

Introduction au signal et bruit

Exercices

Gabriel Dauphin

August 28, 2025

Contents

1	Relations entrées-sorties sans effet mémoire	2
2	Signaux temps continu, fonction affine par morceaux	3
3	Utilisation de la transformée de Fourier	4
4	Diracs	5
5	Transformées de Fourier, dérivation et équations différentielles	6
6	Filtres et effet mémoire	7
7	Description fréquentielle des filtres	8
8	Signaux périodiques	9
9	Filtres agissant sur des signaux périodiques	10
10	Échantillonnage	11
11	Peigne de Diracs	12
12	Modélisation stochastique du bruit	13
13	Résumé du cours	14
13.1	Exercices	14

Chapter 1

Relations entrées-sorties sans effet mémoire

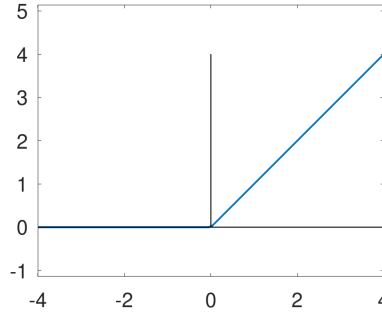


Figure 1.1

Exercice 1 Le graphique représente la relation entrée-sortie d'un Relu pour Rectified Linear Unit.

1. En utilisant la figure 1.1, combien valent les signaux en sortie lorsque respectivement, les signaux en entrées valent -3 et 3 ?
2. Combien valent les puissances de ces signaux ?
3. Proposez une formule utilisant la valeur absolue, l'addition et la multiplication pour modéliser cette relation ?
4. On considère le filtre $\mathcal{H}_1(x) = 0.5x$ et $\mathcal{H}_2(x) = |x|$, montrez comment en les associant on peut fabriquer le filtre Relu.
5. Écrire le pseudo-code permettant de générer la figure 1.1.

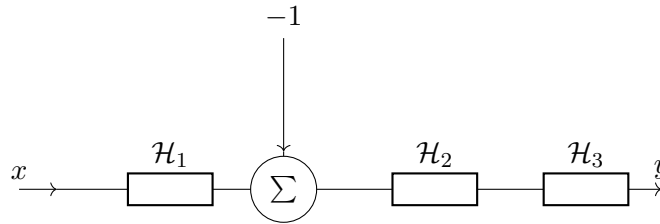


Figure 1.2

Exercice 2 Les filtres \mathcal{H}_1 , \mathcal{H}_2 et \mathcal{H}_3 sont définis par

$$\mathcal{H}_1(x) = |x| \quad \mathcal{H}_2(x) = \min(1, x) \quad \mathcal{H}_3(x) = \max(0, x) \quad (1.1)$$

On appelle \mathcal{H} le filtre décrit par la figure 1.2 et associé à la relation transformant x en y .

1. Calculez les sorties y associées aux valeurs $-2, -1, 0, 1, 2$ pour x .
2. Écrivez la formule modélisant \mathcal{H} ?
3. Dessinez la relation transformant x en y sur un graphe.

Chapter 2

Signaux temps continu, fonction affine par morceaux

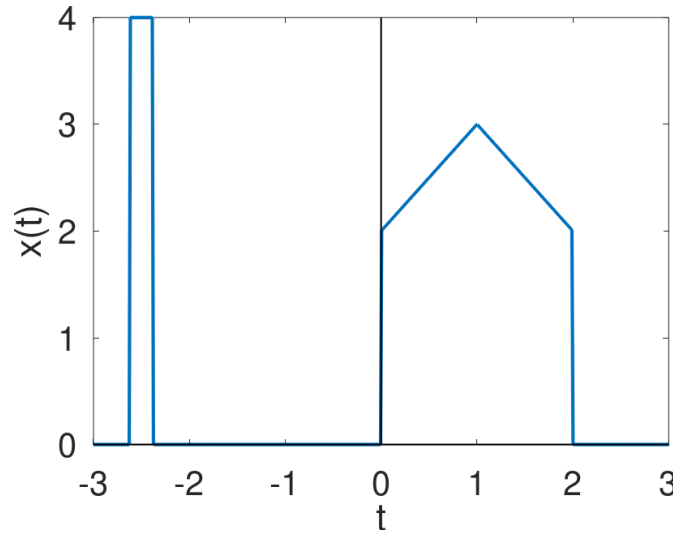


Figure 2.1: Visualisation de $x(t)$ qui a la forme d'une maison avec son lampadaire

Exercice 3 On considère le signal $x(t)$ décrit par la figure 2.1.

1. Calculez les valeurs de $x(t)$ pour les valeurs de t $-2.5, 0.5, 1, 2.5$.
2. Écrivez une formule décrivant $x(t)$ au moyen de différents intervalles de temps.
3. Utilisez quelques unes des fonctions de base présentées en cours pour définir $x(t)$.
4. Utilisez le crochet d'Iverson pour décrire $x(t)$.

Exercice 4 On considère le signal $x(t)$ ainsi défini

$$x(t) = (at + b) \llbracket t_1 \leq t \leq t_2 \rrbracket \quad (2.1)$$

1. Représentez ce signal pour $a = 1$, $b = 0$ et $t_1 = 2$, $t_2 = 3$.
2. Représentez ce signal pour $a = -1$, $b = 1$ et $t_1 = 0$, $t_2 = 1$.
3. Montrez que pour $a = 0$, $x(t)$ peut se mettre sous la forme

$$x(t) = \alpha \Pi(\gamma t + \delta) \quad (2.2)$$

4. Montrez que pour $a > 0$, $x(t)$ peut se mettre sous la forme

$$x(t) = \alpha \Pi(\gamma t + \delta) + \beta \mathcal{C}(\gamma t + \delta) \quad (2.3)$$

5. Donnez un pseudo-code permettant de visualiser de signal.

Chapter 3

Utilisation de la transformée de Fourier

Chapter 4

Diracs

Exercice 5 On considère le signal $x(t) = \Pi(t) = \llbracket -0.5 \leq t \leq 0.5 \rrbracket(t)$.

1. Calculez sa dérivée $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$.
2. Calculez $z(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$.
3. Calculez la transformée de Fourier de $y(t)$ notée $\hat{Y}(f)$ et en déduire celle de $x(t)$ notée $\hat{X}(f)$.
4. Représentez les signaux $x(t), y(t), z(t)$.

Chapter 5

Transformées de Fourier, dérivation et équations différentielles

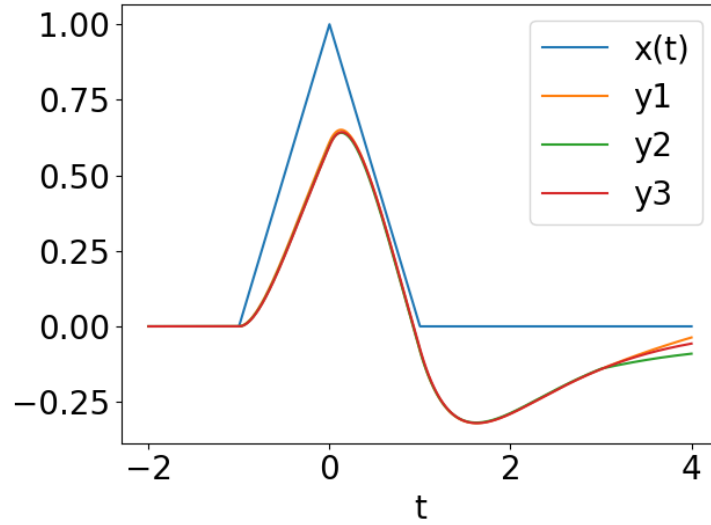


Figure 5.1: Visualisation de l'entrée $x(t)$ et de la sortie $y(t)$ illustrant l'exercice 6.

Exercice 6 On considère un filtre défini par l'équation différentielle

$$LC \frac{d^2}{dt^2} y(t) + RC \frac{d}{dt} y(t) + y(t) = RC \frac{d}{dt} x(t) \quad (5.1)$$

avec $R = 3$, $C = 0.5$, $L = 1$. On considère un signal en entrée défini par $x(t) = \mathbb{T}(t)$ et on cherche à simuler le signal de sortie $y(t)$ associé à ce filtre décrit par l'équation (5.1).

1. Montrez que

$$\frac{d}{dt} \mathbb{T}(t) = \int_{-\infty}^t [\delta(\tau - 1) - 2\delta(\tau) + \delta(\tau + 1)] d\tau \quad (5.2)$$

2. On appelle $\tilde{y}(t)$ la solution de cette deuxième équation différentielle

$$LC \frac{d^2}{dt^2} \tilde{y}(t) + RC \frac{d}{dt} \tilde{y}(t) + \tilde{y}(t) = \delta(t) \quad (5.3)$$

Exprimez $y(t)$ en fonction de $\tilde{y}(t)$.

3. En utilisant les fonctions `sol_eq_diff`, `deriver`, `integrer` et `retarder` de `seb`, donnez un pseudo-programme permettant de simuler $y(t)$.

Chapter 6

Filtres et effet mémoire

Chapter 7

Description fréquentielle des filtres

Chapter 8

Signaux périodiques

Chapter 9

Filtres agissant sur des signaux périodiques

Chapter 10

Échantillonnage

Chapter 11

Peigne de Diracs

Chapter 12

Modélisation stochastique du bruit

Chapter 13

Résumé du cours

13.1 Exercices

Exercice 7 Le signal montré sur la figure 13.1 est noté $x(t)$. Sa transformée de Fourier est notée \hat{X} .

1. $x(t)$ est-il un signal temps continu, temps discret, périodique, non-périodique, déterministe ou aléatoire.
2. Donnez une expression de $x(t)$ sous la forme de sa description sur plusieurs intervalles.
3. Donnez une expression de $x(t)$ en fonction de $\mathbf{1}()$.
4. Calculez $x(0)$, $x(1)$, E_x .
5. Calculez $\hat{X}(0)$ et $\hat{X}(1)$.
6. Construire $y_1(t) = x\left(\frac{t}{2}\right)$
7. Construire $y_1(t) = x(t-1)$
8. Construire $y_1(t) = \frac{1}{2}x(t)$
9. Construire $y_1(t) = x(t) - x(t-2)$

Exercice 8 Le signal montré sur la figure 13.2 est noté $x(t)$. Sa transformée de Fourier est notée \hat{X} . Ce signal est de la forme $x(t) = ae^{-bt}\mathbf{1}(t \geq 0)$.

1. $x(t)$ est-il un signal temps continu, temps discret, périodique, non-périodique, déterministe ou aléatoire.
2. Justifiez la valeur de a avec la courbe exponentielle sur la figure 13.2.
3. Justifiez la valeur de b avec la ligne tangente à la courbe exponentielle sur la figure 13.2.
4. Donnez une expression de $x(t)$ en fonction de $\mathbf{1}()$.
5. Calculez $x(0)$, $x(1)$, E_x .
6. Calculez $\hat{X}(0)$ et $\hat{X}(1)$.
7. Construire $y_1(t) = x\left(\frac{t}{2}\right)$
8. Construire $y_1(t) = x(t-1)$
9. Construire $y_1(t) = \frac{1}{2}x(t)$
10. Construire $y_1(t) = x(t) - x(t-2)$

Exercice 9 Le signal étudié ici est $x(t) = t\mathbf{1}(t \in [0, 1]) + (2-t)\mathbf{1}(t \in [1, 2])$ On considère $y(t)$ obtenu en périodisant le signal $x(t)$ pour $t \in [0, 3]$.

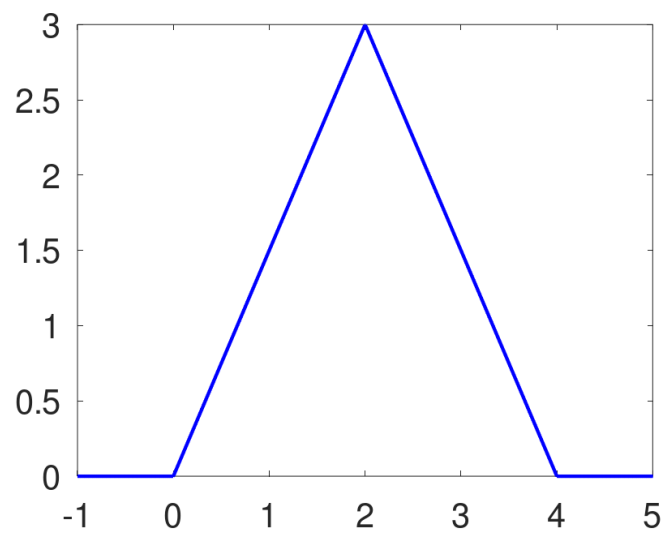


Figure 13.1: Graphe de $x(t)$ relatif à l'exercice 7.

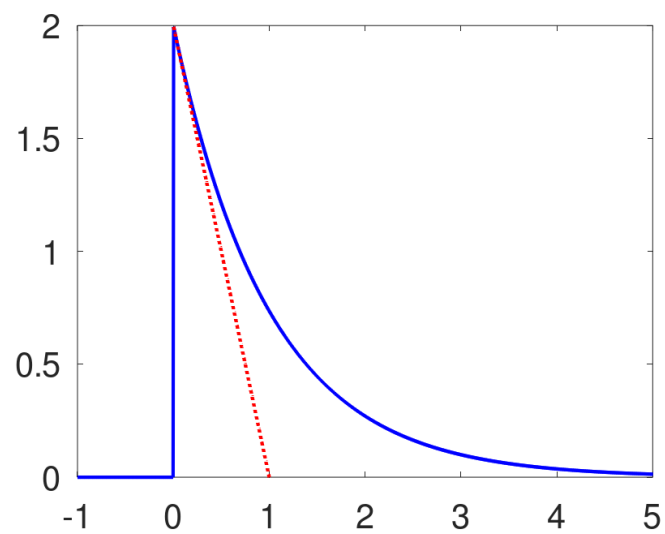


Figure 13.2: Graphe de $x(t)$ et de sa tangente pour l'exercice 8.

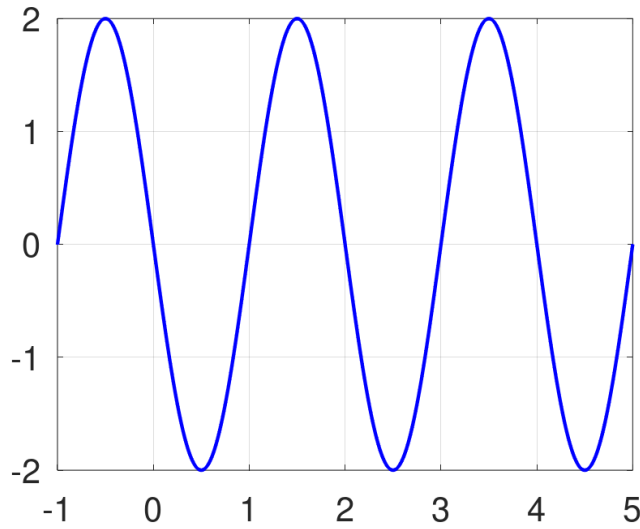


Figure 13.3: Graphe de $x(t)$ relatif à l'exercice 10.

1. $x(t)$ est-il un signal temps continu, temps discret, périodique, non-périodique, déterministe ou aléatoire.
2. $y(t)$ est-il un signal temps continu, temps discret, périodique, non-périodique, déterministe ou aléatoire.
3. Dessiner $x(t)$ pour $t \in [-1, 5]$ sur un graphe.
4. Dessiner $y(t)$ pour $t \in [-1, 5]$ sur le même graphe.
5. Calculez $x(0)$, $x(-2)$, E_x et P_x .
6. Calculez $y(0)$, $y(-2)$, E_y et P_y .
7. Calculez \hat{X}_0 et \hat{Y}_0 .
8. Calculez \hat{X}_0 et \hat{Y}_0 .
9. Dessiner sur le graphe $y_1(t) = y\left(\frac{t}{2}\right)$
10. Dessiner sur le graphe $y_2(t) = y(t - 1)$
11. Dessiner sur le graphe $y_3(t) = \frac{1}{2}y(t)$
12. Dessiner sur le graphe $y_4(t) = y(t) - y(t - 2)$

Exercice 10 Le signal montré sur la figure 13.3 est noté $x(t)$. Sa transformée de Fourier est notée \hat{X} . Ce signal est de la forme $x(t) = a \cos(bt + c)$.

1. $x(t)$ est-il un signal temps continu, temps discret, périodique, non-périodique, déterministe ou aléatoire.
2. Justifiez la valeur de a en observant la valeur maximale et minimale sur la figure 13.3.
3. Justifiez la valeur de b en mesurant la période sur la figure 13.3.
4. Justifiez la valeur de c en interprétant cette courbe comme en retard (ou en avance) par rapport à $a \cos(bt)$ sur la figure 13.2.
5. Calculez $x(0)$, $x(1)$, P_x .
6. Calculez \hat{X}_0 et \hat{X}_1 .
7. Dessiner sur le graphe $y_1(t) = x\left(\frac{t}{2}\right)$

8. Dessiner sur le graphe $y_1(t) = x(t - 1)$

9. Dessiner sur le graphe $y_1(t) = \frac{1}{2}x(t)$

10. Dessiner sur le graphe $y_1(t) = x(t) - x(t - 2)$