Examen Signal et bruit (3 heures)
Sujet à rendre avec la copie

Nom :
Prénom :

Lundi 3 novembre

Les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisées. Aucun autre document n'est autorisé.

Exercice 1. *On considère le signal* $m(t) = e^{-t/2}[\![t \geq -1 \text{ et } t \leq 1]\!](t)$.

1. *Calculez* E_m *son énergie.*
2. *Calculez* A_m *sa somme.*
3. *Donnez un pseudo-programme permettant d'estimer ces quantités.*

Solution

1. $E_m = e^1 - e^{-1}$
2. $A_m = -2e^{-1/2} + 2e^{1/2}$
3. ```
   t = np.linspace(-1,50,20000)
   x = np.exp(-t/2)*(t>=-1)*(t<=1)+0
   Ex= np.real(seb.TF(t,x**2,0))
   Ax= np.real(seb.TF(t,x,0))
   assert np.abs(Ex -(np.exp(1)-np.exp(-1)))<1e-3
   assert np.abs(Ax -(2*np.exp(1/2)-2*np.exp(-1/2)))<1e-3
   ```

Exercice 2. *On considère le signal* $y(t)$ *défini par*

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 0.5 * \frac{d}{dt}y(t) + y(t) = 0.5\delta(t) + 0.5\delta(t-1) \tag{1}$$

1. *Calculez* $\widehat{Y}(f)$ *la transformée de Fourier de* $y(t)$
2. *En déduire le pseudo-programme pour estimer* $y(t)$*, choisissez l'échelle en fréquence avec soin.*

Solution

1. $\widehat{Y}(f) = \frac{1+e^{-j2\pi f}}{2(j2\pi f)^2+2}$
2. ```
   t = np.linspace(-1,5,200)
   f = np.linspace(-50,50,10000)
   Y = (1+np.exp(-1j*2*np.pi*f))/((1j*2*np.pi*f)**2+0.5*(1j*2*np.pi*f)+1)/2
   y = seb.TFI(f,Y,t)
   ```

Exercice 3. *On considère le signal* $y(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right)$*. On utilise la porte* $\Pi(t) = [\![-1/2 \leq t \leq 1/2]\!](t)$.

1. *Calculez* $\delta(t-3) * y(t)$
2. *On définit* $z(t) = \Pi(t) * y(t)$*. Calculez* $z(0)$.

3. *Donnez un pseudo-programme permettant de simuler* $z(0)$

Solution

1. $\cos\left(\frac{2\pi}{3}(t-3)\right)$.

2. $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$.

3.

```
t = seb.arange(-3,5,1e-4)
x = seb.fonction_P(t)
y = np.cos(2*np.pi*t/3)
z = seb.convolution(t,x,t,y,0)
print(np.abs(z-3*np.sqrt(3)/np.pi/2))
```

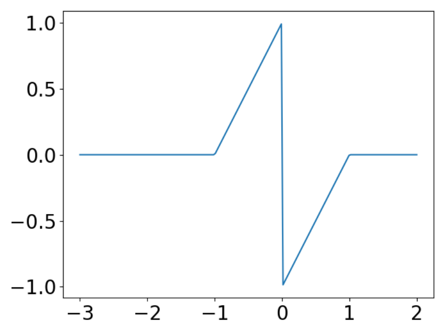

Figure 1: Représentation graphique du signal $x(t)$ (exercice 4)

Exercice 4. *On considère le signal décrit par la figure 1.*

1. *Écrire les équations du signal* $x(t)$ *avec* $[\![\ ]\!]$.

2. *Écrire les équations du signal* $x(t)$ *avec une des fonctions de base* $\Pi(t), \mathbb{C}(t), \mathbb{D}(t), \mathbb{H}, \mathbb{T}(t)$. *Pour chaque fonction de base utilisée rappelez la définition utilisée.*

3. *Donnez un pseudo-programme permettant de simuler la figure 1.*

Simulation et réponse à question 3

```
t = np.linspace(-3,2,200)
x = (t+1)*(t>=-1)*(t<0)+(t-1)*(t>=0)*(t<1)+0
y = seb.fonction_C(t+0.5)-seb.fonction_D(t-0.5)
plt,np = seb.debut()
plt.close('all')
fig,ax = plt.subplots()
ax.plot(t,x)
ax.plot(t,y)
plt.tight_layout()
%plt.savefig('./figures/fig_exSEB43b.png')
fig.show()
```

Solution

1. $x(t) = (t+1) * [\![t \geq -1 \text{ et } t \leq 0]\!](t) + (t-1)[\![t > 0 \text{ et } t \leq 1]\!](t)$

2. $x(t) = \mathbb{C}(t+\frac{1}{2}) - \mathbb{D}(t-\frac{1}{2})$

Exercice 5. *On considère le signal* $m(t) = e^{-t/2}[\![t \geq -1 \text{ et } t \leq 1]\!](t)$.

1. *Calculez sa dérivée en faisant attention aux discontinuités.*

Réponse

$$\frac{d}{dt}x(t) = e^{1/2}\delta(t+1) - 0.5e^{-t/2}[\![-1 \leq t \leq 1]\!](t) - e^{-1/2}\delta(t-1) \tag{2}$$

Exercice 6. *On considère le signal $y(t)$ défini par*

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 0.5\frac{d}{dt}y(t) + y(t) = 0.5\delta(t) + 0.5\delta(t-1) \tag{3}$$

1. *Donnez un pseudo-programme permettant de simuler la réponse à cette équation différentielle sans utiliser* `seb.TFI` *mais en utilisant par exemple* `seb.sol_eq_diff`*.*

Solution

```
t = np.linspace(-1,5,200)
y1= seb.sol_eq_diff((1,0.5,1),t)
y2= seb.sol_eq_diff((1,0.5,1),t-1)
y = 0.5*y1+0.5*y2
```