Théorie du signal

Gabriel Dauphin

November 1, 2024

Contents

Chapter 1

Représentation des signaux non-périodiques, module et argument d'un complexe, distribution de Dirac, indicatrice, calculs de limites, intégrale d'un signal et transformée de Fourier en

- Échelon

$$\mathbb{H}(t) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t) = \begin{cases} 1 \ \text{ si } \ t \geq 0 \\ 0 \ \text{ si } \ t < 0 \end{cases}$$

- Porte centrée de largeur unité

$$\Pi(t) = \mathbf{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(t) = \begin{cases} 0 \ \text{ si } \ t < -\frac{1}{2} \\ 1 \ \text{ si } \ t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ 0 \ \text{ si } \ t > \frac{1}{2} \end{cases}$$

- Fonction signe

$$\text{signe}(t) = \mathbb{H}(t) - \mathbb{H}(-t) = \begin{cases} -1 & \text{si } \ t < 0 \\ 0 & \text{si } \ t = 0 \\ 1 & \text{si } \ t > 0 \end{cases}$$

Formellement

Pour être cohérent avec quelques équations du chapitre 12 où on s'intéresse à des transformées de Fourier de $\mathbb{H}(t)$, il faudrait légèrement modifier la définition de $\mathbb{H}(t)$ et affirmer que $\mathbb{H}(t) = 1$ si $t > 0$, $\mathbb{H}(0) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{H}(t) = 0$ pour $t < 0$, et ce pour des raisons que l'on peut imaginer avec la remarque 17 du chapitre 8. Cette définition est à ma connaissance pas utilisée et elle ne permet plus d'utiliser la fonction caractéristique à moins de modifier aussi sa définition. Aussi dans le cadre de ce cours, je propose de garder la définition classique de $\mathbb{H}(t)$.

Pour trouver l'équation d'un signal à partir de sa courbe représentative définie comme des droites par morceaux, on découpe l'intervalle en une succession d'intervalles, de façon à ce que sur chacun de ces intervalles, la courbe soit un portion de droite. Par ailleurs on sait que

$$x(t) = \frac{t - t_a}{t_b - t_a}(x_b - x_a) + x_a \tag{1.1}$$

est l'équation d'une droite vérifiant $x(t_a) = x_a$ et $x(t_b) = x_b$.

Par exemple un signal qui vaut 0 en $t = -1$, 1 en $t = 0$ et 0 en $t = 1$ et qui est obtenu en joignant ces différents segments a pour équation

- $x(t) = 0$ pour $t \leq -1$.
- $x(t) = t - 1$ pour $t \in]-1, 0]$
- $x(t) = 1 - t$ pour $t \in]0, 1]$
- $x(t) = 0$ pour $t > 1$.

Finalement

$$x(t) = (t-1)\mathbf{1}_{]-1,0]}(t) + (1-t)\mathbf{1}_{]0,1]}(t)$$

1.2 Représentation d'un signal

1.2.1 Convention

- $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres et n'inclut pas i,
- $\mathbb{R}_+$ sont les nombres positifs ou nuls,
- $\mathbb{R}_-$ sont les nombres négatifs ou nuls.

Ce qu'on appelle un signal est dans ce chapitre une fonction dépendant d'une variable notée t et qui correspond au temps. Une fonction dépendant d'une variable est notée en mathématiques f, sa valeur calculée pour une valeur particulière de t est notée $f(t)$, ces notations montrent qu'il est d'usage en mathématique de faire la différence entre une fonction et une valeur particulière pour une valeur de t. Parce que cette distinction n'est pas essentielle et qu'en revanche il existe des signaux en théorie du signal qui sont des suites, on préfère généralement noter le signal par $x(t)$ plutôt que x. Pour l'instant les signaux considérés sont à valeurs réelles mais on verra lors de la section 6 qu'un signal peut être à valeurs complexes. Un signal peut ne pas être une fonction mais une distribution, on verra cela dans la section 5.

Pour aider la compréhension des équations, il est important dans le cadre de ce cours que lorsqu'on écrit qu'un signal est égal à un autre signal, la variable t figure à gauche et à droite du signe $=$. Par exemple, on ne doit pas écrire $x+1 = \frac{1}{t^2+1}$ mais $x(t)+1 = \frac{1}{t^2+1}$.

Un signal défini sur un intervalle donné par exemple pour $t \geq 0$ est vu ici comme un signal défini sur $\mathbb{R}$, nul pour toutes les valeurs ou ce signal n'est pas défini.

Formellement

On dit qu'un signal $x(t)$ nul pour $t < 0$ est un signal *causal*. On a alors $x(t) = x(t)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$

1.2.2 Calculs de limites

Lorsqu'on sait que $\lim_{t\to+\infty} x(t) = a$ alors il y a une asymptote en $x = a$ en $+\infty$. Lorsqu'on sait que $\lim_{t\to t_0^+} x(t) = +\infty$ alors il y a une asymptote en $t = t_0$ sur la droite.

Quelque soit α et $\beta > 0$,

$$\lim_{t\to+\infty} t^\alpha e^{-\beta t} = 0 \text{ et } \lim_{t\to+\infty} t^\alpha e^{-\beta t^2} = 0 \tag{1.2}$$

1.2.3 Calculs de dérivées

La dérivée d'une sinusoïde est

$$\frac{d}{dt}\cos(2\pi f_0 t) = -2\pi f_0 \sin(2\pi f_0 t) \text{ et } \frac{d}{dt}\sin(2\pi f_0 t) = 2\pi f_0 \cos(2\pi f_0 t) \tag{1.3}$$

La dérivée d'une exponentielle et d'une gaussienne est

$$\frac{d}{dt}e^{\alpha t} = \alpha e^{\alpha t} \text{ et } \frac{d}{dt}e^{\alpha t^2} = 2\alpha t e^{\alpha t} \tag{1.4}$$

La dérivée d'un produit de fonctions est donnée par

$$\frac{d}{dt}\left(x(t)y(t)\right) = x(t)\frac{d}{dt}y(t) + y(t)\frac{d}{dt}x(t) \tag{1.5}$$

1.2.4 Tableau de variation

On appelle un tableau de variation, un tableau qui indique pour quelles valeurs le signal est croissant ou décroissant, en outre ce tableau indique les valeurs atteintes lorsque le signal change de sens de croissance et en moins l'infini et plus l'infini.

Le fait qu'un signal soit croissant ou décroissant peut être déterminé en calculant la dérivée du signal.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) \geq 0 \Rightarrow & x(t) \text{ est croissante} \\ \frac{d}{dt}x(t) \leq 0 \Rightarrow & x(t) \text{ est décroissante} \end{cases}$$

Lors de la section 5.4.1, on verra que la dérivée d'une fonction porte ou d'une indicatrice fait apparaître une distribution de Dirac. Pour l'instant lorsqu'un signal est défini avec une foncton porte ou avec une indicatrice, il suffit de considérer séparément les intervalles sur lesquelles la fonction porte ou l'indicatrice est constante et sur chacun de ces intervalles à l'exclusion de leurs bornes, la dérivée est nulle.

Exemple 1 *On souhaite tracer la courbe représentative de* $x(t) = te^{-\frac{t^2}{2}}$. *Sa dérivée*

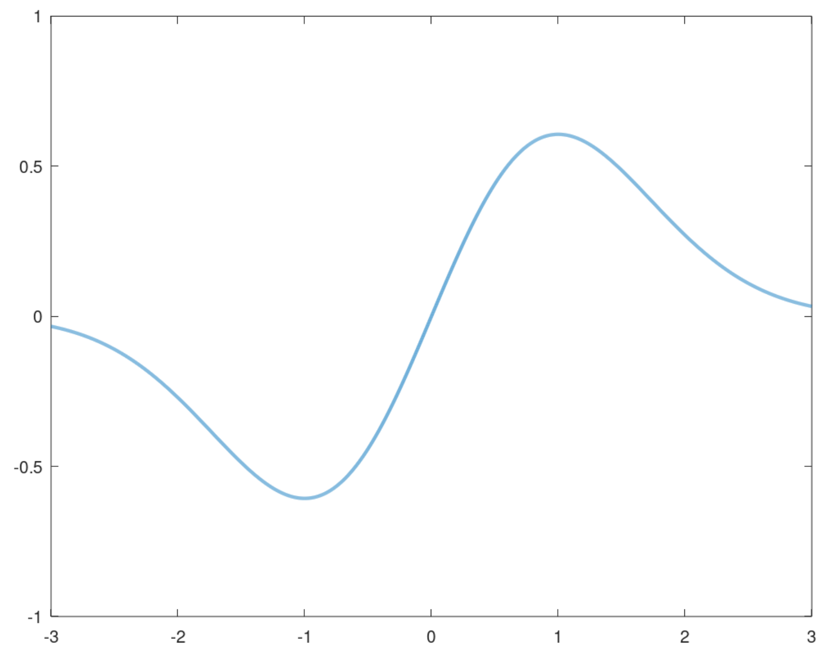

Figure 1.1: Graphique de $x(t) = te^{-\frac{t^2}{2}}$ pour $t \in [-3, 3]$.

est

$$\frac{d}{dt}te^{-\frac{t^2}{2}} = (1-t^2)e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Cette dérivée est négative pour $t \leq -1$*, positive pour* $t \in [-1,1]$ *et négative pour* $t \geq 1$*. Ses limites sont nulles en* $-\infty$ *et en* $+\infty$*. La valeur minimale est donc* $x(-1) = -e^{-1/2} \approx -0.61$ *et sa valeur maximale est* $x(1) = e^{1/2} \approx 0.61$*.*

```
t=-3:1e-3:3;
x=t.*exp(-t.^2/2);
figure(1); plot(t,x,'Linewidth',2);
```

Cette courbe est représentée sur la figure 1.1

1.2.5 Une autre façon de déterminer un tableau de variation

Plutôt que de déterminer le signe de la dérivée d'un signal, on peut déduire le sens de variation d'un signal au moyen des règles suivantes :

- f et g sont des fonctions croissantes alors $f \circ g$ est croissante.
- f et g sont des fonctions décroissantes alors $f \circ g$ est croissante.
- f est croissante et g est décroissante alors $f \circ g$ est décroissante.

- f est décroissante et g est croissante alors $f \circ g$ est décroissante.

On peut y rajouter ces deux règles

- La somme de deux fonctions croissantes est croissante.
- La somme de deux fonctions décroissantes est décroissante.

1.3 Transformée de Fourier d'un signal

1.3.1 Définitions

$x(t)$ étant un signal, on note la transformée de Fourier $X(\nu)$.

- t est le temps souvent en seconde (noté s).
- ν est la fréquence souvent en Hertz (noté Hz).
- $x(t)$ est à valeurs réelles, parfois complexe.
- $X(\nu)$ est à valeurs complexes.

On utilisera parfois aussi la notation

$$X(\nu) = \mathrm{TF}[x(t)](\nu)$$

Il est important que ν se trouve à gauche et à droite du signe =.

La valeur en zéro de la transformée de Fourier est

$$X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, dt$$

Pour un signal $x(t)$ réel, $X(0)$ est aussi réel.

1.3.2 Calculs d'une primitive

$F(t)$ est une primitive de $f(t)$ si

$$\frac{d}{dt}F(t) = f(t) \tag{1.6}$$

Pour certains signaux, on ne connaît pas la primitive. Pour d'autres signaux, il est simple de les calculer.

$$\begin{array}{lll} \frac{t^{n+1}}{n+1} & \text{est la primitive de} & t^n \\ \frac{1}{\alpha}e^{\alpha t} & \text{est la primitive de} & e^{\alpha t} \end{array} \tag{1.7}$$

1.3.3 Calculs d'intégrales

Lorsqu'un signal est défini avec une indicatrice,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}_{[a,b]}(t)\, f(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[a,b]}(t)\, f(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt$$

Lorsque t est utilisée comme variable d'intégration, c'est-à-dire lorsque dt est précisé dans l'équation alors il ne faut pas que t apparaisse de l'autre côté de l'égalité. Ainsi il est difficile de comprendre ce que signifie $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi^2 t^2}\, dt = e^{-t^2}$.

Formellement

On utilise parfois la notation suivante

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt$$

Cette notation s'utilise aussi avec $\mathbb{R}_+$ pour remplacer les bornes 0 et $+\infty$.

Chapter 2

Symétrie, utilisation de la valeur absolue, transformations des signaux et leurs conséquences sur la transformée de Fourier, module et argument de la transformée de Fourier

Graphiquement l'axe $t = 0$ est un axe de symétrie. Dans ce cas, $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt = 2\int_0^{+\infty} x(t)\,dt$.

Un signal $x(t)$ est impair signifie que

$$x(-t) = -x(t)$$

Graphiquement le point $(0,0)$ est un point de symétrie centrale. Dans ce cas, $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt = 0$.

Remarque 1 *Il peut être tentant d'affirmer que si $x(t)$ est pair, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{i2\pi\nu t}\,dt = 2\int_0^{+\infty} x(t)e^{i2\pi\nu t}\,dt$. Mais en fait ceci est faux. En revanche, on a bien les propriétés suivantes*

1. *Si $x(t)$ est un signal pair, $x(t)\cos(2\pi\nu t)$ est un signal pair et $x(t)\sin(2\pi\nu t)$ est un signal impair aussi*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i2\pi\nu t}\,dt = 2\int_0^{+\infty} x(t)\cos(2\pi\nu t)\,dt - 2i\times 0 = 2\Re e\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i2\pi\nu t}\,dt\right)$$

2. *Si $x(t)$ est un signal impair, $x(t)\cos(2\pi\nu t)$ est un signal impair et $x(t)\sin(2\pi\nu t)$ est un signal pair aussi*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i2\pi\nu t}\,dt = 2\times 0 - 2i\int_0^{+\infty} x(t)\sin(2\pi\nu t)\,dt = 2Im\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i2\pi\nu t}\,dt\right)$$

Un signal symétrique par rapport à $t = t_0$ signifie que

$$x(t - t_0) = x(t + t_0) \tag{2.1}$$

2.2 Transformations d'un signal

- $y(t)$ est en retard par rapport à $x(t)$ s'il existe $\tau > 0$ tel que $y(t) = x(t - \tau)$.
- $y(t)$ est en avance par rapport à $x(t)$ s'il existe $\tau > 0$ tel que $y(t) = x(t + \tau)$.
- $y(t) = x(\frac{t}{a})$ avec $a > 1$ est une dilatation de l'échelle des temps avec un facteur a.
- $y(t) = x(at)$ avec $a > 1$ est une contraction de l'échelle des temps avec un facteur a.
- $y(t) = x(-t)$ est le signal symétrique de $x(t)$ par rapport à $t = 0$.
- $y(t) = ax(t)$ est une amplification du signal lorsque $a > 1$, il s'agit d'une atténuation si $a < 1$.
- $y(t) = x(a - t)$ La courbe $y(t)$ est obtenue en calculant le symétrique par rapport à $t = \frac{a}{2}$.

On peut aussi ajouter des signaux. Ainsi étant donné deux signaux $x(t)$ et $y(t)$, $z(t) = x(t) + y(t)$ est la somme des signaux.

Remarque 2 *Un signal $x(t)$ est symétrique par rapport à $t = t_0$ signifie que le signal $y(t) = x(t + t_0)$ est pair. Un signal $x(t)$ est anti-symétrique par rapport à $t = t_0$ signifie que le signal $y(t) = x(t + t_0)$ est impair.*

2.3 Utilisation des complexes

Un complexe z s'écrit [1]

$$z = a + ib$$

- a est la partie réelle de z : $a = \Re e(z)$.
- b est la partie imaginaire de z : $b = \mathrm{Im}(z)$.

En utilisant $i^2 = -1$, on retrouve les formules permettant d'additionner et multiplier les complexes entre eux.

$|z|$ est le module du complexe : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Considérant deux complexes z_1 et z_2, on a

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2| \text{ et } \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

Un complexe z peut aussi s'écrire

$$z = \rho\, e^{i\theta}$$

- $\rho = |z| \in \mathbb{R}_+$ est le module de z.
- $\theta = \arg(z)$ l'argument de z, il s'agit d'un angle.

[1] Décomposition cartésienne.

Il existe un lien avec la partie réelle et la partie imaginaire de z.

$$\Re e(z) = \rho\cos(\theta) \text{ et } \operatorname{Im}(z) = \rho\sin(\theta)$$

2.4 Conséquences sur la transformées de Fourier

2.4.1 Conventions

$|X(\nu)|$ s'appelle le module de la transformée de Fourier, il est d'usage de l'appeler aussi **spectre**. Mais parfois le terme spectre est aussi utilisé pour désigner $X(\nu)$. $|X(\nu)|^2$ s'appelle le module au carré de la transformée de Fourier, on le désigne aussi avec le nom **densité spectrale**, la raison de cette terminologie est évoquée en section 11.2.

2.4.2 Conséquences relatives à la parité

- Si $x(t)$ est réel alors $|X(\nu)|$ est pair et $\arg(X(\nu))$ est impair.
- Si $x(t)$ est réel et pair alors $X(\nu)$ est réel.
- Si $x(t)$ est réel et impair alors $X(\nu)$ est imaginaire.

Formellement

- Si $x(t)$ est un signal pair alors $X(\nu)$ est aussi pair.

- Si $x(t)$ est un signal impair alors $X(\nu)$ est aussi impair.
- Si $x(t)$ est réel alors $\text{TF}[x(-t)](\nu) = (X(\nu))^*$ où * signifie l'expression conjugé et est définie en section 6.2.1.

2.4.3 Linéarité

On dit que la transformée de Fourier est linéaire parce qu'elle vérifie ces deux propriétés.

- Si $z(t) = x(t) + y(t)$ alors $Z(\nu) = X(\nu) + Y(\nu)$
- Si $z(t) = \alpha x(t)$ alors $Z(\nu) = \alpha X(\nu)$

2.4.4 Conséquence vis-à-vis d'un retard

Lorsqu'on retarde un signal $x(t)$ de τ, $y(t) = x(t-\tau)$, alors le module de la transformée de Fourier est inchangé et sa transformée de Fourier est multipliée par $e^{-2i\pi\nu\tau}$.

$$y(t) = x(t-\tau) \quad \Rightarrow \quad Y(\nu) = X(\nu)e^{-2i\pi\nu\tau}$$

2.4.5 Conséquence vis-à-vis d'une symétrie

Si $y(t) = x(-t)$ alors

$$Y(\nu) = X(-\nu) \tag{2.2}$$

2.4.6 Conséquence vis-à-vis d'une dilatation de l'échelle des temps

Lorsqu'on dilate l'échelle de temps d'un facteur a, alors il y a une amplification et une contraction de la transformée de Fourier.

$$y(t) = x\left(\frac{t}{a}\right) \quad \Rightarrow \quad Y(\nu) = |a|X(a\nu)$$

2.4.7 Combinaison d'un retard et d'une inversion de l'échelle des temps

On considère la transformation

$$y(t) = x(a - t) \tag{2.3}$$

La difficulté de cette transformation est qu'elle peut se voir d'une part comme une inversion de l'échelle des temps puis comme un retard de a.

$$z_1(t) = y(t + a) = x(a - (t + a)) = x(-t) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} z_1(t) = x(-t) \\ y(t) = z_1(t - a) \end{cases}$$

Cette transformation peut aussi se voir comme une avance de a suivi d'une inversion de l'échelle des temps.

$$z_2(t) = y(-t) = x(a + t) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} z_2(t) = x(t + a) \\ y(t) = z_2(-t) \end{cases}$$

Une façon plus simple d'analyser la transformation décrite par l'équation (2.3) est de considérer que $y(t)$ est le symétrique par rapport à l'axe vertical $t = \frac{a}{2}$.

De même la transformation

$$y(t) = -x(a - t)$$

est simplement une symétrique centrale (ou rotation de 180°) par rapport à $t = \frac{a}{2}$ et $x = 0$.

2.5 Outils mathématiques

2.5.1 Déterminer les sens de variation sans calculer la dérivée d'un signal.

Souvent la croissance ou la décroissance d'un signal sur un intervalle peut aussi être obtenue à partir des règles suivantes :

- $\ln(t)$, $\exp(t)$, t sont des signaux croissants.
- $\sqrt{t}$ et t^α pour $\alpha > 0$ sont des signaux croissants pour $t > 0$.
- $\frac{1}{t}$ est un signal croissant pour $t \neq 0$.
- Le fait de retarder/avancer le signal ou le fait de dilater/contracter l'échelle des temps ne modifie pas le fait que le signal soit croissant ou décroissant, mais il modifie l'intervalle sur lequel cette information est vraie.

- En composant un signal croisssant/décroissant avec un signal croissant/décroissant, on est capable de déterminer le fait que le signal résultant est croissant ou décroissant.
- Une expression de la forme $\frac{at+b}{ct+d}$ peut se mettre sous la forme $\alpha + \frac{\beta}{t+\frac{d}{c}}$

2.5.2 Dériver une expression intégrale

On est parfois amené à dériver une expression intégrale où les bornes de l'intégrale dépendent du temps. Voici un exemple

$$x_a(t) = \int_{2t}^{3t} e^{t^2}\, dt \tag{2.4}$$

Plus généralement, je considère un signal $x(t)$ défini par

$$y(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} x(\tau)\, d\tau \tag{2.5}$$

En posant

$$z(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$$

on remarque d'une part que $y(t)$ s'exprime en fonction de $z(t)$

$$y(t) = z(b(t)) - z(a(t))$$

et d'autre par que

$$\frac{d}{dt} z(t) = x(t)$$

La dérivée de $z(t)$ est alors

$$\frac{d}{dt}y(t) = \frac{d}{dt}b(t)x(b(t)) - \frac{d}{dt}a(t)x(a(t))$$

Ainsi dans l'exemple donné avec l'équation (2.4),

$$\frac{d}{dt}x_a(t) = 3e^{9t^2} - 2e^{4t^2}$$

2.5.3 Exemples

Quelle est la transformation géométrique associée à

$$y(t) = 3 + x(1-t)$$

Quelle est la transformation géométrique associée à

$$y(t) = 3 - x(1-t)$$

Dessinez la courbe représentative de

$$x(t) = \text{signe}(t-2)e^{-|2-t|}$$

Dessinez la courbe représentative de

$$x(t) = \frac{t+1}{1-2t}$$

Chapter 3

Signaux dépendant d’un second paramètre, descripteurs, transformée de Fourier de signaux exponentiels

3.1 Signaux dépendant d’un second paramètre

Jusqu’ici on a vu que des signaux qui dépendaient que d’une variable t. On est parfois

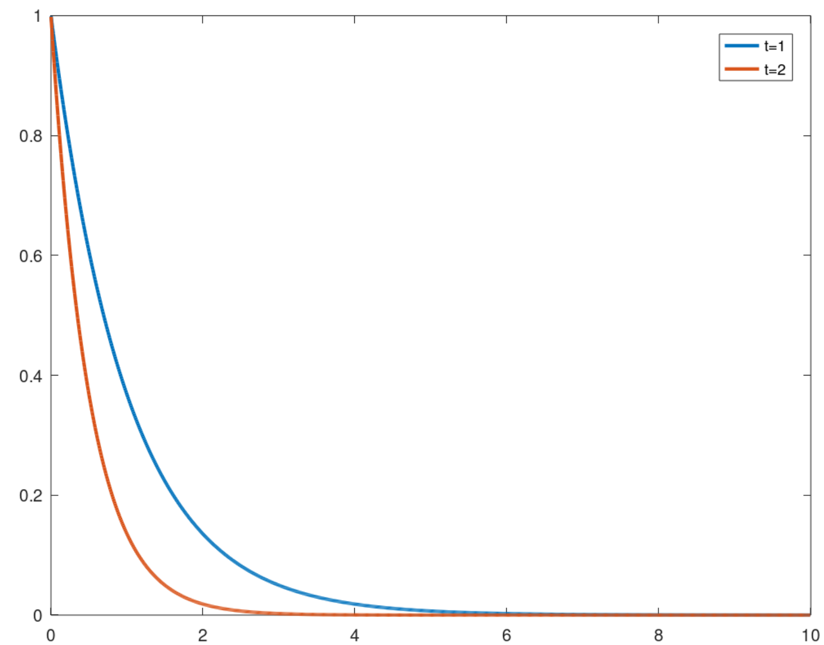

Figure 3.1: Evolution de $x_\alpha(t) = e^{-\alpha t}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)$ en fonction de $\alpha > 0$ pour $t = 1$ et $t = 2$.

séparément $x(t) = e^{-t}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$, $y(t) = e^{-2t}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$ et $z(t) = e^{-3t}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$, on peut considérer $x_\alpha(t) = e^{-\alpha t}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Dans cet exemple $x(t)$ correspond à $\alpha = 1$, $y(t)$ à $\alpha = 2$ et $z(t)$ à $\alpha = 3$.

En terme de représentation graphique, à chaque valeur de α, correspond un signal particulier et donc une courbe représentative particulière. Mais on peut aussi s'intéresser à la façon dont le signal dépend de α pour t fixé.

Exemple 2 *La figure 3.1 représente l'évolution de* $x_\alpha(t) = e^{-\alpha t}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)$ *en fonc-*

tion de $\alpha > 0$ *pour* $t = 1$ *et* $t = 2$.

```
t=1; alpha=1e-3:1e-2:10;
x1=exp(-alpha*t);
t=2;
x2=exp(-alpha*t);
figure(1); plot(alpha,x1,'Linewidth',2,alpha,x2,'Linewidth',2); legend('
```

Exemple 3 *La figure 3.2 représente l'évolution de* $x_\alpha(t) = \mathbf{1}_{[\alpha,1]}(t)$ *en fonction de* $\alpha \in [-1.5, 1.5]$ *pour* $t = 0.5$, $t = 0.5$ *et* $t = 1.5$.

```
t=-0.5; alpha=-1.5:1e-2:1.5;
x1=(t>=alpha).*(t<=1)-3e-3;
t=0.5;
x2=(t>=alpha).*(t<=1);
t=1.5;
x3=(t>=alpha).*(t<=1)+3e-3;
figure(1); plot(alpha,x1,'LineWidth',2,alpha,x2,'LineWidth',2,alpha,x3,'
axis([-1.5 1.5 -0.1 1.1])
```

3.2 Descripteurs

L'objectif est de réaliser des mesures sur des courbes.

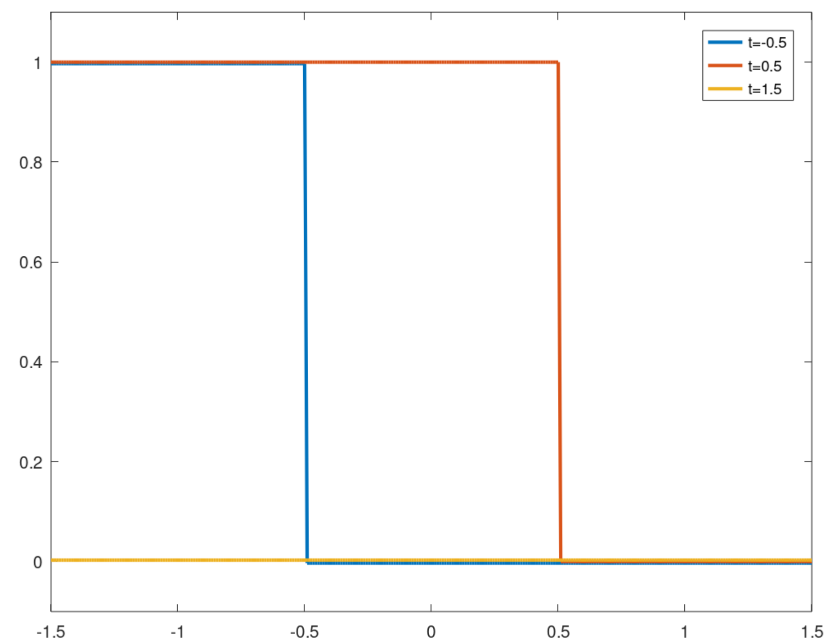

Figure 3.2: Evolution de $x_\alpha(t) = \mathbf{1}_{[\alpha,1]}(t)$ en fonction de $\alpha > 0$ pour $t = -0.5$, $t = 0.5$ et $t = 1.5$.

- Instant où le signal est maximal

$$t^{(\max)} = \arg\max_t \; x(t)$$

- Durée conduisant à une diminution du signal d'un facteur 2

$$x(t^{(\max)} + \Delta t^{(1/2)}) = \frac{1}{2} x(t^{(\max)})$$

De façon un peu formelle,

$$\Delta t^{(1/2)} = \min \left\{ \tau \geq 0 \middle| x(t^{\max} + \tau) \leq \frac{1}{2} \max_t x(t) \right\}$$

Exemple 4 *On reprend la figure 1.1, mais cette fois en évaluant graphiquement $x_{\max}$, $t_{\max}$ et $\Delta t_{1/2}$ avec la figure 3.3.*

```
t=-3:1e-3:3;
x=t.*exp(-t.^2/2);
[~,id1]=max(x);
id2=max(find(x>=0.5*exp(-1/2)));
delta_12=t(id2)-1;
figure(1); plot(t,x,'LineWidth',2,[1 1],[-1,exp(-1/2)],':','LineWidth',2
  [-3,t(id2)],0.5*exp(-1/2)*[1 1],':','LineWidth',2,...
  [-3 1],[exp(-1/2),exp(-1/2)],':','LineWidth',2);
```

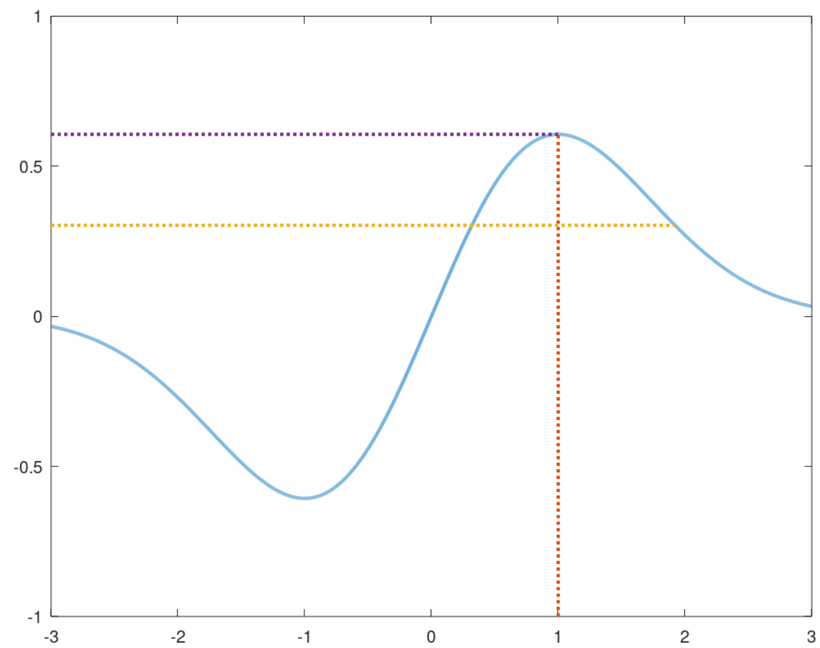

Figure 3.3: Graphique de $x(t) = te^{-\frac{t^2}{2}}$ pour $t \in [-3, 3]$

Chapter 4

Signaux gaussiens, techniques de calcul, puissance et énergie de signaux non-périodiques, intégration par partie

4.1 Définition de la transformée de Fourier

La transformée de Fourier peut se calculer à partir d'un signal $x(t)$ grâce à une intégrale

4.2 Transformée de Fourier inverse

La transformée de Fourier inverse transforme $X(\nu)$ en $x(t)$.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu) e^{i2\pi\nu t}\, d\nu \tag{4.1}$$

Remarque 3 *Avec cette écriture, on voit qu'il est possible d'évaluer sans calcul l'intégrale de $X(\nu)$, en utilisant que la valeur du signal en $t = 0$.*

$$x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)\, d\nu$$

4.3 Signaux gaussiens

4.3.1 Définitions des signaux gaussiens

Un signal qui se met sous la forme $x(t) = Ae^{-\frac{(t-t_0)^2}{2\alpha^2}}$ est une gaussienne symétrique par rapport à t_0, A étant ici une constante. À $t = t_0 + \alpha$ ou à $t = t_0 - \alpha$, $x(t) \approx 0.6 \max x(t)$.

4.3.2 Intégrale d'un signal gaussien

On considère $x(t) = e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$, avec $\sigma > 0$. Alors son intégrale est donnée par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, dt = \sqrt{2\pi}\sigma$$

4.3.3 Transformée de Fourier d'un signal gaussien

La transformée de Fourier d'une gaussienne est une gaussienne. En particulier

$$\mathrm{TF}\left[e^{-\pi t^2}\right](\nu) = e^{-\pi\nu^2}$$

4.3.4 Faire apparaître un terme carré

Une technique de calcul utile en particulier pour les signaux gaussiens est de faire apparaître un terme carré

$$at^2 + bt + c = a\left(t + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - a\frac{b^2}{4a^2}$$

4.3.5 Utilisation des fonctions holomorphes pour le calcul des intégrales

Un simple changement de variable sur t permet de montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+t_0)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$$

lorsque cette dernière intégrale est finie.

Cependant pour certaines fonctions dépendant d'une variable z et appelées **holomorphes** et lorsqu'elles ont cette propriété pour $|\operatorname{Im}(z)| < A$, on peut alors affirmer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt \text{ existe et } |\operatorname{Im}(z)| < A \quad \text{alors} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t+z)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$$

4.3.6 Définitions des fonctions holomorphes

On appelle les fonctions holomorphes $f(z)$ d'une part des fonctions qui ne sont pas des signaux, au lieu de t, leur valeur dépend d'un complexe z. D'autre part ces fonctions sont dérivables [1].

- Des exemples de fonctions holomorphes sont z^n pour n entier positif ou nul, $exp(z)$ et aussi $\frac{1}{z}$ quand $z \neq 0$. [2] En revanche $|z|$ et z^* ne sont pas des fonctions holomorphes.
- La somme et le produit de fonctions holomorphes sont des fonctions holomorphes.

$$f_1, f_2 \text{ holomorphes et } \alpha \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad f_1 + f_2, f_1 f_2, \alpha f_1 \text{ holomorphes}$$

- La composition de deux fonctions holomorphes est holomorphe.

$$f_1 \text{ holomorphe sur } \mathbb{C}, \quad f_2 \text{ holomorphe sur } D_2 \subset \mathbb{C} \text{ et } D_1 \subset \{z \in \mathbb{C} | f_1(z) \in D_2\}$$
$$\Rightarrow \quad z \mapsto f_2(f_1(z)) \text{ holomorphe sur } D_1$$

[1] C'est une dérivation particulière au sens où la dérivée partielle de la fonction par rapport à la partie réelle de z est liée à la dérivation partielle de la partie imaginaire de z.

[2] $\arg(z)$ et $\ln(z)$ sont des exemples de fonctions holomorphes délicats à utiliser et que nous n'utiliserons pas dans ce cours.

4.4 Énergie et puissance

4.4.1 Définition

L'énergie d'un signal $x(t)$ est définie par

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)^2 \, dt \tag{4.2}$$

Quand $E_x < +\infty$, on dit que le signal est d'énergie finie et la puissance P_x vérifie alors

$$P_x = 0$$

Formellement

La puissance est définie par

$$P_x = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)^2 \, dt$$

Et si $P_x > 0$ alors $E_x = +\infty$. Si $E_x = 0$, alors $x(t)$ est un signal nul (en fait nul sauf en un ensemble dénombrable d'instants).

4.4.2 Interprétation de l'énergie

On considère maintenant deux signaux $x(t)$ et $y(t)$, et on note $z(t) = x(t) - y(t)$. L'énergie E_z d'après l'équation (6.2) est :

$$E_z = \int_{-\infty}^{+\infty} (x(t) - y(t))^2 \, dt$$

$\sqrt{E_z}$ est appelée l'erreur moyenne quadratique. Plus E_z est faible, plus cela signifie que $x(t)$ est proche de $y(t)$. Mathématiquement si E_z est nul, cela veut dire que $x(t) = y(t)$ presque partout.

Formellement

Le terme preque partout a un sens mathématique signifiant qu'il peut y avoir une infinité d'exceptions, mais que ces exceptions de doivent pas avoir d'incidence sur le calcul de l'intégrale.

4.4.3 Égalité de Plancherel

Pour un signal non-périodique, on peut retrouver l'énergie du signal à partir de la transformée de ce signal.

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\nu)|^2 \, d\nu \tag{4.3}$$

4.4.4 Schéma

Le schéma de la figure 4.1 exprime en haut que l'on peut calculer l'énergie E_x en utilisant le signal en temps $x(t)$ ou sa transformée de Fourier avec $X(\nu)$. Il exprime au milieu que l'on peut calculer $X(\nu)$ à partir de $x(t)$ et aussi $x(t)$ à partir de $X(\nu)$. Il exprime en bas, le fait qu'on peut naturellement déterminer $x(0)$ à partir de $x(t)$ et $X(0)$ à partir de $X(\nu)$, mais aussi $x(0)$ à partir de $X(\nu)$ et $X(0)$ à partir de $x(t)$.

$$
\begin{tikzcd}
 & E_x & \\
x(t) \arrow[ur] \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[d] \arrow[drr] & & X(\nu) \arrow[ul] \arrow[d] \arrow[dll] \\
x(0) & & X(0)
\end{tikzcd}
$$

Figure 4.1: Les flèches bleues joignant une première expression à une deuxième expression indiquent que la deuxième expression peut être calculée à partir de la première expression.

Chapter 5

Signaux périodiques, sinus cardinaux et transformées de Fourier de fonctions portes, propriétés de la transformée de Fourier, relations trigonométriques, distribution Dirac

Mathématiquement on définit en général $\delta(t-t_0)$ avec ces propriétés

- Pour f une fonction, on a

$$f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$$

- La valeur de l'intégrale ne dépend que de $f(t_0)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0)\,dt = f(t_0) \tag{5.1}$$

La définition contenue dans l'équation (5.1) implique par exemple que

$$\int_a^b \delta(t)\,dt = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque 4

$$\text{TF}\left[\delta(t)\right](\nu) = 1$$

Remarque 5 *Cette distribution est paire au sens où multipliée par une fonction de t, la valeur résultante n'est pas modifiée lorsqu'on remplace dans cette fonction t par $-t$.*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(-t)\,dt$$

Exemple 5 *Le signal symétrique de $x(t) = \delta(t-2)$ est $\delta(t+2)$*

$$x(-t) = \delta(-t-2) = \delta(t+2) \text{ du fait de ce que } \delta(-t) = \delta(t)$$

5.2 Trigonométrie

- Valeurs

$$
\begin{array}{lllll}
\sin(0) = 0 & \sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2} & \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} & \sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} & \sin(\frac{\pi}{2}) = 1 \\
\cos(0) = 1 & \cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} & \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} & \cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2} & \cos(\frac{\pi}{2}) = 0
\end{array}
$$

- sin est impair, cos est pair.

- $\frac{d}{dt}\sin(t) = \cos(t)$ et $\frac{d}{dt}\cos(t) = -\sin(t)$

- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ et $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

- Relation entre le doublement de l'angle et le carré des termes

$$
\begin{array}{l}
\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \text{ et } \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \\
\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \text{ et } \cos^2\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta
\end{array}
$$

  $\cos^2\theta$ signifie en fait $(\cos(\theta))^2$.

- Relation entre un exponentielle complexe et les fonctions trigonométrique

$$\cos\theta = \Re e\left(e^{i\theta}\right) \text{ et } \sin\theta = \mathrm{Im}\left(e^{i\theta}\right)$$

- $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

5.3 Exemples de signaux

5.3.1 Signaux périodiques

Un signal périodique de période T est un signal vérifiant $x(t) = x(t+T)$. On remarque que le fait de retarder ou avancer un signal ne change pas le fait qu'il soit périodique et ne change pas la valeur de la période. En revanche le fait de dilater l'échelle des temps augmente d'autant la période.

Formellement

Considérant $x(t)$ périodique de période T, on appelle représentant d'un signal sur l'intervalle $[0, T[$, le signal défini par

$$x_T(t) = x(t)\mathbf{1}_{[0,T[}(t) \tag{5.2}$$

$x_T(t)$ n'est pas un signal périodique, mais il est possible de retrouver le signal $x(t)$ périodique à partir de $x_T(t)$ en superposant les différentes périodes.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_T(t - kT) \tag{5.3}$$

Remarque 6 *En traitement du signal, on est souvent amené à calculer l'intégrale sur une période d'un signal périodique. Une astuce permettant parfois de simplifier les calculs consiste à calculer cette intégrale sur une période en choisissant un instant particulier, en effet le résultat de ce calcul ne dépend pas du choix de l'instant de départ.*

$$\forall a, \quad \int_0^T x(t)\,dt = \int_a^{a+T} x(t)\,dt$$

Une application particulière de cette idée est que

$$\frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-i2\pi\frac{kt}{T}}\,dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-i2\pi\frac{kt}{T}}\,dt$$

5.3.2 Sinusoïdes

On appelle une sinusoïde $x(t) = a\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$. Elle est périodique de période $\frac{1}{f_0}$. On remarque que la modification de φ correspond au fait d'avancer ou retarder le signal et le fait de modifier f_0 correspond à une dilation/contraction de l'échelle des temps.

5.3.3 Sinus cardinaux

On définit

$$\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

$\mathrm{sinc}(\pi t)$ est pair et contient un lobe principal au centre de taille 2, tous ses autres lobes sont de tailles 1. Le premier lobe est positif, les autres se suivent en alternant les signes. Les limites en $t \to +\infty$ et en $t \to -\infty$ sont nulles.

Un descripteur parfois utilisé pour ce type de signaux est la durée amenant à la première annulation.

$$x\left(t^{(\max)} + \Delta t^{(\mathrm{nul})}\right) = 0$$

De façon un peu formelle,

$$\Delta t^{(\mathrm{nul})} = \min\left\{\tau > 0 \,|\, x(t^{\max} + \tau) = 0\right\}$$

Remarque 7 *La transformée de Fourier d'une fonction porte peut s'exprimer avec un sinus cardinal*

$$\mathrm{TF}\left[\mathbf{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(t)\right](\nu) = \mathrm{sinc}(\pi\nu)$$

Exemple 6 *La figure 5.1 représente* $|X(\nu)| = |\,\mathrm{sinc}(\pi\nu)|$.

```
nu=-3:1e-3:3;
ind=find(nu~=0);
X=ones(size(nu));
X(ind)=abs(sin(pi*nu(ind)))./abs(nu(ind))/pi;
figure(1); plot(nu,X,'LineWidth',2);
```

5.4 Propriétés de la transformée de Fourier vis-à-vis de l'intégration et de la dérivation

5.4.1 Intégration et dérivation d'un signal

Intégrer ou dériver un signal amène à définir un nouveau signal à partir d'un premier signal.

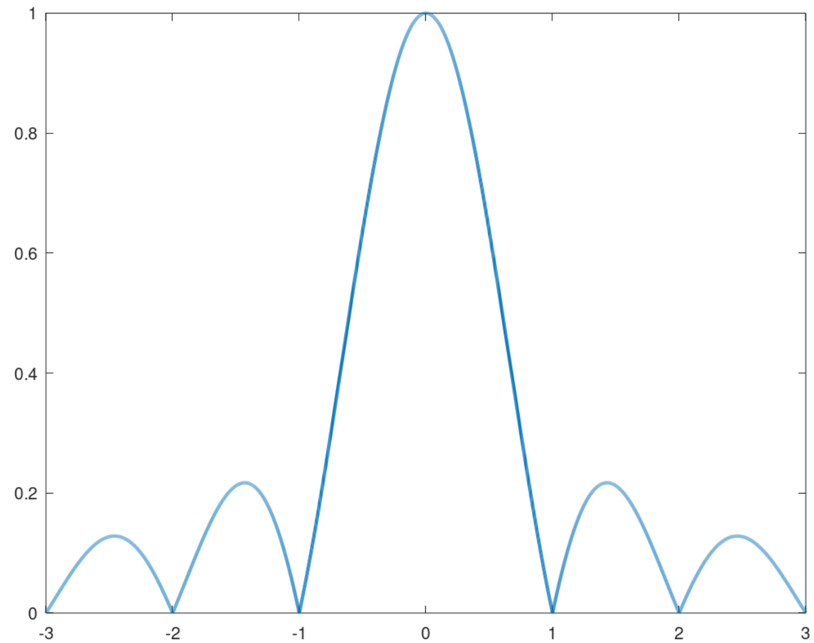

Figure 5.1: Représentation d'un sinus cardinal

Étant donné un signal $x(t)$, on définit le fait de l'intégrer par

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$$

Si le signal $x(t)$ est nul pour $t < 0$, alors on peut remplacer la borne inférieure de l'intégrale par 0.

À titre d'exemple, on constate que

$$\begin{cases} \mathbb{H}(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau \\ t\mathbb{H}(t) = \int_{-\infty}^{t} \mathbb{H}(\tau)\,d\tau \end{cases}$$

Étant donné un signal $x(t)$, on définit le fait de le dériver par

$$y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$$

Lorsqu'on intègre un signal et qu'on le dérive ensuite, on retrouve le signal départ. Aussi, on retrouve les exemples précédents.

$$\begin{cases} \delta(t) = \frac{d}{dt}\mathbb{H}(t) \\ \mathbb{H}(t) = \frac{d}{dt}t\mathbb{H}(t) \end{cases}$$

Plus généralement, lorsqu'on a un signal qui est une porte sur un intervalle, la dérivée est une différence entre deux Dirac.

$$\frac{d}{dt}\mathbf{1}_{[a,b]}(t) = +\delta(t-a) - \delta(t-b)$$

Le signe est positif sur le front montant et négatif sur le front descendant.

Remarque 8 *Il n'est pas tout à fait exact que le fait d'intégrer soit l'opération inverse de la dérivation, parce qu'il existe différents types de signaux qui ont la même dérivée. En fait ces différents signaux ne se distinguent que par l'ajout d'une constante.*

La notation consistant à dériver plusieurs fois, par exemple n fois, est

$$\frac{d^n}{dt^n}x(t)$$

Remarque 9 *Il existe une ambiguïté dans la notation de la dérivée d'un signal illustré par l'exemple suivant.*

$$\frac{d}{dt}x(2t) \text{ pour } t=1$$

Cette expression peut s'interpréter comme l'évaluation de la dérivée du signal en $t=2$*, mais dans le cadre de ce cours on interprête cette expression comme la dérivée de la fonction composée* $t\mapsto 2t$ *puis* $t\mapsto x(t)$ *en* $t=1$*. Dans le cadre de ce cours les énoncés utiliseront la notation qui suit pour la première interprétation*

$$\left.\frac{d}{d\tau}x(\tau)\right|_{\tau=2}$$

et la notation suivante pour la deuxième interprétation

$$\left.\frac{d}{dt}x(2t)\right|_{t=1}$$

Remarque 10 *La dérivation change la parité d'un signal.*

- *Si $s(t)$ est pair alors $\frac{d}{dt}s(t)$ est impair.*
- *Si $s(t)$ est impair alors $\frac{d}{dt}s(t)$ est pair.*

Il est possible que $\frac{d}{dt}s(t)$ soit pair ou impair, bien que $s(t)$ ne soit ni pair ni impair.

5.4.2 Propriété de la transformée de Fourier

Intégrer un signal, c'est diviser sa transformée de Fourier par $2i\pi\nu$. Dériver un signal, c'est multiplier sa transformée de Fourier par $2i\pi\nu$.

$$\mathrm{TF}\left[\frac{d^n}{dt^n}x(t)\right](\nu) = (2i\pi\nu)^n\,\mathrm{TF}\left[x(t)\right](\nu) \tag{5.4}$$

Cette propriété peut aider à calculer la transformée de Fourier de signaux obtenus par dérivation ou intégration.

Il se trouve que la transformée de Fourier inverse a une propriété assez similaire

$$\mathrm{TF}^{\text{-1}}\left[\frac{d^n}{d\nu^n}X(\nu)\right](t) = (-2i\pi t)^n\,\mathrm{TF}^{\text{-1}}\left[X(\nu)\right](t) \tag{5.5}$$

Cette propriété peut aider à calculer la transformée de Fourier de signaux obtenus par multiplication ou division par t.

Remarque 11 *De même l'équation (5.5) permet parfois de remplacer une intégration par partie. L'exemple considéré ici est un signal* $x(t) = e^{-\lambda t}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)$ *avec* $\lambda > 0$. *Et on cherche à calculer la transformée de Fourier de* $y(t) = tx(t)$. *Les transformées de Fourier de ces deux signaux sont notés* $X(\nu)$ *et* $Y(\nu)$. *On suppose avoir déjà calculé* $X(\nu) = \frac{1}{\lambda+2i\pi\nu}$. *On applique ensuite l'intégration par partie*

$$Y(\nu) = \int_0^{+\infty} te^{-\lambda t}e^{-i2\pi\nu t}\,dt = \left[t\frac{e^{-\lambda t}e^{-i2\pi\nu t}}{-\lambda - i2\pi\nu}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda t}e^{-i2\pi\nu t}}{-\lambda - i2\pi\nu}\,dt = 0 + \frac{1}{\lambda + 2i\pi\nu}X(\nu)$$

Au lieu de ce calcul qui suppose qu'on utilise la primitive de $x(t)e^{-2i\pi\nu t}$, *l'équation (5.4*
permet d'affirmer que

$$Y(\nu) = \frac{1}{-2i\pi}\,\mathrm{TF}[(-2i\pi t)x(t)](\nu) = \frac{1}{-2i\pi}\frac{d}{d\nu}X(\nu) = \frac{1}{-2i\pi}\times\frac{-2i\pi\nu}{(\lambda+2i\pi\nu)^2} = \frac{1}{(\lambda+2i\pi\nu)^2}$$

Remarque 12 *L'équation (5.4) permet parfois de remplacer une intégration par partie. Soit* $x(t)$ *un signal ayant une limite nulle quand* $t \to -\infty$ *et dont la dérivée est notée* $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$. *On note* $X(\nu)$ *et* $Y(\nu)$ *leurs transformées de Fourier. L'intégration par partie permet d'évaluer* $X(\nu)$ *en fonction de* $Y(\nu)$, *en effet* $x(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$.

$$Y(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-i2\pi\nu t}\,dt = \left[x(t)e^{-i2\pi\nu t}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\frac{d}{dt}e^{-i2\pi\nu t}\,dt = i2\pi\nu\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i2\pi\nu t}\,d$$

L'expression entre crochet est nulle parce que pour que l'intégrale soit définie, il faut que les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ soient nulles.

L'équation (5.5) permet d'obtenir le résultat plus simplement.

$$Y(\nu) = \mathrm{TF}\left[\frac{d}{dt}x(t)\right](\nu) = 2i\pi\nu\,\mathrm{TF}[x(t)](\nu) = 2i\pi\nu X(\nu)$$

Remarque 13 *L'équation (5.4) a un sens pour $n = -1$, plus précisément elle devient*

$$\mathrm{TF}\left[\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau\right](\nu) = \frac{1}{2i\pi\nu}\,\mathrm{TF}\left[x(t)\right](\nu) + A\delta(\nu)$$

avec A une constante.

L'équation (5.5) a un sens pour $n = -1$, plus précisément elle devient

$$\mathrm{TF}^{\text{-}1}\left[Y(\nu)\right](t) = \frac{1}{-2i\pi t}\,\mathrm{TF}^{\text{-}1}\left[X(\nu)\right](t) + A\delta(t)$$

avec $X(\nu) = \frac{d}{d\nu}Y(\nu)$ et A un constante.

Chapter 6

Signaux à valeurs complexes, approximation, temps moyen

6.1 Temps moyen

Pour un signal à valeurs complexes, on définit le temps moyen

$$< t >= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t|x(t)|\, dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\, dt}$$

6.2 Propriété de la transformée de Fourier adaptées aux signaux à valeurs complexes

On considère maintenant des signaux $x(t)$ à valeurs complexes et non seulement à valeurs réeles.

6.2.1 Conjugé d'un complexe

Étant donné un complexe z, on définit le conjugué d'un complexe

$$z^* = \Re e(z) - i\,\mathrm{Im}(z)$$

La définition des complexes est rappelée dans la section (2.3).

6.2.2 Parité

Il devient faux d'affirmer que $|X(\nu)|$ est pair et $\arg(X(\nu))$ est impair. En fait quand on voit un spectre non-symétrique par rapport à la fréquence nulle, cela signifie que le signal en temps n'est pas à valeurs réels.

Formellement

L'équation mentionnée en section 2.4.2 est modifiée en deux équations

$$\mathrm{TF}[x(-t)](\nu) = X(-\nu) \quad \text{et} \quad \mathrm{TF}[(x(t))^*](\nu) = (X(-\nu))^* \tag{6.1}$$

Exemple 7 *Pour illustrer ces notions, on considère le signal complexe défini par*

$$x(t) = e^{2i\pi t}\mathbf{1}_{[0,1]}(t)$$

Sa transformée de Fourier a pour module un sinus cardinal centré en $\nu = 1$, qui n'est donc pas un spectre pair, précisément parce que $x(t)$ n'est pas à valeurs réels.

$$X(\nu) = \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi(1-\nu)}e^{-i\pi\nu}$$

Après calcul, on a bien

$$\mathrm{TF}[x(-t)](\nu) = X(-\nu) \quad \textit{et} \quad \mathrm{TF}[x(t)^*](\nu) = (X(-\nu))^*$$

6.2.3 Formule de l'énergie modifiée

Pour un signal non-périodique, l'énergie d'un signal $x(t)$ est définie par

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt \tag{6.2}$$

De plus quand E_x n'est pas infini, la puissance est nulle

$$E_x < +\infty \quad \Rightarrow \quad P_x = 0 \tag{6.3}$$

D'une façon générale, là où pour un signal réel, il y avait $(x(t))^2$, on met maintenant $|x(t)|^2$.

6.2.4 Modulation d'un signal et transformée de Fourier

On considère un signal $x(t)$, dont la transformée de Fourier est $X(\nu)$. Si on le multiplie par $\cos(2i\pi\nu_0 t)$ alors sa transformée de Fourier devient $\frac{1}{2}X(\nu-\nu_0)+\frac{1}{2}X(\nu+\nu_0)$. En pratique, il est plus simple de retenir que

$$\mathrm{TF}\left[x(t)e^{i2\pi\nu_0 t}\right](\nu) = \mathrm{TF}\left[x(t)\right](\nu-\nu_0)$$

Il est possible de retrouver la formule précédente à partir de cette formule.

6.3 Approximation de signaux

6.3.1 Définition d'un produit scalaire

Pour les signaux d'énergie finie ($E_x < +\infty$), on définit

$$< x(t), y(t) >= E_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)(y(t))^* \, dt$$

Pour les signaux périodiques de période T, on définit

$$< x(t), y(t) >= P_{xy} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)(y(t))^* \, dt \tag{6.4}$$

6.3.2 Qualificatifs

- $x(t)$ est un signal normé signifie que

$$< x(t), x(t) > \; = \; 1$$

- $x(t)$ et $y(t)$ sont orthogonaux signifie que

$$< x(t), y(t) > \; = \; 0$$

- Les interférences entre les signaux $x(t)$ et $y(t)$ sont constructives si

$$< x(t), y(t) > \; > \; 0$$

- Les interférences entre les signaux $x(t)$ et $y(t)$ sont destructives si

$$< x(t), y(t) > \; < \; 0$$

6.3.3 Utilisation d'une base de fonctions

Les N signaux $e_1(t), e_2(t), \ldots, e_N(t)$ forment une base orthonormée si les signaux sont **normés** et **orthogonaux** entre eux.

Formellement

$$\forall i,\ < e_i(t), e_i(t) >= 1 \text{ et } \forall i \neq j,\ < e_i(t), e_j(t) >= 0$$

$\widehat{x}(t)$ est une approximation de $x(t)$ définie par

$$\widehat{x}(t) = \alpha_1 e_1(t) + \alpha_2 e_2(t) + \ldots + \alpha_N e_N(t)$$

Les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ sont calculés à partir de $x(t)$.

$$\begin{cases} \alpha_1 =< x(t), e_1 > \\ \alpha_2 =< x(t), e_2 > \\ \quad\vdots \\ \alpha_N =< x(t), e_N > \end{cases}$$

Formellement

On a aussi que la puissance ou l'énergie de $x(t) - \hat{x}(t)$ est inférieure à la puissance ou l'énergie de $x(t)$ suivant que le signal est périodique ou d'énergie finie. Compte tenu de l'interprétation faite en section 4.4.2, cette moindre différence témoigne de ce que $\hat{x}(t)$ est plus proche de $x(t)$ que $x(t)$ ne l'est du signal nul.

6.3.4 Interprétation géométrique

Chapter 7

Puissance et énergie d'un signal périodique, valeur moyenne d'un signal périodique, coefficients de la série de Fourier, valeur à gauche et à droite, parité, représentation

Sa puissance est finie

$$P_x = \frac{1}{T}\int_0^T (x(t))^2 \; dt$$

Lorsque le signal est complexe, la puissance se calcule avec

$$P_x = \frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2 \; dt \tag{7.1}$$

7.2 Transformées de Fourier des signaux périodiques

Convention 1 *On utilise les notations suivantes.*

- $\mathbb{N}$ *désigne les entiers positifs ou nuls.*
- $\mathbb{N}_*$ *désigne les entiers strictement positifs.*
- $\mathbb{Z}$ *désigne les entiers positifs, nuls ou négatifs. Ces entiers sont dits* relatifs.
- $\mathbb{Z}_*$ *désigne les entiers non-nuls, positifs ou négatifs.*

On suppose ici que le signal est périodique de période T. Sa transformée de Fourier est une succession de raies qui sont modélisés par une suite de complexes notés X_k. Pour chaque valeur de k, il y a une fréquence notée ν_k.

$$\nu_k = \frac{k}{T} \tag{7.2}$$

Ainsi les fréquences f_k sont espacées de $\frac{1}{T}$ c'est-à-dire l'inverse de la période. Plus cette période augmente, plus les raies se rapprochent les une des autres. k est un entier relatif ($k \in \mathbb{Z}$).

Pour une sinusoïde, $x(t) = a\sin(2\pi\nu_0 t + \varphi)$, sa transformée de Fourier contient uniquement deux raies en $\nu_0 = \frac{1}{T}$ et en $-\nu_0 = -\frac{1}{T}$ qui sont décrits par X_1 et X_{-1}. Les autres coefficients X_k sont nuls y compris $X_0 = 0$.

7.3 Valeur moyenne des signaux périodiques

Le coefficient de la transformée de Fourier X_0 est la valeur moyenne d'un signal, elle est notée aussi $< x(t) >$.

$$X_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt \tag{7.3}$$

Ce coefficient s'appelle aussi *composante continue.*

Remarque 14 *Quand un signal est non-périodique, on définit la valeur moyenne de ce signal*

$$< x(t) >= \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\,dt$$

7.4 Valeurs à gauche et à droite

En mathématique, on distingue les fonctions dites continues, des fonctions discontinues. Dans ce cours, les signaux sont parfois des fonctions continues (exponentielles, sinusoïdes) et parfois des fonctions discontinues (porte, certains signaux périodiques).

On définit la valeur à gauche de t_0 d'un signal

$$x(t_0^-) = \lim_{\tau \to t_0^-} x(\tau)$$

Il s'agit de la limite de la fonction $\tau \mapsto x(\tau)$ lorsque $\tau < t_0$.

De même on définit la valeur à droite de t_0 d'un signal

$$x(t_0^+) = \lim_{\tau \to t_0^+} x(\tau)$$

Il s'agit de la limite de la fonction $\tau \mapsto x(\tau)$ lorsque $\tau > t_0$.

En pratique pour calculer ces valeurs à gauche et à droite, on se retrouve le plus souvent dans ces cinq cas de figures.

- Le signal $x(t)$ est une fonction continue en t_0 et dans ce cas les valeurs à gauche et à droite sont simplement celles du signal en t_0

$$x(t_0^-) = x(t_0^+) = x(t_0)$$

- Le signal $x(t)$ est une fonction porte **commençant** en t_0 éventuellement ajoutée à une fonction continue, dans ce cas la valeur à gauche ne tient pas compte de la fonction porte, tandis que la valeur à droite en tient compte.

On suppose que $x(t) = f(t) + A\mathbf{1}_{[a,b]}(t)$ alors $x(t_0^-) = f(t_0)$ et $x(t_0^+) = f(t_0) + A$

avec $t_0 = a$ et $f(t)$ continue en t_0.

- Le signal $x(t)$ est une fonction porte **finissant** en t_0 éventuellement ajoutée à une fonction continue, dans ce cas la valeur à gauche tient compte de la fonction porte, tandis que la valeur à droite n'en tient pas compte.

  On suppose que $x(t) = f(t) + A\mathbf{1}_{[a,b]}(t)$ alors $x(t_0^-) = f(t_0) + A$ et $x(t_0^+) = f(t_0)$

  avec $t_0 = b$ et $f(t)$ continue en t_0.

- $x(t)$ est une fonction périodique de période T et est égale à une fonction f continue sur l'intervalle $]t_0, t_0 + T[$. Dans ce cas la valeur à gauche de t_0 est $f(t_0 + T)$ et la valeur à droite de t_0 est $f(t_0)$.

- $x(t)$ est une fonction périodique de période T et est égale à une fonction f continue sur l'intervalle $]t_0 - T, t_0[$. Dans ce cas la valeur à gauche de t_0 est $f(t_0)$ et la valeur à droite de t_0 est $f(t_0 - T)$.

Chapter 8

Série de Fourier, définition et propriétés, utilisation de la distribution $\delta(\nu)$

8.1 Définitions des séries

Pour retrouver un signal en temps à partir des coefficients de la transformée d'un signal périodique, on a besoin de la notion de séries.

On appelle série une suite dépendant d'un indice ici K correspondant à la somme des éléments d'une suite u_k entre 1 et K. Cette série est notée

$$\sum_{k=1}^{K} u_k = u_1 + u_2 + \ldots + u_K$$

L'expression obtenue dépend de K, elle n'est pas modifiée si on remplace k par n.

$$\sum_{n=1}^{K} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_K$$

Lorsque cette suite a une limite lorsque K tend vers l'infini, on dit que la série converge. Lorsque cette suite tend vers l'infini, on dit que la série diverge. Parfois on ne s'intéresse qu'à l'existence et à la valeur de cette limite. Lorsqu'elle existe cette valeur est notée

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k \tag{8.1}$$

Formellement

Mathématiquement on distingue la limite indiquée par l'équation (8.1) de la série pour laquelle on se demande si elle converge. La série est alors notée $\sum_{k\geq 1} u_k$ ou $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} u_k$. Dans le cadre de ce cours, on ne fera pas cette distinction.

Remarque 15 *Si u_k est impair alors*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_k = 0$$

Mais à la différence de ce qui concerne les intégrales, si u_k est pair,

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_k = u_0 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$$

Pour ce cours, il est utile de savoir que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} \quad \begin{cases} \text{converge si } \alpha > 1 \\ \text{diverge si } \alpha \leq 1 \end{cases} \tag{8.2}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k \, e^{ik\theta} \text{ converge si } \theta \neq 0 \text{ et, } u_k \text{ est positive et décroissante} \tag{8.3}$$

8.2 Série de Fourier

On considère $x(t)$ un signal périodique de période T. Les coefficients X_k de la transformée de Fourier sont donnés par

$$X_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-i2\pi \frac{kt}{T}} \, dt \tag{8.4}$$

À partir de ces coefficients de Fourier, il est possible de retrouver $x(t)$. C'est ce qu'on appelle le théorème de Dirichlet.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{i2\pi k \frac{t}{T}} \tag{8.5}$$

Formellement

L'équation (8.5) peut être vue comme la somme d'une série $x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} X_{-k} e^{i2\pi(-k)\frac{t}{T}} + \sum_{k=-\infty}^{-1} X_k e^{i2\pi(k)\frac{t}{T}}$
L'exemple de $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k+i}$ ne converge parce que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k+i}$ ne converge pas.

La première harmonique correspond à $k = 1$ et à $k = -1$.

Remarque 16 *Généralement dans l'équation (8.5), la somme infinie converge et on peut le montrer en utilisant l'équation (8.3) ou éventuellement (8.2). En fait, dans le cadre de ce cours, cette série converge. On sait qu'elle converge quand $x(t)$ est continu ou quand elle est dite "à variations bornées".*

Remarque 17 *L'équation (8.5) pose un problème lorsqu'on l'applique en t_0 et que précisément le signal $x(t)$ a une discontinuité en t_0, c'est-à-dire lorsque $x(t_0^-) \neq x(t_0^+)$ tel que défini en section 7.4. Dans ce cas l'équation devient*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{i2\pi k\frac{t}{T}} = \frac{1}{2}x(t_0^-) + \frac{1}{2}x(t_0^+)$$

La distribution définie pour les signaux en temps, s'utilise aussi pour les fréquences, elle est alors notée $\delta(\nu)$. Dans le cadre de ce cours, la seule propriété utile est que pour $X(\nu)$ une fonction quelconque, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)\delta(\nu - \nu_0)\, d\nu = X(\nu_0)$$

ν_0 étant une fréquence quelconque.

Il est d'usage d'écrire la transformée de Fourier d'un signal périodique de la façon suivante

$$X(\nu) = \mathrm{TF}\left[x(t)\right] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \delta\left(\nu - \frac{k}{T}\right) \tag{8.6}$$

Remarque 18 *Quand on remplace X_k par sa valeur, l'équation (8.6) revient en fait à mettre les équations (7.2) et (8.4) dans une seule équation.*

Remarque 19 *L'équation (8.6) permet aussi d'obtenir que l'équation (8.5) soit vue comme l'application de l'équation (8.6) à l'équation (4.1). En effet,*

$$\mathrm{TF}^{\text{-}1}\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \delta\left(\nu - \frac{k}{T}\right)\right](t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{i2\pi\frac{kt}{T}} = x(t)$$

Remarque 20 *Il est possible d'interpréter la transformée de Fourier des signaux périodiques définis par l'équation (8.4) comme la projection d'un signal $x(t)$ sur une base $t \mapsto e^{i2\pi\frac{kt}{T}}$ pour le produit scalaire associé aux signaux de puissances finies défini par l'équation (6.4).*

$$X_k = \left\langle x(t), e^{i2\pi\frac{kt}{T}} \right\rangle$$

En effet,

$$\left\langle x(t), e^{i2\pi\frac{kt}{T}} \right\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\left(e^{i2\pi\frac{kt}{T}}\right)^* dt = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\, e^{-i2\pi\frac{kt}{T}}\, dt = X_k$$

De même, on peut interpréter la série de Fourier, c'est-à-dire la transformée de Fourier inverse des spectres formées de raies non-périodiques définie par l'équation (8.5) comme la reconstitution presque exacte de $x(t)$ à partir de ses projections sur la base orthonormée $t \mapsto e^{i2\pi\frac{kt}{T}}$.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{i2\pi\frac{kt}{T}}$$

Remarque 21 *Lors de la section 5.3.1, il a été dit qu'un signal $x(t)$ périodique de période T peut s'exprimer à partir d'un signal non-périodique $x_T(t)$ (voir équation (5.2)). Une façon de calculer les coefficients X_k de la transformée de Fourier de $x(t)$ est de les retrouver à partir de la transformée de Fourier $X_T(\nu)$ de $x_T(t)$.*

$$X_k = \frac{1}{T} X_T\left(\frac{k}{T}\right)$$

Tout se passe comme si les coefficients X_k étaient obtenues en prélevant les valeurs de $X_T(\nu)$ en des fréquences espacées de $\frac{1}{T}$ en divisant le résultat par T.

Formellement

La remarque 21 peut être utilisée pour déduire les propriétés de la transformée de Fourier des signaux périodiques à partir des propriétés de la transformée de Fourier des signaux non-périodiques. Cependant dans le cadre de ce cours, nous n'utiliserons pas cette idée, qui est riche mais à utiliser avec précaution.

8.3 Égalité de Parseval

Pour un signal périodique, la puissance peut se calculer à partir du signal $x(t)$ avec l'équation (7.1), elle peut aussi se calculer avec les coefficients de la transformée de Fourier, X_k

$$P_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2$$

8.4 Propriété de la série de Fourier

8.4.1 Valeurs en zéro

De manière similaire au fait que X_0 est la valeur moyenne du signal (voir section 7.3 et l'équation (7.3), on a aussi la valeur du signal $x(0)$ se déduit de la somme des coefficients de la série de Fourier.

- Si $x(t)$ n'est pas discontinue en $t = 0$, alors

$$x(0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k$$

- Sinon,

$$\frac{1}{2}x(0^-) + \frac{1}{2}x(0^+) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k$$

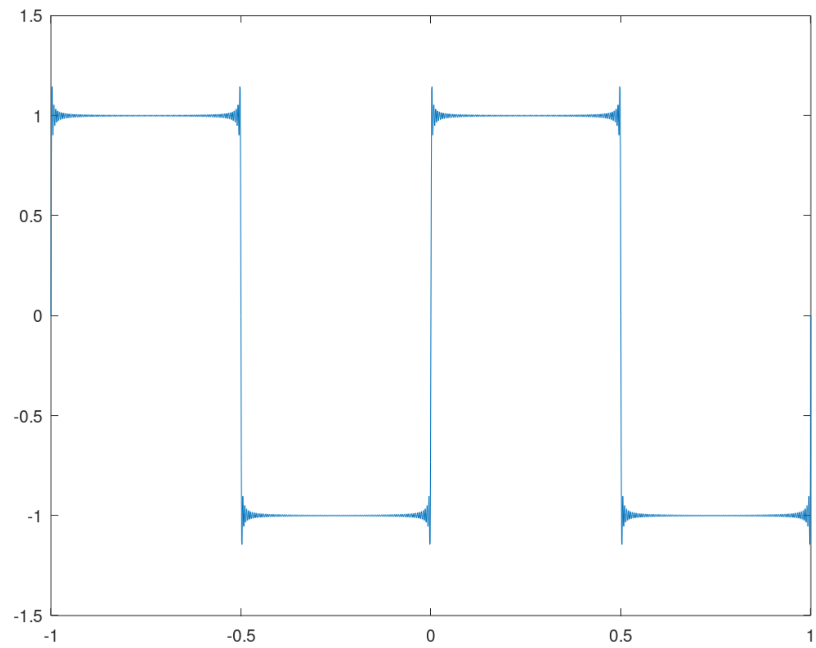

Figure 8.1: Graphique de la reconstructon de $x(t)$ à partir des coefficients de la série de Fourier.

Exemple 8 *On considère le signal périodique de période* 1 *qui vaut* $x(t) = -\mathbf{1}_{[-1/2,0[}(t) + \mathbf{1}_{]0,1/2]}(t)$ *pour* $t \in [-1/2, 1/2]$. *Les coefficients de la série de Fourier sont* $X_k = \frac{1-(-1)^k}{i\pi k}$ *pour* $k \neq 0$ *et* $X_0 = 0$. *En remarquant que* X_k *est impair (*$X_{-k} = -X_k$*), on en déduit qu'on a bien*

$$\frac{1}{2}x(0^+) + \frac{1}{2}x(0^-) = 0 = \sum_{k \neq 0} X_k$$

D'après la définition de la transformée de Fourier inverse, on a

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{i2\pi kt} = x(t)$$

Et effectivement, la figure 8.1 montre cette reconstruction en utilisant les coefficients X_k pour $k \in \{-200 \ldots 200\}$.

```
j=sqrt(-1);
t=-1:1e-3:1; K=200; X=@(k)1./pi./j./k.*(1-(-1).^k);
x=zeros(size(t));
for k=-K:K
  if 0==k continue; end
x=x+X(k)*exp(j*2*pi*k*t);
end
figure(1); plot(t,x)
```

8.4.2 Parité

- Si $x(t)$ est réel et pair, alors X_k est réel.
- Si $x(t)$ est réel et impair, alors X_k est imaginaire.
- Si $x(t)$ est réel alors $|X_k|$ est pair et $\arg(X_k)$ est impair.

Chapter 9

Produit de convolution et distribution de Dirac

9.1 Produit de convolution : définition et exemples

Le produit de convolution transforme deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ en un troisième signal $z(t)$ défini par

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)\, d\tau \tag{9.1}$$

L'idée du produit de convolution est que pour chaque valeur de t, $z(t)$ est obtenu en sommant les contributions de toutes les valeurs $x(t_1)$ et $y(t_2)$ dès lors que $t = t_1 + t_2$.

Remarque 22 *Dans la mesure où la valeur $z(t)$ ne dépend pas exclusivement des valeurs de $x(t)$ et $y(t)$, il serait logique pour respecter la convention d'écriture pour la transformée de Fourier, d'écrire*

$$z(t) = \left[x(t) * y(t)\right](t)$$

Dans le cadre de ce cours et pour alléger l'écriture, nous utiliserons simplement $z(t) = x(t)*y(t)$ sauf dans le cas où on cherche à modifier le signal $z(t)$ obtenu, auquel cas nous utiliserons la notation précisant la façon dont ce produit de convolution est évaluée.

$$z\left(\frac{t}{2}\right) = \left[x(t) * y(t)\right]\left(\frac{t}{2}\right)$$

L'équation (9.1) peut aussi s'écrire sous la forme

$$z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)y(\tau)\,d\tau$$

Une façon de s'assurer que la formule est d'ajouter les arguments de x et de y, puis de vérifier que leur somme vaut t ; en l'occurence, $t = (t-\tau) + (\tau)$.

Formellement

Lorsque $x(t) = 0$ pour $t < 0$ et $y(t) = 0$ pour $t < 0$ alors l'équation (9.1) peut aussi s'écrire sous la forme

$$z(t) = \int_0^t x(\tau)y(t-\tau)\,d\tau$$

Exemple 9 *$\delta(t)$ peut être vue comme l'élément unité du produit de convolution*

$$\delta(t) * x(t) = x(t) \tag{9.2}$$

Exemple 10 *L'application de $*\delta(t - t_0)$ à un signal est équivalent à retarder le signal.*

$$\delta(t - t_0) * x(t) = x(t - t_0) \tag{9.3}$$

Exemple 11 *L'application de $*\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)$ à un signal est équivalent à intégrer le signal.*

$$\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \tag{9.4}$$

Exemple 12 *L'application de $*\frac{1}{T}\mathbf{1}_{[0,T[}(t)$ à un signal est équivalent à moyenner les T derniers instants du signal.*

$$\frac{1}{T}\mathbf{1}_{[0,T[}(t) * x(t) = \frac{1}{T}\int_{t}^{t-T} x(\tau)\, d\tau \tag{9.5}$$

9.2 Propriétés du produit de convolution et transformée de Fourier

Étant donnés deux signaux $x(t)$ et $y(t)$, on définit $z(t) = x(t) * y(t)$. On note respectivement $X(\nu)$, $Y(\nu)$ et $Z(\nu)$ les transformées de Fourier de $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$. On a alors que $Z(\nu) = X(\nu)Y(\nu)$.

Cette propriété peut aussi s'écrire

$$\mathrm{TF}\left[x(t) * y(t)\right](\nu) = \mathrm{TF}\left[x(t)\right](\nu)\, \mathrm{TF}\left[y(t)\right](\nu) \tag{9.6}$$

Formellement

En fait cette propriété est vraie aussi pour la transformée de Fourier inverse, mais nous ne l'utiliserons pas dans ce cours.

$$\mathrm{TF}\left[x(t)y(t)\right](\nu) = \mathrm{TF}\left[x(t)\right](\nu) * \mathrm{TF}\left[y(t)\right](\nu)$$

9.3 Propriétés du produit de convolution

9.3.1 Commutativité

Étant donnés deux signaux $x(t)$ et $y(t)$, on définit $z(t) = x(t)*y(t)$. La commutativité signifie qu'on obtient le même résultat en associant d'abord $y(t)$ puis $x(t)$.

$$x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$$

9.3.2 Associativité

Étant donnés trois signaux $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$, l'associativité signifie qu'on obtient le même résultat en associant $x(t)$ avec le résultat du produit de convolution de $y(t)$ et $z(t)$ ou en associant $x(t)$ avec $y(t)$ puis le résultat obtenu avec $z(t)$.

$$x(t) * (y(t) * z(t)) = (x(t) * y(t)) * z(t)$$

9.3.3 Calcul de la valeur en 0

Étant donnés deux signaux $x(t)$ et $y(t)$, on définit $z(t) = x(t) * y(t)$.

$$z(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(-\tau)\, d\tau$$

9.4 Propriété du produit de convolution vis-à-vis de transformations simples

9.4.1 Le produit de convolution est linéaire

Étant donnés trois signaux $x_1(t)$, $x_2(t)$ et $y(t)$ et étant donnés deux réels α et β, on a

$$(\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)) * y(t) = \alpha x_1(t) * y(t) + \beta x_2(t) * y(t)$$

9.4.2 Propriété du produit de convolution vis-à-vis du retard

Si on retarde de τ_1 un signal $x(t)$ et de τ_2 un autre signal $y(t)$ alors le signal résultant $z(t) = x(t) * y(t)$ est retardé de la somme des retards.

$$[x(t-\tau_1) * y(t-\tau_2)]\,(t) = [x(t) * y(t)]\,(t-\tau_1-\tau_2)$$

9.4.3 Propriété du produit de convolution vis-à-vis de la dilatation de l'échelle des temps

Étant donnés deux signaux $x(t)$ et $y(t)$, on note $z(t) = x(t) * y(t)$. Le fait pour $x(t)$ et $y(t)$ de dilater leur échelle des temps d'un *même* facteur $a > 0$, fait que $z(t)$ a aussi une échelle de temps dilaté ainsi qu'une amplification par ce même facteur a.

$$\left[x\left(\frac{t}{a}\right) * y\left(\frac{t}{a}\right)\right](t) = a\,[x\,(t) * y\,(t)]\left(\frac{t}{a}\right)$$

9.5 Produit de convolution et parité

On considère deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ et on note $z(t) = x(t) * y(t)$. Si $x(t)$ et $y(t)$ ont une symétrie on $t = 0$ alors $z(t)$ a aussi une symétrie en $t = 0$. Plus précisément

$$\left.\begin{array}{lll} x(t) \text{ pair} & \text{et} & y(t) \text{ pair} \\ x(t) \text{ impair} & \text{et} & y(t) \text{ impair} \end{array}\right\} \Rightarrow x(t) * y(t) \text{ pair}$$

$$\left.\begin{array}{lll} x(t) \text{ pair} & \text{et} & y(t) \text{ impair} \\ x(t) \text{ impair} & \text{et} & y(t) \text{ pair} \end{array}\right\} \Rightarrow x(t) * y(t) \text{ impair}$$

Formellement

En fait à l'image de ce qui se passe quand on dilate l'échelle des temps pour chacun des signaux, si on effectue un retournement temporel des deux signaux alors le signal résultant de leur produit de convolution subit aussi un retournement temporel.

$$[x(t) * y(t)]\,(t) = [x(-t) * y(-t)]\,(-t) \tag{9.7}$$

Exemple 13 *On cherche ici à déterminer de plusieurs manières.*

$$y(t) = [\delta(t-2) * x(3-t)]\,(t)$$

- *La façon la plus simple pour trouver $y(t)$ est d'analyser $\delta(t-2)*$ comme une façon d'appliquer un retard sur un signal donné. On pose $z(t) = x(3-t)$ et on calcule $z(t-2) = x(3-(t-2)) = x(5-t)$. D'où $y(t) = x(5-t)$.*

- *Une autre façon de raisonner est de chercher à appliquer l'équation (9.7), en posant* $z(t) = x(3-t)$.

$$y(t) = [\delta(t-2) * z(t)]\,(t) = [\delta(-t-2) * z(-t)]\,(-t)$$

$\delta(t)$ *étant pair, on a du coup* $\delta(-t-2) = \delta(t+2)$.

$$y(-t) = \delta(-t-2) * z(-t) = \delta(t+2) * x(3+t) = x(t+5)$$

Ce qui finalement prouve bien que

$$y(t) = x(5-t)$$

- *On peut utiliser la transformée de Fourier pour obtenir ce résultat en posant aussi que* $z(t) = x(3-t)$.

$$\mathrm{TF}[\delta(t-2)](\nu) = e^{-4i\pi\nu}$$

$$\mathrm{TF}[x(3-t)](\nu) = \mathrm{TF}[z(t)](\nu) = \mathrm{TF}[x(t+3)](-\nu) = [X(\nu)e^{6i\pi\nu}](-\nu) = X(-\nu)e^{-6i\pi\nu}$$

La propriété de la TF *vis-à-vis du produit de convolution montre alors que*

$$\mathrm{TF}[y(t)](\nu) = X(-\nu)e^{-10i\pi\nu} = \mathrm{TF}[x(-t)](\nu)e^{-10i\pi\nu} = \mathrm{TF}[x(-(t-5))](\nu)$$

et par suite que $y(t) = x(5-t)$.

9.6 Produit de convolution et dérivée

9.6.1 Énoncé de la propriété

Étant donnés deux signaux $x(t)$ et $y(t)$, on note $z(t) = x(t) * y(t)$. La dérivée de $z(t)$ s'obtient *d'une part* avec le produit de convolution de la dérivée de $x(t)$ par $y(t)$ et *d'autre part* avec le produit de convolution de $x(t)$ et la dérivée de $y(t)$.

$$\frac{d}{dt}\left[x(t) * y(t)\right](t) = \left[\frac{d}{dt}x(t) * y(t)\right](t) = \left[x(t) * \frac{d}{dt}y(t)\right](t) \tag{9.8}$$

Remarque 23 *Une façon d'utiliser cette propriété est de remarquer sa similarité avec l'intégration par partie. En posant $z(t)$ une primitive de $x(t)$ nulle pour $t \to -\infty$: $z(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$.*

$$\left[x(t) * y(t)\right](t) = \left[z(t) * \frac{d}{dt}y(t)\right](t)$$

Pour illustrer cette remarque, on prend l'exemple du calcul de $\mathbf{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(t) * \mathbf{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(t)$. On pose $x(t) = \mathbf{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(t)$. Sa dérivée est $\frac{d}{dt}x(t) = \delta(t+\frac{1}{2}) - \delta(t-\frac{1}{2})$. On pose $y(t)$ la primitive nulle pour $t < -\frac{1}{2}$.

$$y(t) = \int_{-\frac{1}{2}}^{t} x(\tau)\, d\tau = (t+\frac{1}{2})\mathbf{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[}(t) + \mathbf{1}_{[\frac{1}{2},+\infty[}(t)$$

D'après cette remarque, on

$$x(t) * x(t) = y(t) * \left(\delta(t + \frac{1}{2}) - \delta(t - \frac{1}{2})\right) = y(t + \frac{1}{2}) - y(t - \frac{1}{2})$$

On obtient alors

$$x(t) * x(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & si \;\; t + \frac{1}{2} < -\frac{1}{2} \\ ((t + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}) - 0 = 1 + t & si \;\; t + \frac{1}{2} \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ 1 - ((t - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}) = 1 - t & si \;\; t - \frac{1}{2} \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ 0 & si \;\; t - \frac{1}{2} > \frac{1}{2} \end{array} \right\} = (1 - |t|)\mathbf{1}_{[-1,1]}(t)$$

9.6.2 Dérivée de la distribution Dirac

On définit la dérivée de la distribution Dirac, notée $\delta'(t - t_0)$ par

$$\delta'(t - t_0) * x(t) = \frac{d}{dt} x(t - t_0)$$

Cette caractérisation de $\delta'(t)$ permet de retrouver l'équation (9.8) comme une conséquence de l'associativité du produit de convolution.

$$\delta'(t) * [x(t) * y(t)]\,(t) = [\delta'(t) * x(t)]\,(t) * y(t) = x(t) * [\delta'(t) * y(t)]\,(t)$$

Formellement

On peut définir aussi $\delta'(t-t_0)$ par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t-t_0)x(t)\,dt = -x'(t_0)$$

9.7 Exemples de calculs de produit de convolution

9.7.1 le produit de convolution de deux gaussiennes est une gaussienne

En exprimant la transformée de Fourier du produit de convolution comme le produit des transformées de Fourier de chaque gaussienne, on peut calculer le produit de convolution de deux gaussiennes.

Formellement

$$e^{-\pi\nu_1^2 t^2} * e^{-\pi\nu_2^2 t^2} = \frac{1}{\sqrt{\nu_1^2+\nu_2^2}} e^{-\pi\frac{\nu_1\nu_2}{\sqrt{\nu_1^2+\nu_2^2}}t^2}$$

9.7.2 le produit de convolution de deux fonctions portes est une fonction triangulaire

$$\mathbf{1}_{[0,1]}(t) * \mathbf{1}_{[0,1]}(t) = (1 - |t-1|)\,\mathbf{1}_{[0,2]}(t) \tag{9.9}$$

9.7.3 le produit de convolution d'un signal avec le signal constant égal à 1 est un signal constant

Soit $x(t)$ un signal et $X(\nu)$ sa transformée de Fourier. $x(t) * 1$ est un signal constant qui vaut $X(0)$

$$\left[x(t) * 1\right](t) = X(0) \tag{9.10}$$

Remarque 24 *L'équation (9.10) peut se démontrer ainsi.*

$$\left[x(t) * 1\right](t) = \mathrm{TF}^{-1}\left[X(\nu)\delta(\nu)\right](t) = \mathrm{TF}^{-1}\left[X(0)\delta(\nu)\right](t) = X(0)\,\mathrm{TF}^{-1}\left[\delta(\nu)\right](t) = X(0)$$

Chapter 10

Filtres, définition et propriétés, utilisation des limites

10.1 Définition d'un filtre

Un filtre parfois noté $\mathcal{H}$, transforme un signal $x(t)$ en un signal $y(t)$.
On appelle **relation entrée-sortie**, la façon dont $y(t)$ est défini à partir de $x(t)$.
Un filtre transforme $x(t)$ en $y(t)$ d'une manière particulière parce qu'il existe ce qu'on

appelle **réponse impulsionnelle**, $h(t)$ pour laquelle

$$y(t) = h(t) * x(t) \tag{10.1}$$

La réponse impulsionnelle caractérise le filtre. Lorsqu'on modifie l'entrée $x(t)$, la sortie $y(t)$ est alors modifiée mais la réponse impulsionnelle n'est pas modifiée.

10.2 Lien entre filtre et transformée de Fourier

On considère un filtre transformant un signal $x(t)$ en $y(t)$ et de réponse impulsionnelle $h(t)$. On note $X(\nu)$ et $Y(\nu)$ les transformées de Fourier de $x(t)$ et $y(t)$. Une propriété du produit de convolution fait que l'équation (10.1) devient

$$Y(\nu) = \mathrm{TF}[h(t)](\nu)X(\nu)$$

$\mathrm{TF}[h(t)]$ est notée $H(\nu)$ et appelée la **réponse fréquentielle** et parfois aussi la fonction de transfert.

$$H(\nu) = \mathrm{TF}[h(t)](\nu)$$

10.3 Exemples de filtres

10.3.1 Filtre à retard

La relation entrée-sortie qui suit définit un exemple de filtre à retard.

$$y(t) = x(t-1)$$

où $x(t)$ et $y(t)$ sont respectivement l'entrée et la sortie.

La réponse impulsionnelle de ce filtre est :

$$h(t) = \delta(t-1)$$

La réponse fréquentielle de ce filtre est :

$$H(\nu) = e^{-2i\pi\nu}$$

10.3.2 Filtre moyenneur

La relation entrée-sortie qui suit définit un exemple de filtre moyenneur.

$$y(t) = \int_{t-1}^{t} x(\tau)\, d\tau$$

où $x(t)$ et $y(t)$ sont respectivement l'entrée et la sortie.

La réponse impulsionnelle de ce filtre est :

$$h(t) = \mathbf{1}_{[0,1]}(t)$$

La réponse fréquentielle de ce filtre est :

$$H(\nu) = \text{sinc}(\pi\nu)e^{-i\pi\nu}$$

10.3.3 Filtre dérivateur

La relation entrée-sortie qui suit définit un exemple de filtre à retard.

$$\frac{d}{dt}y(t) + y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$$

où $x(t)$ et $y(t)$ sont respectivement l'entrée et la sortie.

La réponse impulsionnelle de ce filtre est :

$$h(t) = \delta(t) - e^{-t}\mathbb{H}(t)$$

La réponse fréquentielle de ce filtre est :

$$H(\nu) = \frac{2i\pi\nu}{2i\pi\nu + 1}$$

10.4 Qualificatifs décrivant un filtre

10.4.1 Filtre passe-bas

Un filtre est dit un **passe-bas** lorsqu'approximativement, le module de la réponse fréquentielle est plus important pour les basses fréquences que pour les fréquences élevées.

Le filtre moyenneur est un exemple de filtre passe-bas.

10.4.2 Filtre passe-haut

Un filtre est dit un **passe-haut** lorsqu'approximativement, le module de la réponse fréquentielle est plus faible pour les basses fréquences que pour les fréquences élevées. Le filtre dérivateur est un exemple de filtre passe-bas.

10.4.3 Filtre passe-tout

Un filtre est dit un **passe-tout** lorsqu'approximativement, le module de la réponse fréquentielle est identique pour toutes les fréquences. Le filtre à retard est un exemple de filtre passe-tout.

10.4.4 Fréquence de coupure

Pour décrire succintement un filtre passe-bas ou un filtre passe-haut, on définit la **fréquence de coupure**, notée ici ν_c.

$$|H(\nu_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \max_{\nu} |H(\nu)|$$

On définit aussi la fréquence de coupure par

$$20 \log_{10} |H(\nu_c)| = \max_{\nu} 20 \log_{10} |H(\nu)| \ - 3$$

Dans cette seconde définition, il est important que le logarithme utilisé ici soit de base 10, c'est-à-dire que $\log_{10}(10) = 1$.

Formellement

Les deux définitions donnent des valeurs très similaires mais pas rigoureusement identiques pour la fréquence de coupure. Mais l'objectif recherché en calculant la fréquence de coupure n'est que d'indiquer un comportement approximatif du filtre. En réalité des filtres passe-bas très différents peuvent avoir exactement la même fréquence de coupure.

10.5 Supplément : Comment trouver une façon de représenter un filtre

Un filtre peut être défini soit par sa relation entrée-sortie, soit par sa réponse impulsionnelle, soit par sa réponse fréquentielle.

10.5.1 Comment trouver la réponse impulsionnelle à partir de la relation entrée-sortie

On suppose que l'on connaît $\mathcal{H}$ qui transforme un signal $x(t)$ en un signal $y(t)$. La réponse impulsionnelle de ce filtre est la sortie du signal lorsqu'en entrée on place $x(t) = \delta(t)$.

$$h(t) = \mathcal{H}\left[\delta(t)\right](t)$$

10.5.2 Comment trouver la relation entrée-sortie à partir de la réponse impulsionnelle

On considère un filtre dont on connaît la réponse impulsionnelle notée $h(t)$. On se donne un signal en entrée $x(t)$ et on note $y(t)$ le signal sortie.

La relation entrée-sortie est

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)x(\tau)\,d\tau$$

Lorsqu'on sait que $x(t)$ et $h(t)$ sont nuls pour $t < 0$, alors cette relation entrée-sortie s'écrit aussi

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau)x(\tau)\,d\tau$$

10.5.3 Comment trouver la réponse fréquentielle à partir de la réponse impulsionnelle

On considère un filtre dont on connaît la réponse impulsionnelle notée $h(t)$. La réponse fréquentielle de ce filtre est

$$H(\nu) = \mathrm{TF}\left[h(t)\right](\nu)$$

10.5.4 Comment passer de la réponse fréquentielle à la relation entrée-sortie

La technique présentée ici permet de trouver la relation entrée-sortie à partir de sa réponse fréquentielle uniquement lorsque celle-ci est définie comme le quotient de deux polynômes.

On considère un filtre dont la réponse fréquentielle s'écrit sous la forme suivante :

$$H(\nu) = \frac{b_0 + b_1(2i\pi\nu) + \dots b_N(2i\pi\nu)^N}{a_0 + a_1(2i\pi\nu) + \dots a_M(2i\pi\nu)^M}$$

Dans ce cas la relation entrée-sortie correspondante est

$$a_0 y(t) + a_1 \frac{d}{dt} y(t) + \ldots + a_M \frac{d^M}{dt^M} y(t) = b_0 x(t) + b_1 \frac{d}{dt} x(t) + \ldots + b_N \frac{d^N}{dt^N} x(t)$$

La même technique permet de passer d'une relation entrée-sortie écrite sous la forme d'une équation différentielle à une réponse fréquentielle.

10.6 Supplément : Propriété des filtres

10.6.1 Un filtre est une relation linéaire

On considère un filtre $\mathcal{H}$. On considère deux signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$ et deux réels α et β. On note $y_1(t)$ la sortie du filtre lorsqu'en entrée on met $x_1(t)$ et $y_2(t)$ la sortie du filtre lorsqu'en entrée on met $x_2(t)$. Enfin on note $x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ un signal qui placé à l'entrée du filtre donne la sortie $y(t)$.

La linéarité signifie alors que $y(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$

On peut résumer l'ensemble de l'affirmation par

$$\mathcal{H}\left[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)\right](t) = \alpha \mathcal{H}\left[x_1(t)\right](t) + \beta \mathcal{H}\left[x_2(t)\right](t)$$

10.6.2 Un filtre est à temps invariant

On considère un filtre $\mathcal{H}$. On considère un signal $x_1(t)$ et un retard τ. On note $y_1(t)$ la sortie du filtre lorsqu'en entrée on met $x_1(t)$. Enfin on note $x_2(t) = x_1(t-\tau)$ le signal τ-retardé qui placé à l'entrée du filtre donne la sortie $y_2(t)$.

Le fait d'être à temps-invariant signifie alors que $y_2(t) = y_1(t-\tau)$

On peut résumer l'ensemble de l'affirmation par

$$\mathcal{H}\left[x_1(t-\tau)\right](t) = \mathcal{H}\left[x_1(t)\right](t-\tau)$$

Formellement

Dans le cadre de ce cours, quand on parle d'un filtre, il est linéaire et temps invariant. Mais le terme *filtre* est parfois utilisé pour désigner une relation entrée-sortie qui n'est pas forcément linéaire et temps invariant. Lorsqu'une de ces deux propriétés n'est pas vérifiée, la notion de réponse fréquentielle n'a pas de sens. Aussi pour être certain d'être compris, il est parfois souhaitable de préciser filtre linéaire à temps invariant.

Chapter 11

Autocorrélation

11.1 Définition de l'autocorrélation

On considère un signal $x(t)$. L'autocorrélation est un nouveau signal défini par

$$\varphi_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,(x(\tau - t))^* \; d\tau$$

Astuce 1 *Pour tester que cette écriture est probablement correcte, il faut la soustraction de l'argument du signal non-conjugué par l'argument du signal conjugué donne l'argument de l'autocorrélation.*

$$t \quad = \quad \tau \quad - \quad (\tau - t)$$

Formellement

Il existe un lien avec le produit de convolution. En posant $\tilde{x}(t) = (x(-t))^*$, on trouve que

$$\varphi_{xx}(t) = x(t) * \tilde{x}(t)$$

Ainsi, il est généralement faux de dire que $\varphi_{xx}(t) = x(t) * x(t)$.

Formellement

L'autocorrélation est en fait un cas particulier de l'intercorrélation qui n'est pas utilisé dans le cadre de ce cours. La définition de cette intercorrélation peut aider à retrouver la définition de l'autocorrélation. L'intercorrélation se calcule à partir de deux signaux $x(t)$ et $y(t)$.

$$\varphi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \left(y(\tau - t)\right)^* \, dt$$

11.2 Autocorrélation et transformée de Fourier

On considère un signal $x(t)$ dont la transformée de Fourier est notée $X(\nu)$. La transformée de Fourier de l'autocorrélation peut se calculer en ne considérant que le signal $x(t)$.

$$\mathrm{TF}\left[\varphi_{xx}(t)\right](\nu) = \left|X(\nu)\right|^2 \tag{11.1}$$

Formellement

La démonstration de cette équation est possible par exemple en utilisant les équations (9.6) et (6.1).

$$\mathrm{TF}\left[\varphi_{xx}(t)\right](\nu) = \mathrm{TF}\left[x(t) * (x(-t))^*\right](\nu) = \mathrm{TF}\left[x(t)\right](\nu)\,\mathrm{TF}\left[x(-t)^*\right](\nu) = X(\nu)\,(X(\nu))^* = |X(\nu)|^2$$

Une propriété importante dans certaines applications est que la transformée de Fourier de l'autocorrélation est **positive**.

$$\mathrm{TF}\left[\varphi_{xx}(t)\right](\nu) \geq 0$$

Astuce 2 *Le fait de se souvenir que* $\mathrm{TF}\left[\varphi_{xx}(t)\right](\nu) \geq 0$ *aide à se souvenir de l'équation (11.1).*

Cette quantité positive, $|X(\nu)|^2$ s'appelle la densité spectrale d'énergie.

Formellement

Le terme densité spectrale d'énergie provient de ce qu'effectivement en sommant $|X(\nu)|^2$ sur l'ensemble des fréquence on retrouve l'énergie E_x en utilisant l'équation (4.3), p. 45.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |X(\nu)|^2\, d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt = E_x$$

11.3 Propriété de l'autocorrélation

On considère un signal $x(t)$

1. L'autocorrélation $\varphi_{xx}(t)$ en $t = 0$ est positive et vaut l'énergie E_x.

$$\varphi_{xx}(0) = E_x \tag{11.2}$$

2. L'autocorrélation est majorée en module par l'énergie

$$|\varphi_{xx}(t)| \leq E_x$$

3. Si le signal $x(t)$ est réel alors $\varphi_{xx}(t)$ est un signal pair.
4. Quand on retarde le signal $x(t)$ alors l'autocorrélation du signal retardé est inchangé.

$$y(t) = x(t-a) \quad \Rightarrow \quad \varphi_{yy}(t) = \varphi_{xx}(t)$$

Cette idée est parfois exprimée par la phrase suivante : *En calculant l'autocorrélation, on perd l'information de phase du signal.*

11.4 Supplément : interprétation de l'autocorrélatio

On considère un signal $x(t)$ et on note $y(t)$ le signal obtenu en retardant $x(t)$ de a. La différence entre ces deux signaux est noté $z(t)$.

$$y(t) = x(t-a) \text{ et } z(t) = x(t) - x(t-a)$$

Un calcul numérique permet d'exprimer E_z en fonction de E_x et de la partie réelle de l'autocorrélation en a.

$$E_z = 2E_x - 2\Re e\left(\varphi_{xx}(a)\right) \tag{11.3}$$

En regardant cette équation, on observe tout d'abord que la modification de a ne change pas E_x (puisque a n'agit pas sur $x(t)$). Ensuite parce que $z(t) = x(t) - y(t)$ et comme il a été dit en section 4.4.2, E_z mesure la ressemblance entre $x(t)$ et $y(t)$.

Cette équation permet d'affirmer l'interprétation suivante :

- Lorsque la partie réelle de l'autocorrélation en $t = a$ augmente alors le signal $x(t)$ ressemble d'autant plus à $x(t-a)$.

Formellement

Il est possible de démontrer l'équation (11.3). Tout d'abord les règles de calcul sur les complexes montrent que

$$|z(t)|^2 = (x(t) - y(t))\left(x(t)^* - y(t)^*\right) = |x(t)|^2 + |y(t)|^2 - 2\Re e\left(x(t)y(t)^*\right)$$

La linéarité du fait d'intégrer un signal et la définition de l'énergie et de l'autocorrélation montrent que

$$E_z = E_x + E_y - 2\Re e\left(\varphi_{xx}(a)\right)$$

Comme $y(t)$ est obtenu en retardant $x(t)$, on a $E_x = E_y$ ce qui démontre l'équation (11.3).

Cette interprétation de l'autocorrélation permet de comprendre certaines propriétés énoncées en section 11.3. On suppose ici que $x(t)$ est un signal réel.

1. La ressemblance entre $x(t-t_0)$ et $x(t)$ quand $t_0 = 0$:

$$\varphi_{xx}(t) \leq \varphi_{xx}(0)$$

2. La ressemblance entre $x(t)$ et $x(t-(-a))$ décrite par $\varphi_{xx}(-a)$ est la même qu'entre $x(t-a)$ et $x(t)$ décrite par $\varphi_{xx}(a)$. Aussi $\varphi_{xx}(t)$ est-il un signal pair.

3. On considère $y(t) = x(t-t_0)$. La ressemblance entre $x(t-t_0)$ et $x(t-t_0-a)$ décrite par $\varphi_{yy}(a)$ est la même que la ressemblance entre $x(t)$ et $x(t-a)$ décrite par $\varphi_{xx}(a)$. Aussi $\varphi_{yy}(t) = \varphi_{xx}(t)$

Formellement

On considère ici la notion de linéarité défini en section 2.4.3. $\varphi_{xx}(t)$ n'est pas non-plus linéaire vis-à-vis de $x(t)$. En effet, l'équation (11.2) montre un lien avec E_x qui lui n'est pas linéaire vis-à-vis de $x(t)$.

Astuce 3 *On peut retrouver $E_x = \varphi_{xx}(0)$ en passant par la transformée de Fourier de $\varphi_{xx}(t)$.*

$$\varphi_{xx}(0) = \mathrm{TF}^{-1}\left[|X(\nu)|^2\right](0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\nu)|^2 \, d\nu = E_x$$

Chapter 12

Distributions et propriétés

12.1 Dérivée de la distribution Dirac

On peut définir la distribution $\delta'(t)$ par

$$\textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t) f(t)\, dt = -f'(0) \tag{12.1}$$

Remarque 25 *Cette définition de $\delta'(t)$ ne signifie pas du tout que $\delta'(t)f(t) = -\delta(t)f'(0)$ Pour illustrer sur un exemple que cette affirmation est fausse, on considère $f(t) = 2t + 3$.*

- $\textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t) f(t) t\, dt = -\frac{d}{dt}(2t+3)t\big|_{t=0} = -3$
- $\textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f'(0) t\, dt = -\frac{d}{dt}(2t+3)\big|_{t=0} \times 0 = 0$

La distribution $\delta'(t)$ est la dérivée de la distribution $\delta(t)$

$$\frac{d}{dt}\delta(t) = \delta'(t)$$

Plus précisément on a

- La définition donnée dans l'équation (12.1) permet de retrouver le résultat que l'on aurait en considérant que $\delta(t)$ est un primitive de $\delta'(t)$ et en appliquant la définition de $\delta(t)$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t) f(t)\, dt = -f'(0) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f'(t)\, dt = [\delta(t) f(t)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f'(t)\, dt$$

- Cette définition de $\delta'(t)$ permet d'exprimer la convolution par rapport à $\delta'(t)$ comme la dérivée de la convolution par rapport à $\delta(t)$.

$$(\delta'(t) * f(t))(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(\tau) f(t-\tau)\, d\tau = -\left.\tfrac{d}{d\tau} f(t-\tau)\right|_{\tau=0} = -(-f'(t)) = f'(t)$$
$$= \tfrac{d}{dt} f(t) = (\delta(t) * f'(t))(t) = \tfrac{d}{dt}(\delta(t) * f(t))(t)$$

- Cette définition permet d'exprimer la transformée de Fourier de $\delta'(t)$ comme $2i\pi\nu$ multiplié par la transformée de Fourier de $\delta(t)$.

$$\mathrm{TF}\left[\delta'(t)\right](\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t) e^{-i2\pi\nu t}\, dt = -\left.\frac{d}{dt} e^{-i2\pi\nu t}\right|_{t=0} = -(-i2\pi\nu) = 2i\pi\nu = 2i\pi\nu\, \mathrm{TF}\,[$$

12.2 Distribution valeur principale

Dans le cadre de ce cours, nous utilisons la valeur principale de Cauchy en tant que distribution. Pour simplifier, on peut dire qu'elle remplace $\frac{1}{t-a}$ qui n'est pas intégrable en quelque chose qui l'est mais d'une façon particulière.

Lorsque f est mathématiquement une fonction continue,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{vp}\left(\frac{1}{t-a}\right)(t-a)\, f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt$$

Dans le cadre de ce cours, nous utilisons ces trois propriétés.

1. $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{t}\right)$ est un signal impair et par conséquent en décomposant $x(t)$ en un signal pair $\frac{1}{2}(x(t)+x(-t))$ et un signal impair $\frac{1}{2}(x(t)-x(-t))$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{vp}\left(\frac{1}{t}\right) x(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{vp}\left(\frac{1}{t}\right) \frac{1}{2}(x(t)-x(-t))\, dt$$

   En effet $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{vp}\left(\frac{1}{t}\right) \frac{1}{2}(x(t)+x(-t))\, dt = 0$
   et $x(t) = \frac{1}{2}(x(t)+x(-t)) \ + \ \frac{1}{2}(x(t)-x(-t))$

2. Sa transformée de Fourier ne dépend que du signe de ν.

$$\mathrm{TF}\left[\mathrm{vp}\left(\frac{1}{t}\right)\right](\nu) = i\pi - 2i\pi\mathbb{H}(\nu) = -i\pi\,\mathrm{signe}(\nu) \tag{12.2}$$

   Ainsi sa partie imaginaire est négative si $\nu > 0$ et positive sinon.

3. La transformée de Fourier inverse de vp $\left(\frac{1}{\nu}\right)$ ne dépend que du signe de t.

$$\mathrm{TF}^{\text{-}1}\left[\mathrm{vp}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right](t) = -i\pi + 2i\pi\mathbb{H}(t) = i\pi\,\mathrm{signe}(t)$$

Ainsi sa partie imaginaire est positive si $t > 0$ et négative sinon.

Remarque 26 *On pourrait justifier l'équation (12.2) en constatant tout d'abord que*

$$\mathrm{TF}\left[1\right](\nu) = \delta(\nu)$$

L'application ensuite de l'équation (5.4) conduit à

$$\mathrm{TF}\left[\frac{1}{2i\pi}\,\mathrm{vp}\left(\frac{1}{t}\right)\right](\nu) = \int_{-\infty}^{\nu}\delta(\nu')\,d\nu' + A$$

où A est une constante. Enfin le fait que $\frac{1}{2i\pi}\,\mathrm{vp}\left(\frac{1}{t}\right)$ est imaginaire pure montre que $\int_{-\infty}^{\nu}\delta(\nu')\,d\nu' + A$ est impaire. Pour $\nu \neq 0$,

$$\int_{-\infty}^{\nu}\delta(\nu')\,d\nu' = \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(\nu)$$

On en déduit que $A = -\frac{1}{2}$ et inalement que on a

$$\mathrm{TF}\left[\frac{1}{2i\pi}\,\mathrm{vp}\left(\frac{1}{t}\right)\right](\nu) = \frac{1}{2}\,\mathrm{signe}(\nu)$$

Formellement

Étant donnée f une fonction continue au sens mathématique,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{vp}\left(\frac{1}{t-a}\right) f(t)\, dt = \lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ \epsilon > 0}} \left[\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{f(t)}{t-a}\, dt + \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{f(t)}{t-a}\, dt\right] \tag{12.3}$$

Cette définition permet de prouver les trois propriétés considérées.

Formellement

Les distributions $\delta(t)$, $\delta'(t)$ et $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{t}\right)$ sont définies dans les cours classiques en mathématiques d'une manière assez différente. Par exemple l'équation (12.3) n'est pas utilisée que pour des fonctions f qui ont des propriétés extrêmement régulières et qui sont pour cette raison compliquées. Les calculs qui utilisent cette équation avec des exemples de signaux tirés du cours sont intéressantes pour comprendre la notion, et c'est le but de ce cours, mais ces calculs ne vont pas former un tout parfaitement cohérent avec la vraie notion de distributions.

12.3 Distributions et parité

La distribution $\delta(t)$ est une distribution paire

$$\delta(-t) = \delta(t)$$

Plus précisément, on a

- En opérant un changement de variable sur l'intégrale on voit que $\delta(-t)$ se comporte dans cette intégrale comme $\delta(t)$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(-t) f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(-t)\, dt = f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t)\, dt$$

- En appliquant la règle sur le retournement de l'échelle temporelle pour la convolution, on voit dans un produit de convolution $\delta(-t)$ se comporte comme $\delta(t)$.

$$[\delta(-t) * f(t)]\,(t) = [\delta(t) * f(-t)]\,(-t) = f(-(-t)) = f(t) = [\delta(t) * f(t)]\,(t)$$

- En appliquant la règle sur le retournement de l'échelle temporelle sur le calcul de la transformée de Fourier, on voit que $\delta(-t)$ a la même transformée de Fourier que $\delta(t)$.

$$\mathrm{TF}\,[\delta(-t)]\,(\nu) = (1)^* = 1 = \mathrm{TF}\,[\delta(t)]\,(\nu)$$

<u>La distribution $\delta'(t)$ est une distribution impaire</u>

$$\delta'(-t) = -\delta'(t)$$

Plus précisément, on a

- Un changement de variable sur l'intégrale et l'utilisation de la définition donnée par (12.1) montre que dans l'évaluation de l'intégrale, on peut remplacer $\delta'(-t)$ par $-\delta'(t)$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(-t) f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t) f(-t)\, dt = -\left.\frac{d}{dt} f(-t)\right|_{t=0} = f'(0) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t) f(t)\, dt$$

- La règle sur le retournement temporel dans le produit de convolution ainsi que la définition donnée par (12.1) montre qu'on peut remplacer $\delta'(-t)$ par $-\delta'(t)$ dans l'évaluation du produit de convolution.

$$[\delta'(-t) * f(t)]\,(t) = [\delta'(t) * f(-t)]\,(-t) = -f'(-(-t)) = -f'(t) = -\,[\delta'(t) * f(t)]\,(t)$$

- La règle sur le retournement temporel dans le calcul de la transformée de Fourier ainsi que la définition donnée par (12.1) montre qu'on peut remplacer $\delta'(-t)$ par $-\delta'(t)$ dans le calcul de la transformée de Fourier.

$$\mathrm{TF}\,[\delta'(-t)]\,(\nu) = (2i\pi\nu)^* = -2i\pi\nu = -\,\mathrm{TF}\,[\delta'(t)]\,(\nu)$$

<u>La distribution vp $\left(\frac{1}{t}\right)$ est une distribution impaire</u>

$$\mathrm{vp}\left(\frac{1}{-t}\right) = -\,\mathrm{vp}\left(\frac{1}{t}\right)$$

Plus précisément on a

- $$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{vp}\left(\frac{1}{-t}\right) f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{vp}\left(\frac{1}{t}\right) f(-t)\,dt = -\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{vp}\left(\frac{1}{t}\right) f(t)\,dt$$

- $$\left[\mathrm{vp}\left(\frac{1}{-t}\right) * f(t)\right](t) = \left[\mathrm{vp}\left(\frac{1}{t}\right) * f(-t)\right](-t) = -\left[\mathrm{vp}\left(\frac{1}{t}\right) * f(t)\right](t)$$

- $$\mathrm{TF}\left[\mathrm{vp}\left(\frac{1}{-t}\right)\right](\nu) = \left(\mathrm{TF}\left[\mathrm{vp}\left(\frac{1}{t}\right)\right](\nu)\right)^* = -\,\mathrm{TF}\left[\mathrm{vp}\left(\frac{1}{t}\right)\right](\nu)$$

Dans ces trois expressions, la première égalité est la signification de l'inversion du signe t dans la distribution, elle est obtenue avec dans la première expression avec un changement de variable dans l'intégrale, dans les deux autres expressions par les propriétés sur le retournement de l'échelle temporelle. La deuxième égalité dans expression donne la traduction numérique du fait que cette distribution est impaire.

12.4 À quoi sert la distibution valeur principale (Hors Programme)

On appelle transformée de Hilbert la transformation suivante qui transforme le signal $x(t)$ en $\widehat{x}(t)$.

$$\widehat{x}(t) = \frac{1}{\pi}\left[\mathrm{vp}\left(\frac{1}{t}\right) * x(t)\right](t)$$

Compte-tenu des définitions utilisées dans ce cours, cette écriture a un sens dès lors que $x(t)$ a une dérivée qui est intégrable.

La transformée de Fourier d'un signal ainsi transformé est donnée par

$$\mathrm{TF}\left[\widehat{x}(t)\right](\nu) = -i\,\mathrm{signe}(\nu)\,\mathrm{TF}\left[x(t)\right](\nu)$$

Si on applique deux fois la transformée de Hilbert, on retrouve le signal de départ mais avec le signe opposé.

On a les exemples suivants

- Si $x(t) = \cos(t)$ alors $\widehat{x}(t) = \sin(t)$.
- Si $x(t) = \frac{1}{t^2+1}$ alors $\widehat{x}(t) = \frac{t}{t^2+1}$.

On appelle le signal enveloppe

$$\sqrt{(x(t))^2 + (\widehat{x}(t))^2}$$

On appelle le signal analytique

$$x(t) + i\widehat{x}(t)$$

Les exemples précédents deviennent

- Pour $x(t) = \cos(t)$, le signal analytique est e^{it} et l'enveloppe est 1.
- Pour $x(t) = \frac{1}{t^2+1}$, le signal analytique est $\frac{1+it}{1+t^2}$ et l'enveloppe est $\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$