Introduction au signal et bruit
Exercices

Gabriel Dauphin

September 17, 2025

Contents

Chapter 1

Relations entrées-sorties sans effet mémoire

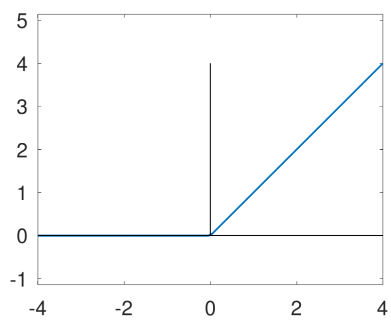

Figure 1.1: Relation entrée-sortie associée à un Relu (exercice 1)

Exercice 1 *Le graphique représente la relation entrée-sortie d'un* `Relu` *pour* `Rectified Linear Unit`*.*

1. *En utilisant la figure 1.1, combien valent les signaux en sortie lorsque respectivement, les signaux en entrées valent* -3 *et* 3 *?*
2. *Combien valent les puissances de ces signaux ?*
3. *Proposez une formule utilisant la valeur absolue, l'addition et la multiplication pour modéliser cette relation ?*
4. *On considère le filtre* $\mathcal{H}_1(x) = 0.5x$ *et* $\mathcal{H}_2(x) = |x|$*, montrez comment en les associant on peut fabriquer le filtre* `Relu`*.*
5. *Écrire le pseudo-code permettant de générer la figure 1.1.*

Simulation de la figure 1.1.

```
x=linspace(-4,4,1e2);
y=zeros(size(x));
y(x<=0)=0;
y(x>0)=x(x>0);
figure(1); plot(x,y); figure_jolie(1);
xlabel('x'); ylabel('y'); axis('equal');
saveas(1,'./figures/fig_exSEB6a.png');
```

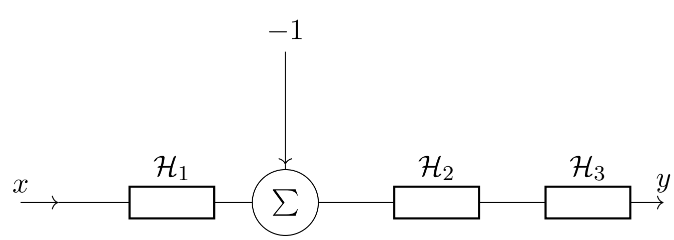

Figure 1.2: Schéma décrivant $\mathcal{H}$ à partir de $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3$ pour l'exercice 2.

Exercice 2 *Les filtres $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_3$ sont définis par*

$$\mathcal{H}_1(x) = |x| \quad \mathcal{H}_2(x) = \min(1, x) \quad \mathcal{H}_3(x) = \max(0, x) \tag{1.1}$$

On appelle $\mathcal{H}$ le filtre décrit par la figure 1.2 et défini par les filtres $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3$. et associé à la relation transformant x en y.

1. *Calculez les sorties y associées aux valeurs $-2, -1, 0, 1, 2$ pour x.*
2. *Écrivez la formule modélisant $\mathcal{H}$?*
3. *Dessinez la relation associée à $\mathcal{H}$ transformant x en y sur un graphe.*

Chapter 2

Signaux temps continu, fonction affine par morceaux

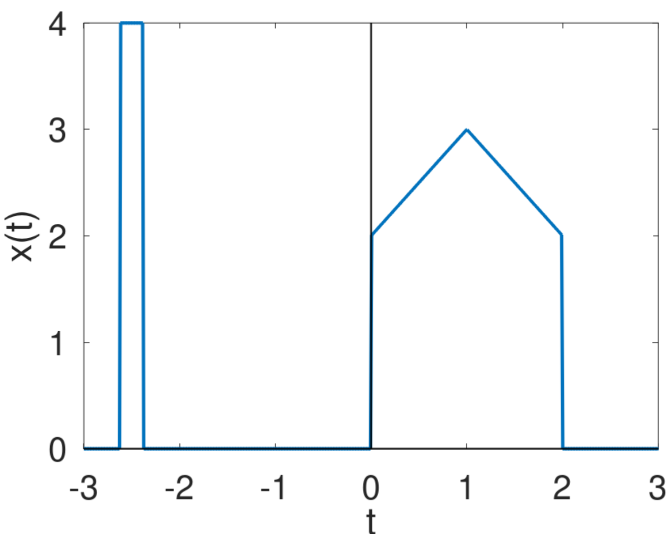

Figure 2.1: Visualisation de $x(t)$ qui a la forme d'une maison avec son lampadaire (exercice 3).

Exercice 3 *On considère le signal $x(t)$ décrit par la figure 2.1.*

1. *Calculez les valeurs de $x(t)$ pour les valeurs de t $-2.5, 0.5, 1, 2.5$.*
2. *Écrivez une formule décrivant $x(t)$ au moyen de différents intervalles de temps.*
3. *Utilisez quelques unes des fonctions de base présentées en cours pour définir $x(t)$.*
4. *Utilisez le crochet d'Iverson pour décrire $x(t)$.*

Simulation de la figure 2.1

```
t=linspace(-3,3,500);
x=2*fonction_porte((t-1)/2)+fonction_T(t-1)+4*fonction_porte((t+2.5)*4);
figure(1); plot(t,x); figure_jolie(1);
xlabel('t'); ylabel('x(t)');
saveas(1,'./figures/fig_exSEB8a.png');
```

Exercice 4 *On considère le signal $x(t)$ ainsi défini*

$$x(t) = (at + b) [\![t_1 \leq t \leq t_2]\!] \tag{2.1}$$

1. *Représentez ce signal pour $a = 1$, $b = 0$ et $t_1 = 2$, $t_2 = 3$.*

2. *Représentez ce signal pour* $a = -1$, $b = 1$ *et* $t_1 = 0$, $t_2 = 1$.

3. *Montrez que pour* $a = 0$, $x(t)$ *peut se mettre sous la forme*

$$x(t) = \alpha\Pi(\gamma t + \delta) \tag{2.2}$$

4. *Montrez que pour* $a > 0$, $x(t)$ *peut se mettre sous la forme*

$$x(t) = \alpha\Pi(\gamma t + \delta) + \beta\mathbb{C}(\gamma t + \delta) \tag{2.3}$$

5. *Donnez un pseudo-code permettant de visualiser de signal.*

Chapter 3

Définition et utilisation de la transformée de Fourier

Exercice 5 *On cherche à déterminer la transformée de Fourier de* $s(t) = e^{-|t|}$.

1. *Calculer la somme et l'énergie de ce signal.*
2. *On note* $s_1(t) = s(t)[\![t \geq 0]\!](t)$. *Calculez la transformée de Fourier de* $s_1(t)$ *notée* $\widehat{S}_1(f)$.
3. *On note* $s_2(t) = s(t)[\![t \leq 0]\!](t)$. *Calculez la transformée de Fourier de* $s_2(t)$ *notée* $\widehat{S}_2(f)$.
4. *On remarque* $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$ *pour* $t \neq 0$. *Que peut-on en déduire sur la relation entre* $\widehat{S}(f)$ *et* $\widehat{S}_1(f)$ *et* $\widehat{S}_2(f)$.
5. *Déduisez* $\widehat{S}(f)$.
6. *En établissant le lien avec la première question, déterminez* $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+4\pi^2 t^2}\, dt$.

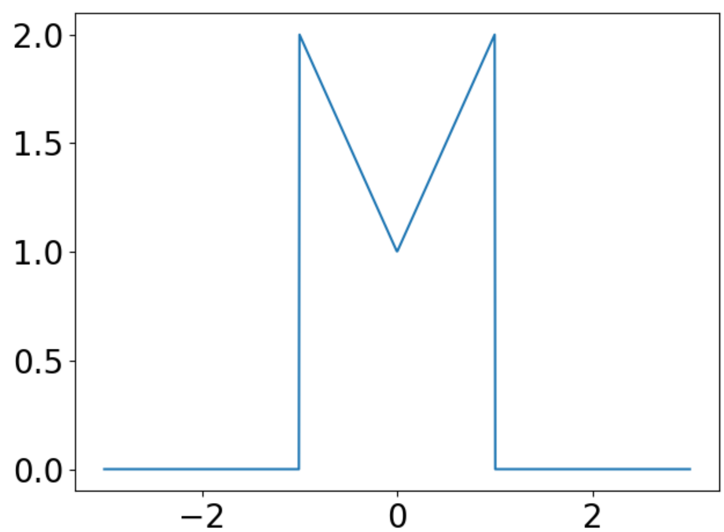

Figure 3.1: Visualisation du signal $x(t)$ (exercice 6).

Exercice 6 *On considère le signal noté* $x(t)$ *et décrit par la figure 3.1. Donnez un pseudo-algorithme permettant de calculer sa transformée de Fourier.*

```
t=np.linspace(-3,3,10**3)
x=2*seb.fonction_P(t/2)-seb.fonction_T(t)
plt,np = seb.debut()
fig,ax = plt.subplots()
ax.plot(t,x)
```

```
set.x_label('t')
set.y_label('x(t)')
plt.tight_layout()
fig.savefig('./figures/fig_exSEB25_fig1.png')
fig.show()
```

Exercice 7 *On considère le signal* $x(t) = e^{-|t|}$ *dont la transformée de Fourier vaut* $\widehat{X}(f) = \frac{1}{1+4\pi^2 f^2}$*. On considère*

$$y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x(t-n)}{2^n} \tag{3.1}$$

Montrez que la transformée de Fourier de $y(t)$ *est*

$$\widehat{Y}(f) = \frac{1}{1+4\pi^2 f^2} \left(\frac{1}{1 - \frac{e^{-j2\pi f}}{2}} \right) \tag{3.2}$$

Chapter 4

Propriété de la transformée de Fourier

Exercice 8 *Cet exercice cherche à illustrer la notion de parité.*

1. *On considère le signal* $s(t) = e^{-|t|}$*. Montrez que la transformée de Fourier de ce signal est à valeurs réelles.*
2. *En considérant différents fonctions de bases, proposez un algorithme montrant que la transformée de Fourier d'un signal pair est réel et que la transformée de Fourier d'un signal impair est imaginaire pur.*

Exercice 9 *On se donne des fonctions de bases et des tirages aléatoires. Montrez comment par simulation on peut confirmer que* $TF\left[x\left(\frac{t}{a}\right)\right](f) = a\widehat{X}(af)$ *pour* $a > 0$*.*

Chapter 5

Diracs

Exercice 10 *On considère le signal* $x(t) = \Pi(t) = [\![-0.5 \leq t \leq 0.5]\!](t)$.

1. *Calculez sa dérivée* $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$.
2. *Calculez* $z(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$.
3. *Calculez la transformée de Fourier de* $y(t)$ *notée* $\widehat{Y}(f)$ *et en déduire celle de* $x(t)$ *notée* $\widehat{X}(f)$.
4. *Représentez les signaux* $x(t), y(t), z(t)$.

Solution

1. $y(t) = \delta(t + 0.5) - \delta(t - 0.5)$
2. $z(t) = (t + 0.5)[\![-0.5 \leq t < 0.5]\!](t) + [\![0.5 \leq t]\!](t) = \mathbb{C}(t) + \mathbb{H}(t - 0.5)$
3. $$\widehat{Y}(f) = \mathrm{TF}\left[\delta(t + 0.5)\right](f) - \mathrm{TF}\left[\delta(t - 0.5)\right](f) = e^{j\pi f} - e^{-j\pi f} = 2j\sin(\pi f) \tag{5.1}$$

   Par conséquent,

   $$\widehat{X}(f) = \frac{1}{j2\pi f}\widehat{Y}(f) = \frac{\sin(\pi f)}{\pi f} = \mathrm{sinc}(f) \tag{5.2}$$

Exercice 11 *On considère un oscillateur obtenu avec un comparateur (un amplificateur opérationnel monté en comparateur) et une capacité qui se charge et se décharge avec une résistance en fonction de la sortie du comparateur.*

1. *Proposez un montage électronique ou un schéma*
2. *Donnez l'algorithme permettant de simuler le fonctionnement de cet oscillateur.*

Chapter 6

Transformées de Fourier et dérivation

Exercice 12 *On considère le signal $x(t) = e^{-t}[\![t \geq 0]\!](t)$ et on note $\widehat{X}(f)$ sa transformée de Fourier.*

1. *Calculez $\widehat{X}(f)$.*
2. *Vérifiez qu'à partir de $\widehat{X}(0) = 1$ vous retrouvez un résultat cohérent avec la définition de $x(t)$.*
3. *Un calcul mathématique* [1] *montre que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$. Proposez un algorithme permettant de vérifier que ce résultat est correct.*
4. *Sachant que $x(t)$ est en fait réel, expliquez pourquoi*

$$x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df}{1+4\pi^2 f^2} \tag{6.1}$$

5. *En utilisant le résultat précédent calculez la valeur théorique de $x(0) = \frac{1}{2}$.*
6. *Expliquez pourquoi on ne trouve pas le bon résultat.*

Solution

1. $\widehat{X}(f) = \frac{1}{1+j2\pi f}$
2.
```
x=np.linspace(-100,100,10**8)
g=1/(1+x**2)
print(f"err={np.abs(seb.TF(x,g,0)-np.pi):.3g}")
>>> err=0.02
```
3.

$$x(0) = \mathrm{Re}(x(0)) = \mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df}{1+j2\pi f}\right] = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{1+j2\pi f} + \frac{1}{1-j2\pi f}\right] df \tag{6.2}$$

4.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-t}\, dt = 1 = \frac{1}{1+j2\pi\times 0} = \widehat{X}(0) \tag{6.3}$$

5. On fait le changement de variable $\omega = 2\pi f$, $d\omega = 2\pi df$.
6. On a bien

$$x(0) = \frac{1}{2}\lim_{t\to 0^-} + \frac{1}{2}\lim_{t\to 0^+} = \frac{1}{2}\times 0 + \frac{1}{2}\times 1 \tag{6.4}$$

[1] Ce calcul utilise un simple changement de variable $\theta = \tan(x)$.

Exercice 13 *On considère l'équation différentielle*

$$\tau_2 \frac{d}{dt} y(t) + y(t) = e^{-\frac{t}{\tau_1}} [\![t \geq 0]\!](t) \tag{6.5}$$

On note la transformée de Fourier de $y(t)$, $\widehat{Y}(f)$.

1. *Calculez $\widehat{Y}(f)$*
2. *Montrez que $\widehat{Y}(f)$ se met sous la forme*

$$\widehat{Y}(f) = \frac{a}{1 + j2\pi f \tau_1} + \frac{b}{1 + j2\pi f \tau_2} \tag{6.6}$$

   Trouvez les valeurs de a et b.

3. *Donnez un algorithme permettant de confirmer la façon dont a et b dépendent de τ_1 et τ_2 en tirant aléatoirement des valeurs de τ_1 et τ_2.*
4. *Donnez un algorithme permettant d'en déduire $y(t)$*
5. *Montrez que la solution de l'équation différentielle est*

$$y(t) = \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} \left(e^{-\frac{t}{\tau_1}} - e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) [\![t \geq 0]\!] \tag{6.7}$$

Solution

1.

$$\widehat{Y}(f) = \frac{\tau_1}{1 + j2\pi f \tau_1} \frac{1}{1 + j2\pi f \tau_2} \tag{6.8}$$

2.

$$\frac{a}{1 + j2\pi f \tau_1} + \frac{b}{1 + j2\pi f \tau_2} = \frac{(a + b) + j2\pi f(\tau_1 b + a\tau_2)}{(1 + j2\pi f \tau_1)(1 + j2\pi f \tau_2)} \tag{6.9}$$

   On en déduit que c'est possible si le système suivant a une solution

$$\left\{ \begin{array}{lcccc} a & + & b & = & \tau_1 \\ \tau_2 a & + & \tau_1 b & = & 0 \end{array} \right. \tag{6.10}$$

   Ce système a une unique solution lorsque $\tau_1 \neq \tau_2$ et c'est $a = -\frac{\tau_1^2}{\tau_2 - \tau_1}$ et $b = \frac{\tau_2 \tau_1}{\tau_2 - \tau_1}$.

3.
```
import numpy.random as rd
import numpy.linalg as li
tau1,tau2 = rd.uniform(0,1),rd.uniform(0,1)
A=np.array([[tau1 ,tau2   ],
            [1    ,1      ]])
B=np.array([[tau1],
            [0   ]])
X=li.inv(A)@B
X_th=np.array([[-tau1/(tau2-tau1)],[tau2/(tau2-tau1)]])*tau1
print(f"err={np.sum(np.abs(X-X_th)):.3g}")
```

4.
```
plt.close('all')
import numpy.random as rd
tau1,tau2 = rd.uniform(0,1),rd.uniform(0,1)
X_th=np.array([[-tau1/(tau2-tau1)],[tau2/(tau2-tau1)]])*tau1
t=np.linspace(-1,5,10**2)
```

```
x_th=seb.val(X_th[0])*np.exp(-t/tau1)*(t>=0)/tau1+seb.val(X_th[1])*np.exp(-t/tau2)*(t>=0)/tau2
f=np.linspace(-50,50,10**3)
Y=lambda f: tau1/(1+1j*2*np.pi*f*tau1)/(1+1j*2*np.pi*f*tau2)
x=np.real(seb.TFI(f,Y(f),t))
fig,ax = plt.subplots()
ax.plot(t,x_th,label='th')
ax.plot(t,x,label='x')
ax.legend()
ax.set_xlabel('t')
plt.tight_layout()
fig.show()
print(f"err={np.max(x_th-x)}")
```

Chapter 7

Équations différentielles

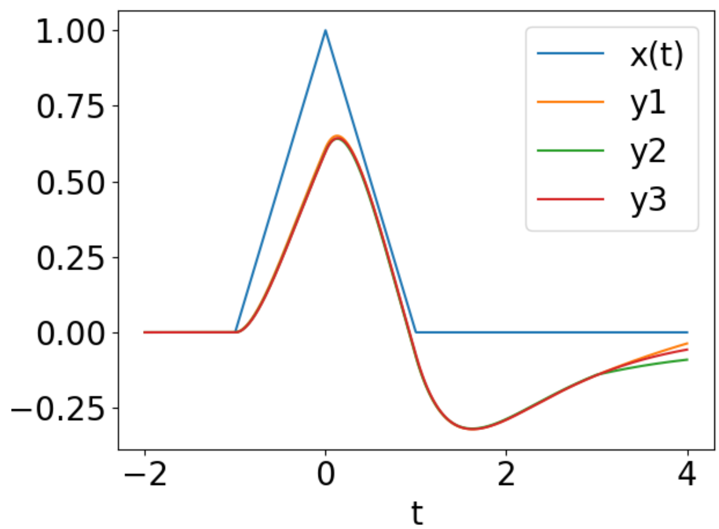

Figure 7.1: Visualisation de l'entrée $x(t)$ et de la sortie $y(t)$ illustrant l'exercice 14.

Exercice 14 *On considère un filtre défini par l'équation différentielle*

$$LC\frac{d^2}{dt^2}y(t) + RC\frac{d}{dt}y(t) + y(t) = RC\frac{d}{dt}x(t) \tag{7.1}$$

avec $R = 3$, $C = 0.5$, $L = 1$. On considère un signal en entrée défini par $x(t) = \mathbb{T}(t)$ et on cherche à simuler le signal de sortie $y(t)$ associé à ce filtre décrit par l'équation (7.1).

1. *Montrez que*

$$\frac{d}{dt}\mathbb{T}(t) = \int_{-\infty}^{t} \left[\delta(\tau-1) - 2\delta(\tau) + \delta(\tau+1)\right] \, d\tau \tag{7.2}$$

2. *On appelle $\tilde{y}(t)$ la solution de cette deuxième équation différentielle*

$$LC\frac{d^2}{dt^2}\tilde{y}(t) + RC\frac{d}{dt}\tilde{y}(t) + \tilde{y}(t) = \delta(t) \tag{7.3}$$

   Exprimez $y(t)$ en fonction de $\tilde{y}(t)$.

3. *En utilisant les fonctions* `sol_eq_diff`, `deriver`, `integrer` *et* `retarder` *de* `seb`, *donnez un pseudo-programme permettant de simuler $y(t)$.*

Solution :

1. On remarque que la fonction triangle dérivée une fois est une fonction porte avancée et une fonction porte retardée, (la porte étant définie $\Pi(t) = [\![|t| \leq 0.5]\!]$).

$$\frac{d}{dt}\mathbb{T}(t) = \Pi(t+0.5) - \Pi(t-0.5) \tag{7.4}$$

Dérivée deux fois, ce sont trois, l'un avancé, le deuxième au milieu et un retardé.

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathbb{T}(t) = \delta(t-1) - 2\delta(t) + \delta(t+1) \tag{7.5}$$

En intégrant cette expression, on trouve alors que

$$\frac{d}{dt}\mathbb{T}(t) = \int_{-\infty}^{t} \left[\delta(\tau-1) - 2\delta(\tau) + \delta(\tau+1)\right] \, d\tau \tag{7.6}$$

2.

$$y(t) = RC\int_{-\infty}^{t} \left[\tilde{y}(\tau-1) - 2\tilde{y}(\tau) + \tilde{y}(\tau+1)\right] \, d\tau \tag{7.7}$$

3. Le pseudo-code est donne par

Algorithm 1 générant la figure 7.1.

Rentrer les valeurs de `R,L,C`
Créer une échelle de temps `t` entre -2 et 4 avec 1000 points
Calculer $\tilde{y}(t)$ en utilisant `sol_eq_diff` avec les coefficients LC,RC et 1 et l'échelle de temps `t`.
Utiliser `retarder` pour calculer $\tilde{y}_2(t) = \tilde{y}(t+1) - 2\tilde{y}(t) + \tilde{y}(t-1)$
Utiliser `integrer` pour calculer $y(t) = RC\int_{-\infty}^{t} \tilde{y}_2(\tau)\, d\tau$

```
def y(R,L,C,t):
  """réponse à une fonction triangle utilisant une equation différentielle"""
  import seb
  y_tilde=seb.sol_eq_diff((L*C,R*C,1),t)
  assert all(y_tilde[t<0]==0)
  y_tilde2=R*C*(seb.retarder(t,y_tilde,-1)-2*y_tilde+seb.retarder(t,y_tilde,1))
  y=seb.integrer(t,y_tilde2)
  return y

R,C,L = 3,0.5,1
t=np.linspace(-2,4,10**3)
fig,ax = plt.subplots()
ax.plot(t,seb.fonction_T(t),label='x(t)')
ax.plot(t,y(R,L,C,t),label='y')
ax.set_xlabel('t')
ax.legend()
plt.tight_layout()
fig.savefig('./figures/fig_exSeb11_fig1.png')
fig.show()
```

Exercice 15 *On considère un filtre dont la réponse fréquentielle vérifie*

$$\widehat{H}(f) = \frac{j2\pi f\mathtt{RC}}{1 - 4\pi^2 f^2 + 4j\mathtt{RC}\pi f} \tag{7.8}$$

1. *Trouvez l'équation différentielle associée à la relation entrée-sortie ?*

2. *Trouvez l'équation différentielle associée à la réponse impulsionnelle ?*

3. *Proposez un algorithme permettant de caculer la réponse impulsionnelle.*

Exercice 16 *On considère l'équation différentielle associée à une relation entrée-sortie :*

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 3\frac{d}{dt}y(t) + y(t) = x(t) \tag{7.9}$$

1. *Donnez la réponse fréquentielle.*

2. *Donnez un algorithme donnant la réponse impulsionnelle.*

3. *Écrivez le polynôme caractéristique.*

4. *Trouvez les solutions de ce polynôme.*

5. *En déduire la réponse impulsionnelle.*

Chapter 8

Filtres et effet mémoire

Exercice 17 *Dans cet exercice, on cherche à montrer par simulation que*

$$\Pi(t) * \Pi(t) = \mathbb{T}(t) \tag{8.1}$$

où $\Pi(t) = [\![|t| \leq 0.5]\!](t)$ *et* $\mathbb{T}(t) = (1-|t|)[\![|t| \leq 1]\!](t)$.

1. *Montrez que* $\Pi(t) * \Pi(t) = \text{sinc}^2(f)$ *où* $\text{sinc}(f) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$.
2. *Proposez un algorithme utilisant la transformée de Fourier pour montrer l'équation (8.1).*
3. *Donnez un autre algorithme utilisant le produit de convolution pour démontrer aussi l'équation (8.1).*

Solution

1. On sait d'après le cours que $\text{TF}\left[\Pi(t)\right](f) = \text{sinc}(f)$.

$$\text{TF}\left[\Pi(t) * \Pi(t)\right](f) = \text{TF}\left[\Pi(t)\right](f)\text{TF}\left[\Pi(t)\right](f) = \text{sinc}^2(f) \tag{8.2}$$

2. L'algorithme proposé utilise le fait qu'on sait d'après le cours que $\text{TF}\left[\Pi(t)\right](f) = \text{sinc}(f)$:

   Créer une échelle de temps `tx` entre -2 et 2 avec 1000 points
   Calculer `x` associé à `tx` en utilisant la fonction `fonction_T` de `seb.py`.
   Créer une échelle de fréquence f entre -3 et 3.
   Calculez la transformée de Fourier de `x` appelé `X`.
   Calculez `X_th` défini par $\widehat{X}_{\text{th}}(f) = \text{sinc}^2(f)$.
   Comparez `X` avec `X_th` en calculant le maximum de la valeur absolue de la différence.

   Algorithm 2: associé à l'exercice 17

3. Créer une échelle de temps `tx` entre -2 et 2 avec 1000 points
   Calculer `x` associé à `tx` en utilisant la fonction `fonction_P` de `seb.py`.
   Utilisez `convolution` de `seb.py` pour en déduire $x'(t) = \Pi(t) * \Pi(t)$ sur l'échelle `tx`.
   Comparer en calculant le maximum de la valeur absolue de la différence entre $x'(t)$ et $\mathbb{T}(t)$.

   Algorithm 3: associé à l'exercice 17

```
tx=np.linspace(-2,2,1000)
x=seb.fonction_P(tx)
xp=seb.convolution(tx,x,tx,x,tx)
```

Exercice 18 *Dans cet exercice, on cherche à montrer par simulation que*

$$\Pi(t) * \Pi(t) = \mathbb{T}(t) \tag{8.3}$$

où $\Pi(t) = [\![|t| \leq 0.5]\!](t)$ *et* $\mathbb{T}(t) = (1-|t|)[\![|t| \leq 1]\!](t)$.

1. *On note* $s(t) = \Pi(t) * \Pi(t)$*, donnez une expression intégrale à* $s(t)$.
2. *Montrez que pour* $t < -1$, $s(t) = 0$.
3. *Montrez que* $s(-t) = s(t)$ *et que donc* $s(t)$ *est un signal pair.*
4. *En déduire que pour* $t > 1$, $s(t) = 0$.
5. *Montrez que* $s(0) = 1$.
6. *Montrez que* $s(t) = 1 - t$ *pour* $t \in [0, 1]$.
7. *Déduisez que* $s(t) = \mathbb{T}(t)$.

Chapter 9

Description fréquentielle des filtres

Exercice 19 *On considère un filtre de réponse impulsionnelle*

$$h(t) = \cos(2\pi t)e^{-t}[\![t \geq 0]\!](t) \tag{9.1}$$

Ce filtre est un passe-haut. Donnez un algorithme permettant de trouver les deux fréquences de coupure et sa bande passante.

Solution :

- Créer une échelle de fréquence `f` entre -5 et 5 avec 10^4 valeurs de fréquences
- Créer une échelle de temps `t` entre 0 et 100 avec 10^4 points.
- Calculer le module de la transformée de Fourier notée $|\widehat{H}(f)|$ avec `seb.TF` et la réponse impulsionnelle
- Trouver la fréquence $f_{\max}$ et la valeur du module en $f_{\max}$ notée $|\widehat{H}_{\max}|$.
- Trouver la fréquence f_0 entre 0 et $f_{\max}$ qui minimise la valeur absolue de la différence entre $|\widehat{H}_{\max}/sqrt(2)$ et $|\widehat{H}(f)|$
- Trouver la fréquence f_2 entre $f_{\max}$ et $+\infty$ qui minimise la valeur absolue de la différence entre $|\widehat{H}_{\max}|/sqrt(2)$ et $|\widehat{H}(f)|$
- La bande passante est $f_2 - f_1$.

Exercice 20 *On considère un filtre de réponse impulsionnelle*

$$h(t) = \cos(2\pi t)e^{-|t|} \tag{9.2}$$

1. *Montrer que la réponse fréquentielle de ce filtre est*

$$\widehat{H}(f) = \frac{1}{1+4\pi^2(f-1)^2} + \frac{1}{1+4\pi^2(f+1)^2} \tag{9.3}$$

   Pour cela vous pouvez utiliser le fait que $\cos(2\pi t) = \frac{1}{2}e^{-j2\pi t} + \frac{1}{2}e^{j2\pi t}$ *et que quand* z *est un complexe,* $\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} = \frac{2\Re e(z)}{|z|^2}$.

2. *Pourquoi en observant* $h(t)$, *on pouvait savoir que* $\widehat{H}(f) = |\widehat{H}(f)|$

3. *En observant l'équation (9.3), montrez trouvez la valeur de* $f > 0$ *qui maximise* $|\widehat{H}(f)|$.

4. *On considère maintenant*

$$|\widehat{H}(f)| = \frac{1}{1+16\pi^2} + \frac{1}{1+4\pi^2(f-1)^2} \tag{9.4}$$

   Montrez que ceci est une bonne approximation de $|\widehat{H}(f)|$ *autour de* $f = 1$.

5. *En utilisant cette nouvelle approximation, calculez les deux fréquences de coupures et la bande passante.*

Exercice 21 *On considère un signal non-périodique défini par $x(t) = e^{-t}[\![0 \leq t < 1]\!](t)$ et un signal périodique obtenu en périodisant $x(t)$.*

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t-k) \tag{9.5}$$

1. *Donnez l'algorithme permettant de tracer $y(t)$ pour $t \in [-3, 3]$.*
2. *Donnez l'algorithme permettant d'estimer M_y et P_y.*
3. *Donnez l'algorithme permettant de calculer la série de Fourier associée à $y(t)$.*
4. *Donnez un algorithme permettant de vérifier expérimentalement que $P_y = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{Y}_k|^2$ et que $M_y = \widehat{Y}_0$ non pas seulement pour ce signal spécifiquement mais pour des signaux construits à partir de $x(t)$ et tirés aléatoirement.*

Exercice 22 *On considère un signal non-périodique défini par $x(t) = e^{-t}[\![0 \leq t < 1]\!](t)$ et un signal périodique obtenu en périodisant $x(t)$.*

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t-k) \tag{9.6}$$

1. *Représentez graphiquement $x(t)$ et $y(t)$ pour $t \in [-3, 3]$.*
2. *Calculez A_x et en déduire M_y.*
3. *Calculez E_x et en déduire P_y.*
4. *Montrez que les coefficients de la série de Fourier sont*

$$\widehat{Y}_k = \frac{1 - e^{-1}}{1 + j2\pi k} \tag{9.7}$$

5. *En utilisant le fait que*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + 4\pi^2 k^2} = \frac{1}{2}\frac{e+1}{e-1} \tag{9.8}$$

montrez qu'on retrouve le résultat précédent $P_y = \frac{1}{2}\frac{e^2-1}{e^2}$.

Solution :

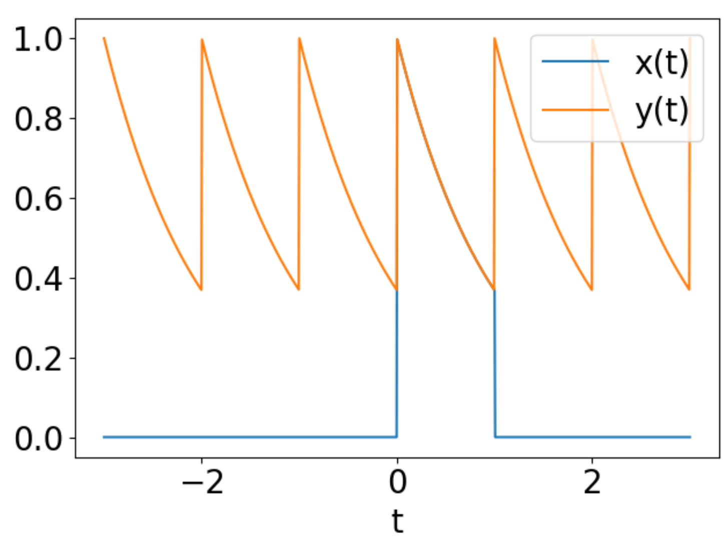

Figure 9.1: Graphe de $x(t)$ et $y(t)$ correspondant à l'exercice 22.

1. La figure 9.1 montre $x(t)$ en bleu et $y(t)$ en orange.
2. $$A_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt = \int_0^1 e^{-t}\,dt = \frac{e-1}{e} \tag{9.9}$$

   Il se trouve que $M_x = \int_0^1 e^{-t}\,dt = A_x$.
3. $$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\,dt = \int_0^1 e^{-2t}\,dt = \frac{1}{2}\frac{e^2-1}{e^2} \tag{9.10}$$

   Il se trouve que $P_y = \int_0^1 e^{-2t}\,dt = E_x$.
4. On remarque que comme la période est de $T = 1$, $e^{j2\pi k} = 1$.

   $$\widehat{Y}_k = \int_0^1 e^{-t}e^{-j2\pi k}\,dt = \frac{1-e^{-1}}{1+j2\pi k} \tag{9.11}$$

```
import seb
plt,np = seb.debut()
tx=np.linspace(-3,3,10**3)
x=np.exp(-tx)*(tx>=0)*(tx<=1)
ty=seb.periodiser_ech_t(tx,(0,1))
assert all(ty>=0)&all(ty<=1)
y=np.exp(-ty)
plt.close('all')
fig,ax=plt.subplots()
ax.plot(tx,x,label='x(t)')
ax.plot(tx,y,label='y(t)')
ax.set_xlabel('t')
ax.legend()
plt.tight_layout()
fig.savefig('../figures/fig_exSEB22_fig1a.png')
fig.show()
ty2=tx[(tx>=0)*(tx<1)]
My=seb.TF(ty2,np.exp(-ty2),0)
k=np.arange(-10**3,10**3)
e=np.exp(1)
print(np.sum(1/(1+4*np.pi**2*k**2))-(e+1)/(e-1))
""" 2.0.0.
alors que numpy.__version__ 0.24.2
"""
```

Exercice 23 *On considère un signal défini par*

$$x(t) = \Pi(t) - \frac{1}{2}\Pi\left(\frac{t}{3}\right) \tag{9.12}$$

On note $y(t)$ le signal périodisé en répétant l'intervalle $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$. On considère le filtre défini par l'équation différentielle

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + \frac{d}{dt}y(t) + y(t) = x(t) \tag{9.13}$$

1. *Représentez graphiquement $y(t)$ pour $t \in [-3, 3]$.*

2. *Montrez que* $\widehat{X}(f) = \mathrm{sinc}(f) - \frac{3}{2}\,\mathrm{sinc}(f)$.

3. *En déduire que* $\widehat{Y}_k = \frac{1}{3}\,\mathrm{sinc}(\frac{k}{3}) - \frac{1}{2}\delta_k$, δ_k *étant la suite nulle sauf en* $k = 0$ *ou elle vaut* 1.

4. *Calculez la réponse fréquentielle du filtre*

5. *En déduire la* $\widehat{Y}_k$.

6. *Proposez une approximation de* $y(t)$.

Chapter 10

Signaux périodiques

Chapter 11

Filtres agissant sur des signaux périodiques

Chapter 12

Échantillonnage d'un signal non-périodique

Exercice 24 *On considère le signal $x(t) = e^{-t}[\![t \geq 0]\!](t)$ et on souhaite illustrer la question du repliement spectral.*

1. *Donnez un algorithme permettant de simuler y_n le signal $x(t)$ échantillonné à la fréquence f_e.*
2. *Donnez un algorithme permettant de simuler $\widehat{Y}(f)$ la transformée de Fourier de y_n.*
3. *Donnez un algorithme permettant de simuler $\widehat{Z}(f)$, défini par*

$$\widehat{Z}(f) = \left|\frac{1}{f_e}\widehat{Y}(f) - \widehat{X}(f) - \widehat{X}(f - f_e) - \widehat{X}(f + f_e)\right| \tag{12.1}$$

$x(t)$ présente une discontinuité en $t = 0$, aussi il est nécessaire pour la valeur de $x(t)$ en $t = 0$ d'utiliser

$$\frac{1}{2}\lim_{t\to 0^-} x(t) + \frac{1}{2}\lim_{t\to 0^+} x(t) = \frac{1}{2} \tag{12.2}$$

Exercice 25 *On considère le signal $x(t) = e^{-t}[\![t \geq 0]\!](t)$ et on souhaite calculer la transformée de Fourier du signal échantillonné. On considère f_e une fréquence d'échantillonnage. On note y_n le signal $x(t)$ échantillonné à la fréquence f_e.*

1. *Montrez que $y_n = e^{-nT_e} - \frac{1}{2}\delta_n$*
2. *Montrez que*

$$\widehat{Y}(f) = -0.5 + \frac{1}{1 - e^{-T_e - j2\pi f T_e}} \tag{12.3}$$

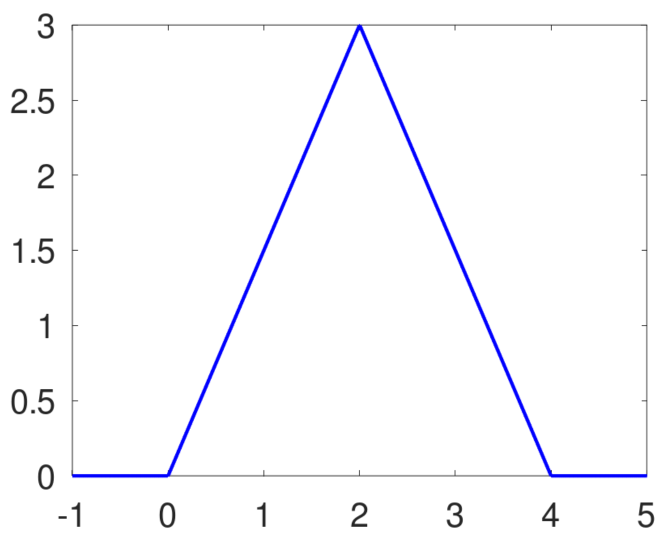

Figure 12.1: Graphe de $x(t)$ relatif à l'exercice 26.

Exercice 26 *Le signal montré sur la figure 12.1 est noté $x(t)$. Sa transformée de Fourier est notée $\widehat{X}$.*

1. *$x(t)$ est-il un signal temps continu, temps discret, périodique, non-périodique.*
2. *Donnez une expression de $x(t)$ sous la forme de sa description sur plusieurs intervalles.*
3. *Donnez une expression de $x(t)$ en fonction de $[\![\,]\!]$.*
4. *Calculez $x(0)$, $x(1)$, E_x.*
5. *Calculez $\widehat{X}(0)$ et $\widehat{X}(1)$.*
6. *Construire $y_1(t) = x\left(\frac{t}{2}\right)$*
7. *Construire $y_1(t) = x\,(t-1)$*
8. *Construire $y_1(t) = \frac{1}{2}x\,(t)$*
9. *Construire $y_1(t) = x\,(t) - x\,(t-2)$*

Simulation générant la figure 12.1 de l'exercice 26

```
t=linspace(-1,5,1e3);
x=3/2*t.*(t>=0).*(t<=2)+(4-t)*3/2.*(t>2).*(t<=4);
figure(1);
plot(t,x,'b-','linewidth',2);
set(gca,'fontsize',20);
saveas(1,'C:\A\SIMU\SEB\ex\exSEB1_fig1.png');
```

Solutions

1.

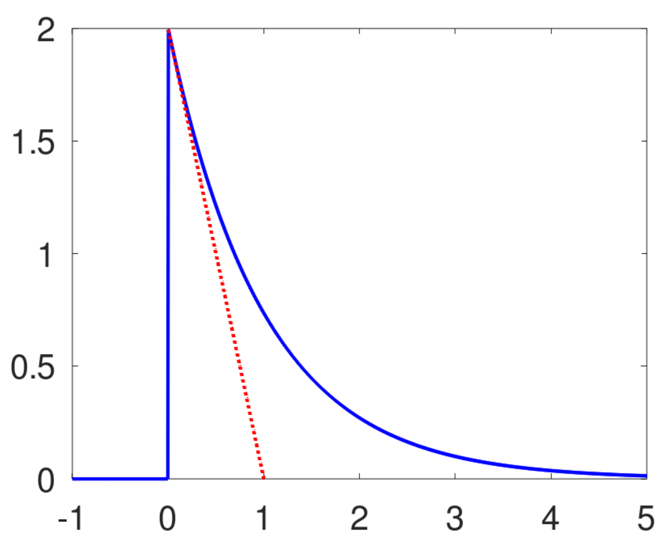

Figure 12.2: Graphe de $x(t)$ et de sa tangente pour l'exercice 29.

Exercice 27 *Le signal montré sur la figure 16.1 est noté $x(t)$. Sa transformée de Fourier est notée $\widehat{X}$. Ce signal est de la forme $x(t) = ae^{-bt}\mathbf{1}(t \geq 0)$.*

1. *$x(t)$ est-il un signal temps continu, temps discret, périodique, non-périodique.*
2. *Justifiez la valeur de a avec la courbe exponentielle sur la figure 16.1.*
3. *Justifiez la valeur de b avec la ligne tangente à la courbe exponentielle sur la figure 16.1.*

4. *Donnez une expression de $x(t)$ en fonction de $\mathbf{1}()$.*
5. *Calculez $x(0)$, $x(1)$, E_x.*
6. *Calculez $\widehat{X}(0)$ et $\widehat{X}(1)$.*
7. *Construire $y_1(t) = x\left(\frac{t}{2}\right)$*
8. *Construire $y_1(t) = x\left(t-1\right)$*
9. *Construire $y_1(t) = \frac{1}{2}x\left(t\right)$*
10. *Construire $y_1(t) = x\left(t\right) - x\left(t-2\right)$*

Simulation générant le graphe

```
t=linspace(-1,5,1e3);
x=2*exp(-t).*(t>=0);
t_tg=t((t>=0)&(t<=1));
x_tg=2-2*t_tg;
figure(1);
plot(t,x,'b-','linewidth',2,t_tg,x_tg,'r:','linewidth',2);
set(gca,'fontsize',20);
saveas(1,'C:\A\SIMU\SEB\ex\exSEB2_fig1.png');
```

Solutions

1.

Exercice 28 *Le signal étudié ici est $x(t) = t\mathbf{1}(t \in [0,1[) + (2-t)\mathbf{1}(t \in [1,2[)$ On considère $y(t)$ obtenu en périodisant le signal $x(t)$ pour $t \in [0,3]$.*

1. *$x(t)$ est-il un signal temps continu, temps discret, périodique, non-périodique.*
2. *$y(t)$ est-il un signal temps continu, temps discret, périodique, non-périodique.*
3. *Dessiner $x(t)$ pour $t \in [-1,5]$ sur un graphe.*
4. *Dessiner $y(t)$ pour $t \in [-1,5]$ sur le même graphe.*
5. *Calculez $x(0)$, $x(-2)$, E_x et P_x.*
6. *Calculez $y(0)$, $y(-2)$, E_y et P_y.*
7. *Calculez $\widehat{X}_0$ et $\widehat{Y}_0$.*
8. *Calculez $\widehat{X}_0$ et $\widehat{Y}_0$.*
9. *Dessiner sur le graphe $y_1(t) = y\left(\frac{t}{2}\right)$*
10. *Dessiner sur le graphe $y_2(t) = y\left(t-1\right)$*
11. *Dessiner sur le graphe $y_3(t) = \frac{1}{2}y\left(t\right)$*
12. *Dessiner sur le graphe $y_4(t) = y\left(t\right) - y\left(t-2\right)$*

Simulation générant le graphe

```
t=linspace(-1,5,1e3);
x=2*cos(pi*t+0.5*pi);
figure(1);
plot(t,x,'b-','linewidth',2);
set(gca,'fontsize',20);
saveas(1,'C:\A\SIMU\SEB\ex\exSEB3_fig1.png');
```

Solutions

1.

Chapter 13

Modélisation stochastique du bruit

Chapter 14

Filtrage des processus aléatoires

Chapter 15

Autocorrélation et densité spectrale

Chapter 16

Densité de probabilité et filtrage

16.1 Exercices

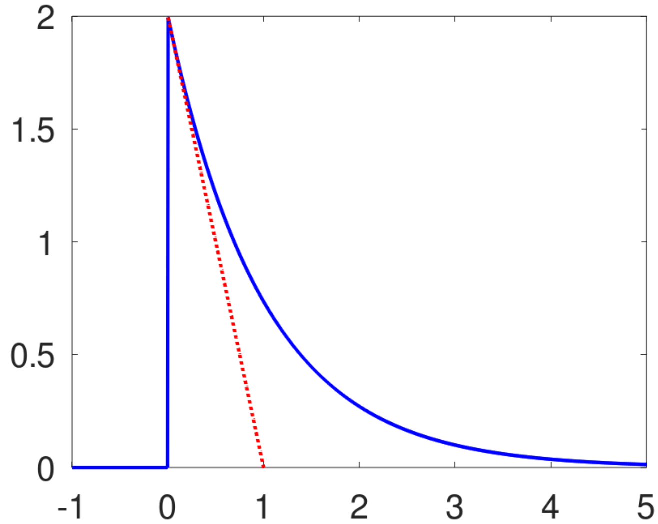

Figure 16.1: Graphe de $x(t)$ et de sa tangente pour l'exercice 29.

Exercice 29 *Le signal montré sur la figure 16.1 est noté $x(t)$. Sa transformée de Fourier est notée $\widehat{X}$. Ce signal est de la forme $x(t) = ae^{-bt}\mathbf{1}(t \geq 0)$.*

1. *$x(t)$ est-il un signal temps continu, temps discret, périodique, non-périodique.*
2. *Justifiez la valeur de a avec la courbe exponentielle sur la figure 16.1.*
3. *Justifiez la valeur de b avec la ligne tangente à la courbe exponentielle sur la figure 16.1.*
4. *Donnez une expression de $x(t)$ en fonction de $\mathbf{1}()$.*
5. *Calculez $x(0)$, $x(1)$, E_x.*
6. *Calculez $\widehat{X}(0)$ et $\widehat{X}(1)$.*
7. *Construire $y_1(t) = x\left(\frac{t}{2}\right)$*
8. *Construire $y_1(t) = x\left(t-1\right)$*
9. *Construire $y_1(t) = \frac{1}{2}x\left(t\right)$*
10. *Construire $y_1(t) = x\left(t\right) - x\left(t-2\right)$*

Simulation générant le graphe

```
t=linspace(-1,5,1e3);
x=2*exp(-t).*(t>=0);
t_tg=t((t>=0)&(t<=1));
x_tg=2-2*t_tg;
figure(1);
plot(t,x,'b-','linewidth',2,t_tg,x_tg,'r:','linewidth',2);
set(gca,'fontsize',20);
saveas(1,'C:\A\SIMU\SEB\ex\exSEB2_fig1.png');
```

Solutions

1.

Exercice 30 *Le signal étudié ici est* $x(t) = t\mathbf{1}(t \in [0,1[) + (2-t)\mathbf{1}(t \in [1,2[)$ *On considère* $y(t)$ *obtenu en périodisant le signal* $x(t)$ *pour* $t \in [0,3]$.

1. *$x(t)$ est-il un signal temps continu, temps discret, périodique, non-périodique.*
2. *$y(t)$ est-il un signal temps continu, temps discret, périodique, non-périodique.*
3. *Dessiner $x(t)$ pour $t \in [-1,5]$ sur un graphe.*
4. *Dessiner $y(t)$ pour $t \in [-1,5]$ sur le même graphe.*
5. *Calculez $x(0)$, $x(-2)$, E_x et P_x.*
6. *Calculez $y(0)$, $y(-2)$, E_y et P_y.*
7. *Calculez $\widehat{X}_0$ et $\widehat{Y}_0$.*
8. *Calculez $\widehat{X}_0$ et $\widehat{Y}_0$.*
9. *Dessiner sur le graphe $y_1(t) = y\left(\frac{t}{2}\right)$*
10. *Dessiner sur le graphe $y_2(t) = y\left(t-1\right)$*
11. *Dessiner sur le graphe $y_3(t) = \frac{1}{2}y\left(t\right)$*
12. *Dessiner sur le graphe $y_4(t) = y\left(t\right) - y\left(t-2\right)$*

Simulation générant le graphe

```
t=linspace(-1,5,1e3);
x=2*cos(pi*t+0.5*pi);
figure(1);
plot(t,x,'b-','linewidth',2);
set(gca,'fontsize',20);
saveas(1,'C:\A\SIMU\SEB\ex\exSEB3_fig1.png');
```

Solutions

1.

Exercice 31 *Le signal montré sur la figure 16.2 est noté $x(t)$. Sa transformée de Fourier est notée $\widehat{X}$. Ce signal est de la forme $x(t) = a\cos(bt+c)$.*

1. *$x(t)$ est-il un signal temps continu, temps discret, périodique, non-périodique, déterministe ou aléatoire.*
2. *Justifiez la valeur de a en observant la valeur maximale et minimale sur la figure 16.2.*
3. *Justifiez la valeur de b en mesurant la période sur la figure 16.2.*

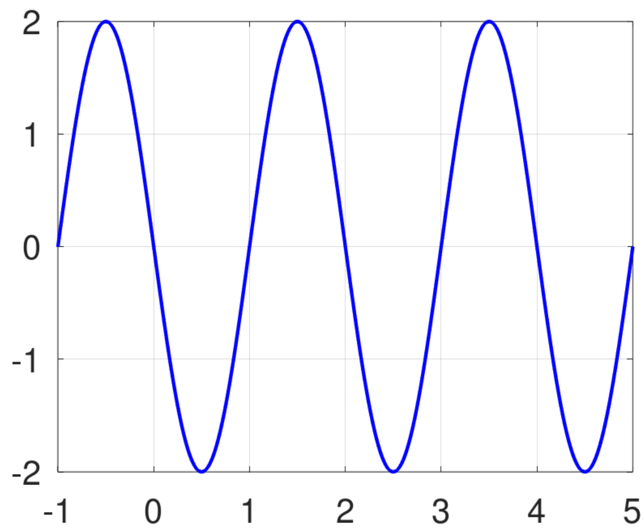

Figure 16.2: Graphe de $x(t)$ relatif à l'exercice 31.

4. *Justifiez la valeur de c en interprétant cette courbe comme en retard (ou en avance) par rapport à* $a\cos(bt)$ *sur la figure 16.1.*
5. *Calculez* $x(0)$, $x(1)$, P_x.
6. *Calculez* $\widehat{X}_0$ *et* $\widehat{X}_1$.
7. *Dessiner sur le graphe* $y_1(t) = x\left(\frac{t}{2}\right)$
8. *Dessiner sur le graphe* $y_1(t) = x\left(t-1\right)$
9. *Dessiner sur le graphe* $y_1(t) = \frac{1}{2}x\left(t\right)$
10. *Dessiner sur le graphe* $y_1(t) = x\left(t\right) - x\left(t-2\right)$

Simulation générant le graphe

```
t=linspace(-1,5,1e3);
x=2*cos(pi*t+pi/2);
figure(1);
plot(t,x,'b-','linewidth',2);
grid;
set(gca,'fontsize',20);
saveas(1,'C:\A\SIMU\SEB\ex\exSEB4_fig1.png');
```

Solutions

1.
2. $a = 2$
3. $b = \pi$
4. $c = \frac{\pi}{2}$.

Appendix A

Supplément pour faire les pseudo-programmes

A.1 Outils

Python :

Lignes à mettre en début de séance

```
import sys
sys.path.append('rep_prg')
import os
os.chdir('rep_tra')
import seb
plt,np=seb.debut()
```

`seb.debut`

La fonction `debut` renvoie un tuple `(plt,np,sig)`.

- `plt` sert pour faire des graphes et ses paramètres sont modifiés par `debut` de façon à rendre les graphes plus visibles.
- `np` correspond à `numpy`, c'est utile pour faire des calculs.

A.1.1 Commandes générales

- `help` suivi de parenthèses avec le nom de la fonction. Le contenu affiché est celui entre trois guillemets dans une fonction.
- `assert` provoque une erreur si ce qui suit n'est pas vrai.
- `len` suivi de parenthèses et le nom d'un vecteur ligne ou colonne, cela donne sa longueur.
- `1j` est le complexe imaginaire j.
- `round` qui fournit [1] un entier à partir d'un nombre réel.
- `def` et `return` pour définir une fonction.
- `#` pour mettre une ligne en commentaire.
- `type` pour connaître le type d'une valeur ou d'une variable.
- `min` et `max`

[1] La fonction `round` de `numpy` fournit un entier de type `float`.

Contenu susceptible d'être utilisé dans np pour numpy

- linspace permet de définir un ensemble de valeur régulièrement réparties en précisant la valeur initiale, la valeur finale et le nombre de ces valeurs. La dernière valeur est atteinte.
- arange permet de définir un ensemble de valeur régulièrement réparties en précisant la valeur initiale, la valeur finale et l'espacement entre ces valeurs. La dernière valeur n'est jamais atteinte.
- sqrt pour racine carré
- exp pour exponentielle
- array suivi d'une liste entre crochets de valeurs espacées de virgules, pour définir un vecteur de type numpy.ndarray. On peut l'utiliser pour définir une matrice en utilisant deux séries de crochets.
- real suivi d'un complexe entre parenthèses pour prendre la partie réelle.
- abs suivi d'un complexe ou d'un réel entre parenthèses pour prendre le module ou la valeur absolue.
- sinc est la fonction sinus cardinal définie par $\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$
- concatenate
- zeros, ones, zeros_like et ones_like. Pour les deux premières le premier paramètre est un entier ou un tuple indiquant soit la taille du vecteur soit le nombre de lignes et de colonnes de la matrice à définir. Les deux dernières permettent de créer un vecteur ou une matrice ayant les mêmes dimension qu'un certain objet qu'on transmet en paramètre. Les valeurs de l'objet créés sont nulles si on utilise zeros ou zeros_like et 1 si on utilise ones ou ones_like.

Contenu susceptible d'être utilisé dans plt récupéré dans debut

- subplots
- plot
- set_xlabel et set_ylabel
- set_legend
- tight_layout
- savefig
- show

Contenu susceptible d'être utilisé dans seb

- Les fonctions pour définir un signal
  - fonction_H est la fonction échelon $[\![t \geq 0]\!](t)$.
  - fonction_P est la fonction porte sur $[-0.5, 0.5]$.
  - fonction_T est la fonction triangle sur $[-1, 1]$.
  - fonction_C est la demi-fonction triangle croissante sur $[-0.5, 0.5]$.
  - fonction_D est la demi-fonction triangle décroissante sur $[-0.5, 0.5]$.
  - gaussian(x,mu,sigma) renvoie la fonction associe a densité de probabilité de la Gaussienne de moyenne mu et d'écart-type sigma.
- Les fonctions pour calculer une transformée de Fourier
  - TF et TFI pour transformée de Fourier et transformée de Fourier inverse

  - `TFTD(t,x,f)` calcule la TFTD du signal temps discret défini par `t,x` en les fréquences `f`.
  - `TFTDI(f,X,t)` calcule la TFTD inverse du spectre complexe `X` définis pour les fréquences `f`. Le résultat est un signal temps discret pour les instants contenus dans `t`.
  - `TFD(t,s,T,bool)` calcule la TFD, `T` indique soit la période soit l'intervalle utilise pour décrire le signal periodique `t,s` défini l échelle de temps et le signal. `bool` vaut `True` si on veut une représentation centrée et `False` si on n'en veut pas . `f` est l'échelle de fréquence retournée. `S` est l'ensemble des coefficients associés `f,S=seb.TFD(t,s,T,bool)`
  - `coef_serie_Fourier(t,x,T,k)` calcule les coefficients de la série de Fourier X_k `T` est soit la periode du signal soit un tuple indiquant un intervalle sur lequel est defini $x(t)$. Si `T` est une valeur alors l'intervalle considere est $[0,T]$ `k` est la liste des indices des fréquences calculées. Le programme retourne un tuple avec d'abord les fréquences et d'autre part les coefficients associés.

- Les fonctions pour transformer un signal
  - `retarder(t,x,tau)` retarde le signal $x(t)$ défini par `t` et `x` de `tau` lorsque `tau` est positif et avance de `-tau` si `tau` est négatif.
  - `periodiser_ech_t(t,T)` produit un vecteur de meme taille que `t` mais dont les valeurs sont entre `0` et `T` de facon a définir un signal periodique de période T. Si `T` est un intervalle alors c'est le motif entre `T[0]` et `T[1]` qui est répété.
  - `synchroniser(t)` change l'échelle de temps de façon que le vecteur soit un multiple de la periode d'échantillonnage.

- Les fonctions associées au produit de convolution
  - `convolution(tx,x,th,h,ty)` Le programme fournit le produit de convolution de x par h aux instants demandes par ty tx, th et ty sont les échelles de temps de x h et y x et tx doivent être de même taille th et h doivent être de même taille tx doit contenir au moins deux composantes x et h sont supposés d'énergie finie.
  - `correlation(tx,x,ty,y,tz)` calcule l'intercorrelation entre tx,x et ty,y en tz

- Les fonctions associées aux équations différentielles et au fait de dériver et d'intégrer.
  - `sol_eq_diff(coef,t)` `coef` sont les coefficients devant les termes de l'équation différentielle définis comme un `tuple` `t` est l'ensemble des instants dont a cherche a calculer `y(t)` `t` est un vecteur avec des points régulièrement espacés
  - `deriver(t,x)` dérive le signal défini par `t,x` en retournant la dérivée en tous les instants de `t`.
  - `integrer(t,x)` intègre le signal défini par `t,x` en retournant l'intégrale $\int_{-\infty}^{t} x(t)\,dt$ en tous les instants de `t`.

- Des fonctions pour trouver une valeur particulière dans un vecteur.
  - `find_nearest(array, value)` retourne la valeur de `array` la plus proche de `value`.
  - `where_nearest(array, value)` retourne l'indice dans `array` correspondant à la valeur la plus proche de value.

- `erreur_quad(fun,intervalle)` est une fonction pour calculer l'erreur quadratique. Cette fonction utilise une variable aléatoire sur un support uniforme pour calculer une erreur quadratique. `intervalle` doit indique avec un tuple contenant deux valeurs. `fun` est une fonction à transmettre qui estime l'erreur pour une valeur particulière.

- Des fonctions pour aider à gérer les types en Python. Python distingue une liste contenant une unique valeur de la valeur elle-même et d'un tableau de type `numpy` contenant cette valeur.
  - `val(x)` vérifie si x est un `numpy array` contenant une seule valeur, si c'est une seule valeur ou autre chose. Si c'est autre chose, cette fonction déclenche une erreur. Sinon elle renvoie cette unique valeur.

  - `vect(x)` vérifie si x est un `numpy array` contenant une ou plusieurs valeurs, une seule valeur ou autre chose Si c'est autre chose, elle prend le premier élément et vérifie que celui-ci est bien un `numpy array` et elle renvoie ce vecteur. Sinon une erreur est déclenchée.
  - `milieux(b_val)` renvoie un vecteur ayant une composante en moins que `b_val` et correspondant aux milieux des termes consécutifs de `b_val`. Cette fonction suppose que `b_val` est régulièrement réparti.

- Les fonctions pour enregistrer des données et pour les récupérer à nouveau.

  - `save(nom_fichier,list_nom_var,list_var)` sauvegarde sous format binaire la liste des variables indiquées dans list_var le fichier s'appelle nom_fichier les noms des variables doivent etre mises avec des apostrophes autour.
  - `load(nom_fichier)` lit le fichier binaire et renvoie un dictionnaire dont les clés sont les noms des variables enregistrés.

Contenu susceptible d'être utilisé dans `sympy`

- `Symbol`
- `solve`
- `simplify`
- `matrices.Matrix`