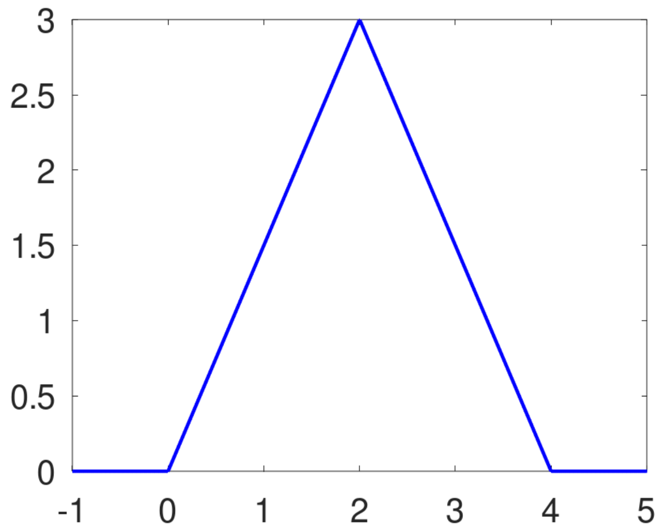

Figure 13.1: Graphe de $x(t)$ relatif à l'exercice 9.

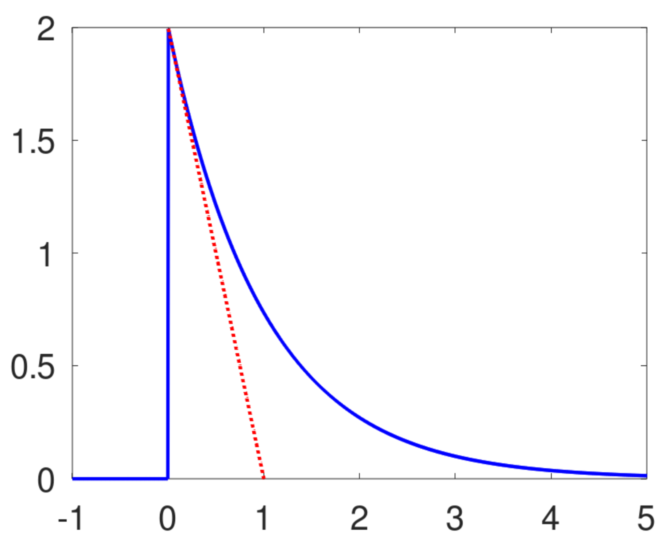

Figure 13.2: Graphe de $x(t)$ et de sa tangente pour l'exercice 10.

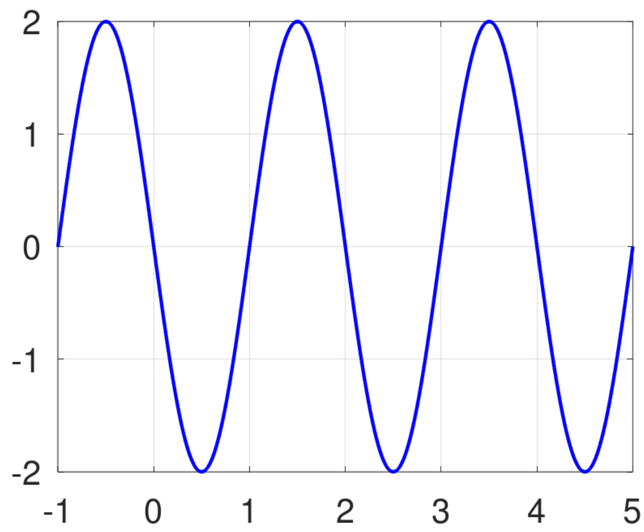

Figure 13.3: Graphe de $x(t)$ relatif à l'exercice 12.

1. *$x(t)$ est-il un signal temps continu, temps discret, périodique, non-périodique, déterministe ou aléatoire.*
2. *$y(t)$ est-il un signal temps continu, temps discret, périodique, non-périodique, déterministe ou aléatoire.*
3. *Dessiner $x(t)$ pour $t \in [-1, 5]$ sur un graphe.*
4. *Dessiner $y(t)$ pour $t \in [-1, 5]$ sur le même graphe.*
5. *Calculez $x(0)$, $x(-2)$, E_x et P_x.*
6. *Calculez $y(0)$, $y(-2)$, E_y et P_y.*
7. *Calculez $\widehat{X}_0$ et $\widehat{Y}_0$.*
8. *Calculez $\widehat{X}_0$ et $\widehat{Y}_0$.*
9. *Dessiner sur le graphe $y_1(t) = y\left(\frac{t}{2}\right)$*
10. *Dessiner sur le graphe $y_2(t) = y\left(t-1\right)$*
11. *Dessiner sur le graphe $y_3(t) = \frac{1}{2}y\left(t\right)$*
12. *Dessiner sur le graphe $y_4(t) = y\left(t\right) - y\left(t-2\right)$*

Exercice 12 *Le signal montré sur la figure 13.3 est noté $x(t)$. Sa transformée de Fourier est notée $\widehat{X}$. Ce signal est de la forme $x(t) = a\cos(bt+c)$.*

1. *$x(t)$ est-il un signal temps continu, temps discret, périodique, non-périodique, déterministe ou aléatoire.*
2. *Justifiez la valeur de a en observant la valeur maximale et minimale sur la figure 13.3.*
3. *Justifiez la valeur de b en mesurant la période sur la figure 13.3.*
4. *Justifiez la valeur de c en interprétant cette courbe comme en retard (ou en avance) par rapport à $a\cos(bt)$ sur la figure 13.2.*
5. *Calculez $x(0)$, $x(1)$, P_x.*
6. *Calculez $\widehat{X}_0$ et $\widehat{X}_1$.*
7. *Dessiner sur le graphe $y_1(t) = x\left(\frac{t}{2}\right)$*

8. *Dessiner sur le graphe* $y_1(t) = x\,(t-1)$
9. *Dessiner sur le graphe* $y_1(t) = \frac{1}{2}x\,(t)$
10. *Dessiner sur le graphe* $y_1(t) = x\,(t) - x\,(t-2)$