Introduction au signal et bruit
Exercices

Gabriel Dauphin

September 3, 2025

Contents

Chapter 1

Relations entrées-sorties sans effet mémoire

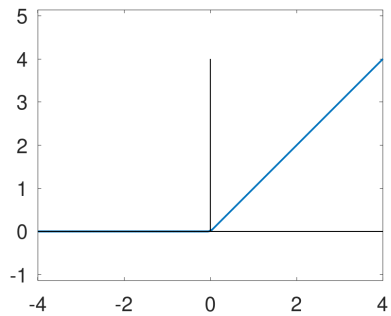

Figure 1.1

Exercice 1 *Le graphique représente la relation entrée-sortie d'un* `Relu` *pour* `Rectified Linear Unit`*.*

1. *En utilisant la figure 1.1, combien valent les signaux en sortie lorsque respectivement, les signaux en entrées valent* -3 *et* 3 *?*
2. *Combien valent les puissances de ces signaux ?*
3. *Proposez une formule utilisant la valeur absolue, l'addition et la multiplication pour modéliser cette relation ?*
4. *On considère le filtre* $\mathcal{H}_1(x) = 0.5x$ *et* $\mathcal{H}_2(x) = |x|$*, montrez comment en les associant on peut fabriquer le filtre* `Relu`*.*
5. *Écrire le pseudo-code permettant de générer la figure 1.1.*

Simulation de la figure 1.1.

```
x=linspace(-4,4,1e2);
y=zeros(size(x));
y(x<=0)=0;
y(x>0)=x(x>0);
figure(1); plot(x,y); figure_jolie(1);
xlabel('x'); ylabel('y'); axis('equal');
saveas(1,'./figures/fig_exSEB6a.png');
```

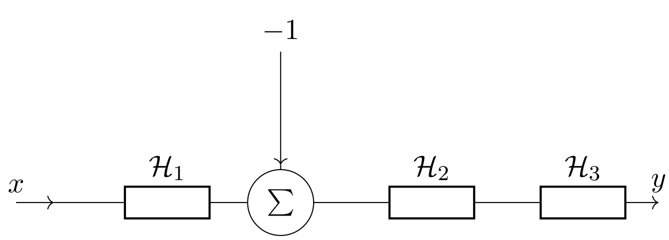

Figure 1.2

Exercice 2 *Les filtres $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_3$ sont définis par*

$$\mathcal{H}_1(x) = |x| \quad \mathcal{H}_2(x) = \min(1, x) \quad \mathcal{H}_3(x) = \max(0, x) \tag{1.1}$$

On appelle $\mathcal{H}$ le filtre décrit par la figure 1.2 et associé à la relation transformant x en y.

1. *Calculez les sorties y associées aux valeurs $-2, -1, 0, 1, 2$ pour x.*
2. *Écrivez la formule modélisant $\mathcal{H}$?*
3. *Dessinez la relation transformant x en y sur un graphe.*

Chapter 2

Signaux temps continu, fonction affine par morceaux

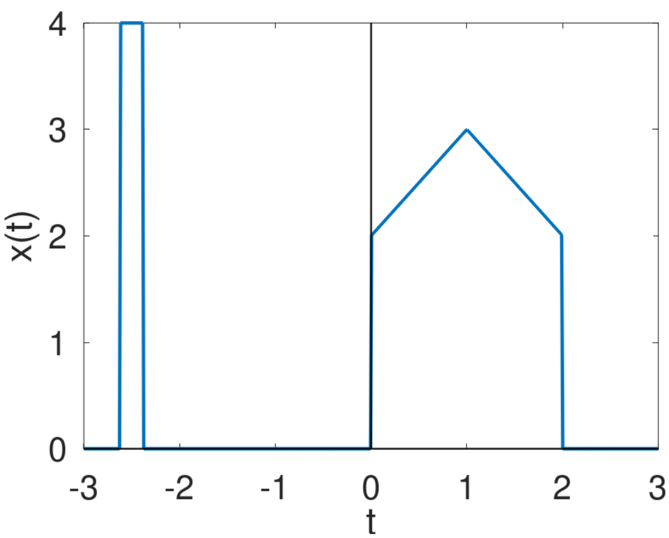

Figure 2.1: Visualisation de $x(t)$ qui a la forme d'une maison avec son lampadaire

Exercice 3 *On considère le signal $x(t)$ décrit par la figure 2.1.*

1. *Calculez les valeurs de $x(t)$ pour les valeurs de t $-2.5, 0.5, 1, 2.5$.*
2. *Écrivez une formule décrivant $x(t)$ au moyen de différents intervalles de temps.*
3. *Utilisez quelques unes des fonctions de base présentées en cours pour définir $x(t)$.*
4. *Utilisez le crochet d'Iverson pour décrire $x(t)$.*

Simulation de la figure 2.1

```
t=linspace(-3,3,500);
x=2*fonction_porte((t-1)/2)+fonction_T(t-1)+4*fonction_porte((t+2.5)*4);
figure(1); plot(t,x); figure_jolie(1);
xlabel('t'); ylabel('x(t)');
saveas(1,'./figures/fig_exSEB8a.png');
```

Exercice 4 *On considère le signal $x(t)$ ainsi défini*

$$x(t) = (at + b) [\![t_1 \leq t \leq t_2]\!] \tag{2.1}$$

1. *Représentez ce signal pour $a = 1$, $b = 0$ et $t_1 = 2$, $t_2 = 3$.*

2. *Représentez ce signal pour* $a = -1$, $b = 1$ *et* $t_1 = 0$, $t_2 = 1$.
3. *Montrez que pour* $a = 0$, $x(t)$ *peut se mettre sous la forme*

$$x(t) = \alpha \Pi(\gamma t + \delta) \tag{2.2}$$

4. *Montrez que pour* $a > 0$, $x(t)$ *peut se mettre sous la forme*

$$x(t) = \alpha \Pi(\gamma t + \delta) + \beta \mathbb{C}(\gamma t + \delta) \tag{2.3}$$

5. *Donnez un pseudo-code permettant de visualiser de signal.*

Chapter 3

Utilisation de la transformée de Fourier

Chapter 4

Diracs

Exercice 5 *On considère le signal* $x(t) = \Pi(t) = [\![-0.5 \leq t \leq 0.5]\!](t)$.

1. *Calculez sa dérivée* $y(t)\frac{d}{dt}x(t)$.
2. *Calculez* $z(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$.
3. *Calculez la transformée de Fourier de* $y(t)$ *notée* $\widehat{Y}(f)$ *et en déduire celle de* $x(t)$ *notée* $\widehat{X}(f)$.
4. *Représentez les signaux* $x(t), y(t), z(t)$.

Solution

1. $y(t) = \delta(t+0.5) - \delta(t-0.5)$
2. $z(t) = (t+0.5)[\![-0.5 \leq t < 0.5]\!](t) + [\![0.5 \leq t]\!](t) = \mathbb{C}(t) + \mathbb{H}(t-0.5)$
3. $$\widehat{Y}(f) = \mathrm{TF}\left[\delta(t+0.5)\right](f) - \mathrm{TF}\left[\delta(t-0.5)\right](f) = e^{j\pi f} - e^{-j\pi f} = 2j\sin(\pi f) \tag{4.1}$$

   Par conséquent,

   $$\widehat{X}(f) = \frac{1}{j2\pi f}\widehat{Y}(f) = \frac{\sin(\pi f)}{\pi f} = \mathrm{sinc}(f) \tag{4.2}$$

Chapter 5

Transformées de Fourier, dérivation et équations différentielles

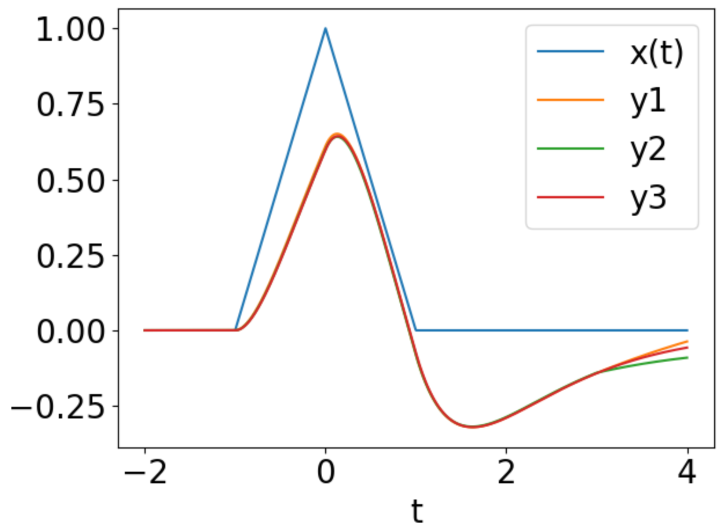

Figure 5.1: Visualisation de l'entrée $x(t)$ et de la sortie $y(t)$ illustrant l'exercice 6.

Exercice 6 *On considère un filtre défini par l'équation différentielle*

$$LC\frac{d^2}{dt^2}y(t) + RC\frac{d}{dt}y(t) + y(t) = RC\frac{d}{dt}x(t) \tag{5.1}$$

avec $R = 3$, $C = 0.5$, $L = 1$. On considère un signal en entrée défini par $x(t) = \mathbb{T}(t)$ et on cherche à simuler le signal de sortie $y(t)$ associé à ce filtre décrit par l'équation (5.1).

1. *Montrez que*

$$\frac{d}{dt}\mathbb{T}(t) = \int_{-\infty}^{t} \left[\delta(\tau-1) - 2\delta(\tau) + \delta(\tau+1)\right] d\tau \tag{5.2}$$

2. *On appelle $\tilde{y}(t)$ la solution de cette deuxième équation différentielle*

$$LC\frac{d^2}{dt^2}\tilde{y}(t) + RC\frac{d}{dt}\tilde{y}(t) + \tilde{y}(t) = \delta(t) \tag{5.3}$$

   Exprimez $y(t)$ en fonction de $\tilde{y}(t)$.

3. *En utilisant les fonctions* `sol_eq_diff`, `deriver`, `integrer` *et* `retarder` *de* `seb`, *donnez un pseudo-programme permettant de simuler $y(t)$.*

Solution :

1. On remarque que la fonction triangle dérivée une fois est une fonction porte avancée et une fonction porte retardée, (la porte étant définie $\Pi(t) = [\![|t| \leq 0.5]\!]$).

$$\frac{d}{dt}\mathbb{T}(t) = \Pi(t+0.5) - \Pi(t-0.5) \tag{5.4}$$

   Dérivée deux fois, ce sont trois, l'un avancé, le deuxième au milieu et un retardé.

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathbb{T}(t) = \delta(t-1) - 2\delta(t) + \delta(t+1) \tag{5.5}$$

   En intégrant cette expression, on trouve alors que

$$\frac{d}{dt}\mathbb{T}(t) = \int_{-\infty}^{t} \left[\delta(\tau-1) - 2\delta(\tau) + \delta(\tau+1)\right]\, d\tau \tag{5.6}$$

2.

$$y(t) = RC\int_{-\infty}^{t} \left[\tilde{y}(\tau-1) - 2\tilde{y}(\tau) + \tilde{y}(\tau+1)\right]\, d\tau \tag{5.7}$$

3. Le pseudo-code est donne par

Algorithm 1 générant la figure 5.1.

Rentrer les valeurs de `R,L,C`
Créer une échelle de temps `t` entre -2 et 4 avec 1000 points
Calculer $\tilde{y}(t)$ en utilisant `sol_eq_diff` avec les coefficients LC,RC et 1 et l'échelle de temps `t`.
Utiliser `retarder` pour calculer $\tilde{y}_2(t) = \tilde{y}(t+1) - 2\tilde{y}(t) + \tilde{y}(t-1)$
Utiliser `integrer` pour calculer $y(t) = RC\int_{-\infty}^{t} \tilde{y}_2(\tau)\, d\tau$

```
def y(R,L,C,t):
  """réponse à une fonction triangle utilisant une equation différentielle"""
  import seb
  y_tilde=seb.sol_eq_diff((L*C,R*C,1),t)
  assert all(y_tilde[t<0]==0)
  y_tilde2=R*C*(seb.retarder(t,y_tilde,-1)-2*y_tilde+seb.retarder(t,y_tilde,1))
  y=seb.integrer(t,y_tilde2)
  return y

R,C,L = 3,0.5,1
t=np.linspace(-2,4,10**3)
fig,ax = plt.subplots()
ax.plot(t,seb.fonction_T(t),label='x(t)')
ax.plot(t,y(R,L,C,t),label='y')
ax.set_xlabel('t')
ax.legend()
plt.tight_layout()
fig.savefig('./figures/fig_exSeb11_fig1.png')
fig.show()
```

Exercice 7 *On considère un filtre dont la réponse fréquentielle vérifie*

$$\widehat{H}(f) = \frac{j2\pi f \mathrm{RC}}{1 - 4\pi^2 f^2 + 4j\mathrm{RC}\pi f} \tag{5.8}$$

1. *Trouvez l'équation différentielle associée à la relation entrée-sortie ?*

2. *Trouvez l'équation différentielle associée à la réponse impulsionnelle ?*

3. *Proposez un algorithme permettant de caculer la réponse impulsionnelle.*

Exercice 8 *On considère l'équation différentielle associée à une relation entrée-sortie :*

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 3\frac{d}{dt}y(t) + y(t) = x(t) \tag{5.9}$$

1. *Donnez la réponse fréquentielle.*

2. *Donnez un algorithme donnant la réponse impulsionnelle.*

3. *Écrivez le polynôme caractéristique.*

4. *Trouvez les solutions de ce polynôme.*

5. *En déduire la réponse impulsionnelle.*

Chapter 6

Filtres et effet mémoire

Chapter 7

Description fréquentielle des filtres

Chapter 8

Signaux périodiques

Chapter 9

Filtres agissant sur des signaux périodiques

Chapter 10

Échantillonnage

Chapter 11

Peigne de Diracs

Chapter 12

Modélisation stochastique du bruit

Chapter 13

Résumé du cours

13.1 Exercices

Exercice 9 *Le signal montré sur la figure 13.1 est noté $x(t)$. Sa transformée de Fourier est notée $\widehat{X}$.*

1. *$x(t)$ est-il un signal temps continu, temps discret, périodique, non-périodique, déterministe ou aléatoire.*
2. *Donnez une expression de $x(t)$ sous la forme de sa description sur plusieurs intervalles.*
3. *Donnez une expression de $x(t)$ en fonction de $\mathbf{1}()$.*
4. *Calculez $x(0)$, $x(1)$, E_x.*
5. *Calculez $\widehat{X}(0)$ et $\widehat{X}(1)$.*
6. *Construire $y_1(t) = x\left(\frac{t}{2}\right)$*
7. *Construire $y_1(t) = x\left(t-1\right)$*
8. *Construire $y_1(t) = \frac{1}{2}x\left(t\right)$*
9. *Construire $y_1(t) = x\left(t\right) - x\left(t-2\right)$*

Simulation générant la figure 13.1 de l'exercice 9

```
t=linspace(-1,5,1e3);
x=3/2*t.*(t>=0).*(t<=2)+(4-t)*3/2.*(t>2).*(t<=4);
figure(1);
plot(t,x,'b-','linewidth',2);
set(gca,'fontsize',20);
saveas(1,'C:\A\SIMU\SEB\ex\exSEB1_fig1.png');
```

Solutions

1.

Exercice 10 *Le signal montré sur la figure 13.2 est noté $x(t)$. Sa transformée de Fourier est notée $\widehat{X}$. Ce signal est de la forme $x(t) = ae^{-bt}\mathbf{1}(t \geq 0)$.*

1. *$x(t)$ est-il un signal temps continu, temps discret, périodique, non-périodique, déterministe ou aléatoire.*
2. *Justifiez la valeur de a avec la courbe exponentielle sur la figure 13.2.*
3. *Justifiez la valeur de b avec la ligne tangente à la courbe exponentielle sur la figure 13.2.*
4. *Donnez une expression de $x(t)$ en fonction de $\mathbf{1}()$.*
5. *Calculez $x(0)$, $x(1)$, E_x.*

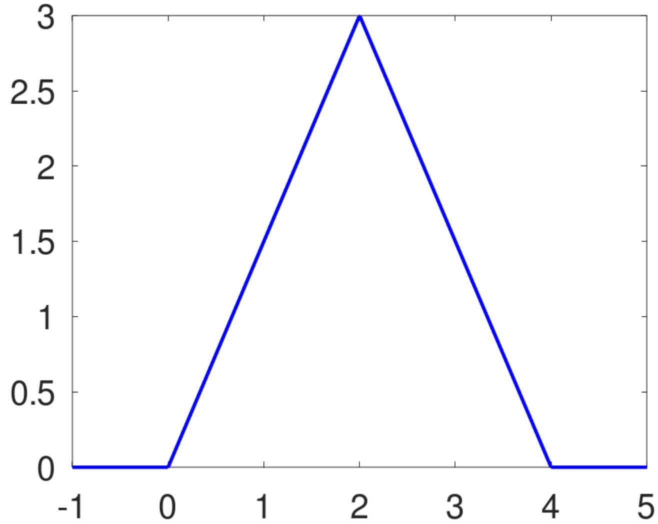

Figure 13.1: Graphe de $x(t)$ relatif à l'exercice 9.

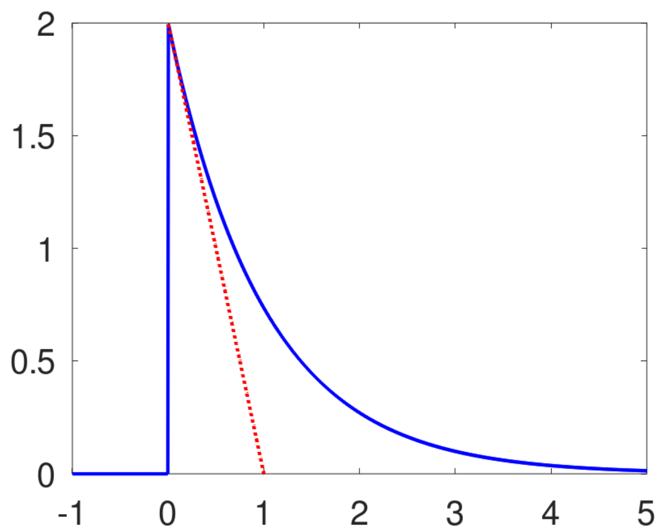

Figure 13.2: Graphe de $x(t)$ et de sa tangente pour l'exercice 10.

6. *Calculez* $\widehat{X}(0)$ *et* $\widehat{X}(1)$.

7. *Construire* $y_1(t) = x\left(\frac{t}{2}\right)$

8. *Construire* $y_1(t) = x\,(t-1)$

9. *Construire* $y_1(t) = \frac{1}{2}x\,(t)$

10. *Construire* $y_1(t) = x\,(t) - x\,(t-2)$

Simulation générant le graphe

```
t=linspace(-1,5,1e3);
x=2*exp(-t).*(t>=0);
t_tg=t((t>=0)&(t<=1));
x_tg=2-2*t_tg;
figure(1);
plot(t,x,'b-','linewidth',2,t_tg,x_tg,'r:','linewidth',2);
set(gca,'fontsize',20);
saveas(1,'C:\A\SIMU\SEB\ex\exSEB2_fig1.png');
```

Solutions

1.

Exercice 11 *Le signal étudié ici est* $x(t) = t\mathbf{1}(t \in [0,1[) + (2-t)\mathbf{1}(t \in [1,2[)$ *On considère* $y(t)$ *obtenu en périodisant le signal* $x(t)$ *pour* $t \in [0,3]$.

1. $x(t)$ *est-il un signal temps continu, temps discret, périodique, non-périodique, déterministe ou aléatoire.*

2. $y(t)$ *est-il un signal temps continu, temps discret, périodique, non-périodique, déterministe ou aléatoire.*

3. *Dessiner* $x(t)$ *pour* $t \in [-1,5]$ *sur un graphe.*

4. *Dessiner* $y(t)$ *pour* $t \in [-1,5]$ *sur le même graphe.*

5. *Calculez* $x(0)$, $x(-2)$, E_x *et* P_x.

6. *Calculez* $y(0)$, $y(-2)$, E_y *et* P_y.

7. *Calculez* $\widehat{X}_0$ *et* $\widehat{Y}_0$.

8. *Calculez* $\widehat{X}_0$ *et* $\widehat{Y}_0$.

9. *Dessiner sur le graphe* $y_1(t) = y\left(\frac{t}{2}\right)$

10. *Dessiner sur le graphe* $y_2(t) = y\,(t-1)$

11. *Dessiner sur le graphe* $y_3(t) = \frac{1}{2}y\,(t)$

12. *Dessiner sur le graphe* $y_4(t) = y\,(t) - y\,(t-2)$

Simulation générant le graphe

```
t=linspace(-1,5,1e3);
x=2*cos(pi*t+0.5*pi);
figure(1);
plot(t,x,'b-','linewidth',2);
set(gca,'fontsize',20);
saveas(1,'C:\A\SIMU\SEB\ex\exSEB3_fig1.png');
```

Solutions

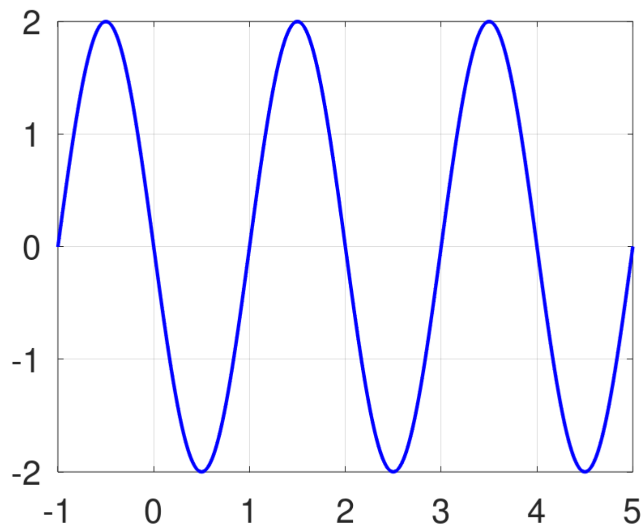

Figure 13.3: Graphe de $x(t)$ relatif à l'exercice 12.

1.

Exercice 12 *Le signal montré sur la figure 13.3 est noté* $x(t)$. *Sa transformée de Fourier est notée* $\widehat{X}$. *Ce signal est de la forme* $x(t) = a\cos(bt + c)$.

1. $x(t)$ *est-il un signal temps continu, temps discret, périodique, non-périodique, déterministe ou aléatoire.*
2. *Justifiez la valeur de* a *en observant la valeur maximale et minimale sur la figure 13.3.*
3. *Justifiez la valeur de* b *en mesurant la période sur la figure 13.3.*
4. *Justifiez la valeur de* c *en interprétant cette courbe comme en retard (ou en avance) par rapport à* $a\cos(bt)$ *sur la figure 13.2.*
5. *Calculez* $x(0)$, $x(1)$, P_x.
6. *Calculez* $\widehat{X}_0$ *et* $\widehat{X}_1$.
7. *Dessiner sur le graphe* $y_1(t) = x\left(\frac{t}{2}\right)$
8. *Dessiner sur le graphe* $y_1(t) = x\left(t-1\right)$
9. *Dessiner sur le graphe* $y_1(t) = \frac{1}{2}x\left(t\right)$
10. *Dessiner sur le graphe* $y_1(t) = x\left(t\right) - x\left(t-2\right)$

Simulation générant le graphe

```
t=linspace(-1,5,1e3);
x=2*cos(pi*t+pi/2);
figure(1);
plot(t,x,'b-','linewidth',2);
grid;
set(gca,'fontsize',20);
saveas(1,'C:\A\SIMU\SEB\ex\exSEB4_fig1.png');
```

Solutions

1.

2. $a = 2$
3. $b = \pi$
4. $c = \frac{\pi}{2}$.