

LIMITES DES FONCTIONS – Chapitre 1/2

► Tout le cours en vidéo : <https://youtu.be/YPwJyYDsmxM>

Partie 1 : Limite d'une fonction à l'infini

1) Limite infinie en ∞

Définition :

On dit que la fonction f admet pour **limite** $+\infty$ **en** $+\infty$, si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut pourvu que x soit suffisamment grand.

Remarque : On a une définition analogue en $-\infty$.

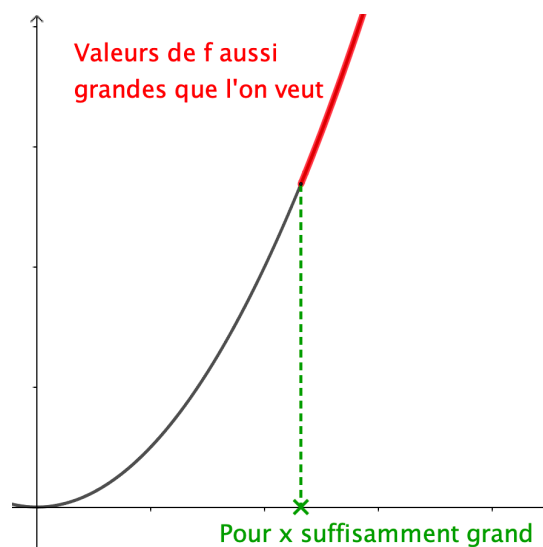
Exemple :

La fonction définie par $f(x) = x^2$ a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

On a par exemple : $f(100) = 100^2 = 10000$
 $f(1000) = 1000^2 = 1\,000\,000$

Les valeurs de la fonction deviennent **aussi grandes que l'on veut** dès que x est **suffisamment grand**.

Si on prend un **intervalle** $]a ; +\infty[$ **quelconque**, toutes les valeurs de la fonction appartiennent à cet intervalle dès que x est **suffisamment grand**.

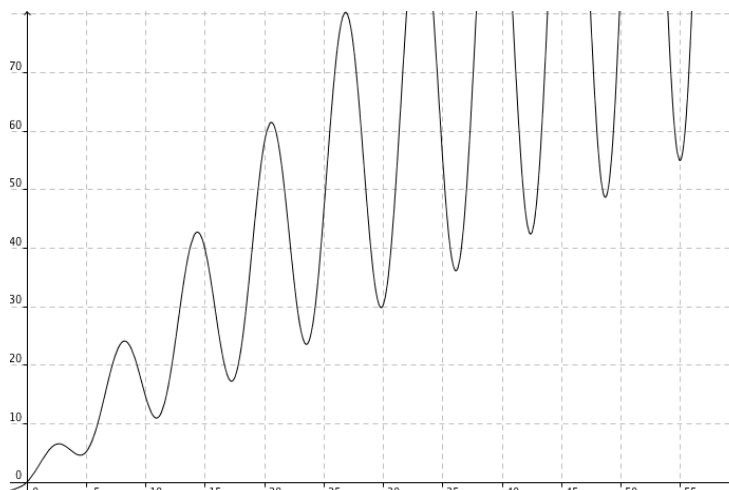


Définitions : - On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle $]a ; +\infty[$, a réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand et on note : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

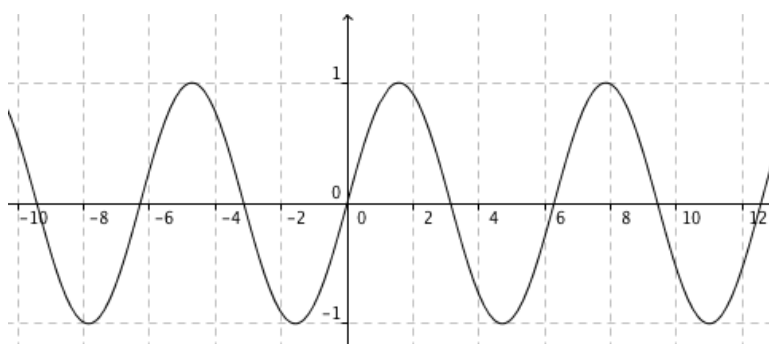
- On dit que la fonction f admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle $]-\infty ; b[$, b réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand et on note : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

Remarques :

- Une fonction qui tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ n'est pas nécessairement croissante. Par exemple :



- Il existe des fonctions qui ne possèdent pas de limite infinie. C'est le cas des fonctions sinusoïdales.



2) Limite finie en ∞

Définition :

On dit que la fonction f admet pour **limite L en $+\infty$** , si $f(x)$ est aussi proche de L que l'on veut, pourvu que x soit suffisamment grand et on note : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$.

Remarque : On a une définition analogue en $-\infty$.

Exemple :

La fonction définie par

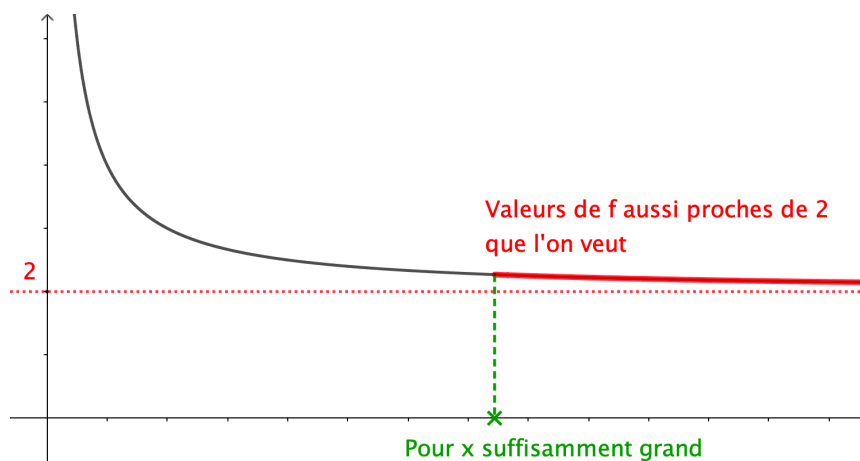
$$f(x) = 2 + \frac{1}{x} \text{ a pour limite } 2$$

lorsque x tend vers $+\infty$.

On a par exemple :

$$f(100) = 2 + \frac{1}{100} = 2,01$$

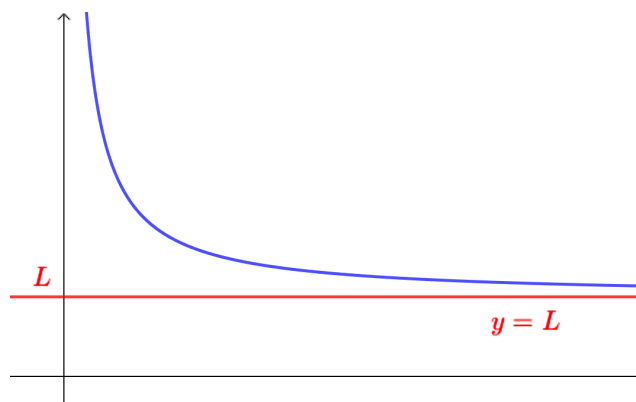
$$f(10000) = 2 + \frac{1}{10000} = 2,0001$$



Les valeurs de la fonction se resserrent **autour de 2** dès que x est **suffisamment grand**.
La courbe de la fonction "se rapproche" de la droite d'équation $y = 2$ sans jamais la toucher.

Si on prend un **intervalle ouvert quelconque contenant 2**, toutes les valeurs de la fonction appartiennent à cet intervalle dès que **x est suffisamment grand**.

Définition : Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$, la droite d'équation $y = L$ est appelée **asymptote horizontale** à la courbe de la fonction f en $+\infty$.



Définition :

On dit que la fonction f admet pour limite L en $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand et on note :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L.$$

Remarque : On a des définitions analogues en $-\infty$.

3) Limites des fonctions de référence

Propriétés :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$ (pour n pair)
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$ (pour n impair)
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

Partie 2 : Limite d'une fonction en un réel A

1) Définition

Définition :

On dit que la fonction f admet pour **limite $+\infty$ en A**, si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut pourvu que x soit suffisamment proche de A.

Exemple :

La fonction définie par $f(x) = \frac{1}{3-x} + 1$ a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers 3.

On a par exemple :

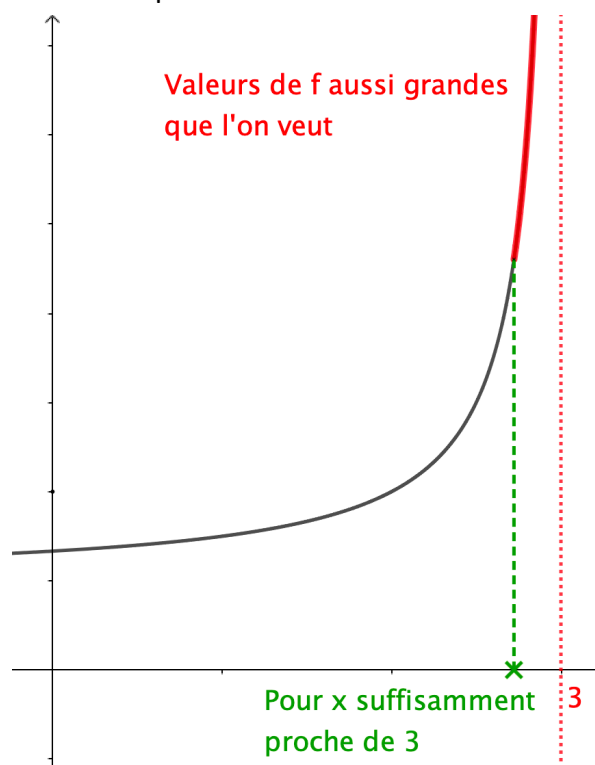
$$f(2,99) = \frac{1}{3-2,99} + 1 = 101$$

$$f(2,9999) = \frac{1}{3-2,9999} + 1 = 10\,001$$

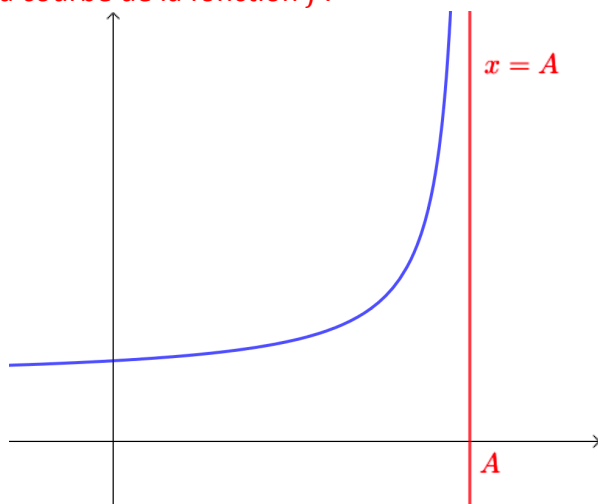
Les valeurs de la fonction **deviennent aussi grandes que l'on veut** dès que x est **suffisamment proche de 3**.

La courbe de la fonction "se rapproche" de la droite d'équation $x = 3$ sans jamais la toucher.

Si on prend **un intervalle $]a ; +\infty[$ quelconque**, toutes les valeurs de la fonction appartiennent à cet intervalle dès que x est **suffisamment proche de 3**.



Définition : Si : $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = -\infty$, la droite d'équation $x = A$ est appelée **asymptote verticale** à la courbe de la fonction f .



Définitions : - On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en A si tout intervalle $]a ; +\infty[$, a réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de A et on note : $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = +\infty$.
 - On dit que la fonction f admet pour limite $-\infty$ en A si tout intervalle $]-\infty ; b[$, b réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de A et on note : $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = -\infty$.

2) Limite à gauche, limite à droite :

Exemple :

Considérons la fonction inverse définie sur \mathbb{R}^* par

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

La fonction f admet des limites différentes en 0 selon que :

$x > 0$ ou $x < 0$.

- Si $x > 0$: Lorsque x tend vers 0, $f(x)$ tend vers $+\infty$ et on note :

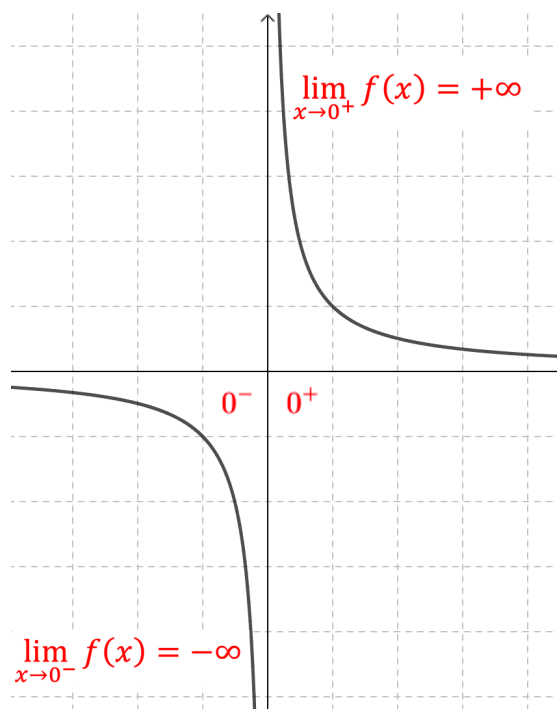
$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty \text{ ou } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty.$$

On parle de **limite à droite de 0**

- Si $x < 0$: Lorsque x tend vers 0, $f(x)$ tend vers $-\infty$ et on note :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty \text{ ou } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty.$$

On parle de **limite à gauche de 0**.



Méthode : Déterminer graphiquement des limites d'une fonction



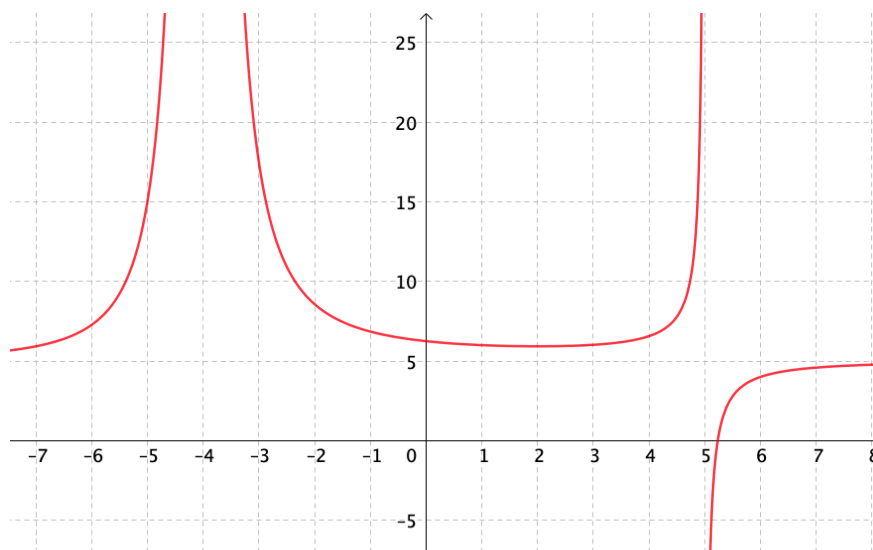
Vidéo <https://youtu.be/9nEJCL3s2eU>

On donne ci-dessous la représentation graphique de la fonction f .

a) Lire graphiquement les limites en $-\infty$, en $+\infty$, en -4 et en 5.

b) Compléter alors le tableau de variations de f .

x	$-\infty$	-4	2	5	$+\infty$
$f(x)$					



Correction

a) • $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 5$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5$

La courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 5$ en $-\infty$ et $+\infty$.

• $\lim_{x \rightarrow -4} f(x) = +\infty$

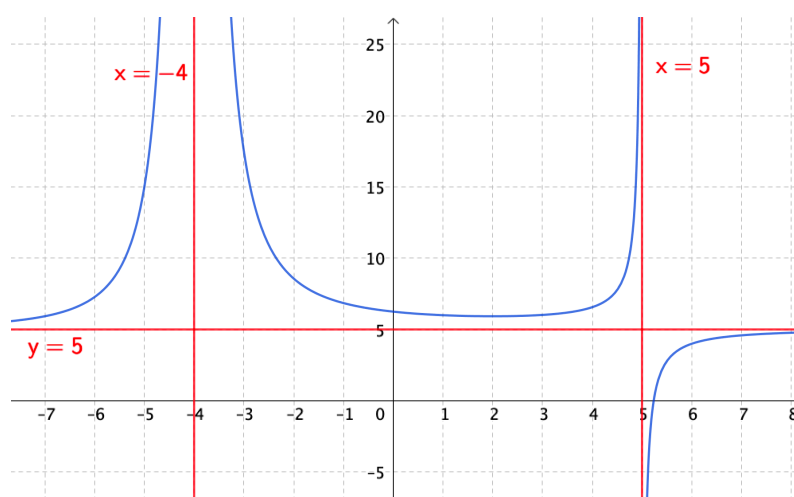
La courbe de f admet une asymptote verticale d'équation $x = -4$.

• $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = -\infty$

La courbe de f admet une asymptote verticale d'équation $x = 5$.

2)

x	$-\infty$	-4	2	5	$+\infty$
$f(x)$	5	$+\infty$	6	$+\infty$	5



Partie 3 : Opérations sur les limites

1) Utiliser les propriétés des opérations sur les limites

α peut désigner $+\infty$, $-\infty$ ou un nombre réel.

SOMME

$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) + g(x) =$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.*

* Forme indéterminée : On ne peut pas prévoir la limite éventuelle.

PRODUIT ∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$

$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) =$	L	L	∞	0
$\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) =$	L'	∞	∞	∞
$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) \times g(x) =$	$L \times L'$	∞	∞	F.I.

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est $+\infty$ ou $-\infty$.

QUOTIENT ∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$

$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) =$	L	$L \neq 0$	L	∞	∞	0
$\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) =$	$L' \neq 0$	0	∞	L	∞	0
$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} =$	$\frac{L}{L'}$	∞	0	∞	F.I.	F.I.

On applique la règle des signes pour déterminer si le quotient est $+\infty$ ou $-\infty$.

Méthode : Calculer la limite d'une fonction à l'aide des formules d'opération

 Vidéo <https://youtu.be/at6pFx-Umfs>

Déterminer les limites suivantes : a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 5)(3 + x^2)$ b) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1-2x}{x-3}$

Correction

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 5)(3 + x^2) = ?$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} x - 5 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} 3 + x^2 = +\infty \end{cases}$$

Comme **limite d'un produit** : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 5)(3 + x^2) = -\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1-2x}{x-3} = ?$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} 1 - 2x = 1 - 2 \times 3 = -5 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} x - 3 = 0^- \end{cases}$$

Une limite de la forme « $\frac{5}{0}$ » est égale à « ∞ ».

Donc, d'après la règle des signes, une limite de la forme « $\frac{-5}{0^-}$ » est égale à « $+\infty$ ».

D'où, comme **limite d'un quotient** : $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1-2x}{x-3} = +\infty$.

2) Cas des formes indéterminée

Comme pour les suites, on rappelle que :

Les quatre **formes indéterminées** sont, par abus d'écriture :

$$\infty - \infty \qquad 0 \times \infty \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \frac{0}{0}$$

Méthode : Lever une forme indéterminée à l'aide de factorisations (1)

 Vidéo <https://youtu.be/4NQbGdXThrk>

Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^3 + 2x^2 - 6x + 1$

Correction

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^3 + 2x^2 - 6x + 1 = ?$$

$$\bullet \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^3 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 = +\infty. \end{cases}$$

On reconnaît une forme indéterminée du type " $\infty - \infty$ ".

• Levons l'indétermination en **factorisant par le monôme de plus haut degré** :

$$-3x^3 + 2x^2 - 6x + 1 = x^3 \left(-3 + \frac{2}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0.$$

Donc, par limite d'une somme :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -3 + \frac{2}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^3} = -3$$

$$\bullet \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} -3 + \frac{2}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^3} = -3 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \end{cases}$$

Donc, par limite d'un produit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(-3 + \frac{2}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) = -\infty$$

$$\text{Soit : } \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^3 + 2x^2 - 6x + 1 = -\infty.$$

Méthode : Lever une forme indéterminée à l'aide de factorisations (2)

 Vidéo <https://youtu.be/8tAVa4itblc>

 Vidéo <https://youtu.be/pmWPfsQaRWI>

Calculer : a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 5x + 1}{6x^2 - 5}$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 2}{4x - 1}$

Correction

a) • En appliquant la méthode précédente pour le numérateur et le dénominateur cela conduirait à une forme indéterminée du type " $\frac{\infty}{\infty}$ ".

- Levons l'indétermination en factorisant par les monômes de plus haut degré :

$$\frac{2x^2 - 5x + 1}{6x^2 - 5} = \frac{x^2}{x^2} \times \frac{2 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}{6 - \frac{5}{x^2}} = \frac{2 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}{6 - \frac{5}{x^2}}$$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x^2} = 0$.

Donc, comme limite de sommes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 6 - \frac{5}{x^2} = 6$$

- Donc, comme limite d'un quotient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}{6 - \frac{5}{x^2}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Soit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 5x + 1}{6x^2 - 5} = \frac{1}{3}$.

b) • Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\frac{\infty}{\infty}$ ".

- Levons l'indétermination en factorisant par les monômes de plus haut degré :

$$\frac{3x^2 + 2}{4x - 1} = \frac{x^2}{x} \times \frac{3 + \frac{2}{x^2}}{4 - \frac{1}{x}} = x \times \frac{3 + \frac{2}{x^2}}{4 - \frac{1}{x}}$$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^2} = 0$

Donc, comme limite de sommes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 3 + \frac{2}{x^2} = 3 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 4 - \frac{1}{x} = 4$$

- Donc, comme limite d'un quotient :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 + \frac{2}{x^2}}{4 - \frac{1}{x}} = \frac{3}{4}$$

- De plus, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$, donc, comme limite d'un produit :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \times \frac{3 + \frac{2}{x^2}}{4 - \frac{1}{x}} = -\infty$$

Soit : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 2}{4x - 1} = -\infty$.

Méthode : Lever une forme indéterminée à l'aide de l'expression conjuguée

 Vidéo <https://youtu.be/n3XapvUfXJQ>

 Vidéo <https://youtu.be/y7Sbqkb9RoU>

Calculer : a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ b) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$

Correction

a) • $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\infty - \infty$ ".

• Levons l'indétermination à l'aide de l'expression conjuguée :

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} &= \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{x})^2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \end{aligned}$$

• Comme limite d'une somme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} + \sqrt{x} = +\infty$.

Et donc, comme limite d'un quotient : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0$.

Soit $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = 0$.

b) • $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x-1} - 2 = \sqrt{5-1} - 2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 5} x - 5 = 5 - 5 = 0 \end{cases}$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\frac{0}{0}$ ".

• Levons l'indétermination à l'aide de l'expression conjuguée :

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5} &= \frac{(\sqrt{x-1} - 2)(\sqrt{x-1} + 2)}{(x-5)(\sqrt{x-1} + 2)} \\ &= \frac{x-1-4}{(x-5)(\sqrt{x-1} + 2)} \\ &= \frac{x-5}{(x-5)(\sqrt{x-1} + 2)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x-1} + 2} \end{aligned}$$

- $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x-1} + 2 = \sqrt{5-1} + 2 = 4$

Donc, comme limite d'un quotient, on a : $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{\sqrt{x-1}+2} = \frac{1}{4}$.

Soit : $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \frac{1}{4}$.

Méthode : Déterminer une asymptote

▶ Vidéo <https://youtu.be/OLDGK-QkL80>

▶ Vidéo <https://youtu.be/pXDhrx-nMto>

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{-2}{1-x}$.

Démontrer que la courbe représentative de la fonction f admet des asymptotes dont on précisera la nature et les équations.

Correction

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1-x = -\infty$ donc comme limite d'un quotient, on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{1-x} = 0$.

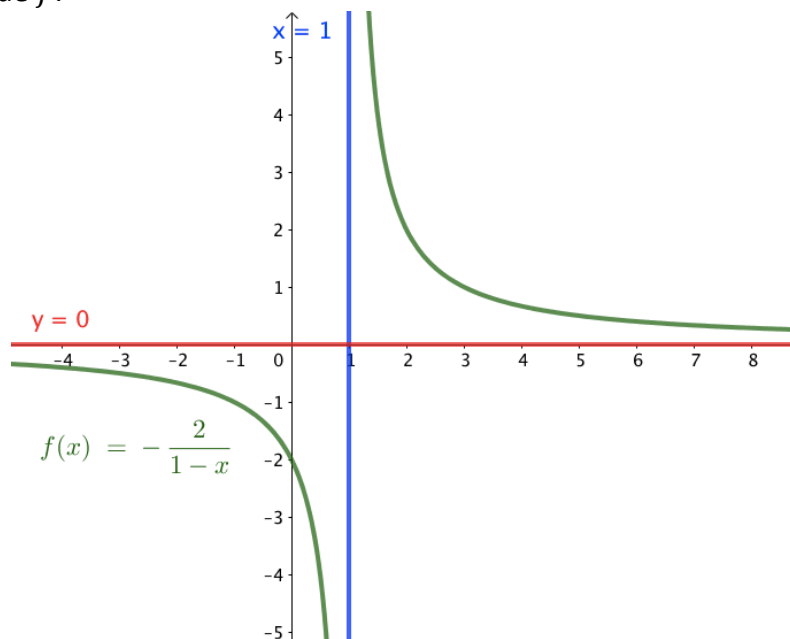
On prouve de même que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{1-x} = 0$.

On en déduit que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} 1-x = 0^+$ donc comme limite d'un quotient, on a : $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-2}{1-x} = -\infty$

Et $\lim_{x \rightarrow 1^+} 1-x = 0^-$ donc comme limite d'un quotient, on a : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-2}{1-x} = +\infty$

On en déduit que la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à la courbe représentative de f .



© Copyright

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales

Yvan Monka – Académie de Strasbourg – www.maths-et-tiques.fr