

# TRAVAUX PRATIQUES DE TRAITEMENT NUMÉRIQUE DU SIGNAL

Télécom 2<sup>e</sup>année  
Année 2020-2021

Caroline Kulcsár et Gabriel Dauphin

## Déroulement des travaux pratiques

Il n'y a pas de préparation à rendre ni de compte-rendu à donner à la fin. En revanche au cours de la séance, vous mettrez dans un fichier Word, les valeurs numériques choisies et calculées et les figures obtenues ainsi que les instructions importantes des programmes. C'est ce fichier Word qui vous servira pour au cours de la séance présenter oralement ce que vous avez fait.

## Données nécessaires à la réalisation des TP

Ces données peuvent être téléchargées sur

<http://www-l2ti.univ-paris13.fr/~dauphin/PRG.zip>

Une version électronique de ce document est disponible sur

<http://www-l2ti.univ-paris13.fr/~dauphin/tptnste2.pdf>

## SÉANCE 1

### I Signal sinusoïdal et échantillonnage, DSP, signal carré

#### I.a Visualisation de données successives

Entrez les commandes suivantes :

```
t=TP1_2(0.1,2,0.5001,0.5);  
start(t)
```

- I.1. Que valent la période d'échantillonnage, la fréquence d'échantillonnage, la période de la sinusoïde et la fréquence de la sinusoïde ?

Solution :  $T_e = 0.5$ ,  $f_e = 2$ ,  $T = 10$ ,  $f_0 = 0.1$ .

## I.b Visualisation de données au cours du temps

Entrez les commandes suivantes :

```
t=TP1_2(0.05,1,20,0.5);  
start(t)  
:  
:  
stop(t)  
delete(t)
```

- I.2. Que valent la période d'échantillonnage, la fréquence d'échantillonnage, la période de la sinusoïde et la fréquence de la sinusoïde ?

Solution :  $T_e = 1$ ,  $f_e = 1$ ,  $T = 20$ ,  $f_0 = 0.05$ .

```
:  
    stop(t);  
delete(t);
```

où les paramètres et fonctions utilisées signifient :

- **f0** : fréquence de la sinusoïde en Hertz.
- **fe** : fréquence d'échantillonnage en Hertz.
- **duree** : le signal est visualisé entre l'instant actuel et **duree** secondes avant l'instant actuel.
- **period** : nombre de secondes entre chaque nouvelle évaluation, il est nécessaire que **period** > 0.2 pour éviter qu'il y ait un risque que la dernière évaluation ne soit terminée avant que ne commence l'évaluation suivante.
- **start(t)** : permet de déclencher le démarrage.
- **stop(t)** : permet d'arrêter le démarrage.
- **delete(t)** : permet de supprimer l'objet t. Ceci est ABSOLUMENT nécessaire avant d'en créer un autre sous le même nom.
- **clear** ne permet pas de supprimer l'objet, elle ne supprime que l'appellation.

où  $\omega_0 = 2\pi f_0$  est la pulsation. Pour obtenir un signal temps discret, on échantillonne  $x(t)$  avec une fréquence d'échantillonnage  $f_e$ .

**Valeurs numériques :**  $f_0 = 50$  Hz,  $a = 2$ ,  $\varphi = \pi/2$ .

- I.3. Tracez  $x_n$  (utiliser `stem`) sur une durée de 100 ms pour les fréquences d'échantillonnage suivantes :

$$f_e = 75\text{Hz}, f_e = 150\text{Hz}, f_e = 1\text{kHz}.$$

Précisez pour chaque valeur de  $f_e$  si la condition de Shannon-Nyquist est vérifiée et commentez à partir de l'allure des figures.

Solution :

```
a=2; f0=50; fe=75; tn=0:1/fe:(100e-3-1/fe); xn=a*sin(2*pi*f0*tn+pi/2);  
figure(1); stem(tn,xn);
```

- I.4. On échantillonne  $x(t)$  à la fréquence  $f_e = 500$  Hz sur l'intervalle  $[0, 40$  ms]. Le buffer utilisé n'a que 8 bits. Le signal est quantifié sur l'intervalle  $[-2, 2]$ .
- Que vaut  $N_q$ , le nombre de valeurs quantifiées possibles ?

l'erreur de quantification plus visible, on considérera un buffer de 3 bits. Solution :

```
a=2; f0=50; fe=500; tn=0:1/fe:(40e-3-1/fe); xn=a*sin(2*pi*f0*tn);  
b=3;
```

```
Q=2*a/(2^b);
```

```
xq=(floor(xn/Q)+0.5)*Q;
```

```
figure(1); plot(tn,xn,tn,xq);
```

- On appelle ici l'erreur de quantification, le signal formé de la valeur absolue de la différence entre le signal quantifié et le signal non-quantifié. Il s'agit ici d'une quantité qui varie au cours du temps. Calculez la moyenne de cette erreur de quantification. Que dire de l'erreur de quantification moyenne?

Solution :

```
a=2; f0=50; fe=500; tn=0:1/fe:(40e-3-1/fe); xn=a*sin(2*pi*f0*tn);  
b=8;
```

```
Q=2*a/(2^b);
```

```
xq=(floor(xn/Q)+0.5)*Q;
```

```
err=mean(abs(xn-xq)), %0.0022
```

- Cette erreur moyenne de quantification varie en fonction du nombre de bits. Tracez

```

a=2; f0=50; fe=500; tn=0:1/fe:(40e-3-1/fe); xn=a*sin(2*pi*f0*tn);
b_l=1:12;
Q_l=2*a./(2.^b_l);
err_l=zeros(size(b_l));
for Q_=1:length(Q_l)
    Q=Q_l(Q_);
    xq=(floor(xn/Q)+0.5)*Q;
    err_l(Q_)=mean(abs(xn-xq));
end
figure(1); semilogy(b_l,err_l);

```

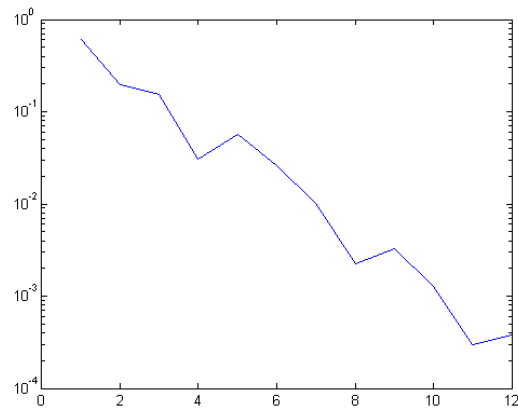


FIGURE 1 – corrége de l'erreur moyenne en fonction du nombre de bits en échelle logarithmique

1.5. Exprimez la densité spectrale de puissance

- I.6. Visualiser  $x_n$  en fonction du temps. Commenter.
- I.7. 

La condition de Shannon-Nyquist est-elle vérifiée ?
- I.8. Visualiser la DSP de  $x_n$  (utiliser `fft`) en fonction de la fréquence. Retrouve-t-on le pic de puissance associé à la fréquence  $f_0$  du signal  $x(t)$  ?

## I.d Visualisation de données au cours du temps lorsque la fréquence d'échantillonnage est faible par rapport à la fréquence de la sinusoïde

Entrez les commandes suivantes :

```
t=TP1_2(0.57,2,200,0.5);  
start(t)  
:  
:  
stop(t)  
delete(t)
```



Ce signal est échantillonné à la fréquence  $f_e$  pour donner le signal  $x_n$ . On pourra utiliser la fonction Matlab **square**.

- I.9. On prend  $f_e = 500$  Hz, et on échantillonne sur  $[0, 40\text{ms}]$ . Tracez le signal  $x_n$  (utiliser **square**).
- I.10. Visualisez la DSP de  $x_n$  en fréquence centrée (pour cela on utilisera **fft** et **fftshift**).
- I.11. 

Quelle est la valeur de la DSP correspondant à la fréquence nulle ? Expliquer.
- I.12. 

Quelle est la fréquence du second terme de la DSP en fonction de  $f_e$  ?
- I.13. 

Quelle est la fréquence du dernier terme de la DSP en fonction de  $f_e$  ?
- I.14. Expliquez la différence entre les DSP des signaux sinusoïdal et carré.

## I.f Signal et bruit blanc

On considère le signal sinusoïdal  $x_n$  défini à la question I.3. Ce signal est mesuré par un appareil induisant

- I.16. Que faudrait-il faire comme opération sur les fréquences (donc sur les coefficients de la transformée de Fourier) pour obtenir un signal moins bruité que  $y_n$  ?

## SEANCE 2

## II Fonction de corrélation, détection radar

- II.1. Une estimée de la fonction de corrélation de deux signaux  $x_n$  et  $y_n$  discrets périodiques est donnée par

$$C_{xy}(\ell) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_n y_{k+\ell}.$$

On note  $C_b(\cdot)$ ,  $C_x(\cdot)$  et  $C_y(\cdot)$  les fonctions d'autocorrélation des signaux  $b_n$ ,  $x_n$  et  $y_n$ , en fonction de l'écart ( $\ell$ ) entre les échantillons. En utilisant la fonction `xcorr`, calculer les fonctions de

Où se situe la principale différence ? Comment l'expliquer ?

- II.3. On va quand même utiliser cette fonction `xcorr` pour détecter la présence d'un motif dans un signal reçu.

On reprend pour cela le principe de fonctionnement simplifié du radar pour la détection de cibles. Le radar envoie *via* des ondes un motif de signal ; ce signal est réfléchi par les cibles et le radar le reçoit en retour, noyé bien évidemment dans du bruit. Connaissant le motif envoyé, on peut, par corrélation, détecter la présence de ce motif dans le signal bruité reçu (et donc connaître la distance de la cible : on connaît en effet la vitesse de propagation des ondes et le motif détecté a parcouru deux fois la distance radar-cible).

Afin de simuler la détection par corrélation, il faut d'abord choisir un motif à envoyer, et étudier la forme de la corrélation obtenue. On propose de tester l'autocorrélation des signaux sui-

corrélation que vous utiliserez pour la suite (justifiez ce choix).

II.4. Simuler le signal reçu noté  $r$ , pour un faible nombre de cibles :

- créer un signal reçu (non bruité) de longueur 300, avec 3 cibles, certaines cibles pouvant être très proches

- rajouter un bruit blanc gaussien centré de variance à choisir.

II.5. Calculer l'intercorrélation entre le motif et le signal reçu, et l'afficher pour les décalages positifs uniquement. Qu'observe-t-on ?

II.6. Recommencer le calcul avec différents niveaux de bruit pour le signal reçu. Que constate-t-on ? Comment pourrait-on faire pour avoir une détection automatique ?

II.7. Écrivez le lien entre la densité spectrale d'énergie d'un signal  $y_n$  et sa fonction d'autocorrélation, lorsque ce signal est temps discret et non-périodique et nul en dehors des

II.10. Démontrez la question II.9.

II.11. Dans cette expérimentation on se place dans le cadre où le vrai signal est périodique de période  $N$ . Dans Matlab, la fonction de corrélation `xcorr` est définie par

$$C(x, y, \ell) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)y(k + \ell), \text{ avec } x(k) = y(k) = 0 \text{ si } k < 0 \text{ ou } k \geq N,$$
$$\mathbf{xcorr}(x, y, L) = [C(x, y, -L) \dots C(x, y, 0) \dots C(x, y, L)]$$

pour  $x$  et  $y$  vecteurs de taille  $N$ . En dehors de l'intervalle  $[0, \dots, N - 1]$ , les échantillons sont pris égaux à 0. Pourquoi cette fonction `xcorr` ne peut être utilisée pour vérifier numériquement l'équation donnée à la question II.9 ?

## SEANCE 3

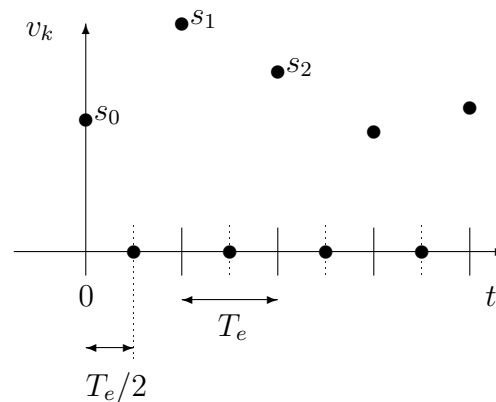
### III Sur-échantillonnage d'un signal discret

On considère le signal  $s_n$  correspondant à l'échantillonnage sur  $[0, 10 \text{ s}]$  à la fréquence  $f_e$  d'un signal à temps continu  $s(t)$ . On suppose que le vrai signal  $s(t)$  est périodique de période  $10\text{s}$ . Le signal  $s_n$  est contenu dans le fichier `signalbase.mat`. Ce fichier est contenu dans un fichier appelé `data_tptnste2.zip`. Il se trouve sur un site internet sur la première page du fascicule.

- III.1. On a pris  $f_e = 25 \text{ Hz}$  et l'on a obtenu 250 échantillons de  $s_n$ . Représenter la DSP de  $s_n$  en fréquences centrées en Hertz (échelle semi-logarithmique).
- III.2. Calculer par la formule d'interpolation de Shannon (que vous tronquerez en justifiant votre approximation) la valeur du signal  $s$  à l'instant  $t = 1,3 \text{ s}$  à partir des valeurs de  $s_n$ . Montrez que cela vaut approximativement

$$s(1,3) = 3,52$$

- III.3. Quelle est la fréquence maximale observable dans  $s_n$  lorsque  $f_e = 25 \text{ Hz}$  ?



- III.4. Quelle est la fréquence maximale générée dans  $v_n$  par l'intercalage d'un zéro (échantillon nul) entre chaque échantillon  $s_n$  ?
- III.5. Représenter la DSP de  $v_n$  en fréquences centrées en Hertz. Expliquer le résultat.
- III.6. Pour réaliser un sur-échantillonnage de  $s_n$ , on va filtrer  $v_n$  par un filtre passe-bas. Quel est l'intérêt de ce type de filtrage pour le sur-échantillonnage ? Quelle doit-être la fréquence de coupure ? Quelle sera la fréquence d'échantillonnage correspondant au signal ainsi filtré ?

On propose le filtre  $H_1$  défini par l'équation de filtrage suivante :

- III.9. Filtrer  $v_n$  et visualiser  $y_n$ . Comparer  $y_n$  avec  $s_n$  en affichant les courbes superposées.

On propose maintenant le filtre  $H_2$  défini par

$$z_n = \frac{1}{2}(v_n + 2v_{n-1} + v_{n-2}).$$

- III.10. Que vaut  $z_n$  en fonction de  $s_n$  ?
- III.11. Visualiser la réponse en fréquence du filtre et la comparer avec celle de  $H_1$ .
- III.12. Filtrer  $v_n$  et visualiser  $z_n$ . Le signal ainsi filtré contient-il plus d'information que  $v_n$  ? Comparer  $z_n$  avec  $s_n$  en affichant les courbes superposées, conclure.
- III.13. Si l'on voulait réaliser un filtre idéal pour couper les fréquences indésirables dans  $v_n$ , quelle serait la réponse en fréquence d'un tel filtre (donnez le gabarit et précisez la fréquence de coupure) ?
- III.14. Comment réaliser ce filtre idéal en utilisant la TFD ? Quels sont les inconvénients majeurs de



## SEANCE 4

### IV Filtrage d'un signal bruité

#### IV.a Analyse de la relation entrée-sortie d'un filtre

Entrez les commandes suivantes :

```
t=TP4();  
start(t)  
:  
:  
stop(t)  
delete(t)
```

Le graphe du haut permet de visualiser l'entrée du filtre. Il s'agit d'une sinusoïde bruitée par un bruit blanc gaussien additif.

IV.1. Quelle est la fréquence d'échantillonnage et la fréquence de la sinusoïde? Solution :  $f_e = 2$ ,  $f_0 = 0.1$ .

IV.3. Quelle est approximativement l'amplitude de la sinusoïde du graphe du haut et quelle est celle de la sinusoïde du graphe du milieu ?

Solution :  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 0.5$ .

Le graphe du bas permet de visualiser la réponse fréquentielle du filtre.

IV.4. Le filtre est-il un passe-bas, un passe-haut ? Solution : Passe-bas

IV.5. Que vaut la fréquence de coupure du filtre ? Elle se lit au bas du trait fin vertical du graphique du bas et il est possible de faire un zoom. Solution :  $f_c = 0.033$

IV.6. Comment peut-on lire sur la réponse fréquentielle, le rapport entre l'amplitude de la sinusoïde du graphe du haut et l'amplitude de la sinusoïde du graphe du milieu ? Solution : C'est la réponse fréquentielle en la fréquence  $f_0$ , c'est-à-dire ici 0.35.

## IV.b Analyse d'un filtre

$H(z)$  est la fonction de transfert et la deuxième équation est la relation entrée-sortie du filtre.  $\rho$ , appelée **rho**, est un paramètre entre 0 et 1. Sa réponse fréquentielle en  $f = 0$  est 1, quelle que soit la valeur de  $\rho$ , en effet :

$$\widehat{H}(0) = H(1) = \frac{1 - \rho}{1 - \rho \times 1} = 1$$

Il est possible de modifier la valeur de  $\rho$  pendant la simulation, c'est-à-dire après **start(t)** et avant **stop(t)** avec la commande suivante qui fixe  $\rho = 0.85$  :

```
t=TP4_modifier_rho(t,0.85);
```

IV.7. Ajustez  $\rho$  de façon que la sinusoïde en sortie ait à peu près à 80% de l'amplitude de la sinusoïde en entrée et que l'impact du bruit sur le signal de sortie soit assez faible. Solution : Par exemple  $\rho = 0.65$ .

IV.8. Ajustez  $\rho$  de façon que le signal en sortie soit très similaire au signal en entrée. Solution : Par exemple  $\rho = 0.1$ .

- IV.9. Soit un signal  $x$  noyé dans un bruit  $b$ . Définir le rapport signal-à-bruit (RSB) en fonction de la puissance des signaux  $x$  et  $b$ , et définir la puissance d'un signal. Comment obtient-on un RSB en dB ?
- IV.10. Générer le signal bruité  $y$  à partir de  $x$ , en ajoutant le bruit blanc  $b$  avec successivement plusieurs valeurs de  $\sigma$  :  $1/10$ ,  $1/2$ ,  $1$  et  $2$ . Pour chaque valeur, donner le rapport signal-à-bruit. Que remarque-t-on ?
- IV.11. Afficher les DSP du signal utile  $x$  d'une part, et du bruit  $b$  de la question précédente d'autre part. En comparant les hauteurs des DSP en haute fréquence, justifier l'emploi d'un filtre passe-bas pour atténuer le bruit.

On propose de filtrer le signal  $y$  par un filtre moyennneur  $H$  causal, défini par la réponse impulsionnelle :

$$\begin{aligned} h_n &= 1/P, \text{ pour } 0 \leq n \leq P-1, \\ h_n &= 0 \text{ sinon.} \end{aligned} \quad (1)$$

- IV.12. Exprimer la sortie  $z$  du filtrage de  $y$  par  $H$

On se propose maintenant de filtrer le signal par un filtre défini par

$$\begin{aligned} a_1 z_n &= a_2 z_{n-1} + y_n, \quad n \geq 0 \\ z_n &= 0 \text{ si } n < 0. \end{aligned} \quad (2)$$

- IV.15. Montrer que ce filtre est un filtre RII.
- IV.16. Calculer les coefficients  $h_n$  de la réponse impulsionnelle théorique de ce filtre.
- IV.17. En prenant  $a_1 = 1$  et  $a_2$  au choix, vérifier numériquement le résultat de la question IV.16 sous Matlab à l'aide de la fonction `impz`.
- IV.18. Quelle condition faut-il sur  $a_1$  et  $a_2$  pour assurer la stabilité du filtre ?
- IV.19. A quoi cela servirait-il d'imposer la condition
- $$\sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n = 1 \quad ?$$
- IV.20. Choisir deux coefficients  $a_1$  et  $a_2$  pour assurer à la fois la stabilité du filtre et la condition ci-dessus.

IV.23. Comparer les deux techniques de filtrage de bruit proposées et conclure.

## SEANCE 5

### V Synthèse de filtres

#### V.a Illustration en temps réel

Entrez les commandes suivantes :

```
t=TP5();  
start(t)  
:  
:  
stop(t)  
delete(t)
```

Le graphe du haut est la visualisation d'un signal sinusoïdal bruité par un bruit blanc gaussien additif.

V.1. Quelle est la fréquence d'échantillonnage et la fréquence de la sinusoïde? Solution :  $f_s = 2$

V.2. Quelle est la durée  $\Delta t$  ? Solution :  $\Delta t = 20$ . C'est  $\frac{1}{f_e}$  fois le nombre de points sur le graphique du bas ou c'est l'inverse de la distance en Hertz en deux points successifs.

V.3. Retrouvez sur le graphique du bas la fréquence de la sinusoïde présente dans le signal visualisée dans le graphique du haut ? Solution : Ce sont les deux pics associés à 0.1Hz et  $-0.1\text{Hz}$ .

Il est possible de modifier  $\Delta t$  qui est notée `delta_t` avec

```
t=TP5_modifier_delta_t(t,8);
```

Cette commande est à placer avant `stop(t)` ; et après `start(t)` ; Entrez cette commande.

V.4. Comment expliquez-vous que le point central ait un mouvement assez régulier ? Solution : Le point central est associé à  $\hat{X}(0)$  et vaut la moyenne du signal entre l'instant présent et l'instant présent moins  $\Delta t$ . Quand  $\Delta t$  est plus faible que  $T/2$ , cette moyenne évolue avec le temps.

Entrez la commande suivante :

En général, le filtrage des signaux passe par la détermination des caractéristiques souhaitées ou la définition d'un gabarit, ces caractéristiques ou ce gabarit dépendent du traitement que l'on désire effectuer. Ainsi, les principaux gabarits rencontrés en pratique correspondent aux filtrages passe-bas, passe-bande, coupe-bande et passe-haut. On va tester différents types de filtrage sur le signal bruité  $y = x + b$  où  $b$  est un bruit blanc gaussien centré de variance  $\sigma^2 = 0,5$  et  $x$  est le signal échantillonné donné par `signalbase.mat` pour lequel on suppose maintenant une **fréquence d'échantillonnage égale à 1 kHz**.

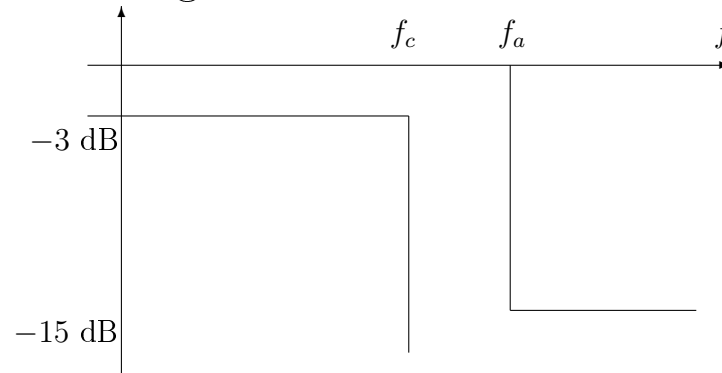
## V.b Filtre passe-bas

Un filtre passe-bas idéal a une réponse fréquentielle qui est définie sur l'intervalle  $[-f_e/2, f_e/2]$  par  $\mathbf{1}_{[-f_e/2, f_e/2]}(f)$ . Une façon d'implémenter une approximation de ce filtrage pour un signal défini sur une certaine durée consiste à considérer que le signal est périodique de cette durée à appliquer la transformée de Fourier de ce signal sur cette durée à multiplier la transformée obtenue par la



RIF dont les coefficients correspondent à des fenêtres de pondération. Choisir une fenêtre qui vous paraît adéquate et synthétiser le filtre en utilisant `fir1`.

- V.8. Affichez la fonction de transfert du filtre choisi (à l'aide de `freqz`) et commenter le graphique.
- V.9. Appliquez un tel filtre au signal et examinez l'effet de la variation de la taille de la fenêtre sur les résultats.
- V.10. On décide maintenant d'utiliser un filtre RII pour filtrer le bruit. Le gabarit du filtre est le suivant :



Quelles valeurs donner à  $f_c$  et  $f_a$  (respectivement fréquence de coupure et d'atténuation) ?

- V.11. Calculez numériquement l'ordre optimal en utilisant la fonction `buttord`. Dans l'aide en ligne,

réponse fréquentielle a un gain inférieur à  $R_s$ .

- V.12. Calculez avec **butter** ce filtre et appliquez le filtre au signal  $y_n$ . Comparez les résultats obtenus en changeant l'ordre du filtre.

La méthode vue en cours permet de synthétiser un filtre numérique de Butterworth un passe-bas de fréquence de coupure  $f_c^\# = f_e/3$  à l'ordre 2 et conduit à

$$H^\#(z) = \frac{3 + 6z^{-1} + 3z^{-2}}{(4 + \sqrt{6}) + 4z^{-1} + (4 - \sqrt{6})z^{-2}}$$

- V.13. Montrez que le filtre obtenu est strictement le même que celui que l'on aurait obtenu avec **butter** à l'ordre 2.

Solution :

```
[B_mat,A_mat]=butter(2,2/3);  
B_cal=[3 6 3];  
A_cal=[4+sqrt(6) 4 4-sqrt(6)];  
abs(B_cal/A_cal(1)-B)<=1e-14,  
abs(A_cal/A_cal(1)-A)<=1e-14,
```

V.14. On considère le signal

$$y_n = x_n + b_n$$

où  $b_n$  est un bruit blanc centré de variance 0,5, et  $x_n$  le signal `signalbase.mat` perturbé par la sinusoïde. Générer  $y_n$  et visualiser le signal.

V.15. Visualiser la DSP de  $y_n$ . Que remarque-t-on ?

V.16. Réaliser un filtre RIF coupe-bande de fréquence caractéristique 50 Hz et de largeur de bande 10 Hz. Vérifier le gabarit à l'aide de `freqz`. Combien faut-il de coefficients ? Commenter.

V.17. Réaliser maintenant un filtre RII coupe-bande de fréquence caractéristique 50 Hz et de largeur de bande 10 Hz. Vérifier le gabarit à l'aide de `freqz`. Combien faut-il de coefficients ? Commenter.

V.18. Filtrer  $y$  par un filtre passe-bas puis par l'un des deux filtres ci-dessus de façon à supprimer le bruit et la sinusoïde indésirable. Justifier l'utilisation du filtre passe-bas avant le filtre coupe-