

Travaux pratiques de traitement d'images numériques

Séances 1, 2, 3, 4 et 5

Institut Galilée

2013-2014

Séance 1

Exercice 1 (17)

Cet exercice illustre la commande `ind2rgb` exposée dans le polycopié de TP. On considère une image couleur définie par une table de chiffres et une table de couleurs ; en fait chaque chiffre de la première table correspond à une couleur définie par la deuxième table.

$$[g_{mn}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 5 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 8 & 7 & 8 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 3 & 3 & 7 & 8 \\ 5 & 5 & 5 & 2 & 5 & 5 & 8 & 8 \\ 6 & 6 & 5 & 2 & 6 & 6 & 6 & 7 \end{bmatrix} \quad (1)$$

la table de couleur est définie par :

$$t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

La première colonne est associée à la couleur rouge, la deuxième colonne est associée à la couleur verte, la troisième colonne est associée à la couleur bleue.

1. Ecrivez les trois matrices R , G , B correspondant à cette image couleur.
2. Donnez un nom à chacune des couleurs présentes dans cette image.
 - La couleur $(0, 1, 1)$ correspond au cyan
 - La couleur $(1, 0, 1)$ correspond au magenta
 - La couleur $(1, 1, 0)$ correspond au jaune
3. On forme une image en niveau de gris contenant la composante rouge. Ecrivez cette matrice.
4. Formez les trois matrices R, G, B en supprimant la composante rouge.

Exercice 2 (2) On cherche à définir deux images décrites par deux suites $g_{m,n}^a$ et $g_{m,n}^b$ représentant l'une un carré centré de taille 30×30 , l'autre un disque centré de diamètre 30 pixels au sein d'une image 256×256 .

1. On se place tout d'abord dans un plan à deux dimensions. On note un point M de coordonnées (x, y) . Définir un ensemble de conditions sur les coordonnées pour que M soit dans un carré de taille 30×30 , centré en O' de coordonnées $(128, 128)$.
2. En déduire une formule pour la suite $g_{m,n}^a$ qui vaut 0.4 en dehors du carré et 1 dans le carré au moyen de la fonction caractéristique notée $\mathbf{1}$ ($\mathbf{1}_A(m, n) = 1$ quand $(m, n) \in A$ et $\mathbf{1}_A(m, n) = 0$ sinon. Pour un signal à temps discret, $g_n = 0.4 + 0.6\mathbf{1}_{\{121..136\}}[n]$ est une suite qui vaut 0.4 partout sauf pour les indices entre 121 et 136 où elle vaut 1.

3. De nouveau on se place dans un plan à deux dimensions. On note un point M de coordonnées (x, y) et O' le centre de l'image de coordonnées $(128, 128)$. Définir une condition sur M puis sur les coordonnées pour que M soit dans le disque de diamètre 30.
4. En déduire une formule pour la suite $g_{m,n}^b$ qui vaut 0.4 en dehors du disque et 1 dans le disque au moyen de la fonction 1.

Exercice 3 (22) On considère une image g_{mn} de taille $M \times N$, en niveaux de gris à valeurs sur $[0, 1]$. Comment cette image est-elle modifiée par les transformations suivantes sur les niveaux de gris :

1. $f_{mn} = 1 - g_{mn}$
2. $f_{mn} = 0$ si $g_{mn} < 0.5$ et $f_{mn} = 1$ si $g_{mn} \geq 0.5$.
3. $f_{mn} = g_{M-m, n}$.

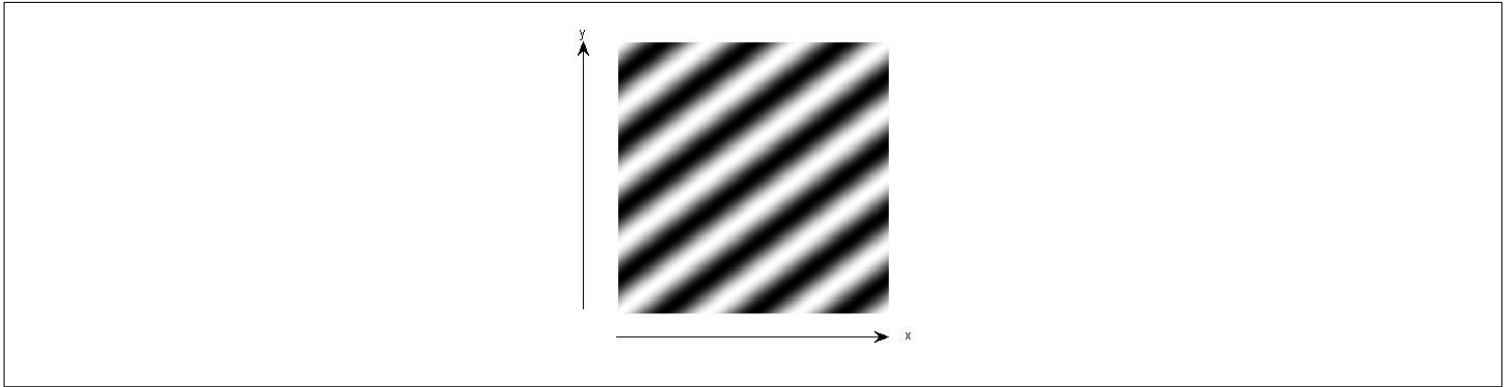


Figure 1: image de l'exercice 4

Exercice 4 (5) On analyse les problèmes de sous-échantillonnage, repliement de spectre et préfiltrage à partir du signal $f(x, y) = 0.5 + 0.5 \cos(2\pi(3x + 4y))$ échantillonnée $\Delta x = \Delta y = 0.2$. La figure 1 montre cette image non-échantillonnée.

1. Que vaut le signal échantillonné g_{mn} lorsqu'on se restreint à 256×256 points ?
2. Quelles est le spectre de f (i.e. avant échantillonnage) ? Montrez que le spectre n'est pas $F(u, v) = 0.5\delta(u, v) + 0.25\delta(u - 3) + 0.25\delta(u + 3) + 0.25\delta(v - 4) + 0.25\delta(v + 4)$ en calculant la transformée de Fourier inverse. Comme f est périodique, le spectre de f est constitué de pics. Proposer une solution et vérifier cette solution en utilisant la transformée de Fourier inverse. Représentez où se trouvent ces pics à partir de leur coordonnées en $(u, v) \in [-5, 5]$.
3. Le critère de Nyquist est donné ici par $|u| \leq \frac{1}{2\Delta x}$ et $|v| \leq \frac{1}{2\Delta y}$. Tracer le domaine correspondant à ce critère de Nyquist. Est-ce que ce critère est vérifié ?
4. Donnez l'expression du spectre de l'image échantillonnée $F_e(u, v)$ et représentez le résultat. Pour cela il suffit de tracer les symétries centrales en les quatre extrémités du critère de Nyquist. Justifiez cette construction géométrique.
5. Pour retrouver l'image continue à partir de l'image échantillonnée, il suffit normalement de filtrer l'image avant échantillonnage par un filtre dont la réponse en fréquence est $H(u, v) = \mathbf{1}_{[-2.5, 2.5]}(u)\mathbf{1}_{[-2.5, 2.5]}(v)$. Expliquez d'où vient le nombre 2.5 ? Quels sont les pics du spectre initial qui sont conservés ?
6. Calculez l'expression du spectre de l'image filtrée avant échantillonnage $F_h(u, v)$.
7. En déduire l'image filtrée avant échantillonnage $f_h(x, y)$.

Cours 1 (4)

Les courbes de niveaux (ou lignes de niveaux) sont utilisées sur les cartes géographiques et indiquent les points de la carte de même altitude. Si on se déplaçait le long de ces lignes, on ne monterait pas et on ne descendrait pas non plus. Les canaux, les bords de lacs, les plages le long de la mer sont sur des lignes de niveaux. On peut utiliser la notion de courbes de niveaux pour aider à la visualisation de surface dans un espace à trois dimensions. Faire une courbe de niveau, cela consiste à dessiner la section d'une surface suivant un plan horizontal qui se situe à une hauteur z . Ainsi les courbes de niveaux d'une sphère sont

des cercles concentriques autour d'un point qui est à la verticale du centre de la sphère. Mathématiquement, on définit, ici, la surface comme une fonction qui à chaque point du plan horizontal (x, y) associe un point sur la surface et à la verticale de ce point du plan horizontal $(x, y, g(x, y))$. On peut alors définir une courbe de niveau comme étant l'ensemble des points du plan horizontal (x, y) pour lesquels les points sur la surface associés sont à la cote z . Ainsi une courbe de niveau est donnée par $\{(x, y) | g(x, y) = z\}$. Il n'y a pas vraiment de règles pour définir les différentes cotes z_i associées à chacune des courbes de niveaux. Le choix doit être fait de façon à aider à la visualisation de la surface.

Exercice 5 (4)

On cherche à représenter le signal $f(x, y) = 0.5 + 0.5 \cos(2\pi(3x + 4y))$ pour $x, y \in [0, 1]$ et à étudier sa périodicité.

1. Représentez en rouge l'ensemble des points (x, y) tels que $f(x, y) = 1$. Ce sont les crêtes de la surface, ce sont les points qui apparaîtraient en blanc sur l'image de f .
2. Représentez en vert l'ensemble des points (x, y) tels que $f(x, y) = 0$. Ce sont les vallées de la surface, ce sont les points qui apparaîtraient en noir sur l'image de f .
3. Quelle est la période de $x \mapsto f(x, y_0)$? On note cette valeur sous forme d'un vecteur $t_x = (T_x, 0)$. Montrez sur le graphique que si un point $M = (x, y)$ est sur une courbe rouge, alors $M + t_x = (x + T_x, y)$ est encore sur une courbe rouge. Quelle est la période de $y \mapsto f(x_0, y)$? On note cette valeur sous forme d'un vecteur $t_y = (0, T_y)$. Montrez ce qui se passe alors sur le graphique. Quelle est la périodicité de $\lambda \mapsto f(x_0 + \lambda, y_0 + \lambda)$? On note cette valeur sous forme d'un vecteur $t_{xy} = (T_{xy}, T_{xy})$. Montrez ce qui se passe alors sur le graphique.
4. On définit la périodicité pour f par un vecteur de translation qui est orthogonale aux crêtes et aux vallées. Tracez graphiquement ce vecteur, quelles sont les coordonnées de ce vecteur.
5. Vérifiez qu'effectivement f est invariante par translation $t = (3/25, 4/25)$ (ce vecteur est orthogonal puisque colinéaire à $(3, 4)$ qui est normale à toutes les crêtes).

Séance 2

Exercice 6 (3) On cherche à calculer à la main un histogramme sur trois niveaux de l'image $g_{mn} = \frac{m}{10}\mathbf{1}_{0..9}[m] + (2 - \frac{m}{10})\mathbf{1}_{10..19}[m]$. L'histogramme peut se voir aussi comme une quantification des niveaux de gris de l'image et ensuite on compte le nombre de pixel associé à chaque niveau de quantification et on les représente sur un graphique. Pour simplifier le calcul l'image étudiée est invariante par translation suivant la première coordonnée. Ainsi l'histogramme de l'image est en fait identique (presque) à l'histogramme d'un profil horizontal.

1. Représentez le signal $g(x) = 2x\mathbf{1}_{[0,1/2[}(x) + (2 - 2x)\mathbf{1}_{[1/2,1[}(x)$ sur $[0, 1]$.
2. Représentez sur la même figure la quantification sur trois niveaux régulièrement répartis du signal $g_q(x) = Q(g(x))$. Pour quantifier un signal sur trois niveaux, on définit une partition de l'intervalle $[0, 1]$ sur l'axe des ordonnées en trois intervalles I_k de même taille, on affecte à chaque niveau de gris g le milieu m_k de l'intervalle I_k auquel g appartient : $Q(g) = m_k$ si $g \in I_k$.
3. L'image est en fait de taille 20×20 , représentez sur la même figure le profil de l'image et de l'image quantifiée. Cela revient à échantillonner $g(x)$ et $g_q(x)$ avec une période d'échantillonnage de $\frac{1}{20}$.
4. Tracez l'histogramme de l'image sur 3 niveaux. Pour cela on comptabilise le nombre de pixels sur chaque niveau de quantification. L'histogramme est le nombre de pixel en fonction du niveau de quantification.

1 Fréquences associées à une image

Cours 2 (6)

La transformée de Fourier adaptée aux images est la transformée de Fourier discrète bidimensionnelle :

$$G_{k,l} = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} g_{m,n} e^{-j2\pi(\frac{km}{M} + \frac{ln}{N})}$$

où $g_{m,n}$ est l'intensité (valeur entre 0 et 1) du pixel à la position (m, n) et $G_{k,l}$ est le coefficient associé à la fréquence dont la composante horizontale u est $\frac{k}{N}f_e$ et la composante verticale v est $\frac{l}{N}f_e$, f_e étant la fréquence d'échantillonnage qui s'exprime dans une unité. Les variables associées aux fréquences spatiales sont notées u et v . La taille de l'image est $N \times N$. Le choix du coefficient $\frac{1}{MN}$ est dans une certaine mesure arbitraire, il garantit ici que la composante constante $G_{0,0}$ est la moyenne du signal image.

Exercice 7 (6)

On considère une image de taille 4×4 définie par

$$g_{m,n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

1. Montrez que les coefficients de la transformée de Fourier discrète bidimensionnelle sont la somme de deux termes, chacun correspondant à une exponentielle complexe.
2. Calculez le module et l'argument de chacun de ces coefficients.
3. Calculez les fréquences spatiales de chaque coefficient suivant les deux types d'échelles fréquentielles (celle en fréquences réduites et provenant du traitement du signal et celle en cycles par image), on pourra présenter ces fréquences spatiales sous la forme de deux matrices $[u_{k,l}]$ et $[v_{k,l}]$.

Cours 3 (10)

1. La transformée sur des signaux à temps continu est définie par

$$\mathcal{TF}[g(x)](u) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-j2\pi ux} dx \quad (4)$$

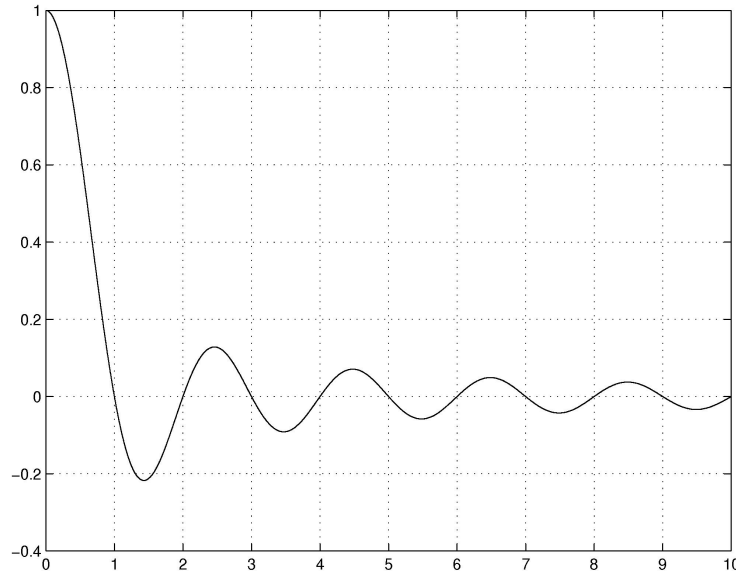


Figure 2: $u \mapsto \frac{\sin(\pi u)}{\pi u}$, (exercice 8), (10)

2. La transformée de Fourier d'une fonction constante sur un intervalle symétrique est donnée par :

$$\mathcal{TF}[\mathbf{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(x)](u) = \frac{\sin(\pi u)}{\pi u} \quad (5)$$

Cette fonction est représentée sur la figure 2 (p. 7).

Le calcul se fait en restreignant les bornes de l'intégrale (4), en calculant une primitive de $x \mapsto e^{-j2\pi ux}$ et enfin en reconnaissant dans la différence entre cette primitive appliquée en $x = \frac{1}{2}$ et en $x = -\frac{1}{2}$, l'expression donnée par (5).

3. La transformée de Fourier d'un dirac est une exponentielle complexe.

$$\mathcal{TF}[\delta(x - x_0, y - y_0)](u, v) = e^{-j2\pi(u x_0 + v y_0)} \quad (6)$$

4. La transformée de Fourier d'une fonction gaussienne est donnée par :

$$\mathcal{TF}[e^{-x^2}](u) = \sqrt{\pi} e^{-\pi^2 u^2} \quad (7)$$

On commence d'abord par calculer le résultat en la fréquence nulle, pour cela on calcule $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2 - y^2} dx dy$ que l'on peut approcher par en passant en coordonnée polaire $\int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} e^{-\rho^2} \rho d\rho d\theta$ ce qui vaut π et par suite $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. Ensuite en regroupant les termes exponentiels qui apparaissent dans $\mathcal{TF}[e^{-x^2}](u)$, on voit que $x^2 + j2\pi ux$ forme le début d'un terme carré $(x + j\pi ux)^2$ auquel il faut rajouter $\pi^2 u^2$, ce dernier terme ne dépend pas de x et peut donc sortir de l'intégrale. On a ainsi montré que $\mathcal{TF}[e^{-x^2}](u) = e^{-\pi^2 u^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x + j\pi ux)^2} dx$. La fonction $z \mapsto e^{-z^2}$ est holomorphe sur une partie du plan complexe, aussi l'intégrale ne dépend pas de u et vaut donc $\sqrt{\pi}$.

5. La transformée de Fourier vérifie une propriété utilisée pour la modulation :

$$\mathcal{TF}[g(x)e^{-j2\pi u_0 x}](u) = \mathcal{TF}[g(x)](u - u_0) \quad (8)$$

Elle se démontre en explicitant le premier membre et en regroupant les exponentielles.

6. Un retard sur le signal se traduit du point de vue de la transformée de Fourier par un déphasage.

$$\mathcal{TF}[g(x - x_0)](u) = \mathcal{TF}[g(x)](u) e^{-j2\pi u x_0} \quad (9)$$

En effet $g(x - x_0)$ s'exprime comme la transformée de Fourier inverse de $\mathcal{TF}[g(x)](u)$ appliqué en $x - x_0$, en scindant l'exponentielle, on observe que $g(x - x_0)$ est aussi la transformée de Fourier inverse de $\mathcal{TF}[g(x)](u) e^{-j2\pi u x_0}$ appliqué en x .

7. Une rotation d'une fonction à deux variable se traduit du point de vue la transformée de Fourier par une rotation identique des fréquences spatiales. Ainsi si (X, Y) sont les coordonnées d'un nouveau point obtenu par rotation d'angle θ à partir d'un point (x, y) alors la transformée de Fourier de $\tilde{g}(x, y) = g(X, Y)$ est donnée par $\mathcal{TF}[\tilde{g}(x, y)](u, v) = \mathcal{TF}[g(X, Y)](U, V)$. Cette invariance par rotation de la transformée de Fourier signifie seulement que si deux observateurs regardent le même phénomène en deux endroits différents, ils observent le même phénomène, même si ce phénomène est décrit de manière différente en coordonnée cartésienne. La rotation est définie par

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (10)$$

La démonstration provient de ce que le produit scalaire entre le vecteur (x, y) et (u, v) qui intervient dans la définition de la transformée de Fourier est égale au produit scalaire entre (X, Y) et (U, V) du fait que la matrice de rotation est dite orthogonale ($D^T D = 1$).

Ce résultat n'est absolument pas valable pour des transformations qui ne conserveraient pas les distances par exemple pour des compositions d'homothéties et de rotations.

Exercice 8 (10)

On cherche à calculer et à visualiser des transformées de Fourier d'images définies par des fonctions de deux variables particulières.

1. Calculez et dessinez à main levée la transformée de Fourier de $\mathbf{1}_{[-L, L]}(x)$, avec $L = 1$ et $u \in [-2, 2]$. Exprimez en fonction de L la largeur du premier lobe et des lobes suivants.
2. Calculez la transformée de Fourier de $\mathbf{1}_{[-L, L]}(x)\mathbf{1}_{[-3L, 3L]}(y)$. Représentez avec $L = 1$, $u, v \in [-1, 1]$, les droites où le module de cette transformée de Fourier s'annule. Ces droites se coupent à angle droit et forment des rectangles qui délimitent les lobes, mettre une croix au sein de ces lobes pour indiquer le maximum et mettre la valeur du module en ce maximum. Exprimez en fonction de L des grandeurs caractéristiques des différents lobes.

3. Représentez l'image définie par

$$\mathbf{1}_{[-L, L]}(x)\mathbf{1}_{[-3L, 3L]}(y)$$

dans un repère en trois dimensions représentée en perspective, puis sous la forme d'une image. Représentez sous la forme d'une image, l'image définie par

$$\mathbf{1}_{[-L, L]}(x+y)\mathbf{1}_{[-3L, 3L]}(x-y)$$

avec $L = 1$, $x, y \in [-5, 5]$. Quelles transformations géométriques permettent de transformer la première image en la deuxième, montrez qu'il ne s'agit pas d'une rotation, quelles sont les paramètres de cette transformation géométrique ? En déduire le module de la transformée de Fourier de $\mathbf{1}_{[-L, L]}(x+y)\mathbf{1}_{[-3L, 3L]}(x-y)$. Représentez ce module de spectre de la même façon que dans la question précédente.

4. Calculez et dessinez à main levée $\mathbf{1}_{[-L, L]}(x)(0.5 + 0.5 \sin(2\pi f x))$ avec $L = 1$, $f = 3$ et $x \in [-2, 2]$ puis le module de sa transformée de Fourier avec $L = 1$, $f = 3$ et $u \in [-5, 5]$ en indiquant en particulier où ce module s'annule et de façon approximative les maxima en précisant pour ces maxima, la valeur de la phase.
5. Déduire de ce qui précède et par repliement de spectre, la transformée de Fourier du signal

$$f(x) = \mathbf{1}_{[-L, L]}(x)(0.5 + 0.5 \sin(2\pi f x))$$

échantillonné à la fréquence $f_e = 2f$ sur avec $L = 1$, $f = 3$, $u \in [-5, 5]$. Quelle est la période d'échantillonnage ? Donnez l'expression du signal échantillonné. Rajoutez le spectre du signal échantillonné sur le graphique précédent.

Exercice 9 (19) On considère une image f de taille 128×128 et une deuxième image g qui contient en son centre la première et tout autour que des zéros, sa taille est 256×256 . On a calculé la transformée de Fourier discrète G de g , comment retrouver la transformée de Fourier discrète F de f à partir de celle de G ?

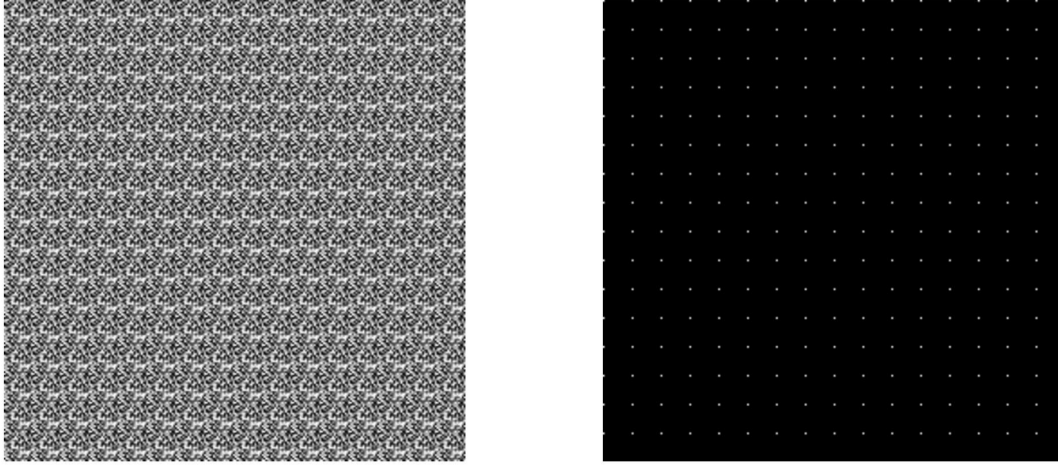


Figure 3: Exemple de texture déterministe et spectre de cette texture (exercice 10).

Exercice 10 (7) On s'intéresse au spectre d'une texture déterministe en supposant qu'elle s'étend sur un objet suffisamment vaste. Une texture déterministe est souvent définie comme le fait de juxtaposer horizontalement et verticalement un même motif, un exemple est montré sur l'image de gauche de la figure 3 (p. 11).

1. On note x_n et X_k deux suites de même taille, telles que X_k soit la transformée de Fourier discrète de x_n . On crée une autre suite Y_k en intercallant des zéros sur les éléments X_k . Que devient alors y_n . On crée une autre suite z_n qui est la juxtaposition de x_n et x_n , que vaut Z_k .
2. On note g_{mn} une petite image et G_{kl} la transformée de Fourier discrète. Que vaut la transformée de Fourier discrète de la juxtaposition de g_{mn} avec g_{mn} .
3. Décrire une propriété des transformées de Fourier discrète des textures telles que définies dans le préambule.

2 Importance relative de la phase et du module dans le signal de transformée de Fourier

Cours 4 (11)

La transformée en cosinus discrète est définie pour une image carrée par :

$$G_{k,l} = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_k \alpha_l g_{m,n} \cos\left(\frac{\pi(2m+1)k}{2N}\right) \cos\left(\frac{\pi(2n+1)l}{2N}\right)$$

avec

$$\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{N}} \text{ et } \alpha_k = \sqrt{\frac{2}{N}} \text{ si } k \text{ est non-nul}$$

La transformée en cosinus discrète inverse est donnée par

$$g_{m,n} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \alpha_k \alpha_l G_{k,l} \cos\left(\frac{\pi(2m+1)k}{2N}\right) \cos\left(\frac{\pi(2n+1)l}{2N}\right)$$

On rappelle la relation trigonométrique $\cos(p) \cos(q) = \frac{1}{2} \cos(p+q) + \frac{1}{2} \cos(p-q)$.

Exercice 11 (11)

On cherche à vérifier que les formules de DCT et IDCT sont bien inverses l'une de l'autre. On observe que ces formules sont linéaires aussi il suffit de faire la démonstration pour des images ayant un seul pixel non-nul.

1. Calculez la transformée en cosinus discrète G_{kl} de $g_{nm} = 1$ si $n = n_0$ et $m = m_0$ et $g_{nm} = 0$ ailleurs.

2. On note h_{mn} la transformée en cosinus discrète inverse de G_{kl} . Exprimez h_{mn} comme le produit de deux sommes de cosinus. On note $a(m, m_0) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k^2 \cos(\pi \frac{(2m_0+1)k}{2N}) \cos(\pi \frac{(2m+1)k}{2N})$, montrez que $h_{mn} = a(m, m_0)a(n, n_0)$.
3. Montrez que $a(m, m_0)$ se met sous la forme d'une somme de cosinus :

$$a(m, m_0) = -\frac{1}{N} + \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \cos\left(\frac{\pi(m + m_0 + 1)k}{N}\right) \cos\left(\frac{\pi(m - m_0)k}{N}\right)$$

4. En interprétant $\sum_{k=0}^{N-1} \cos(\frac{km}{N})$ comme la partie réelle d'une somme d'exponentielle, montrez que cette expression vaut N sauf quand m est multiple de $2N$, 1 quand m est impaire et 0 quand m est paire.
5. Déduisez-en que $h_{mn} = 0$ sauf si $m = m_0$ et $n = n_0$ auquel cas $h_{mn} = 1$, c'est-à-dire que $h_{mn} = g_{mn}$.

Séance 3

Exercice 12 (12) On considère un filtre de masque de taille 2×2 définie par

$$[h_{m,n}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Calculez la réponse fréquentielle $H(u, v)$. Représentez avec trois couleurs différentes le lieu des fréquences (u, v) pour lesquelles $|H(u, v)|$ est maximum et minimum avec $u, v \in [-1, 1]$ et le profil de $(u, v) \mapsto |H(u, v)|$ le long de $u = v = f$ et $f \in [-1, 1]$.

Cours 5 (15)

La transformée de Fourier d'une suite bidimensionnelle non-périodique est une fonction périodique de période égale à 1 suivant u et aussi suivant v , elle est définie par

$$\mathcal{TF}[g_{mn}](u, v) = \sum_{m,n} g_{mn} e^{-j2\pi(mu+nv)} \quad (12)$$

On pourrait être tenté de normaliser par MN , mais dans ce cas il faudrait multiplier par MN la transformée inverse de Fourier. La transformée de Fourier inverse est définie par

$$\mathcal{TF}^{-1}[G(u, v)]_{mn} = \int_{u=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{v=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} G(u, v) e^{j2\pi(mu+nv)} du dv \quad (13)$$

L'égalité de Parseval énonce que la puissance d'un signal déterministe peut se calculer à la fois à partir de g_{mn} et à partir de $G(u, v)$.

$$\sum_m \sum_n g_{mn}^2 = \int_{u=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{v=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |G(u, v)|^2 du dv \quad (14)$$

Les filtres de Sobel sont définis par

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

On peut noter que les filtres de Sobel horizontaux et verticaux sont en fait séparables, c'est-à-dire que leur masques sont le produit de deux matrices plus simples. En fait il y a 4 autres filtres de Sobel qui sont les symétriques de ceux-ci.

Exercice 13 (Réponse fréquentielle du Sobel horizontal) (15)

1. Calculez la réponse fréquentielle du filtre de Sobel horizontal.
2. Tracez les profils horizontaux et verticaux du module de cette réponse fréquentielle avec une échelle en cycles par image (l'image est supposée être composée de 256×256 pixels).

3 Analyse statistique du signal image

Cours 6 (9)

Soit U une loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$. alors la densité spectrale, son espérance et sa variance sont données par :

$$f_U(x) = \frac{1}{b-a} \mathbf{1}_{[a,b]}(x) \quad E[U] = \frac{a+b}{2} \quad \text{Var}(U) = \frac{(b-a)^2}{12} \quad (15)$$

La loi binômiale $B(N, p)$ est la distribution de probabilité discrète du nombre de succès dans une suite de N expérimentations. Chacune de ces expérimentations ayant une probabilité p de succès. Si X suit une telle loi alors $P(X = k) = C_N^k p^k (1-p)^{N-k}$, $E[X] = Np$ et $\text{Var}(X) = Np(1-p)$.

En effet si $X = k$, cela signifie qu'il y a k expérimentations qui ont été un succès et $N - k$ qui ont été un échec, aussi chaque expérimentation qui conduit à $X = k$ a une probabilité de $p^k (1-p)^{N-k}$. Le nombre de façons de distribuer k succès parmi

N expérimentations est donné par C_N^k . La deuxième et la troisième assertion sont facile à démontrer si on ne considère qu'une seule expérimentation : $E[X] = 1 \times p + 0 \times (1 - p)$ et $Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = 1^2 \times p + 0^2 \times (1 - p) - p^2 = p(1 - p)$. En fait les différentes approximations sont indépendantes aussi l'espérance et la variance de chacune de ces expérimentations s'ajoutent.

La loi multinômiale $M(n, p_1 \dots p_m)$ est une généralisation de la loi binômiale. Cela consiste à procéder à n tirages indépendants qui sont à valeurs dans $\{1 \dots m\}$ avec les probabilités respectives $p_1 \dots p_m$. Les variables aléatoires M_i donnent le nombre de tirage qui ont donné la valeur $i \in \{1 \dots m\}$.

$$P(M_1 = x_1 \dots M_m = x_m) = \begin{cases} \frac{n! p_1^{x_1} \dots p_m^{x_m}}{x_1! \dots x_m!} & \text{si } \sum_i x_i = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$E[M_i] = np_i \quad Var[M_i] = np_i(1 - p_i) \quad Cov(M_i, M_j) = -np_i p_j \text{ si } i \neq j$$

où ! désigne la factorielle.

La justification est la même que pour la loi binômiale. Les différents ensembles de tirages qui sélectionnent x_1 fois 1, x_2 fois 2 ... x_m fois m ont tous une probabilité $p_1^{x_1} \dots p_m^{x_m}$. Il y a $\frac{n!}{x_1! \dots x_m!}$ tirages de ce types parce que c'est le nombre de répartition de n éléments répartis dans m classes avec x_1 éléments dans la première, ... x_m éléments dans la dernière classe. Pour chaque tirage, on $E[M_i] = p_i$, $Var[M_i] = E[M_i^2] - E[M_i]^2 = 1^2 \times p_i + 0^2 \times (1 - p_i) - p_i^2 = p_i(1 - p_i)$, $Cov[M_i, M_j] = E[M_i M_j] - E[M_i]E[M_j] = 0 \times 1 - p_i p_j = -p_i p_j$. L'indépendance entre les tirages fait que les espérances, les variances et les covariances s'ajoutent.

Exercice 14 (9)

Le bruit de Salt & Pepper transforme chaque pixel en un pixel blanc ou noir avec une probabilité p pour chacun. On étudie les propriétés statistiques du bruit (Salt & Pepper).

1. Donnez les principales étapes d'un programme qui simule le bruit (Salt & Pepper).
2. On considère une image uniformément grise. Exprimez au moyen de deux variables aléatoires la moyenne de l'image dégradée.
3. Calculez l'espérance de l'erreur quadratique moyenne et de l'erreur absolue moyenne entre l'image grise d'origine et de l'image dégradée.

4 Amélioration et restauration du signal image

Exercice 15 (31) On se donne une image définie par :

$$[g_{mn}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

1. Calculez l'image obtenue en appliquant le filtre de masque $[0.5 \ 0.5]$.
2. Calculez l'image obtenue en appliquant le filtre défini par :

$$[h_{m,n}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Pourquoi d'une manière générale les masques de convolution utilisés pour lisser sont normalisés de telle sorte que $\sum_{m,n} h_{m,n} = 1$?

Exercice 16 (32) *On se donne une image définie par :*

$$[g_{mn}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

1. *Calculez l'image obtenue en appliquant le filtre médian de taille 2×2 .*

Séance 4

5 Apparition de fausses couleurs lors de l'application d'un moyenneur

6 Couleur, luminance, espace de couleur

Exercice 17 (25) On considère ici une approximation de l'espace YCbCr : $Y = 0.2125R + 0.7154G + 0.0721B$, que l'on pourra noter $Y = c_{yr}R + c_{yg}G + c_{yb}B$. et les informations de chrominance par les grandeurs $C_R = R - Y$ et $C_B = B - Y$, appelées aussi différences de couleur.

1. On suppose que les valeurs de R, G, B évoluent entre 0 et 1. Entre quelles valeurs extrêmes évolue Y ?
2. Exprimez C_R et C_B en fonction uniquement des canaux R, G et B . Quelle est la plus grande valeur positive prise par C_R ? Pour quel triplet (R, G, B) est-elle obtenue ? Quelle est la plus petite valeur négative prise par C_R ? Pour quelle triplet (R, G, B) est-elle obtenue ? Que peut-on déduire sur ce que représente l'axe portée par C_R ? Lorsque C_R évolue entre ses deux valeurs extrêmes, entre quelles couleurs se déplace t-on ?
3. Mêmes questions pour C_B
4. Soit une couleur A de valeur $R = G = B = 0.5$. Quelles sont les valeurs de Y, C_R et C_B ? Quel est l'aspect de cette couleur ?
5. On considère dans l'espace R, G et B , 3 stimuli colorés $A(0.5, 0, 0)$ (rouge sombre), $B(0.5, 0.5, 0)$ (jaune-vert sombre) et $C(1, 0, 0)$ (rouge). Les distances AB et AC sont identiques. Ces deux distances correspondent-elles à des distances de perception également semblables ?
6. On considère une image remplie de la couleur de fond A définie par $R = 0.5, G = 0.5, B = 0.5$, et présentant un objet constitué de la couleur B de premier plan définie par $Y = 0.5, C_R = 0.5, C_B = 0$, il s'agit d'un rose vif. Que donnerait l'acquisition en niveaux de gris de cette image ?
7. On réalise une image carrée de 100 pixels de coté avec un dégradé vertical linéaire depuis la couleur B vers la couleur A . Représenter les histogrammes définis dans les plans Y, C_R , et C_B . Quelle serait l'allure des histogrammes des plans R, G, B ?

Exercice 18 (26) On considère les espaces HSL et HSV définis par les transformations suivantes depuis un espace RGB de départ. Les modèles HSL et HSV ont été définis en 1978 et sont utilisés dans de nombreux logiciels de retouche et de traitement d'images. L'espace HSV est parfois aussi notée en France TSV. L'espace HSV est défini par les équations (18, 19, 20). L'espace HSL est défini par les équations (18, 21, 22).

La définition de la teinte (hue) est commune aux deux modèles :

$$H = \begin{cases} 0 & \text{si } \max = \min \\ (60^\circ \times \frac{G-B}{\max-\min} + 360^\circ) \bmod 360^\circ, & \text{si } \max = R \\ 60^\circ \times \frac{B-R}{\max-\min} + 120^\circ, & \text{si } \max = G \\ 60^\circ \times \frac{R-G}{\max-\min} + 240^\circ, & \text{si } \max = B \end{cases} \quad (18)$$

où \max et \min désignent respectivement le maximum et le minimum de R, G et B .

Pour l'espace HSV, la définition de la saturation (saturation) et de la valeur (value) qui est une autre définition de la brillance.

$$S = \begin{cases} 0, & \text{si } \max = 0 \\ \frac{\max-\min}{\max} = 1 - \frac{\min}{\max}, & \text{sinon} \end{cases} \quad (19)$$

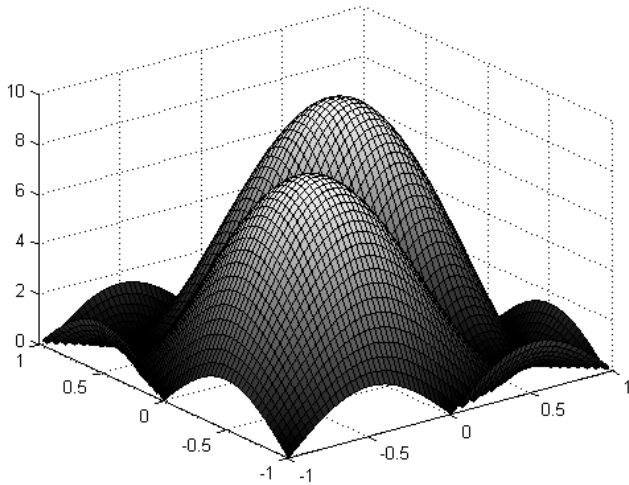
$$V = \max \quad (20)$$

Pour l'espace HSL, la définition de la saturation (saturation) et de la brillance (lightness) est donnée par :

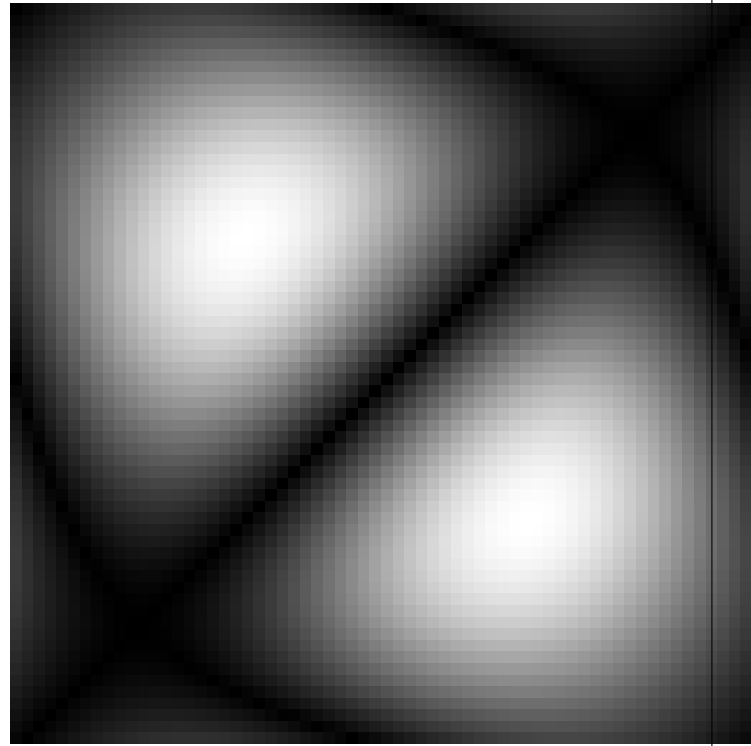
$$S = \begin{cases} 0 & \text{si } \max = \min \\ \frac{\max-\min}{\max+\min} = \frac{\max-\min}{2l}, & \text{si } l \leq \frac{1}{2} \\ \frac{\max-\min}{2-(\max+\min)} = \frac{\max-\min}{2-2l}, & \text{si } l > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (21)$$

$$L = \frac{1}{2}(\max + \min) \quad (22)$$

1. Soit 3 couleurs $A(100)$ (rouge), $B(110)$ (jaune) et $C(000)$ (noir) dans l'espace RGB. Donnez leurs coordonnées dans l'espace HSL puis dans l'espace HSV.
2. Quelles sont les règles permettant de dire quelle est la couleur dominante dans l'espace RGB à partir de la teinte d'une couleur ?
3. Retrouvez les composantes RGB de la couleur définie en HSL par $(30^\circ, 1, 1/2)$ et les composantes RGB de la couleur définie en HSV par $(30^\circ, 1, 1)$.
4. On note que pour les deux espaces de couleur HSL et HSV, les valeurs prises par S et L ou par S et V fixent de manière unique max et min des composantes colorimétriques de l'espace RGB. On considère maintenant un ensemble de couleurs définies en HSL par $(H, 1, 1/2)$ avec H qui parcourt $[0^\circ, 360^\circ]$, calculez les valeurs prises par les composantes colorimétriques dans l'espace RGB et dessinez une représentation en perspective de cette courbe, montrez que cette courbe se trouve sur les arêtes d'un cube.



I1



I2

Figure 4: Spectres du filtre de Sobel présenté dans l'exercice 19

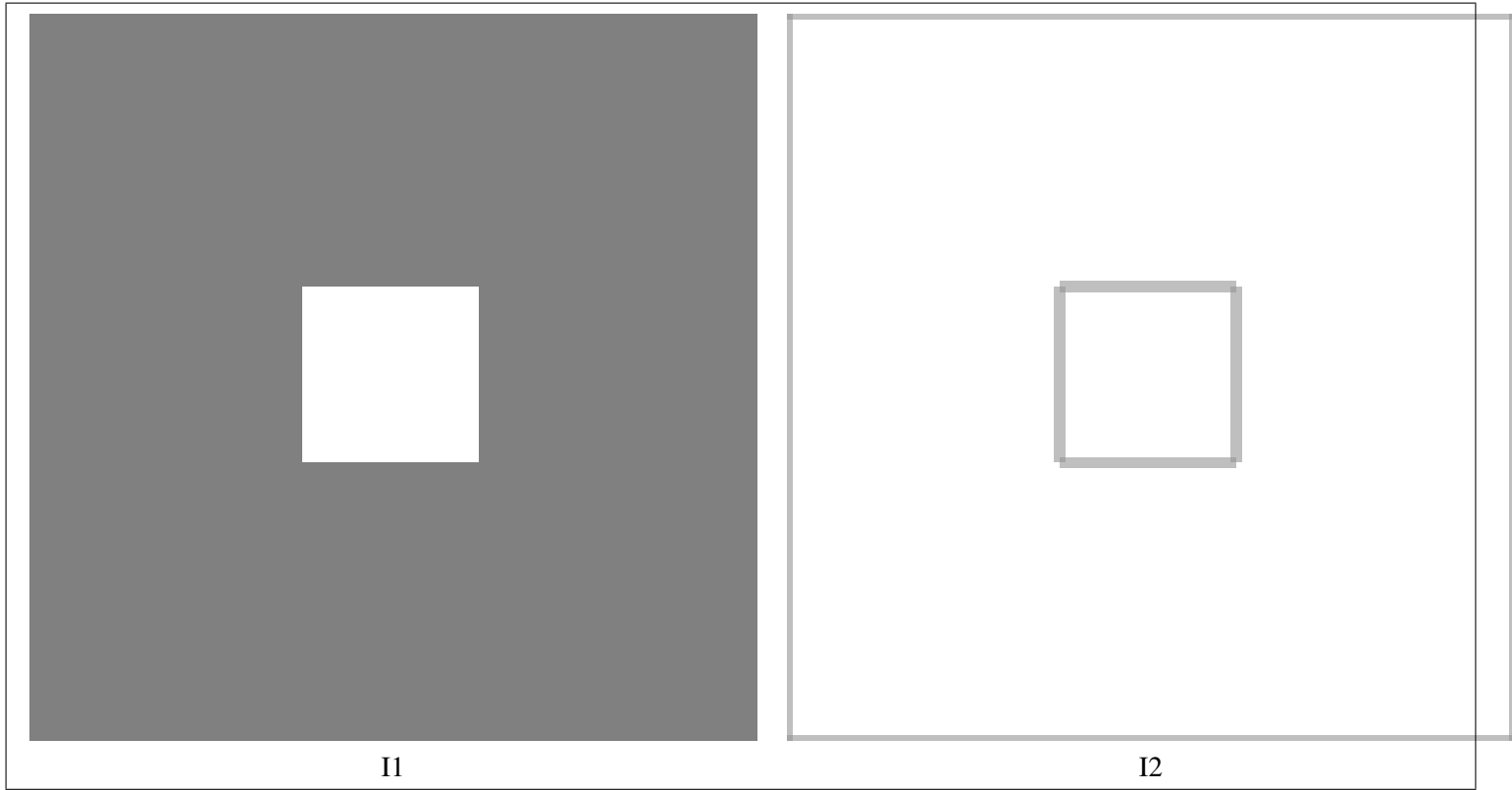


Figure 5: images d'origine et image filtrée par un filtre pseudo-gradient illustrant l'exercice 19

Exercice 19 (14) On se donne une image définie par :

$$g_{mn} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

1. Appliquez le filtre de Sobel défini par

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Le module de sa réponse fréquentielle est montrée dans la figure 4.

2. Choisissez un seuil et calculez l'image de contour obtenue en seuillant la valeur absolue du résultat calculé précédemment.
3. Appliquez le filtre pseudo-gradient sur l'image $[g_{mn}]$. Calculez l'image résultante. Le résultat du filtre pseudo-gradient est montré pour une image beaucoup plus grande dans la figure 5.
4. Choisissez un seuil et calculez l'image de contour obtenue en seuillant le résultat calculé précédemment.

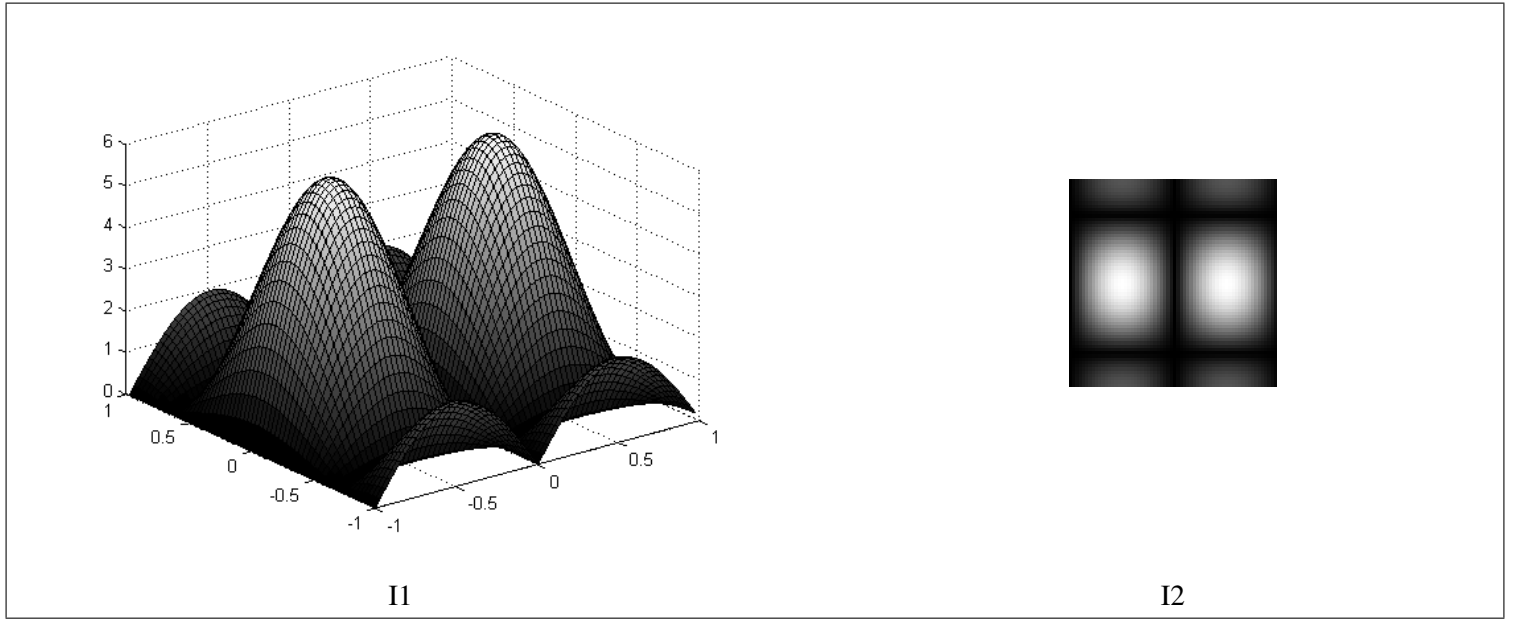


Figure 6: Spectres du filtre de Sobel présenté dans l'exercice 20

Exercice 20 (24) On considère le masque 3×3 de Prewitt parfois utilisé pour lisser le contour horizontal de l'image.

$$\nabla_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

La transformée bidimensionnelle est définie par

$$H(z_1, z_2) = \sum_{k,l} h_{k,l} z_1^{-k} z_2^{-l} \quad (25)$$

1. Calculez la transformée en Z bidimensionnelle de la réponse impulsionnelle du filtre.
2. Pourra-t-on séparer le résultat en un produit de 2 filtres séparés H_1 et H_2 ?
3. Exprimez la réponse fréquentielle \hat{H}_1 et \hat{H}_2 . Dessinez à main levée les modules de ces réponses fréquentielles, s'agit-il de passe-bas, de passe-haut ? Indiquez sur les graphiques les échelles en cycles par image si elles concernaient une image de taille 128×128 . Dessinez à main levée les fréquences pour lesquelles $\hat{H}(u, v)$ est nulle et les fréquences pour lesquelles $|\hat{H}(u, v)|$ est maximum. La figure 6 montre le module du spectre de ce filtre.
4. Ecrivez les masques de convolution de H_1 et H_2 . Retrouvez cette propriété de séparabilité.

Séance 5

7 Un filtre qui préserve les contours

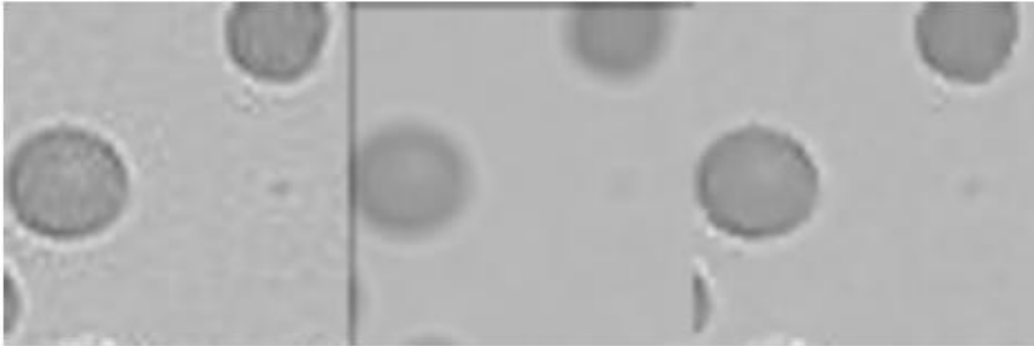


Figure 7: A gauche : image d'origine. Au milieu : traitement $T1$. A droite : traitement $T2$ avec $\sigma = 0.1$, exercice 21, (21)

Exercice 21 (21) On considère des voisinages carrés de tailles 3×3 . Soit un traitement $T1$ consistant à remplacer chaque pixel f_{mn} d'une image f par la moyenne des pixels de son voisinage. Soit un traitement $T2$ consistant à remplacer chaque pixel f_{mn} d'une image f par la moyenne des pixels de son voisinage compris entre $f_{mn} - \sigma$ et $f_{mn} + \sigma$, où σ est un des paramètres du traitement, et s'il n'y a aucun pixel alors le pixel n'est pas modifié. La figure 7 (p. 22) montre à gauche une photo de globules rouges de sang, au milieu le résultat du traitement $T1$ et à droite le résultat de traitement $T2$ avec $\sigma = 0.1$. La figure 8 (p. 23) montre les histogrammes des trois images de la figure 7.

1. Montrez que le traitement $T1$ peut s'interpréter comme un filtrage.
2. Montrez que le traitement $T2$ n'est pas un traitement linéaire.
3. Comment expliquer l'impression de flou lié au traitement $T1$?
4. L'histogramme de gauche contient un pic principal, à quelle partie de l'image correspond-il ?
5. L'histogramme de gauche a une bosse à gauche du grand pic, à quelle partie de l'image correspond-il ? L'histogramme a aussi une petite remontée à droite du pic, à quoi cela correspond-il ?
6. La distance entre les deux pics est de 0.15, comment cela peut-il nous aider à expliquer que les bords des cellules sont nets avec le traitement $T2$.
7. Commentez l'effet de $T1$ sur l'histogramme.
8. Commentez l'effet de $T2$ sur l'histogramme.

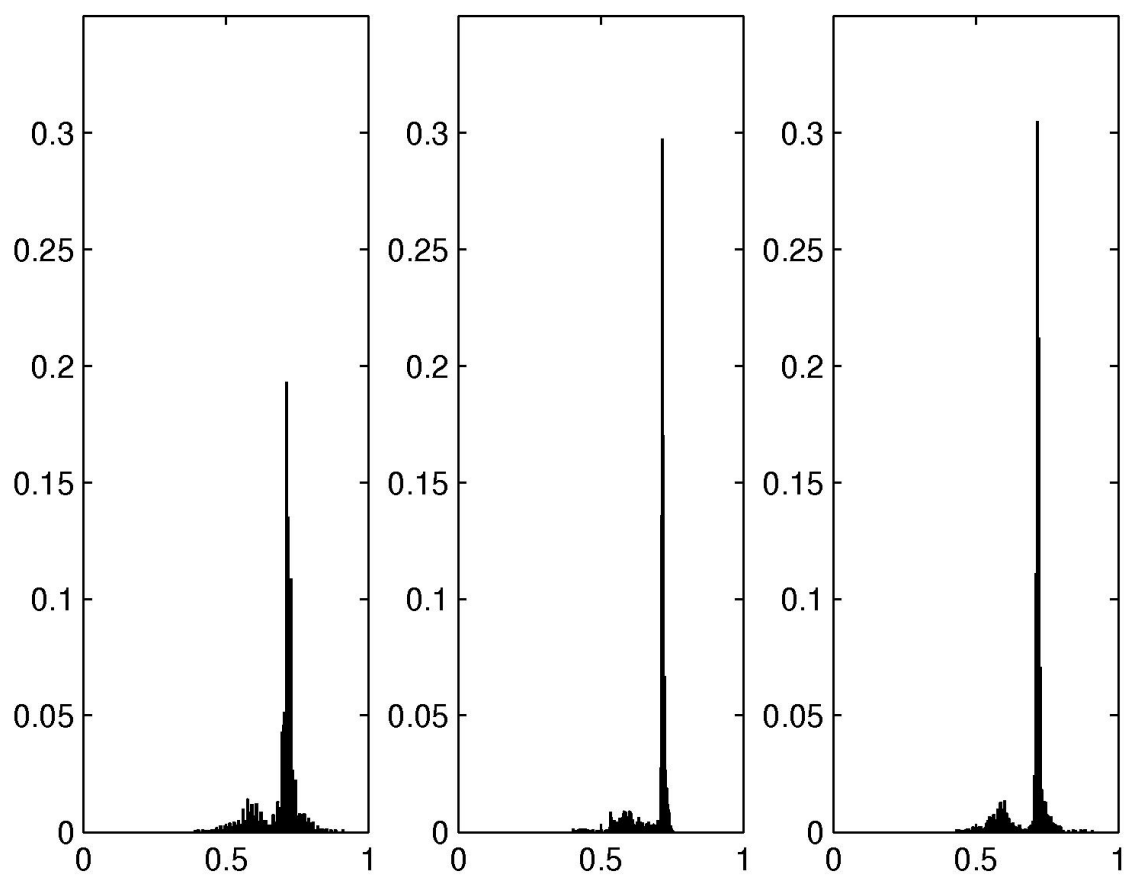


Figure 8: Histogrammes des trois images de la figure 7, exercice 21, (21)

Un ingénieur remarque qu'on aurait pu obtenir sur cette image le même effet que le traitement T2 en faisant d'abord un seuillage puis en appliquant le traitement T1.

- Expliquez la remarque de l'ingénieur et précisez les précautions qu'il faudrait prendre pour que cela fonctionne réellement aussi bien.

8 Seuillage

Cours 7 (16)

Deux points sont connexes (au sens de la 4-connexité) l'un est le voisin du dessous, de gauche, de droite ou de dessus. Deux points sont connexes (au sens de la 8-connexité) si l'un est le voisin du dessous, de gauche, de droite ou de dessus, ainsi que d'en haut à gauche, en haut à droite, en bas à gauche et en bas à droite.

Exercice 22 (16) On se donne une deuxième image définie par

$$[g_{mn}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.25 & 0.25 & 0.5 & 0.6 & 0.7 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.5 & 0.6 & 0.7 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0.25 & 0.5 & 0.6 & 0.7 & 0.8 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.7 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.3 & 0.9 & 0.7 & 0.9 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.2 & 0.4 & 0.6 & 0.8 \\ 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.25 & 0.5 & 0.6 & 0.7 & 0.8 \\ 0.5 & 0.5 & 0.4 & 0.6 & 0.6 & 0.4 & 0.5 & 0.6 \end{bmatrix} \quad (26)$$

- Choisissez deux seuils de telle façon que l'image seuillée avec ces deux seuils fournissent trois régions connexes (4-connexité ici).

9 Restauration d'images par filtre de Wiener

Exercices

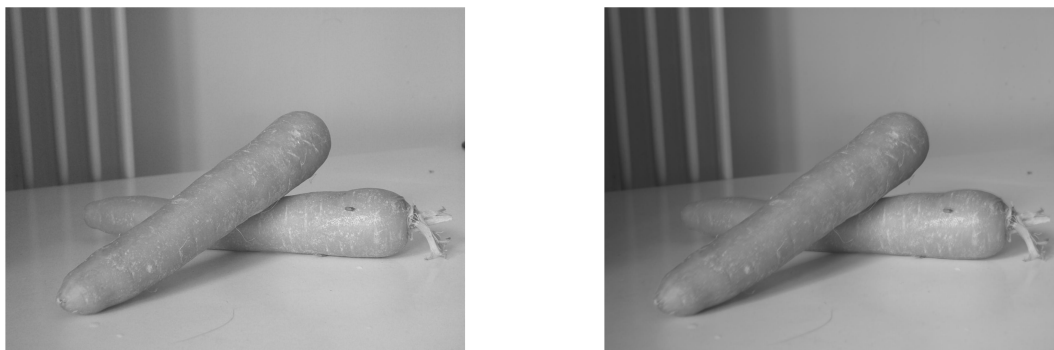


Figure 9: A gauche : la première photo. A droite : moyenne de 14 photos. Exercice 23, (20)

(exercice 23)

Tableau 1

0	-1	-7	-11	-17	-20	-16	-21	-20	-20	-20	-20	-20	-9
1	0	-4	-9	-16	-2	0	-2	0	0	-2	-2	0	-2
7	4	1	-4	-12	-12	-12	-16	-12	-13	-16	-16	-16	-20
11	9	4	1	-8	-8	-8	-12	-8	-8	-9	-11	-11	-16
17	16	12	8	0	0	0	-4	-1	-1	-4	-4	-3	-8
20	2	12	8	0	0	-1	-4	0	0	-3	-3	-4	-8

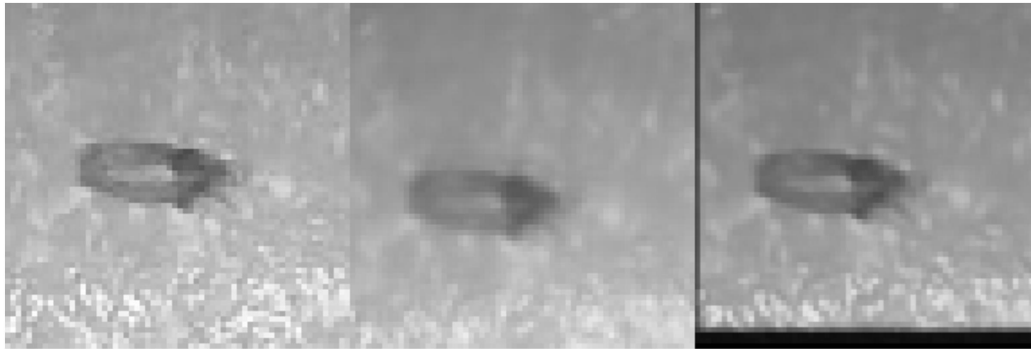


Figure 10: A gauche : détail de la première photo. Au milieu : moyenne des détails. A droite : moyenne après recalage par translation. Exercice 23, (20)

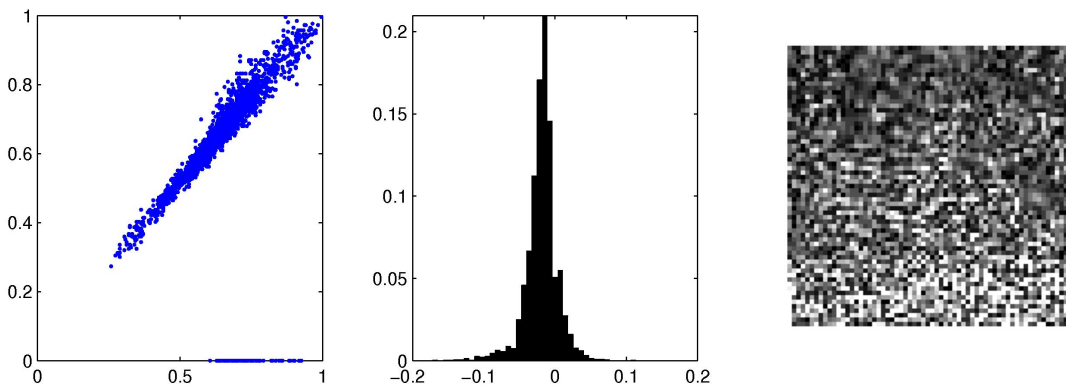


Figure 11: A gauche : niveau de gris des pixels de la photo 4 en fonction des niveaux de gris des pixels de la photo 3. Au milieu : histogramme des différences entre ces niveaux de gris. A droite : valeur absolue des différences entre les niveaux de gris multiplié par 20. Exercice 23,(20)

16	0	12	8	0	1	0	0	0	0	0	0	-4	-5
21	2	16	12	4	4	0	0	0	0	0	0	0	-4
20	0	12	8	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-4
20	0	13	8	1	0	0	0	0	0	-1	0	-2	-4
20	2	16	9	4	3	0	0	0	1	0	0	0	-4
20	2	16	11	4	3	0	0	0	0	0	0	0	-4
20	0	16	11	3	4	4	0	0	2	0	0	0	-3
9	2	20	16	8	8	5	4	4	4	4	4	3	0

(exercice 23)

Tableau 2

1	0	8	8	8	8	1	8	1	1	4	1	1	0
0	1	9	8	9	0	1	0	-1	-1	0	0	1	0
-8	-9	0	0	0	0	1	0	4	4	4	4	3	0
-8	-8	0	0	0	0	1	0	3	5	8	4	4	0
-8	-9	0	0	1	2	2	0	4	4	8	5	4	0
-8	0	0	0	-2	1	0	0	4	4	4	4	3	0
-1	-1	-1	-1	-2	0	1	1	2	4	4	4	0	0
-8	0	0	0	0	0	-1	1	2	4	4	4	4	0
-1	1	-4	-3	-4	-4	-2	-2	1	-1	2	2	1	-4
-1	1	-4	-5	-4	-4	-4	-4	1	1	0	1	0	-4
-4	0	-4	-8	-8	-4	-4	-4	-2	0	1	1	-2	-5
-1	0	-4	-4	-5	-4	-4	-4	-2	-1	-1	1	1	-4
-1	-1	-3	-4	-4	-3	0	-4	-1	0	2	-1	1	-4
0	0	0	0	0	0	0	0	4	4	5	4	4	1

Exercice 23 (20) La photo de gauche sur la figure 9 (p. 25) a été prise avec un appareil photo. L'ingénieur A propose d'améliorer la qualité de la photo en prenant plusieurs fois la même photo puis à moyenner les différentes images pour en récupérer une qui soit de meilleure qualité. Il affirme que dans la mesure où l'appareil photo n'a pas bougé, les différences entre les photos peuvent être modélisées par un unique bruit blanc gaussien additif dont la variance est réduite lorsqu'on fait la moyenne.

1. Expliquez pourquoi si on suit la modélisation de l'ingénieur A, la moyenne des photos est aussi perturbée par un bruit blanc gaussien additif dont la variance est 14 fois plus petite ?

La photo de droite de la figure 9 (p. 25) montre le résultat du procédé. En réalité cette image est plus floue et semble avoir été prise avec une luminosité différente. L'ingénieur B propose de se concentrer sur un détail de l'image (montré à gauche de la figure 10 (p. 25)) pour diminuer le coût de calcul, il propose aussi de réaliser un suréchantillonnage et de supprimer les photos trop différentes, c'est le cas des deux premières. La photo au milieu de la figure 10 est obtenue en moyennant sur les 12 autres photos. L'ingénieur C pense que le flou de la photo du milieu provient de ce que l'appareil photo a en réalité bougé très légèrement lorsqu'on a appuyé sur le bouton. Il propose, pour trouver les coordonnées du vecteur de translation à appliquer, de calculer le maximum de l'intercorrélation entre les images. Il précise qu'il n'est pas nécessaire de calculer ces intercorrélations au-delà des 10 premiers indices.

2. On considère une image g et cette même image mais translatée h , montrez que la somme des carrés des différences est minimale si l'intercorrélation est maximale.
3. Donnez la formule de l'intercorrélation. Comment faire pour que la mesure de l'intercorrélation ne pénalise pas le déplacement de l'image ?
4. Pourquoi n'est-il pas nécessaire de calculer au-delà des 10 premiers indices ?
5. Ecrivez la nouvelle formule de moyenne à appliquer.
6. Pourquoi un recalage peut-il être plus précis après un suréchantillonnage ?

Les tableaux 1 et 2 indiquent les coordonnées des vecteurs de translation pour faire coïncider les images. Le tableau 1 correspond à la première coordonnée, tandis que le tableau 2 correspond à la deuxième coordonnée. Les deux composantes t_{cl} et s_{cl} située sur la colonne c et la ligne l des deux tableaux donnent le vecteur de translation (t_{cl}, s_{cl}) qui appliquée à l'image l permettent de la caler sur l'image c . A droite de la figure 10 se trouve l'image obtenue en moyennant les différents images de départs après recalage.

7. Pourquoi les tableaux 1 et 2 sont-ils presque anti-symétriques ? Que nous informe les termes non-nuls sur les deux diagonales ?

L'ingénieur A, déçu des résultats, cherche à savoir si la modélisation est juste. Pour chaque couple d'images de détail, il porte sur un graphique l'ensemble des pixels sous la forme de points dont l'abscisse est le niveau de gris du pixel sur la première image et l'ordonnée est le niveau de gris du pixel de la deuxième image (à gauche de la figure 11, p. 26). Il représente ensuite l'histogramme des différences entre les niveaux de gris sur une deuxième graphique (au milieu de la figure 11). Enfin il représente la différence entre les images (à droite de la figure 11). L'ingénieur A en conclut que pour certains couples d'images les conditions sont maintenant bien réalisées. L'ingénieur B affirme que ces expériences ne suffisent pas pour affirmer que la modélisation est correcte, parce que l'on observe que les variations entre les images et non les variations entre les images et la vraie image. Dans la réalité le détail au centre de l'image est n'est pas une forme convexe mais une entaille dont l'extérieur a noirci et présente la forme d'un arceau presque fermé. C'est la compression jpeg faite par l'appareil photo qui a déformé l'image. En fait toutes les images ont été obtenues avec le même appareil photo et les mêmes réglages et présentent le même biais. Plus généralement le fait d'augmenter la résolution d'une photo en utilisant les informations contenues dans d'autres photos du même sujet est un axe de recherche actuel appelé super-résolution.

8. Pourquoi nous montre-t-il que la distortion entre les deux images est bien modélisée par un bruit additif ?
9. Que nous informe le graphique au milieu de la figure 11 ?
10. Que nous informe le graphique à droite de la figure 11 ?

(1)

Cours 8 Un histogramme d'une image numérique est une courbe qui représente le nombre de pixels (ou la proportion de pixels) dont le niveau de gris se situe entre telle et telle valeur. En pratique, pour faire un histogramme on effectue une quantification des niveaux de gris sur N niveaux, puis on trace une courbe du nombre de pixels en fonction du niveau. Par extension, on peut définir un histogramme pour une image définie par une fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans \mathbb{R} , en quantifiant cette image sur N niveaux et en mesurant la portion de surface de l'image correspondant à chacun de ces niveaux. Si une image est une réalisation d'un bruit blanc suivant une certaine loi alors l'histogramme est souvent une bonne approximation de la densité de probabilité de cette loi.

Exercice 24 On considère une image carrée de taille $A \times A$ pixels, quantifiée sur 256 niveaux à valeurs dans $[0, 1]$. Cette image contient en son centre un carré de taille $B \times B$ dont les pixels valent tous g_b . Les pixels du reste de l'image valent g_a . Pour simplifier on considère que A et B sont impaires.

1. Définissez l'image en utilisant l'opérateur $\mathbf{1}_A$ (où $\mathbf{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\mathbf{1}_A(x) = 0$ sinon, x étant un élément d'un ensemble plus vaste contenant A).
2. Ecrivez et tracez l'histogramme correspondant à cette image.

On ajoute un bruit additif gaussien blanc à cette image. La densité de probabilité f associée à la modification d'un pixel $g' = g + b$ est $f(b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\frac{b^2}{\sigma^2}}$. La modélisation repose sur une variable aléatoire continue que l'on applique ici à une image quantifiée.

3. Quelle est la probabilité qu'un unique pixel soit augmenté de $1/255$.

Pour répondre à cette question et pour passer d'une description discrète à une description continue on pourrait donner trois significations à cette phrase :

- H1 : Le pixel est passé de $\frac{m}{255}$ à $\frac{m}{255} + \frac{1}{255}$.
- H2 : Le pixel est passé de $\frac{m}{255}$ à un niveau de gris contenu dans $]\frac{m}{255} + \frac{1}{2 \times 255}, \frac{m}{255} + \frac{3}{2 \times 255}]$.
- H3 : Le pixel avait un niveau de gris quelque part dans $]\frac{m}{255} - \frac{1}{2 \times 255}, \frac{m}{255} + \frac{1}{2 \times 255}]$ il a maintenant un niveau de gris contenu dans $]\frac{m}{255} + \frac{1}{2 \times 255}, \frac{m}{255} + \frac{3}{2 \times 255}]$. On modélise l'ignorance du niveau de gris par une loi uniforme.

En fait la première hypothèse conduit à une probabilité nulle qui est un résultat absurde on ne peut donc utiliser cette hypothèse. La deuxième et la troisième conduisent à des résultats voisins, on utilise donc la deuxième hypothèse plus simple.

4. Quelle est la probabilité que l'ensemble de l'image devienne une image uniforme ?
5. Quelle est l'espérance du nombre de pixels dont le niveau de gris a décru de $1/255$?

Dans cette question, tout se passe comme si on faisait un tirage de Bernoulli où on se donne une certaine probabilité que certains pixels subissent une transformation, on sait alors que l'espérance du nombre de pixels subissant cette transformation est donnée par le nombre de pixels de l'image multiplié par cette probabilité.

6. A partir des calculs précédents, calculez un histogramme moyen de l'image modifiée par le bruit additif.

On définit l'histogramme par $H = -\sum_{i=0}^{255} p_i \log_2(p_i)$ où p_i sont les probabilités qu'un pixel ait le niveau de gris $g_i = \frac{i}{255}$.

7. Calculez l'entropie de l'image sans bruit additif.
8. Calculez l'entropie de l'image lorsqu'on rajoute un bruit impulsionnel, ici pour chaque pixel il y a une probabilité $q = 0.05$ que celui-ci vaille 1.

Pour une image de taille $M \times N$, on définit ici la matrice de cooccurrence par

$$C_{i,j} = \frac{1}{2MN - (M+N)/2} \sum_m \sum_n \mathbf{1}_{\frac{i}{255}}[g_{mn}] \left(\mathbf{1}_{\frac{j}{255}}[g_{m-1,n}] + \mathbf{1}_{\frac{j}{255}}[g_{m,n-1}] \right) \quad (27)$$

Ainsi si g_{mn} vaut $\frac{i}{255}$ et $g_{m-1,n}$ vaut $\frac{j}{255}$, alors ce couple de pixels (m, n) et $(m-1, n)$ contribuent pour $1/2/(M-1)/(N-1)$ à la composante (i, j) de la matrice de cooccurrence. Les composantes ainsi définies forment une matrice qui n'est pas nécessairement symétrique. La normalisation utilisée ici permet d'interpréter les composantes $C_{i,j}$ comme des probabilités qu'un couple de pixels aient telle transition. L'entropie du second ordre est définie par $H = -\frac{1}{2} \sum_{ij} p_{ij} \log_2(p_{ij})$

9. Calculez la matrice de cooccurrence de l'image sans bruit.

10. Calculez l'entropie de l'image sans bruit.

Exercice 25 (18) On considère une image 256×256 définie par $f_{mn} = \frac{\max(|m-128|, |n-128|)}{128}$.

1. Décrivez l'aspect visuel de cette image. On pourra d'abord considérer la matrice de taille 5×5 définie par $g_{mn} = \max(|m-2|, |n-2|)$.
2. Calculez et représentez l'histogramme de cette image f .
3. On effectue un seuillage sur cette image f (c'est-à-dire que l'on quantifie cette image sur deux niveaux). Le seuil est fixé à 0.5. Décrivez l'image résultante.
4. Calculez le niveau de gris moyen de l'image obtenue.
5. Choisir le seuil de façon que l'image obtenue ait un niveau de gris moyen égale à 0.5.

On cherche maintenant à égaliser l'histogramme de cette image, c'est-à-dire à appliquer une transformation non-linéaire notée T sur les niveaux de gris de façon que le nouvel histogramme soit le plus plat possible.

6. Calculez l'histogramme cumulé, on rappelle que la somme des n premiers entiers est égale à $\frac{n(n+1)}{2}$.
7. Idéalement combien vaudrait un histogramme plat h^* et son histogramme cumulé C^* ?
8. La transformation non-linéaire doit vérifier $T(m) = \min\{l | C(m) \leq C^*(l)\}$. Que vaut T ?

Exercice 26 (23) On considère la transformation T suivante qui opère sur une image g_{mn} de taille $M \times N$, en niveaux de gris à valeurs sur $[0, 1]$. $f_{m+1,n+1} = \frac{1}{3}f_{m,n+1} + \frac{1}{3}f_{m+1,n} + g_{m+1,n+1}$.

1. S'agit-il d'une transformation linéaire ?
2. Montrez qu'elle est invariante par translation ?
3. Cette transformation est donc un filtre linéaire, on cherche maintenant à déterminer le masque équivalent. On considère une image notée δ_{mn} qui vaut 1 en haut à gauche et zéro partout ailleurs. Calculez le résultat de cette transformation pour une image de taille 4×4 . On pose $r = 1/3$. On note f^δ le résultat de cette transformation.
4. En utilisant des notions de dénombrements montrez que $f_{m,n}^\delta = r^{m+n} C_{m+n}^n$. Ceci est le masque infini qui caractérise la transformation.
5. A partir de la formule de récurrence, montrez que la fonction de transfert de T est $T(z) = \frac{1}{1-rz_1^{-1}-rz_2^{-1}}$.
6. En utilisant un développement en série de la fonction de transfert, retrouvez le masque infini.

Exercice 27 (30) Cet exercice montre la notion d'inférence bayésienne. Un objet uniforme est photographié dans un environnement bruité. Le bruit est un bruit blanc gaussien additif d'écart-type $\sigma = 0.05$ et le fond de l'image est noir, l'objet a une teinte de $g^* = 0.5$ avec une forme inconnue qui occupe une taille de $S^* = 2500$ pixels au sein d'une image 256×256 . Comme l'objet est plus clair que le fond, il est naturel de penser que les zones claires donne une forte présomption de la présence de l'objet. La question que l'on se pose ici est, à partir de quelle intensité de gris, peut-on penser qu'il y a un objet. Autrement dit, nous allons seuiller l'image, mais on se demande comment choisir le seuil.

1. S'il n'y avait pas de bruit, quelle serait la probabilité pour un pixel de faire parti de l'objet ? Cette probabilité est notée $P(I_{mn}^* = g^*)$. Quelle serait la probabilité $P(I_{mn}^* = 0)$ de ne pas faire parti de l'objet ? Ces probabilités sont appelées probabilités a priori.
2. Les niveaux de gris des pixels constituent un processus aléatoire et en particulier le niveau de gris d'un pixel constitue une variable aléatoire. A priori il s'agit de quantités aléatoires discrètes mais ici pour simplifier nous considérons qu'il s'agit de quantités aléatoires continues. Si un pixel fait parti de l'objet, quelle est la densité de probabilité des niveaux de gris ? Il s'agit d'une densité de probabilité conditionnelle, elle est notée $f[I_{m,n} = x | I_{mn}^* = g^*](x)$. Si un pixel ne fait pas parti de l'objet, quelle est la densité de probabilité des niveaux de gris ? Elle est notée $f[I_{m,n} = x | I_{mn}^* = 0](x)$.
3. Expliquez pourquoi la densité de probabilité peut se décomposer ainsi

$$f(I_{mn} = x) = f(I_{mn} = x | I_{mn}^* = g^*)P(I_{mn}^* = g^*) + f(I_{mn} = x | I_{mn}^* = 0)P(I_{mn}^* = 0)$$

et pourquoi

$$f(I_{mn} = x \text{ et } I_{mn}^* = 1) = f(I_{mn} = x | I_{mn}^* = g^*)P(I_{mn}^* = g^*)$$

et finalement pourquoi

$$f(I_{mn}^* = g^* | I_{mn} = x) = \frac{f(I_{mn} = x | I_{mn}^* = g^*)P(I_{mn}^* = g^*)}{f(I_{mn} = x | I_{mn}^* = g^*)P(I_{mn}^* = g^*) + f(I_{mn} = x | I_{mn}^* = 0)P(I_{mn}^* = 0)}$$

Cette dernière égalité s'appelle la formule de Bayes.

4. On note r le ratio $\frac{f(I_{mn}^*=g^* | I_{mn}=x)}{f(I_{mn}^*=0 | I_{mn}=x)}$. Montrez que r en fonction de x , on note cette fonction h . Montrez que $h(x) = \frac{S}{N^2-S} e^{\frac{2xg^*-g^{*2}}{2\sigma^2}}$.
5. Montrez que la probabilité pour un pixel d'appartenir à l'objet en fonction du niveau de gris du pixel vaut $\frac{\mathcal{H}(x)}{1+h(x)}$. Montrez que cette fonction est croissante, et expliquez pourquoi cette croissance est cohérente avec la modélisation. On observe que pour $x = \frac{g^*}{2}$, alors la probabilité étudiée vaut $\frac{S}{N^2}$, expliquez cette valeur.
6. On décide de seuiller l'image à $s = h^{-1}(1)$. Calculez h^{-1} . Que peut-on affirmer à propos des pixels qui ont été seuillés (dont le niveau de gris est supérieur à s) ? Expliquez pourquoi dans certaines applications on pourrait être amené à seuiller avec un seuil beaucoup plus faible : $s = h(19)$.

Cours 9 (29)

Un ensemble peut se représenter au moyen d'une image binaire : l'ensemble des pixels valant 1. Un élément structurant est défini par un ensemble dont un élément est appelé centre. Un élément structurant est aussi un ensemble de translations, ce sont toutes les translations qui déplacent le centre de l'élément structurant en un des éléments de l'ensemble structurant. La dilatation (dilation) d'un ensemble A par un élément structurant B contenant un centre est noté $A \oplus B$ et est défini par l'image de A par l'ensemble des translations de B . L'érosion (erosion) d'un ensemble A par un élément structurant B contenant un centre est noté $A \ominus B$ et est défini par l'ensemble des points de A qui sont encore dans A après une des translations de B . L'ouverture (opening) de A par un élément structurant B est définie par une érosion suivie d'une dilatation de A par B . La fermeture (closing) de A par un élément structurant B est définie par une dilatation suivie par une érosion de A par B .

Exercice 28 (29) On considère l'image suivante :

$$I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1. On considère l'élément structurant suivant $B = [\mathbf{1} \ 1 \ 1]$, le centre est indiqué en gras. Calculez l'image dilatée par B puis l'image érodée par B .
2. On considère l'élément structurant suivant $C = [1 \ \mathbf{1}; 0 \ 1]$. Calculez l'image dilatée par B puis l'image érodée par C .
3. Calculez l'ouverture et la fermeture de I pour les éléments structurants B et C .
4. Il y a plusieurs définitions du gradient morphologique. Ici nous allons en considérer deux : l'intersection de l'image dilatée avec le complémentaire de l'image d'origine d'une part, et l'intersection de l'image d'origine avec le complémentaire de l'image érodée d'autre part. Calculez le résultat de ces deux gradients morphologiques pour l'élément structurant $D = [\mathbf{1} \ 1]$.

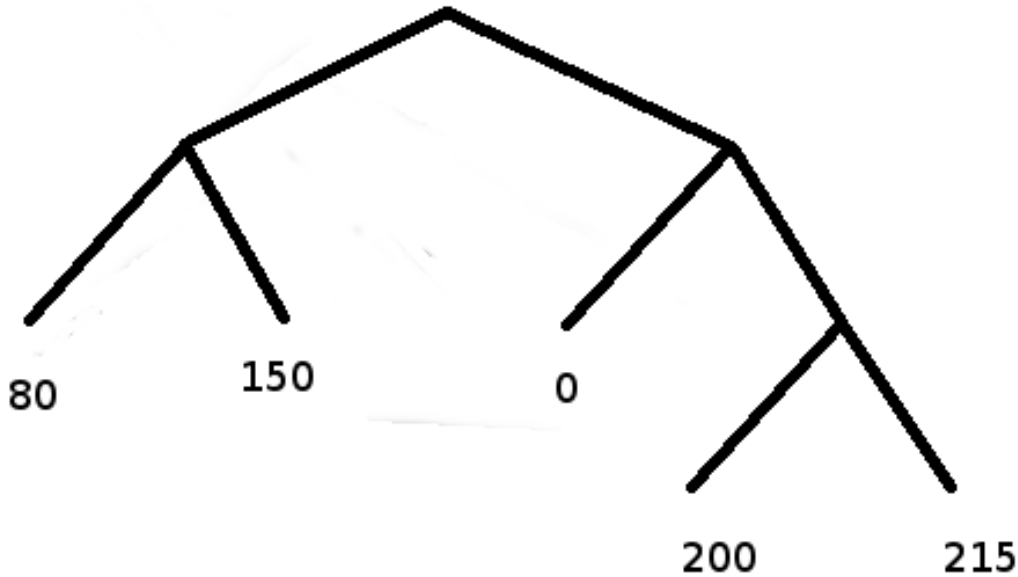


Figure 12: images de l'exercice 29

Exercice 29 (28) La chaîne suivante a été codée à l'aide du codage de Huffman

100010010000111001000111011111001000111001000100010010

On sait, à la lecture de l'entête que l'image de taille 5×5 et que le dictionnaire est le suivant :

0	=	10
80	=	00
150	=	01
200	=	110
215	=	111

1. Expliquez comment a été construit l'arbre présenté dans la figure 12 ?
2. Reconstruire l'image.

3. Calculez la longueur moyenne du code L , la longueur exacte du code L_e et l'entropie H . Montrez qu'on a effectivement $H \leq L \leq H + 1$. La figure 13 (p. 35) peut aider à faire le calcul numérique.
4. La règle d'Huffman qui conduit au choix des codes est qu'il faut coder les niveaux de gris les plus probables avec les séquences les moins les moins longues. Montrez que si on change le code en ne respectant pas cette règle par exemple en échangeant le code associé à 200 ou 215 à celui d'un des autres niveaux de gris, alors la longueur moyenne du code est augmentée de la différence de probabilités entre les deux codes.

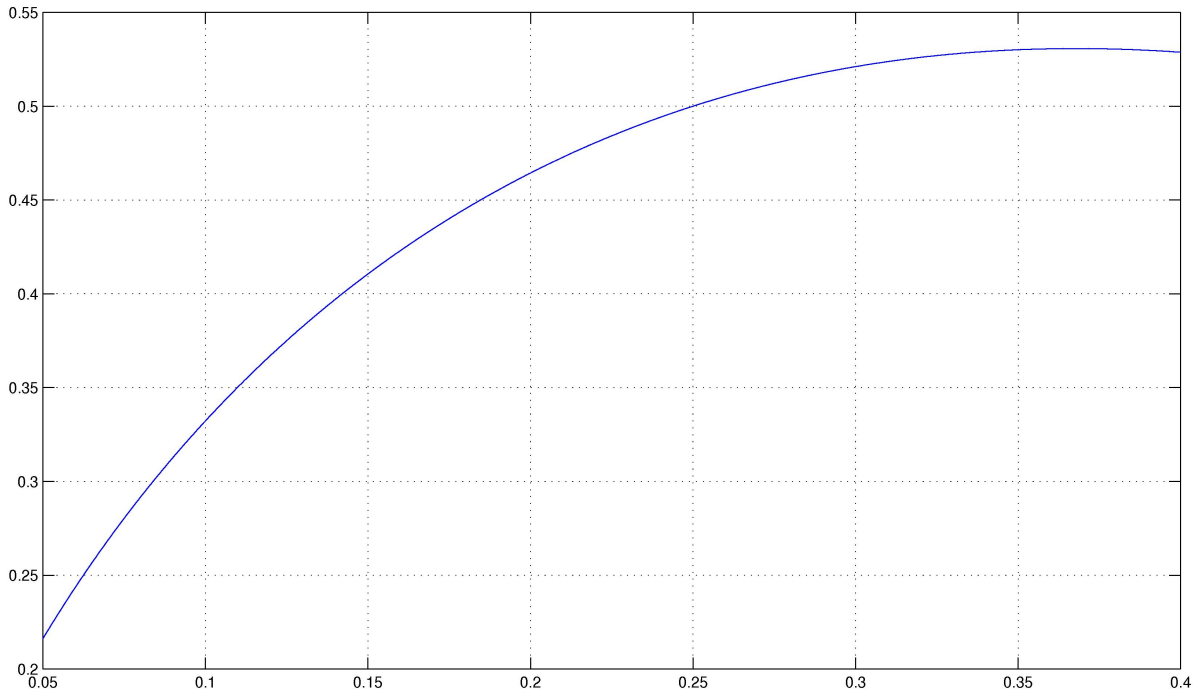


Figure 13: Graphique de la fonction $x \mapsto -x \log_2(x)$, exercice 29 (28)

Exercice 30 (27) Cet exercice comporte des difficultés similaires à celles rencontrées pour faire un sudoku, l'intérêt est qu'il permet de comprendre les difficultés et les nécessaires approximations à faire pour réaliser un algorithme de synthèse de texture. Les matrices de cooccurrence sont en effet un outil permettant de décrire les textures non-déterministes.

On considère des images de taille 4×4 à valeurs dans $\{0, 1, 2, 3\}$.

1. Calculez la matrice de cooccurrence pour les transitions verticales à un pas de l'image suivante :

$$I_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Dans la matrice de cooccurrence, l'indice des colonnes indique le niveau de gris du pixel de départ et l'indice des lignes indique le niveau de gris du pixel à l'arrivée. Ici la matrice n'est pas normalisée et la somme des composantes est égale à l'ensemble des transitions verticales c'est-à-dire $3 \times 4 = 12$.

2. Proposez une matrices 4×4 à valeurs dans $\{0, 1, 2, 3\}$ qui auraient la matrice de cooccurrences suivantes pour des transitions verticales à un pas.

$$C_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

3. Montrez que les deux matrices de cooccurrences ne correspondent à aucune matrice d'images.

$$C_3 = \begin{bmatrix} 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

On cherche maintenant à trouver une image dont la matrice de cooccurrence est la suivante

$$C_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Pour cela on propose de procéder par étapes.

4. Trouvez une image dont la matrice de cooccurrence est :

$$C_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pour cela on cherchera parmi les images dont les colonnes et les lignes sont formées de chiffres différents. Expliquez pourquoi il est possible de choisir arbitrairement la première colonne et la première ligne sans craindre d'écarter une bonne solution.

5. On remarque que quand on fait circuler une colonne (i.e. transformation du quatre-uplet (a, b, c, d) en (b, c, d, a)), on supprime une transition et on en fait apparaître une autre. De même quand on remplace un chiffre par un autre on fait disparaître une transition et on en fait apparaître une autre. En combinant ces deux méthodes trouvez une image dont la matrice de cooccurrence soit C_5 .