Exercices sur la partie SON du cours de traitement numérique du signal

Gabriel Dauphin

November 27, 2024

Exercice 1 *rrx129 On considère un signal x_n d'une durée $d = 1s$ et échantillonné à $fe = 8kHz$. Ce signal est découpé en $K = 5$ trames avec un taux de recouvrement de $\alpha = 0.2$. Une fois découpé il est noté y_{kn} avec $k \in \{0, \dots, 4\}$. On cherche à simuler la deuxième trame $k = 1$. On note N_K le nombre d'échantillons dans chaque trame.*

1. *Combien y a-t-il d'échantillons dans le signal ?*
2. *Donnez en fonction de N_K le nombre d'échantillons dans la première trame qui ne sont pas présents dans la trame suivante. On suppose ici que la dernière trame ne contient que ce nombre d'échantillons. En déduire une relation entre K, α, N_K, N ? Montrez que $N_K = \frac{N}{K(1-\alpha)}$. Combien vaut N_K ?*
3. *Donnez une formule calculant les temps associées aux différents indices de la seconde trame.*
4. *Calculez $t^{(de)}$, $t^{(ce)}$ et $t^{(fin)}$ correspondant au temps associé au premier indice, à l'indice du milieu et au dernier indice de la trame.*
5. *Donnez le pseudo-code permettant à partir de x_n de trouver y_{1n}.*

Exercice 2 (x130) *On considère une base de sons notées* (x_n, y_n) *où chaque valeur de* n *désigne un élément de cette base,* x_n *est un son et* y_n *est une étiquette qui vaut un, deux ou trois,* N *est le nombre total de sons. Dans cet exercice, on s'intéresse à une autre technique de classification qui n'a pas été vue en cours, qui est parfois appelée arbre aléatoire. L'apprentissage consiste à choisir aléatoirement* G *attributs distincts et pour chaque attribut choisi, de choisir un seuil. Ensuite les éléments de la base d'apprentissage sont répartis dans les* 2^G *regroupements en fonction des résultats de seuillage vis-à-vis des attributs et des seuils. Pour chaque élément de la base, on note* $\mathbf{z}_n$ *le vecteur binaire de taille* G *contenant les résultats de ces seuillages (*$\mathbf{z} = 1 \dots 1$ *signifie que pour chaque seuil, l'attribut est inférieur à ce seuil). Pour chaque regroupement, on note l'étiquette majoritaire au sein du regroupement. L'étiquette majoritaire du regroupement* $\mathbf{z}$ *est notée* $L(\mathbf{z})$*. La prédiction consiste d'abord à déterminer le vecteur binaire* $\mathbf{z}$ *associée à la requête* x*, l'étiquette prédite est alors celle donnée par* $L(\mathbf{z})$*. On se place ici dans le cas d'une base de* $N = 20$ *sons avec trois attributs* PMCT*,* ZCR *et* FMOY *pour moyenne de la puissance moyenne, moyenne de la première harmonique et moyenne de la fréquence moyenne.*

1. *Donnez un pseudo-code de l'algorithme d'apprentissage.*
2. *Donnez un pseudo-code de la prédiction.*

Exercice 3 (x127) *On considère un son décrit par les valeurs suivantes et utilisant une fréquence d'échantillonnage de* 8kHz *:*

$$\begin{array}{ccccc} x_0 = 2 & x_1 = 1 & x_2 = 2 & x_3 = 3 & x_4 = 2 \\ x_5 = 1 & x_6 = 1 & x_7 = 3 & x_8 = 1 & x_9 = 2 \\ x_{10} = 1 & x_{11} = 3 & & & \end{array} \tag{1}$$

On réalise un découpage de ce son en trois trames sans chevauchement.

1. *Donnez les valeurs pour ce signal de* $K, T_K, N_K, t_1^{(de)}, t_1^{(fin)}, t_1^{(ce)}, t_{1,2}, \alpha$ *À défaut des valeurs exactes, vous pouvez donner les opérations qu'il y aurait à effectuer sur une calculatrice pour obtenir les valeurs.*

2. *On effectue ici une normalisation de l'amplitude du son par une constante sans y inclure un centrage du signal ni une détection du début et de la fin du son, avec pour objectif que la puissance moyenne de l'ensemble du son soit de* 1*. Indiquez les nouvelles valeurs du signal.*

3. *On considère un deuxième son* $y_0 \dots y_{11}$ *qui est tout le temps égale à* 1*. On considère une distance* $\mathbf{d}$ *entre les sons* x *et* y *définis par*

$$\mathbf{d}(x,y) = \sqrt{\frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K-1}\left(PMCT_{x,k} - PMCT_{y,k}\right)^2}$$

où PMCT *est la puissance moyenne à court terme calculée sur chaque trame.*

$$PMCT_{x,k} = \frac{1}{N_K}\sum_{n=0}^{N_K-1} x_{k,n}^2$$

Normalement cette distance est calculée sur les signaux normalisés notés $\tilde{x}$ *et* $\tilde{y}$*, mais ici pour simplifier, on calcule cette distance sur les signaux non-normalisés. Calculez une valeur numérique de* $\mathbf{d}(x,y)$

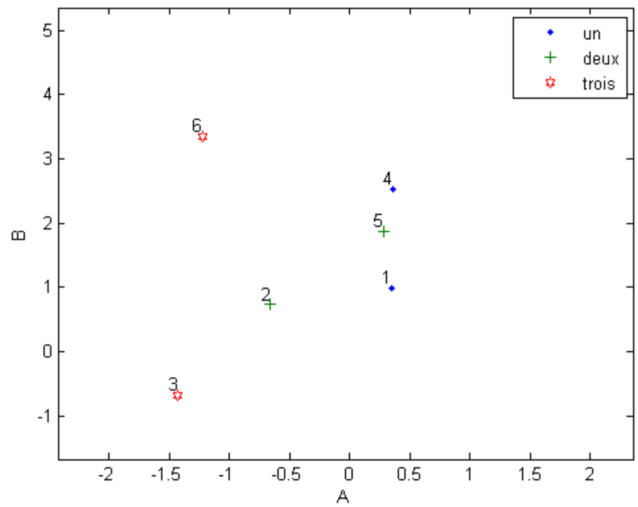

Figure 1: Visualisation des valeurs prises par les descripteurs pour chacun des six sons. Exercice 4

Exercice 4 (x118) *On considère six sons numérotés de* 1 *à* 6*. Le véritable sens de chacun des sons est décrit* $y_i \in \{1,2,3\}$ *:* $y_i = 1$ *signifie que le son* i *correspond au mot* un*,* $y_i = 2$ *correspond à* deux *et* $y_i = 3$ *correspond à* trois*. On suppose ici qu'après un traitement numérique complexe, on est parvenu à donner deux descripteurs* A_i *et* B_i *et à calculer leur valeur numérique pour chacun des sons (il s'agit ici pour chaque descripteur, d'une valeur pour l'ensemble du son). On considère ici comme technique de prédiction, la sélection du plus proche voisin au sens de la norme euclidienne en utilisant le descripteur* A *d'abord puis* A *et* B *ensuite. L'objet de cet exercice est de déterminer l'utilité des classifieurs obtenus. Le tableau suivant ainsi que la figure 1 montre les valeurs des descripteurs pour chaque son.*

son	*A*	*B*	*y*
son 1	*0.34663*	*0.99315*	*1*
son 2	*-0.66365*	*0.73033*	*2*
son 3	*-1.4282*	*-0.67675*	*3*
son 4	*0.35464*	*2.5326*	*1*
son 5	*0.27736*	*1.8714*	*2*
son 6	*-1.227*	*3.3521*	*3*

1. *On utilise les trois premiers sons pour la base d'apprentissage et les trois sons suivants pour la base de test. Pour la classification, on considère ici que le descripteur* A*. Déterminez la prédiction de chaque son de la base de test. Déterminez la matrice de confusion, la sensibilité globale. Déterminez aussi la précision et le rappel pour chaque classe.*

2. *On utilise maintenant les deux descripteurs et on réalise une validation croisée en deux lots, calculez la sensibilité globale.*

Exercice 5 (101) *Un collègue informaticien ayant de vague souvenir de traitement du signal vous demande comment enlever le silence qui se trouve au début et à la fin d'un signal sonore. Ce signal sonore est échantillonné à* $40kHz$*, il contient juste un mot d'une durée de* 3 *secondes et il est stocké sous la forme d'un fichier texte avec à chaque ligne un entier entre* -128 *et* 127*. Expliquez-lui en détail et de façon qu'il comprenne en une quinzaine de lignes, comment il peut fabriquer un nouveau fichier texte en utilisant C correspondant à ce signal sonore sans les parties silencieuses.*

Exercice 6 (x131) *On cherche à écrire les équations d'un banc de filtre avec une échelle logarithmique et composé de trois filtres. On suppose ici qu'on dispose d'un algorithme qui calcule la réponse fréquentielle d'un filtre passe-bas en fonction de $f_r = \frac{f_c}{f_e}$ où f_c est la fréquence de coupure. Ce filtre est à réponse impulsionnelle finie et compte N termes successifs notés $h_n(f_r)$. Ce banc de filtre s'applique aux signaux de chaque trame, ceux-ci sont ici composés de $N_K = 1200$ échantillons. La fréquence d'échantillonnage est de $f_e = 40kHz$.*

1. *Proposez des valeurs pour les fréquences de coupures des trois filtres.*
2. *Déduisez les réponses impulsionnelles des trois filtres.*
3. *Donnez les équations des trois filtres.*

Exercice 7 (x132) *On considère deux signaux sonores formés de $K_x = 8$ trames et $K_y = 7$ trames observées avec un seul descripteur. On note x_k et y_k les valeurs de ce descripteur pour chaque signal sonore. On cherche à déterminer $d(x, y)$ la distance entre ces deux sons en prenant en compte cette déformation temporelle. On note $\Phi_x[k]$ et $\Phi_y[k]$ les deux tables d'indexations.*

$$\mathbf{d}(x, y) = \min_{\Phi_x, \Phi_y} \sqrt{\sum_{k=0}^{K-1} \left(x_{\Phi_x[k]} - y_{\Phi_x[k]} \right)^2} \tag{2}$$

1. *Représentez le graphique permettant d'appliquer l'algorithme de Dijkstra pour le calcul de cette distance. L'axe des abscisses porte les valeurs de $\Phi_x[k]$ et l'axe des ordonnées porte celles de $\Phi_y[k]$. Mettez les valeurs sur chaque nœud.*

2. *Représentez avec des plus les nœuds que l'on peut atteindre avec des tables d'indexations qui respectent les contraintes suivantes.*

$$\begin{cases} \Phi_x[k+1] - \Phi_x[k] \in \{0, 1\} \\ \Phi_y[k+1] - \Phi_y[k] \in \{0, 1\} \\ \Phi_x[0] = 0 \\ \Phi_y[0] = 0 \\ \Phi_x[K] = K_x - 1 \\ \Phi_y[K] = K_y - 1 \\ |\Phi_y[k] - \Phi_x[k]| \leq \delta \end{cases} \tag{3}$$

   avec $\delta = 4$.

3. *Représentez l'exploration à la première itération, à la deuxième itération et à la dernière itération. Sur chaque nœud doit figurer à gauche le coût et à droite les coordonnées du nœud d'origine permettant d'atteindre ce nœud avec ce coût.*

4. *Représentez le chemin atteint et son coût. Donnez la valeur de la distance.*

Exercice 8 (x133) *On considère deux sons x_n et y_n et deux descripteurs, PMCT et ZCR. On suppose que préalablement les deux sons ont été préparés, c'est-à-dire que les silences en début et en fin ont été retirés et qu'ensuite ils ont été normalisés, de sorte que la puissance des deux signaux est identique. On note $PMCT_k^{(x)}$, $PMCT_k^{(y)}$, $ZCR_k^{(x)}$, $ZCR_k^{(y)}$, les valeurs des descripteurs pour la trame k et pour le son x_n ou y_n. f_e est la fréquence d'échantillonnage et K_x et K_y sont les nombres de trames de x_n et y_n. La distance proposée est ainsi définie*

$$\mathbf{d}(x_n, y_n) = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sigma_x + \sigma_y}\right)^2 + \left(\frac{\eta_x - \eta_y}{f_e}\right)^2} \tag{4}$$

avec les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
\mu_x &= \tfrac{1}{K_x}\textstyle\sum_{k=0}^{K_x-1} PMCT_k^{(x)} \\
\sigma_x &= \sqrt{\tfrac{1}{K_x}\textstyle\sum_{k=0}^{K_x-1}\left(PMCT_k^{(x)} - \mu_x\right)^2} \\
\mu_y &= \tfrac{1}{K_y}\textstyle\sum_{k=0}^{K_y-1} PMCT_k^{(y)} \\
\sigma_y &= \sqrt{\tfrac{1}{K_y}\textstyle\sum_{k=0}^{K_y-1}\left(PMCT_k^{(y)} - \mu_y\right)^2} \\
\eta_x &= \tfrac{1}{K_x}\textstyle\sum_{k=0}^{K_x-1} ZCR_k^{(x)} \\
\eta_y &= \tfrac{1}{K_y}\textstyle\sum_{k=0}^{K_y-1} ZCR_k^{(y)}
\end{aligned} \tag{5}$$

Pour chaque affirmation, dites si elle est vraie ou fausse. Dans le cas où elle est vraie, donnez une démonstration et dans le cas où elle est fausse, donnez un contre-exemple. Pour la dernière affirmation, l'idée est de s'appuyer sur l'affirmation suivante.

$$x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1-xy}{1+xy}\right| \leq \left|\frac{1-x}{1+x}\right| + \left|\frac{1-y}{1+y}\right| \tag{6}$$

Sa démonstration n'est pas demandée, elle est faite plus bas.

1. $\mathbf{d}(x_n, y_n) = \mathbf{d}(2x_n, 2y_n)$.
2. $\mathbf{d}(x_n, y_n) = \mathbf{d}(y_n, x_n)$.
3. $\mathbf{d}(x_n, y_n) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_n = y_n$.
4. $\mathbf{d}(x_n, y_n) \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$.
5. $\mathbf{d}(x_n, z_n) \leq \mathbf{d}(x_n, y_n) + \mathbf{d}(y_n, z_n)$

Lemma 1 *Pour $x, y \in \mathbb{R}$,*

$$\left|\frac{1-xy}{1+xy}\right| \leq \left|\frac{1-x}{1+x}\right| + \left|\frac{1-y}{1+y}\right| \tag{7}$$

Proof. Je note f la fonction

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left|\tfrac{1-x}{1+x}\right| = \text{signe}(x-1)\tfrac{x-1}{1+x} = \text{signe}(x-1)\left(1 - \tfrac{2}{1+x}\right) \\
f(x) &= f\left(\tfrac{1}{x}\right) \text{ pour } x \neq 0 \\
\tfrac{d}{dx}f(x) &= \tfrac{2\text{signe}(x-1)}{(1+x)^2} \text{ pour } x \neq 1
\end{aligned} \tag{8}$$

Cette fonction est donc décroissante sur $[0, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$.

Je note g la fonction

$$\begin{aligned}
g(x, y) &= f(x) + f(y) - f(xy) \\
\tfrac{\partial}{\partial y}g(x, y) &= f'(y) - xf'(xy) = \tfrac{2\text{signe}(y-1)}{(1+y)^2} - \tfrac{2x\text{signe}(xy-1)}{(1+xy)^2} \text{ pour } x \neq 1,\ y \neq 1, \text{ et } xy \neq 1
\end{aligned} \tag{9}$$

Le lemme est équivalent à montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \inf_{y\in\mathbb{R}}\ g(x,y) \geq 0 \tag{10}$$

Pour $x=0$, $\inf_{y\in\mathbb{R}}\ g(x,y) = g(x,1) = f(x) - f(x) - f(1) = 0$.

Supposons que $y \in \mathbb{R}_+\backslash\{0,1\}$ soit une valeur minimale alors

$$0 = \frac{1}{(1+y)^2} - \frac{x}{(1+xy)^2} = \frac{1+2xy+x^2y^2 - x\left(1+2y+y^2\right)}{(1+y)^2(1+xy)^2} = \frac{(1-xy^2)(1-x)}{(1+y)^2(1+xy)^2} \tag{11}$$

Aussi une nouvelle valeur potentiellement minimale est $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\begin{aligned} &\inf\nolimits_{y\in\mathbb{R}_+}\ g(x,y) = \min\left(g(x,0), g(x,1), g\left(x, \tfrac{1}{\sqrt{x}}\right), g\left(x, \tfrac{1}{x}\right), \lim\nolimits_{y\to+\infty} g(x,y)\right) \\ &\quad = \min\left(f(x), 0, f(x), 2f(x), f(x)\right) = 0 \end{aligned} \tag{12}$$