Examen Signal et bruit (3 heures)
Sujet à rendre avec la copie

Nom :
Prénom :

Lundi 3 novembre

Les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisées. Aucun autre document n'est autorisé.

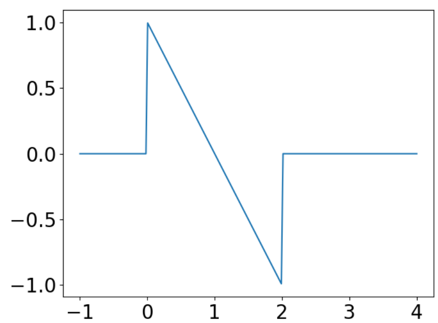

Figure 1: Représentation graphique du signal $x(t)$ (exercice 1)

Exercice 1. *On considère le signal décrit par la figure 1.*

1. *Écrire les équations du signal $x(t)$ avec $[\![\ ]\!]$.*

2. *Écrire les équations du signal $x(t)$ avec une des fonctions de base $\Pi(t), \mathbb{C}(t), \mathbb{D}(t), \mathbb{H}, \mathbb{T}(t)$. Pour chaque fonction de base utilisée rappelez la définition utilisée.*

3. *Donnez un pseudo-programme permettant de simuler la figure 1.*

Simulation et réponse à question 3

```
t = np.linspace(-1,4,200)
x = (1-t)*(t>=0)*(t<=2)+0
y = seb.fonction_D(t-0.5)-seb.fonction_C(t-1.5)
plt,np = seb.debut()
plt.close('all')
fig,ax = plt.subplots()
ax.plot(t,x)
ax.plot(t,y)
plt.tight_layout()
plt.savefig('./figures/fig_exSEB43a.png')
fig.show()
```

Solution

1. $x(t) = (1-t)[\![t \geq 0 \text{ et } t \leq 2]\!](t)$

2. $x(t) = \mathbb{D}(t-0.5) - \mathbb{C}(t-1.5)$

Exercice 2. *On considère le signal $m(t) = e^{-(t-1)}[\![t \geq -1]\!](t)$.*

1. *Calculez E_m son énergie.*

2. *Calculez A_m sa somme.*

3. *Donnez un pseudo-programme permettant d'estimer ces quantités.*

Solution

1. $E_m = \frac{e^4}{2}$

2. $A_m = e^2$

3.
```
t = np.linspace(-1,50,20000)
x = np.exp(-(t-1))*(t>=-1)+0
Ex= np.real(seb.TF(t,x**2,0))
Ax= np.real(seb.TF(t,x,0))
assert np.abs(Ex -np.exp(4)/2)<1e-3
assert np.abs(Ax -np.exp(2))<1e-3
```

Exercice 3. *On considère le signal $m(t) = e^{-(t-1)}[\![t \geq -1]\!](t)$.*

1. *Calculez sa dérivée en faisant attention aux discontinuités.*

Réponse

$$\frac{d}{dt}x(t) = e^2\delta(t+1) - e^{-(t-1)}[\![t \geq -1]\!](t) \tag{1}$$

Exercice 4. *On considère le signal $y(t)$ défini par*

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 0.5 * \frac{d}{dt}y(t) + 4y(t) = \delta(t) - \delta(t-1) \tag{2}$$

1. *Calculez $\widehat{Y}(f)$ la transformée de Fourier de $y(t)$*

2. *En déduire le pseudo-programme pour estimer $y(t)$, choisissez l'échelle en fréquence avec soin.*

Solution

1. $\widehat{Y}(f) = \frac{1-e^{-j2\pi f}}{(j2\pi f)^2+4}$

2.
```
t = np.linspace(-1,5,200)
f = np.linspace(-50,50,10000)
Y = (1-np.exp(-1j*2*np.pi*f))/((1j*2*np.pi*f)**2+0.5*(1j*2*np.pi*f)+4)
y = seb.TFI(f,Y,t)
```

Exercice 5. *On considère le signal $y(t)$ défini par*

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 0.5\frac{d}{dt}y(t) + 4y(t) = \delta(t) - \delta(t-1) \tag{3}$$

1. *Donnez un pseudo-programme permettant de simuler la réponse à cette équation différentielle sans utiliser* `seb.TFI` *mais en utilisant par exemple* `seb.sol_eq_diff`.

Solution

```
t = np.linspace(-1,5,200)
y1= seb.sol_eq_diff((1,0.5,4),t)
y2= seb.sol_eq_diff((1,0.5,4),t-1)
y = y1-y2
```

Exercice 6. *On considère le signal* $y(t) = e^{-t}$*. On utilise la porte* $\Pi(t) = [\![-1/2 \leq t \leq 1/2]\!](t)$*.*

1. *Calculez* $\delta(t+1) * y(t)$
2. *Calculez* $\Pi(t+1) * y(t)$*.*
3. *Donnez un pseudo-programme permettant de simuler* $\Pi(t+1) * y(t)$

Solution

1. e^{-t-1}.
2. $e^{-t-1}(e^{1/2} - e^{-1/2})$.
3. ```
   t = seb.arange(-3,5,1e-4)
   x = seb.fonction_P(t+1)
   y = np.exp(-t)
   z = seb.convolution(t,x,t,y,t)
   ```
   ```