Examen traitement numérique du signal

Mercredi 13 décembre

Durée : 1h30

Une copie double manuscrite est autorisée. Le téléphone portable est interdit. À l'issue de l'épreuve, le **sujet est à rendre** avec la copie.

NOM : **Prénom :**

On dispose d'une caméra vidéo qui envoie le signal vidéo à une carte disposée dans un ordinateur relié à internet. On cherche à visualiser à distance la vidéo transmise. La caméra délivre 25 images par seconde avec une résolution de 64 par 64 pixels. Chaque pixel est codé sur 256 niveaux de gris. Les différents pixels de chaque image sont transmis les uns derrière les autres sous la forme d'une suite de nombre entre -127 et 128, notée u_n.

1. *Quelle est la période d'échantillonnage ? Quelle est la fréquence d'échantillonnage ? Quel serait le débit de cette liaison internet ?*

Pour transmettre une image de plus grande taille, on ne transmet qu'un quart des échantillons au débit calculé précédemment. On sous-échantillonne le signal en ne considérant qu'un nombre tous les 4 nombres et on utilise pour envoyer ce dernier la même fréquence d'échantillonnage que précédemment. Mathématiquement cela revient à écrire que $v_n = u_{4n}$. En Matlab, on écrirait cela sous la forme :

```
v=u(1:4:length(u));
```

On note $u(t)$ et $v(t)$ les signaux en temps continus dont u_n et v_n seraient les signaux échantillonnés.

2. *Compte tenu de l'énoncé un peu différent, que sont les nouvelles fréquences d'échantillonnage de u_n et v_n.*

3. *D'après le critère de Shannon-Nyquist, quelle condition devrait vérifier $u(t)$ pour qu'à partir de v_n on puisse reconstruire $u(t)$.*

4. *On considère une image dont la première ligne est définie par u_n qui est une alternance de bande blanche (teinte codée ici à 128) et de bandes noires (teinte codée ici à -127). Les bandes blanches et noires juxtaposées et font chacune 5 pixels. La suite u_n est représentée sur la figure 1. Représenter la suite v_n sur la figure 1. Le critère de Shannon-Nyquist est-il respecté ?*

On utilise maintenant un filtre anti-repliement de spectre avant de prélever un échantillon sur quatre. Maintenant les données transmises sont $w_n = \frac{1}{4}(u_{4n} + u_{4n-1} + u_{4n-2} + u_{4n-3})$.

5. *Dessiner w_n sur la figure 1. Pourrait-on reconstruire u_n à partir de w_n.*

6. *Quelle est la réponse impulsionnelle du filtre qui a permis de construire w_n à partir de u_n ?*

Solution :

1. $T_e = \frac{1}{f_e}$ $f_e = 25 * 64 * 64 = 102$kHz. Le débit est de $fe \times 8 = 819$kbps.

2. $f_e^v = f_e$ et $f_e^u = 4f_e$.

3. Le spectre de $u(t)$ doit vérifier $f_{\max} < \frac{f_e^v}{2}$.

Exercice 1.

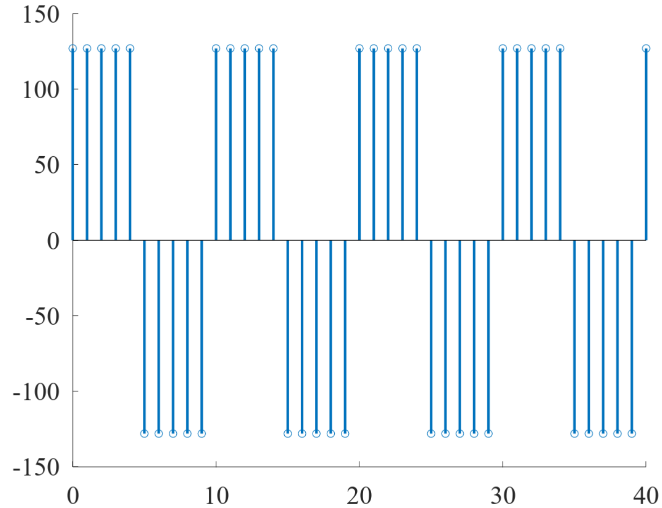

Figure 1: Première ligne d'une image, l'échelle des abscisses correspond au numéro des échantillons et non à une échelle en temps.

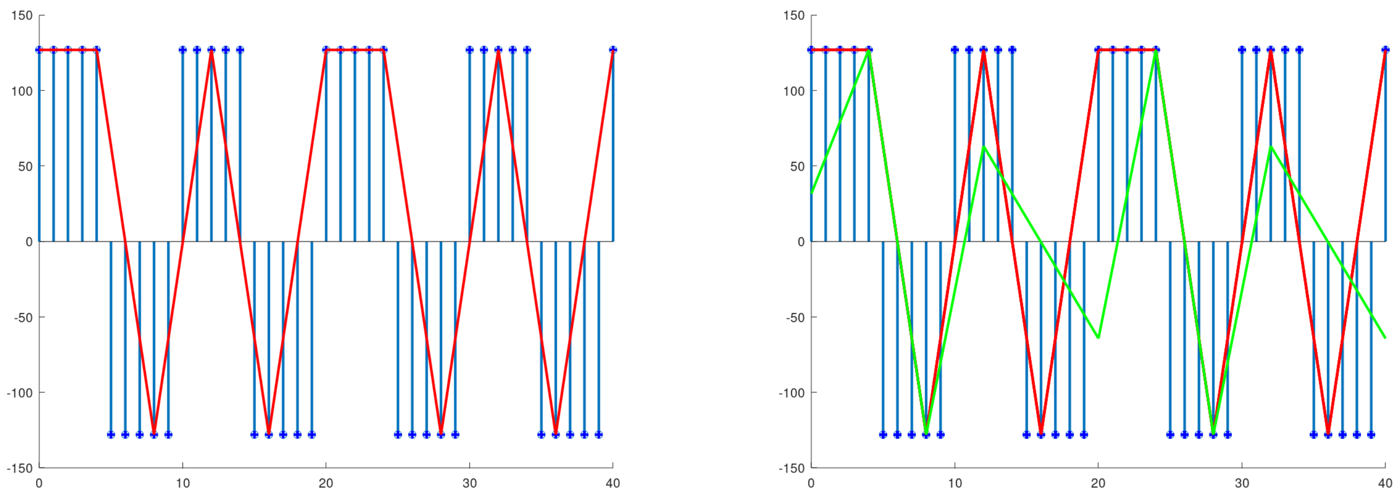

Figure 2: Graphe représentant à gauche u_n et v_n, à droite u_n, v_n et w_n.

4. ```
   n=0:40;
   un=127*(mod(n,10)<5)-128*(mod(n,10)>=5);
   set(gca, 'FontSize', 20, 'fontName','Times');
   figure(1); stem(n,un,'b','linewidth',2); %fig_xex36.png
   n1=n(1:4:end);
   vn=un(1:4:end);
   figure(1); plot(n,un,'b+','linewidth',2,n1,vn,'r-','linewidth',2); %fig_xex36_2.png
   ```

5. ```
   wn=filter([1 1 1 1]/4,1,un)(1:4:end);
   figure(1); plot(n,un,'b+','linewidth',2,n1,vn,'r-','linewidth',2,n1,wn,'g-','linewidth',2); %fig_
   ```

   On ne peut retrouver u_n.

6. La réponse impulsionnelle est $h_n = \frac{1}{4}(\delta_n + \delta_{n-1} + \delta_{n-2} + \delta_{n-3})$

Exercice 2. *On considère un signal* $x(t) = \mathbf{1}_{[0,T/2[}(t) - \mathbf{1}_{[T/2,T[}(t)$ *périodique de période* T.

1. *Sachant que la transformée de Fourier de* $\mathbf{1}_{[-1/2,1/2]}(t)$ *vaut* $\frac{\sin(\pi f)}{\pi f}$*, calculez la transformée de Fourier de* $y_1(t) = \mathbf{1}_{[0,1[}(t)$
2. *Calculez la transformée de Fourier de* $y_2(t) = \mathbf{1}_{[0,T/2[}(t)$
3. *Calculez la transformée de Fourier de* $y_3(t) = \mathbf{1}_{[0,T/2[}(t) - \mathbf{1}_{[T/2,T[}(t)$
4. *En remarquant les points communs entre la série de Fourier et la transformée de Fourier, montrez que* $\widehat{X}_k = \frac{1}{T}\widehat{Y}_3\left(\frac{k}{T}\right)$
5. *montrez que la transformée de Fourier de* $x(t)$ *est*

$$\widehat{X}(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{2}{j\pi(2k+1)}\delta\left(f - \frac{2k+1}{T}\right)$$

Solution :

1. $$\hat{Y}_1(f) = e^{-j\pi f}\frac{\sin(\pi f)}{\pi f}$$

2. $y_2(t) = \mathbf{1}_{[0,T/2[}(t) = y_1(\frac{2t}{T})$

$$\widehat{Y}_2(f) = \frac{T}{2}\widehat{Y}_1(\frac{Tf}{2}) = e^{-j\pi\frac{fT}{2}}\frac{\sin(\pi fT/2)}{\pi f}$$

3. $y_3(t) = y_2(t) - y_2(t - \frac{T}{2})$

$$\widehat{Y}_3(f) = \hat{Y}_2(f) - \hat{Y}_2(f)e^{-2j\pi fT/2} = e^{-j\pi\frac{fT}{2}}\frac{\sin(\pi fT/2)}{\pi f}(1 - e^{-j\pi fT}) = 2je^{-j\pi fT}\frac{\sin^2(\pi fT/2)}{\pi f}$$

4. On applique les transformées de Fourier sur $y_3(t)$ et sur $x(t)$.

$$\begin{cases} \widehat{Y}_3(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} y_3(t)e^{-j2\pi ft}\,dt = \int_0^T x(t)e^{-j2\pi ft}\,dt \\ \widehat{X}_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-j2\pi\frac{k}{T}t}\,dt \qquad = \frac{1}{T}\widehat{Y}_3\left(\frac{k}{T}\right) \end{cases}$$

5. $$\widehat{X}_0 = 0 \text{ et } \widehat{X}_k = 2je^{-j\pi k}\frac{\sin^2(\pi k/2)}{\pi k}$$

On observe que si k est paire, $\widehat{X}_k = 0$. On pose alors $k = 2k' + 1$.

$$\widehat{X}_k = 2je^{-j\pi(2k'+1)}\frac{\sin^2(\pi(2k'+1)/2)}{\pi(2k'+1)} = \frac{2}{j\pi(2k'+1)}$$

Exercice 3. *On considère un filtre défini par sa relation entrée-sortie :*

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}y(t) + y(t) = x(t) - x(t-4) \tag{1}$$

1. *Trouvez sa réponse fréquentielle et montrez que le module de cette réponse fréquentielle est*

$$\left|\widehat{H}(f)\right| = \frac{2\,|\sin(4\pi f)|}{\sqrt{1+\pi^2 f^2}}$$

2. *Représentez graphiquement le module de la réponse fréquentielle sur l'intervalle* $f \in [-1, 1]$*, en soignant l'échelle des abscisses.*

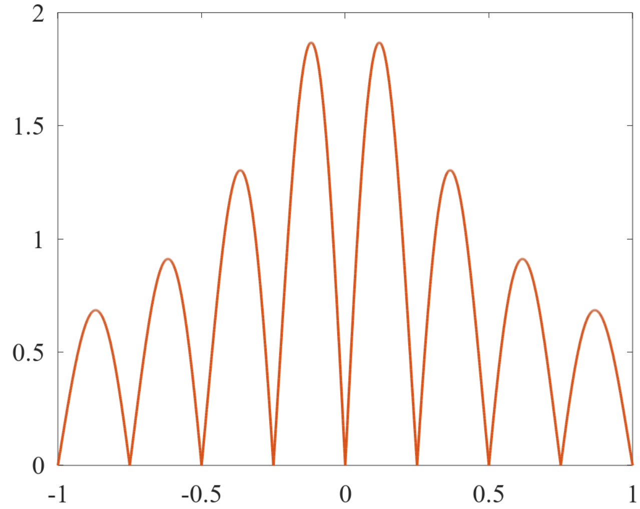

Figure 3: Module de la réponse fréquentielle Exercice 3

Solution :

1. Les propriétés de la transformée de Fourier sur le retard montre que

$$\text{TF}\left[x(t-4)\right](f) = \widehat{X}(f)e^{-8j\pi f}$$

   La réponse fréquentielle est

$$\widehat{H}(f) = \frac{1-e^{-8j\pi f}}{1+j\pi f}$$

2.

$$\left|\widehat{H}(f)\right| = \frac{\left|e^{-4j\pi f}2j\sin(4\pi f)\right|}{|1+j\pi f|} = 2\frac{|\sin(4\pi f)|}{\sqrt{1+\pi^2 f^2}}$$

   La courbe est sur la figure 3, elle présente certaines ressemblances avec un sinus cardinal (i.e. le dénominateur est approximativement celui d'un sinus cardinal sauf qu'il est non-nul en la fréquence nulle de sorte que la réponse fréquentielle est elle nulle en la fréquence nulle).

```
f=-1:1e-3:1;
H=abs((1-exp(-8j*pi*f))./(1+j*pi*f));
H1=2*abs(sin(pi*f*4))./sqrt(1+pi^2*f.^2);
figure(1); plot(f,H,f,H1,'linewidth',2);
set(gca, 'FontSize', 20, 'fontName','Times');
```