

Théorie du signal

Gabriel Dauphin

November 1, 2024

Contents

1	Représentation des signaux non-périodiques, module et argument d'un complexe, distribution de Dirac, indicatrice, calculs de limites, intégrale d'un signal et transformée de Fourier en la fréquence nulle	2
1.1	Exercices	2
2	Symétrie, utilisation de la valeur absolue, transformations des signaux et leurs conséquences sur la transformée de Fourier, module et argument de la transformée de Fourier	4
2.1	Exercices	4
3	Signaux dépendant d'un second paramètre, descripteurs, transformée de Fourier de signaux exponentiels	8
3.1	Exercices	8
4	Signaux gaussiens, techniques de calcul, puissance et énergie de signaux non-périodiques, intégration par partie	11
4.1	Exercices	11
5	Signaux périodiques, sinus cardinaux et transformées de Fourier de fonctions portes, propriétés de la transformée de Fourier, relations trigonométriques, distribution Dirac	14
5.1	Exercices	14
6	Signaux à valeurs complexes, approximation, temps moyen	16
6.1	Exercices	16
7	Puissance et énergie d'un signal périodique, valeur moyenne d'un signal périodique, coefficients de la série de Fourier, valeur à gauche et à droite, parité, représentation	18
7.1	Exercices	18
8	Série de Fourier, définition et propriétés, utilisation de la distribution $\delta(\nu)$	21
8.1	Exercices	21
9	Produit de convolution et distribution de Dirac	23
9.1	Exercices	23
10	Filtres, définition et propriétés, utilisation des limites	25
10.1	Exercices	25
11	Autocorrélation	28
11.1	Exercices	28
12	Distributions et propriétés	30
12.1	Exercices	30

Chapter 1

Représentation des signaux non-périodiques, module et argument d'un complexe, distribution de Dirac, indicatrice, calculs de limites, intégrale d'un signal et transformée de Fourier en la fréquence nulle

1.1 Exercices

Exercice 1 On définit un signal $x(t)$ par

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq -1 \\ 2 & \text{si } t \in [-1, 0[\\ 2 - t & \text{si } t \in [0, 1[\\ t & \text{si } t \in [1, 2[\\ 2 & \text{si } t \in [2, 3[\\ 0 & \text{si } t \geq 3 \end{cases}$$

1. Tracez la courbe représentative de $x(t)$ pour $t \in [-24]$.

2. Calculez $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt$ et montrez que $X(0) = 7$.

Exercice 2 On considère un signal noté $x(t)$ et dont la transformée de Fourier est notée $X(\nu)$. Ce signal est une succession de segments joignant les instants $t = 0, 2, 3$: $x(0) = 0$, $x(2) = 1$, $x(3) = 0$. Ce signal est nul pour $t \leq 0$ et pour $t \geq 3$.

1. Représentez le signal.

2. Exprimez le signal en utilisant l'indicatrice $\mathbf{1}_A(t)$ où A est un intervalle.

3. Calculez $X(0)$.

Exercice 3 On considère un signal $x(t) = e^{-t}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$, sa transformée de Fourier est notée $X(\nu)$.

1. Représentez $x(t)$

2. Calculez $X(0)$

Exercice 4 On définit $\Pi(t) = \mathbf{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(t)$. Représentez graphiquement $x(t) = t\Pi(t)$. Calculez $X(0)$.

Exercice 5 On note $\mathbb{H}(t) = \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)$. Montrez que

$$\mathbf{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[}(t) = \mathbb{H}(t + \frac{1}{2}) - \mathbb{H}(t - \frac{1}{2})$$

Exercice 6 On définit un signal $x(t)$ par

$$x(t) = e^{-t} \mathbf{1}_{[0,1[}(t) + e^{-(t-1)} \mathbf{1}_{[1,2[}(t) + e^{-(t-2)} \mathbf{1}_{[2,3[}(t)$$

Représentez ce signal $x(t)$. Calculez $X(0)$.

Chapter 2

Symétrie, utilisation de la valeur absolue, transformations des signaux et leurs conséquences sur la transformée de Fourier, module et argument de la transformée de Fourier

2.1 Exercices

Exercice 7 On considère un signal $x(t)$ dont la transformée de Fourier est notée $X(\nu)$.

$$X(\nu) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1 + i\nu}$$

Représentez le module et l'argument de $X(\nu)$.

Exercice 8 On considère un signal $x_1(t)$ et sa transformée de Fourier notée $X_1(\nu)$.

$$x_1(t) = e^{-t} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t) \text{ et } X_1(\nu) = \frac{1}{1 + 2i\pi\nu}$$

1. Représentez $|X_1(\nu)|$
2. Représentez $\arg(X_1)(\nu)$

Exercice 9 On définit un signal $x(t)$ par

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq -1 \\ 2 & \text{si } t \in [-1, 0[\\ 2 - t & \text{si } t \in [0, 1[\\ t & \text{si } t \in [1, 2[\\ 2 & \text{si } t \in [2, 3[\\ 0 & \text{si } t \geq 3 \end{cases}$$

Ce signal a déjà été étudié dans l'exercice 1 (p. 2). On considère $y(t) = x(t + 1)$.

1. Montrez que $y(t)$ est un signal pair.
2. En déduire la valeur de t_0 , telle que $x(t)$ soit symétrique par rapport à t_0 .
3. Quel est l'argument de $Y(\nu)$.

4. Exprimez $X(\nu)$ en fonction de $Y(\nu)$.

5. Montrez que pour chaque valeur ν , il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\arg(X(\nu)) = -2i\pi\nu + k\pi$, où \mathbb{Z} est l'ensemble des entiers positifs et négatifs.

6. Montrez que

$$\operatorname{Re}(X(\nu)) = \operatorname{TF} \left[\frac{1}{2}x(-t) + \frac{1}{2}x(t) \right] (\nu)$$

7. Montrez que $x(t+2) = x(-t)$

8. Montrez que

$$\operatorname{Re}(X(\nu)) = \frac{1}{2}X(\nu) + \frac{1}{2}\overline{X(\nu)} = \operatorname{TF} \left[\frac{1}{2}x(t+2) + \frac{1}{2}x(t) \right] (\nu)$$

où \bar{z} signifie le complexe conjugué de z .

9. Représentez le graphe de $t \mapsto \frac{1}{2}x(t) + \frac{1}{2}x(t+2)$

10. On pose $x_a(t) = 2\mathbf{1}_{[-1,3]}(t)$ et $x_c(t) = (1 - |t|)\mathbf{1}_{[-1,1]}(t)$. En utilisant une construction graphique, montrez que

$$x(t) = x_a(t) - x_c(t-1)$$

Exercice 10 On considère les signaux $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$, leur transformée de Fourier est notée $X(\nu)$, $Y(\nu)$, $Z(\nu)$.

- $x(t) = e^{-2\pi t}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)$

$$X(\nu) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1 + i\nu}$$

Son module et son argument sont représentés dans l'exercice 7.

- $y(t) = e^{-2\pi|t|}$

- $z(t) = e^{-|t|}$

1. Exprimez $y(t)$ en fonction de $x(t)$ et $x(-t)$.

2. Montrez que $Y(\nu) = 2\Re(X(\nu))$ et en utilisant le fait que $\cos(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ montrez qu'ici $|X(\nu)|$ et $|Y(\nu)|$ ont les mêmes sens de variations.

3. Exprimez $z(t)$ en fonction de $y(t)$

4. Exprimez $Z(\nu)$ en fonction de $Y(\nu)$.

5. Représentez $|Z(\nu)|$ et $\arg(Z(\nu))$.

Exercice 11 On définit $\Pi(t) = \mathbf{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(t)$. On considère le signal $x_1(t)$ défini par

$$x_1(t) = t\Pi\left(\frac{t}{2}\right)$$

À partir de la représentation graphique de $t\Pi(t)$ obtenue avec l'exercice 4, représentez graphiquement $x_1(t)$.

Exercice 12 On considère $x_1(t) = e^{-t}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$ et $x_2(t) = x_1(t-1)$

1. Représentez $x_2(t)$

2. Calculez $X_2(0)$

Exercice 13 On considère $x_1(t) = e^{-t}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$

1. Représentez $x_3(t) = x_1(t-1) + x_1(-1-t)$
2. Exprimez $x_3(t)$ en fonction de $x_2(t) = x_1(t-1)$
3. Représentez $x_4(t) = x_1(t+1) + x_1(1-t)$
4. Représentez $x_5(t) = x_1(t+1) - x_1(1-t)$
5. Quels sont les signaux pairs et impairs ?

Exercice 14 On définit $\Pi(t) = \mathbf{1}_{[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]}(t)$ et $\text{signe}(t) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t) - \mathbf{1}_{\mathbb{R}_-}(t)$ Représentez graphiquement

$$x_1(t) = \sqrt{|t|}\Pi\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{|t|}}\left(1 - \Pi\left(\frac{t}{2}\right)\right)$$

Exercice 15 On considère $x(t) = \mathbf{1}_{[-1,1]}(t)$ et $y(t) = x(2t+3)$.

1. Trouvez t_0 tel que $y(t)$ soit symétrique par rapport à t_0 .
2. Montrez qu'on a alors pour $t \in \mathbb{R}$,

$$y(t_0+t) = y(t_0-t)$$

Exercice 16 On considère les signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$, leur transformées de Fourier sont notées $X_1(\nu)$ et $X_2(\nu)$.

$$x_1(t) = e^{-t}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t), \quad X_1(\nu) = \frac{1}{1+2i\pi\nu} \text{ et } x_2(t) = x_1(t-1) + x_1(-1-t)$$

1. Calculez $X_2(\nu)$
2. Représentez $|X_2(\nu)|$

Exercice 17 On considère un signal défini par

$$x(t) = (1-|t|)\mathbf{1}_{[-1,1]}(t)$$

1. Représentez graphiquement ce signal.
2. On considère un signal $y(t)$ et $z(t)$

$$y(t) = (1-|t-1|)\mathbf{1}_{[0,2]}(t) \text{ et } z(t) = y(t) + 2y(t-1) + y(t-2)$$

Montrez que $z(t)$ est symétrique par rapport à $t=2$.

3. Vérifiez que $z(2+t) = z(2-t)$.
4. Représentez graphiquement $z(t)$.

Exercice 18 On définit un signal $x(t)$ déjà étudié dans les exercices 1, 9 et 45 (p. 2, p. 4, p. 14) par

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq -1 \\ 2 & \text{si } t \in [-1, 0[\\ 2-t & \text{si } t \in [0, 1[\\ t & \text{si } t \in [1, 2[\\ 2 & \text{si } t \in [2, 3[\\ 0 & \text{si } t \geq 3 \end{cases}$$

On s'intéresse au calcul de $X(\nu)$. On pose $x_b(t) = t\mathbf{1}_{[0,1]}(t)$ et $X_b(\nu) = \text{TF}[x_b(t)](\nu)$, et dans l'exercice 46, il sera montré que

$$X_b(\nu) = \frac{(1+2i\pi\nu)e^{-2i\pi\nu} - 1}{4\pi^2\nu^2}$$

1. On pose $x_a(t) = 2\mathbf{1}_{[-1,3]}(t)$ et $X_a(\nu) = \text{TF}[x_a(t)](\nu)$. Sachant que

$$\text{TF}\left[\mathbf{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(t)\right](\nu) = \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}$$

montrez que

$$X_a(\nu) = 2\frac{\sin(4\pi\nu)}{\pi\nu}e^{-2i\pi\nu}$$

2. Montrez que

$$\text{TF}[x(-t)](\nu) = \text{TF}[x(t)](-\nu)$$

et que

$$\text{TF}[x(1-t)](\nu) = e^{-2i\pi\nu} \text{TF}[x(t)](-\nu)$$

3. On pose $x_c(t) = (1 - |t|)\mathbf{1}_{[-1,1]}(t)$ et $X_c(\nu) = \text{TF}[x_c(t)](\nu)$. Montrez en utilisant une construction graphique que

$$x_c(t) = x_b(1+t) + x_b(1-t)$$

4. Montrez que

$$X_c(\nu) = X_b(\nu)e^{2i\pi\nu} + X_b(-\nu)e^{-2i\pi\nu}$$

5. Montrez que

$$X_c(\nu) = \frac{\sin^2(\pi\nu)}{\pi^2\nu^2}$$

6. Lors de l'exercice 9, il a été montré que

$$x(t) = x_a(t) - x_c(t-1)$$

Montrez alors que

$$X(\nu) = \left(2\frac{\sin(4\pi\nu)}{\pi\nu} - \frac{\sin^2(\pi\nu)}{\pi^2\nu^2}\right)e^{-2i\pi\nu}$$

Exercice 19 On considère un signal $z(t)$ défini par

$$z(t) = \int_{t-1}^{t+1} e^{-|\tau|} d\tau$$

1. On suppose ici que $t \geq 1$. En utilisant la décroissance de $t \mapsto e^{-t}$ et le fait que $e^{-\tau} \leq e^{-(\tau-1)}$ pour $\tau \in [t-1, t+1]$, montrez que pour $t \geq 1$,

$$|z(t)| \leq 2e^{-t}$$

En déduire que $\lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) = 0$.

2. Montrez que $z(t)$ est un signal pair.

3. Montrez que

$$\frac{d}{dt}z(t) = e^{-|t+1|} - e^{-|t-1|}$$

Pour cela, une façon de procéder est de définir un autre signal

$$F(t) = \int_{-\infty}^t e^{-|\tau|} d\tau$$

d'exprimer d'une part $z(t)$ en fonction de $F(t)$ et d'autre part de remarquer que la dérivée de $F(t)$ en t est $e^{-|t|}$.

4. Montrez que $z(t)$ est décroissante pour $t > 0$.

5. Montrez que $z(t)$ a une tangente horizontale en $t = 0$, et une tangente à gauche et à droite de $t = 1$ identiques.

6. Représentez graphiquement $z(t)$.

Chapter 3

Signaux dépendant d'un second paramètre, descripteurs, transformée de Fourier de signaux exponentiels

3.1 Exercices

Exercice 20 On considère le signal $x_1(t)$ et sa transformée de Fourier notée $X_1(\nu)$.

$$x_1(t) = e^{-t} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$$

Montrez que $X_1(\nu) = \frac{1}{1+2i\pi\nu}$

Exercice 21 On considère $x_\alpha(t) = \sqrt{e} t e^{-\frac{t^2}{\alpha^2}}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. On appelle ici

$$t_{\max} = \arg \max_{t \in \mathbb{R}} x_\alpha(t) \text{ et } t_{\min} = \arg \min_{t \in \mathbb{R}} x_\alpha(t)$$

Calculez t_{\max} et t_{\min} .

Exercice 22 On considère pour $a > 0$, un signal impair et un signal pair définis par

$$x_a(t) = t e^{-at^2} \text{ et } y(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

1. Montrez que

$$t_a^{\max} = \operatorname{argmax}_{t \in \mathbb{R}} x_a(t) = \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

2. Montrez qu'il existe $t^{(1/2)}$ défini par

$$y(t^{(1/2)}) = \frac{1}{2} \max_t y(t)$$

3. Puis montrez que $t^{(1/2)} = \sqrt{2 \ln(2)}$.

Exercice 23 On considère le signal $x(t) = e^{-\pi t^2}$ dont la transformée de Fourier est $X(\nu) = e^{-\pi \nu^2}$.

1. On définit la largeur à mi-hauteur du spectre

$$\Delta \nu_x = \nu_2 - \nu_1 \text{ où } |X(\nu_2)| = |X(\nu_1)| = \frac{1}{2} \max_{\nu} |X(\nu)|$$

$$\text{Montrez que } \Delta \nu_x = 2 \sqrt{\frac{\ln(2)}{\pi}}$$

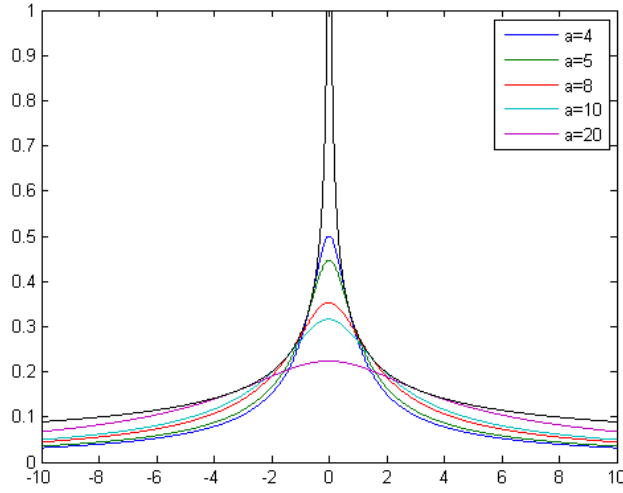


Figure 3.1: $X_a(\nu)$ en fonction de ν pour différentes valeurs de a . Exercice 25

2. On définit la largeur à mi-hauteur de la densité spectrale

$$\Delta\nu_0 = \nu_2 - \nu_1 \text{ où } |X(\nu_2)|^2 = |X(\nu_1)|^2 = \frac{1}{2} \max_{\nu} |X(\nu)|^2$$

Montrez que $\Delta\nu_0 = 2\sqrt{\frac{\ln(2)}{2\pi}}$

3. On définit la largeur à mi-hauteur de la puissance instantanée

$$\Delta t_0 = t_2 - t_1 \text{ où } |x(t_2)|^2 = |x(t_1)|^2 = \frac{1}{2} \max_t |x(t)|^2$$

Montrez que $\Delta\nu_0 \Delta t_0 = \frac{2\ln(2)}{\pi}$

4. On définit $\Delta\omega_0 = 2\pi\Delta\nu_0$, calculez $\Delta\omega_0 \Delta t_0$.

Exercice 24 On considère le signal $x(t) = e^{-|t|}$ pour $t \in \mathbb{R}$.

1. Montrez que $X(\nu) = \frac{2}{1+4\pi^2\nu^2}$ est sa transformée de Fourier.

2. En déduire la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+4\pi^2\nu^2} d\nu$

Exercice 25 On considère deux paramètres fixes et différents notés a, b avec $a \neq b$ et $a > 0, b > 0$. On considère deux signaux.

$$x_a(t) = \sqrt{a}e^{-ta}\mathbb{H}(t) \text{ et } x_b(t) = \sqrt{b}e^{-tb}\mathbb{H}(t)$$

avec $\mathbb{H}(t) = \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)$.

1. Calculez les modules des transformée de Fourier de $x_a(t)$ et $x_b(t)$ en utilisant le fait que la transformée de Fourier de $e^{-t}\mathbb{H}(t)$ est $\frac{1}{1+2i\pi\nu}$.

$$|X_a(\nu)| = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a^2 + 4\pi^2\nu^2}} \text{ et } |X_b(\nu)| = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b^2 + 4\pi^2\nu^2}}$$

2. Représentez $|X_a(\nu)|$ en fonction de ν pour différentes valeurs de a et représentez $|X_a(\nu)|$ en fonction de a pour différentes valeurs de ν . On admet ici que la dérivée partielle de $|X_a(\nu)|$ en fonction de a est égale à

$$\frac{\partial}{\partial a} |X_a(\nu)| = \frac{4\pi^2\nu^2 - a^2}{2\sqrt{a}(a^2 + 4\pi^2\nu^2)^{\frac{3}{2}}}$$

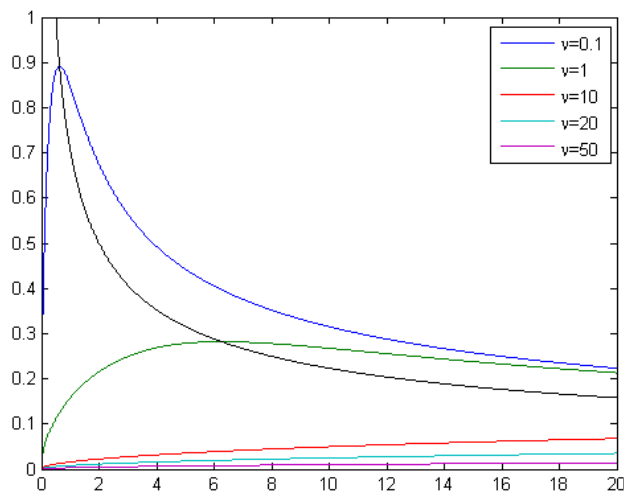


Figure 3.2: $X_a(\nu)$ en fonction de a pour différentes valeurs de ν . Exercice 25

- Montrez que $|X_a(\nu)|$ est paire vis-à-vis de ν .
- Montrez que $|X_a(\nu)|$ est décroissante pour $\nu > 0$.
- Montrez que $|X_a(\nu)|$ est croissante vis-à-vis de a pour $a < 2\pi|\nu|$ et décroissante pour $a > 2\pi|\nu|$.
- La courbe en noire de la figure 3.1 représente $|X_a(\frac{a}{2\pi})|$, expliquez pourquoi les points de cette courbe sont des maxima des courbes $X_a(\nu)$ à a fixé.
- La courbe en noire de la figure 3.2 représente $|X_{2\pi|\nu|}(\nu)|$, expliquez pourquoi on observe que lorsqu'on augmente a avec $a' > a$, la courbe $X_{a'}(\nu)$ est au dessus pour la partie à gauche de cette courbe noire et en dessous pour la partie à droite de cette courbe.

Exercice 26 On considère $x_\alpha(t) = \sqrt{e} t e^{-\frac{t^2}{\alpha^2}}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère maintenant $x_a(t) = t e^{-at^2}$ avec $a \in \mathbb{R}_+$.

- Montrez que $x_\alpha(t)$ est impair.
- Qu'en est-il de la parité de $x_a(t)$?

Exercice 27 On considère pour $a > 0$, un signal défini par

$$x_a(t) = t e^{-at^2}$$

En utilisant les exercices 26 et 29, représentez graphiquement $x_a(t)$

Exercice 28

$$y_2(t) = [(b-a) - |t-a-b|] \mathbf{1}_{[2a, 2b]}(t)$$

Montrez que $y_2(t)$ est symétrique par rapport à $t = a + b$.

Exercice 29 On considère $x_\alpha(t) = \sqrt{e} t e^{-\frac{t^2}{\alpha^2}}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Calculez la dérivée et donnez le tableau de variation de $x_\alpha(t)$.
- Tracez la courbe représentative de $x_\alpha(t)$.

Chapter 4

Signaux gaussiens, techniques de calcul, puissance et énergie de signaux non-périodiques, intégration par partie

4.1 Exercices

Exercice 30 On considère un signal défini par

$$y(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Représentez graphiquement $y\left(\frac{t}{2}\right)$

Exercice 31 Ce signal est une succession de segments joignant les instants $t = 0, 2, 3$: $x(0) = 0$, $x(2) = 1$, $x(3) = 0$. Ce signal est nul pour $t \leq 0$ et pour $t \geq 3$. Ce signal a déjà été étudié lors de l'exercice 2 (p. 2). Calculez l'énergie E_x .

Exercice 32 Calculez l'énergie du signal $x(t) = e^{-t}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$

Exercice 33 On définit $\Pi(t) = \mathbf{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(t)$. On considère deux signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$ définis par

$$x_1(t) = t\Pi\left(\frac{t}{2}\right) \text{ et } x_2(t) = \frac{d}{dt}x_1(t)$$

Ces signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$ ont été étudiés dans l'exercice 11 (p. 5). Calculez E_{x_1} et E_{x_2}

Exercice 34 On considère $x_1(t) = e^{-t}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$ et $x_2(t) = x_1(t-1)$, déjà étudiés dans l'exercice 12 (p. 5). Calculez l'énergie de $x_2(t)$ notée E_{x_2} .

Exercice 35 On suppose avoir déjà calculé que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi$$

1. Montrez que la fonction $z \mapsto \frac{1}{z^2+1}$ est une fonction holomorphe sauf en $z = i$ ou $z = -i$.
2. Montrez que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+(t+\frac{i}{2})^2} = \pi$$

Exercice 36 On considère $x(t) = e^{-\pi t^2}$. On sait que pour tout $\sigma > 0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt = \sqrt{2\pi}\sigma$$

Montrez que l'énergie $E_x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Exercice 37 On considère $x_\alpha(t) = \sqrt{t}e^{-\frac{t^2}{\alpha^2}}$. On remarque aussi qu'une primitive de $te^{-2\frac{t^2}{\alpha^2}}$ est $-\frac{\alpha^2}{4}e^{-2\frac{t^2}{\alpha^2}}$. En utilisant une intégration par partie, montrez que

$$E_{x_\alpha} = \frac{e\alpha^3\sqrt{2\pi}}{8}$$

Exercice 38 On considère le signal $x(t) = e^{-\pi t^2}$ pour $t \in \mathbb{R}$, et on veut calculer sa transformée de Fourier notée $X(\nu)$.

1. Montrez que

$$X(\nu) = e^{-\pi\nu^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(t+i\nu)^2} dt$$

2. Montrez que

$$X(\nu) = e^{-\pi\nu^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} dt$$

3. Sachant que pour tout $\sigma > 0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt = \sqrt{2\pi}\sigma$$

montrez que $X(\nu) = e^{-\pi\nu^2}$.

Exercice 39 On considère un signal $x(t)$ dont l'énergie E_x est finie. Montrez qu'alors

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt = 0$$

Cette expression est ce qu'on appelle la puissance.

Exercice 40 On considère le signal $x(t) = \mathbb{H}(t)e^{-2\pi t}$ avec $\mathbb{H}(t) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$.

1. Montrez que $X(\nu) = \frac{1}{1+i\nu} \frac{1}{2\pi}$.

2. En utilisant $x(t)$, montrez que $E_x = \frac{1}{4\pi}$.

3. En utilisant $X(\nu)$, montrez que

$$E_x = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\nu}{1+\nu^2} \quad (4.1)$$

4. Déduisez que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi$$

Exercice 41 On considère deux paramètres fixes et différents notés a, b avec $a \neq b$ et $a > 0$, $b > 0$. On considère deux signaux.

$$x_a(t) = \sqrt{a}e^{-ta}\mathbb{H}(t) \text{ et } x_b(t) = \sqrt{b}e^{-tb}\mathbb{H}(t)$$

avec $\mathbb{H}(t) = \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)$.

Montrez que $x_a(t)$ et $x_b(t)$ ont la même énergie

$$E_{x_a} = E_{x_b} = \frac{1}{2}$$

Exercice 42 On considère $x(t) = e^{-\alpha t}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$ avec $\alpha > 0$. Calculez E_x à partir de $x(t)$ et montrez que $E_x = \frac{1}{2\alpha}$.

Exercice 43 On définit un signal $x(t)$ déjà étudié dans l'exercice 1 et 9 (p. 2, p. 4) par

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq -1 \\ 2 & \text{si } t \in [-1, 0[\\ 2 - t & \text{si } t \in [0, 1[\\ t & \text{si } t \in [1, 2[\\ 2 & \text{si } t \in [2, 3[\\ 0 & \text{si } t \geq 3 \end{cases}$$

Calculez son énergie E_x et montrez que $E_x = 12 + \frac{2}{3}$.

Chapter 5

Signaux périodiques, sinus cardinaux et transformées de Fourier de fonctions portes, propriétés de la transformée de Fourier, relations trigonométriques, distribution Dirac

5.1 Exercices

Exercice 44 On considère $\alpha \in [0, 1[$ et un signal $x_\alpha(t)$ défini par

- $x_\alpha(t)$ est périodique de période 1
- Pour $t \in [0, \alpha[$, $x_\alpha(t) = 1$
- Pour $t \in [\alpha, 1[$, $x_\alpha(t) = 0$

On considère $y_\alpha(t) = x_\alpha(t - \frac{1}{2})$.

1. Tracez les graphes de $x_\alpha(t)$ et $y_\alpha(t)$ pour $t \in [-2, 2]$ en séparant les cas $\alpha \leq \frac{1}{2}$ et $\alpha > \frac{1}{2}$.
2. Tracez les graphes de $x_\alpha(0)$ et $y_\alpha(\frac{1}{2})$ pour $\alpha \in [0, 1[$.
3. Tracez les graphes de $x_\alpha(\frac{1}{2})$ et $y_\alpha(0)$ pour $\alpha \in [0, 1[$.
4. Montrez que
 - si $\alpha \leq \frac{1}{2}$, $y_\alpha(t) = \mathbf{1}_{[\frac{1}{2}, \alpha + \frac{1}{2}]}(t)$ pour $t \in [0, 1]$
 - si $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1[$, $y_\alpha(t) = \mathbf{1}_{[0, \alpha - \frac{1}{2}]}(t) + \mathbf{1}_{[\frac{1}{2}, 1]}(t)$ pour $t \in [0, 1]$

Exercice 45 On définit un signal $x(t)$ déjà étudié dans l'exercice 1 et 9 (p. 2, p. 4) par

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq -1 \\ 2 & \text{si } t \in [-1, 0[\\ 2 - t & \text{si } t \in [0, 1[\\ t & \text{si } t \in [1, 2[\\ 2 & \text{si } t \in [2, 3[\\ 0 & \text{si } t \geq 3 \end{cases}$$

1. En observant que $x(0) = 2$, montrez que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu) d\nu = 2$$

2. En s'inspirant de l'exercice 43 (p. 13), montrez que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |X(\nu)|^2 d\nu = 12 + \frac{2}{3}$$

3. En s'inspirant de l'exercice 9, représentez graphiquement $\text{TF}^{-1}[\Re(X(\nu))](t)$

Exercice 46 On définit un signal $x(t)$ déjà étudié dans les exercices 1, 9, 18 et 45 (p. 2, p. 4, p. 6, p. 14) par

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq -1 \\ 2 & \text{si } t \in [-1, 0[\\ 2-t & \text{si } t \in [0, 1[\\ t & \text{si } t \in [1, 2[\\ 2 & \text{si } t \in [2, 3[\\ 0 & \text{si } t \geq 3 \end{cases}$$

Dans l'exercice 18 montrant le calcul de $X(\nu)$, il manquait une étape. On pose $x_b(t) = t\mathbf{1}_{[0,1]}(t)$ et $X_b(\nu) = \text{TF}[x_b(t)](\nu)$, montrez que

$$X_b(\nu) = \frac{(1 + 2i\pi\nu)e^{-2i\pi\nu} - 1}{4\pi^2\nu^2}$$

1. Une première façon de procéder est d'utiliser une intégration par partie.

$$\int_a^b \left(\frac{d}{dt} u(t) \right) v(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t) \left(\frac{d}{dt} v(t) \right) dt \quad (5.1)$$

2. Une deuxième façon de procéder est de s'appuyer sur le fait que

$$\text{TF}[\mathbf{1}_{[0,1]}(t)](\nu) = \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu} e^{-i\pi\nu} \quad (5.2)$$

puis de montrer que

$$\text{TF}[-2i\pi t\mathbf{1}_{[0,1]}(t)](\nu) = \frac{d}{d\nu} \left(\frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu} e^{-i\pi\nu} \right) \quad (5.3)$$

Exercice 47 On définit $\Pi(t) = \mathbf{1}_{[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]}(t)$. Calculez et représentez graphiquement $\frac{d}{dt}(t\Pi(t))$

Exercice 48 On définit $\Pi(t) = \mathbf{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(t)$. On considère deux signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$ définis par

$$x_1(t) = t\Pi\left(\frac{t}{2}\right) \text{ et } x_2(t) = \frac{d}{dt}x_1(t)$$

La représentation graphique de $x_1(t)$ a été étudiée dans l'exercice 11 (p. 5).

1. Représentez graphiquement $x_2(t)$.

2. Calculez $X_1(0)$ et $X_2(0)$

Exercice 49 On définit $\Pi(t) = \mathbf{1}_{[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]}(t)$ et $\text{signe}(t) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t) - \mathbf{1}_{\mathbb{R}_-}(t)$ On considère un signal $x_1(t)$

$$x_1(t) = \sqrt{|t|}\Pi\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{|t|}}\left(1 - \Pi\left(\frac{t}{2}\right)\right)$$

La représentation graphique de $x_1(t)$ a déjà été étudiée dans l'exercice 14 (p. 6). On considère $x_2(t) = \frac{d}{dt}x_1(t)$.

1. Représentez graphiquement $x_2(t)$.

2. Exprimez x_2 en fonction de $|t|$, Π et signe .

Chapter 6

Signaux à valeurs complexes, approximation, temps moyen

6.1 Exercices

Exercice 50 On considère un ensemble de signaux $x_n(t) = (it)^n \mathbf{1}_{[-1,1]}(t)$ avec $n \in \mathbb{N}$. Leurs transformées de Fourier sont notées $X_n(\nu)$.

1. Calculez $X_n(0)$ et montrez que

$$X_n(0) = \begin{cases} \frac{2}{n+1} & \text{si } n = 4k \\ 0 & \text{si } n = 4k + 1 \\ -\frac{2}{n+1} & \text{si } n = 4k + 2 \\ 0 & \text{si } n = 4k + 3 \end{cases}$$

2. Calculez le temps moyen de x_n

$$\langle t_n \rangle = \frac{1}{I_n} \int_{-\infty}^{+\infty} t |x_n(t)| dt \text{ et } I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} |x_n(t)| dt$$

et montrez que $\langle t_n \rangle = 0$.

3. Calculez l'énergie et la puissance de x_n et montrez que $E_{x_n} = \frac{2}{2n+1}$ et $P_{x_n} = 0$.

Exercice 51 On considère $e_1(t)$, $e_2(t)$ et $x(t)$ des signaux périodiques de période 1.

$$\text{Pour } t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[, \quad \begin{cases} e_1(t) &= 1 \\ e_2(t) &= \text{signe}(t) \\ x(t) &= t \mathbf{1}_{[0, \frac{1}{2}]}(t) \end{cases}$$

1. Montrez que $e_1(t)$ et $e_2(t)$ sont orthogonaux pour la puissance.
2. Montrez que $e_1(t)$ et $e_2(t)$ sont de norme 1 pour la puissance.
3. Trouvez α et β tels que $\hat{x}(t)$ approche le mieux $x(t)$ sachant que

$$\hat{x}(t) = \alpha e_1(t) + \beta e_2(t)$$

Montrez que $\alpha = \frac{1}{8}$ et $\beta = \frac{1}{8}$.

4. Représentez graphiquement $x(t)$, $\hat{x}(t)$, $e_1(t)$ et $e_2(t)$.

Exercice 52 On considère $x(t) = e^{-\pi t^2} e^{it}$. Montrez en vous inspirant de l'exercice 36 (p. 11) que l'énergie $E_x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Exercice 53 On considère le signal $x(t) = e^{-\pi t^2} \cos(t)$. Il est souhaitable d'utiliser l'exercice 52 (p. 16). Vous pouvez aussi utiliser le fait que $\cos^2(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Re(e^{2it})$. Montrez que l'énergie est $E_x = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(1 + e^{-\frac{1}{2\pi}}\right)$.

Exercice 54 On considère le signal

$$x(t) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha t^2} e^{i\omega_0 t}$$

avec $\alpha > 0$ et $\omega_0 \in \mathbb{R}$. Par ailleurs on sait que pour $x_r(t) = e^{-\pi t^2}$, $X_r(\nu) = e^{-\pi \nu^2}$.

1. On définit $x_1(t) = x_r(t) \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}$. Montrez que $X_1(\nu) = X_r(\nu) \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}$.
2. On définit $x_2(t) = x_1(\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} t)$. Montrez que $X_2(\nu) = e^{-\frac{\pi^2}{\alpha} \nu^2}$.
3. On définit $x_3(t) = x_2(t) e^{i\omega_0 t}$, montrez que

$$X(\nu) = e^{-\frac{\pi^2}{\alpha} (\nu - \frac{\omega_0}{2\pi})^2}$$

Exercice 55 On considère un signal complexe $y(t) = \frac{1}{t+i}$ pour $t \in \mathbb{R}$. On cherche un spectre de la forme $Y(\nu) = a e^{-b\nu} \mathbb{H}(\nu)$ où $\mathbb{H}(\nu) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(\nu)$.

1. En utilisant la valeur $y(0) = \frac{1}{i}$, montrez que $\frac{a}{b} = \frac{1}{i}$.
2. Sachant que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + 1} = \pi$$

montrez en calculant E_y que

$$\frac{|a|^2}{2\Re(b)} = \pi$$

On peut en effet remarquer que

$$e^{-b\nu} = e^{-\Re(b)\nu} e^{-i\Im(b)\nu}$$

3. On suppose maintenant que $\Im(b) = 0$. Montrez que les deux conditions précédentes, $\frac{a}{b} = \frac{1}{i}$ et $\frac{|a|^2}{2\Re(b)} = \pi$ entraînent que

$$Y(\nu) = \mathbb{H}(\nu) e^{-2\pi\nu} (-2i\pi)$$

En appliquant la transformée de Fourier inverse à $Y(\nu)$, montrez qu'on retrouve $y(t)$.

Chapter 7

Puissance et énergie d'un signal périodique, valeur moyenne d'un signal périodique, coefficients de la série de Fourier, valeur à gauche et à droite, parité, représentation

7.1 Exercices

Exercice 56 On considère les signaux suivants

$$x_1(t) = \sin(t\sqrt{2}) \quad x_2(t) = \operatorname{sinc}(t\sqrt{2}) \quad x_3 = (x_1(t))^2$$

1. Représentez graphiquement $x_1(t)$
2. Représentez graphiquement $x_2(t)$
3. Représentez graphiquement $x_3(t)$ en exprimant $x_3(t)$ en fonction de $\cos(2\sqrt{2}t)$

Exercice 57 On considère les signaux $e_1(t)$, $e_2(t)$, $x(t)$, $\hat{x}(t)$ définis lors de l'exercice 51 (p. 16). Représentez graphiquement ces signaux.

Exercice 58 On considère le signal $x(t)$ périodique de période 2 et défini par

$$x(t) = e^{-\frac{t}{2}} \text{ pour } t \in [0, 2[$$

1. Représentez le signal $x(t)$
2. Montrez que

$$\frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) + \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0^-} x(t) = \frac{1}{2}(1 + e^{-1})$$

Exercice 59 On considère un signal périodique de période 2, noté $x(t)$ et défini par

$$x(t) = e^{-\frac{t}{2}} \text{ pour } t \in [0, 2[$$

On note X_k les coefficients de la série de Fourier qui sont calculés dans l'exercice 67 (p. 21).

$$X_k = \frac{1 - e^{-1}}{1 + 2i\pi k}$$

1. Calculez sa puissance P_x et son énergie E_x . Montrez que

$$P_x = \frac{1}{2}(1 - e^{-2})$$

2. À quelles fréquences sont associées les coefficients de la série de Fourier X_k ?

3. Montrez que

$$P_x = (1 - e^{-1})^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + 4\pi^2 k^2}$$

4. Montrez que pour tout réels a et b , on a

$$\frac{a^2 - b^2}{(a - b)^2} = \frac{a + b}{a - b}$$

Et montrez alors que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + 4\pi^2 k^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{3 - e}{e - 1} \right)$$

Exercice 60 On considère $x(t)$ périodique de période 2 défini par $x(t) = e^{-\frac{t}{2}}$ pour $t \in [0, 2[$. Les coefficients de la série de Fourier sont $X_k = \frac{1 - e^{-1}}{1 + 2i\pi k}$

1. Montrez que

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{-1}}{1 + 2i\pi k} (-1)^k = e^{-1/2}$$

2. Montrez que

$$1 - e^{-1} + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1 - e^{-1}}{1 + 4\pi^2 k^2} (-1)^k = e^{-1/2}$$

3. Montrez que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1 + 4\pi^2 k^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{e}}{e - 1} - 1 \right)$$

4. Représentez graphiquement le module et l'argument de la transformée de Fourier.

Exercice 61 On considère $\alpha = \frac{2}{3}$ et $x_\alpha(t)$ un signal périodique de période 1 défini par $x_\alpha(t) = \mathbf{1}_{[-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}]}(t)$ pour $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. On considère $y(t) = 1 + \cos(2\pi t)$. Représentez graphiquement $x(t)$ et $y(t)$.

Exercice 62 On considère $\alpha \in [0, 1[$ et un signal $x_\alpha(t)$ défini par

- $x_\alpha(t)$ est périodique de période 1
- Pour $t \in [0, \alpha]$, $x_\alpha(t) = 1$
- Pour $t \in]\alpha, 1]$, $x_\alpha(t) = 0$
- $X_{\alpha,k}$ sont les coefficients de Fourier de $x_\alpha(t)$.

1. Calculez la puissance de $x_\alpha(t)$ et montrez que

$$P_{x_\alpha} = \alpha$$

2. On considère un signal $y_\alpha(t)$ périodique de période 1, dont les coefficients de Fourier $Y_{\alpha,k}$ vérifient

$$Y_{\alpha,k} = (-1)^k X_{\alpha,k}$$

Calculez la puissance du signal $y_\alpha(t)$ et montrez que

$$P_{y_\alpha} = P_{x_\alpha}$$

Exercice 63 On considère un signal $x_\alpha(t)$ périodique de période 1 défini par

$$x_\alpha(t) = \mathbf{1}_{[-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}]}(t) \text{ pour } t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$$

On considère une sinusoïde surélevée définie par

$$y(t) = 1 + \cos(2\pi t)$$

1. À quelle fréquence correspondent les coefficients X_k de la série de Fourier ?
2. Quelle est la valeur moyenne de $x_\alpha(t)$, qu'est-ce que cela nous apprend sur X_0 ?
3. Calculez la puissance P_x .
4. Montrez pour $y(t)$, la relation entre la puissance P_y et la valeur moyenne $\langle y(t) \rangle$ est

$$P_y = \frac{3}{2} \langle y(t) \rangle^2$$

5. Montrez que pour $\alpha = \frac{2}{3}$, on a aussi

$$P_x = \frac{3}{2} \langle x(t) \rangle^2$$

6. On considère le signal approchant $\hat{x}(t)$.

$$\hat{x}(t) = X_0 + X_1 e^{-2i\pi t} + X_{-1} e^{2i\pi t}$$

avec X_0 calculé lors de la question 2 et $X_k = \alpha \text{sinc}(\pi k \alpha)$ pour $k \neq 0$.

7. Calculez $\hat{x}(t)$ pour $\alpha = \frac{2}{3}$.
8. Représentez $\hat{x}(t)$.
9. Calculez la puissance $P_{\hat{x}}$.

Exercice 64 On considère un signal $y_\alpha(t)$ obtenu avec l'exercice 75 (p. 26). Il est ainsi défini.

- si $\alpha \leq \frac{1}{2}$, $y_\alpha(t) = \mathbf{1}_{[\frac{1}{2}, \alpha + \frac{1}{2}]}(t)$ pour $t \in [0, 1]$
- si $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1[$, $y_\alpha(t) = \mathbf{1}_{[0, \alpha - \frac{1}{2}]}(t) + \mathbf{1}_{[\frac{1}{2}, 1]}(t)$ pour $t \in [0, 1]$

Montrez que

$$Y_{\alpha,0} = \alpha \text{ et } P_{y_\alpha} = \alpha$$

Exercice 65 En reprenant l'exercice 51 (p. 16), calculez la puissance de $x(t) - \hat{x}(t)$ et montrez que $P_{x-\hat{x}} = \frac{1}{128}(1 + \frac{7}{6})$

Chapter 8

Série de Fourier, définition et propriétés, utilisation de la distribution $\delta(\nu)$

8.1 Exercices

Exercice 66 On considère un signal $x_\alpha(t)$ périodique de période 1 défini par

$$x_\alpha(t) = \mathbf{1}_{[-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}]}(t) \text{ pour } t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$$

1. Calculez X_k les coefficients de la série de Fourier associée à $x(t)$ et montrez que pour $k \neq 0$, $X_k = \alpha \operatorname{sinc}(\pi k \alpha)$ et que $X_0 = \alpha$.
2. On approxime $x(t)$ par sa composante continue et sa première harmonique. L'approximation est notée $\hat{x}(t)$. Montrez que

$$\hat{x}(t) = X_0 + X_1 e^{2i\pi t} + X_{-1} e^{-2i\pi t}$$

Exercice 67 On considère un signal périodique de période 2, noté $x(t)$ et défini par

$$x(t) = e^{-\frac{t}{2}} \text{ pour } t \in [0, 2[$$

1. À quelles fréquences sont associées les coefficients de la série de Fourier X_k ?
2. Calculez les coefficients X_k et montrez que

$$X_k = \frac{1 - e^{-1}}{1 + 2i\pi k}$$

Exercice 68 On considère le signal $x(t)$ périodique de période 2 et défini par

$$x(t) = e^{-\frac{t}{2}} \text{ pour } t \in [0, 2[$$

Ses coefficients de la série de Fourier sont

$$X_k = \frac{1 - e^{-1}}{1 + 2i\pi k}$$

1. On considère

$$S_N = \sum_{k=-N}^N X_k$$

Montrez que

$$S_K = (1 - e^{-1}) \left[1 + 2 \sum_{k=1}^K \frac{1}{1 + 4\pi^2 k^2} \right]$$

2. Sachant que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + 4\pi^2 n^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{3 - e}{e - 1} \right)$$

montrez que S_K tend vers $\frac{1}{2}(1 + e^{-1})$ quand $K \rightarrow +\infty$.

3. En utilisant

$$\frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) + \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0^-} x(t) = \frac{1}{2}(1 + e^{-1})$$

qui a été montré dans l'exercice 58 (p. 18), donnez deux explications conduisant à cette affirmation.

$$\lim_{K \rightarrow +\infty} S_K = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) + \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0^-} x(t)$$

- La première raison est issue du calcul.
- La deuxième raison utilise la série de Fourier.

Chapter 9

Produit de convolution et distribution de Dirac

9.1 Exercices

Exercice 69 On considère un signal $x(t)$ quelconque et un signal $h(t)$ défini par

$$h(t) = \sqrt{\frac{b}{a}}\delta(t) + \left(1 - \frac{b}{a}\right)\sqrt{ab}e^{-bt}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)$$

On définit un signal $y(t)$ par

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

Montrez que

$$y(t) = \sqrt{\frac{b}{a}}x(t) + \sqrt{ab}\left(1 - \frac{b}{a}\right)e^{-bt}\int_0^t e^{b\tau}x(\tau) d\tau$$

lorsque $x(t)$ est nul pour $t \leq 0$.

Exercice 70 On considère les signaux suivants :

$$\begin{cases} x_1(t) = \mathbf{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(t) \\ y_1(t) = x_1(t) * x_1(t) \\ x_2(t) = \mathbf{1}_{[a,b]}(t) \\ y_2(t) = x_2(t) * x_2(t) \end{cases}$$

1. Montrez que $y_1(0) = 1$.
2. Montrez que $y_1(t)$ est nul pour $|t| > 1$.
3. Montrez que $y_1(t)$ est pair.
4. Pour $t \in [0, 1]$, montrez que $y_1(t) = 1 - t$.
5. En déduire que

$$y_1(t) = (1 - |t|)\mathbf{1}_{[-1,1]}(t)$$

La représentation graphique de ce signal est réalisé dans l'exercice 17 (p. 6).

6. On pose $x_3(t) = x_1(\frac{t}{b-a})$ et $y_3(t) = x_3(t) * x_3(t)$, montrez que

$$y_3(t) = ((b-a) - |t|)\mathbf{1}_{[-(b-a), b-a]}(t)$$

7. Montrez que

$$x_2(t) = x_3\left(t - \frac{a+b}{2}\right)$$

8. Montrez que

$$y_2(t) = [(b-a) - |t-a-b|] \mathbf{1}_{[2a, 2b]}(t)$$

Exercice 71 On considère $x(t) = \mathbf{1}_{[-1,1]}(t)$ et $y(t) = e^{-|t|}$, on cherche à calculer $z(t) = x(t) * y(t)$.

1. Montrez que

$$z(0) = 2 \left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

2. Montrez que

$$z(1) = 1 - \frac{1}{e^2}$$

3. Montrez que

$$z(t) = \int_{t-1}^{t+1} e^{-\tau} d\tau$$

L'étude de $z(t)$ ainsi défini est faite dans l'exercice 19 (p. 7).

Exercice 72 On considère les signaux

$$x(t) = \mathbf{1}_{[0,1]}(t) \text{ et } y(t) = x(t) + 2x(t-1) + x(t-2)$$

On note $a(t) = x(t) * x(t)$ et on sait que

$$a(t) = (1 - |t-1|) \mathbf{1}_{[0,2]}(t)$$

On cherche à calculer $z(t) = x(t) * y(t)$.

1. Montrez que

$$z(t) = a(t) + 2a(t-1) + a(t-2)$$

L'étude de la symétrie et la représentation graphique de $z(t)$ est faite dans l'exercice 17 (p. 6).

Chapter 10

Filtres, définition et propriétés, utilisation des limites

10.1 Exercices

Exercice 73 On considère deux paramètres fixes et différents notés a, b avec $a \neq b$ et $a > 0, b > 0$. On considère deux signaux.

$$x_a(t) = \sqrt{a}e^{-ta}\mathbb{H}(t) \text{ et } x_b(t) = \sqrt{b}e^{-tb}\mathbb{H}(t)$$

avec $\mathbb{H}(t) = \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(t)$.

Leurs transformées de Fourier sont notées $X_a(\nu)$ et $X_b(\nu)$.

$$X_a(\nu) = \frac{\sqrt{a}}{a + 2i\pi\nu} \text{ et } X_b(\nu) = \frac{\sqrt{b}}{b + 2i\pi\nu}$$

On considère un filtre linéaire, temps invariant qui transforme $x_a(t)$ en $x_b(t)$. L'énergie de ces signaux a été calculée dans l'exercice 41 (p. 12). Le calcul et la représentation graphique de $X_a(\nu)$ et $X_b(\nu)$ est faite dans l'exercice 25 (p. 9).

1. Montrez que la réponse fréquentielle du filtre est

$$H(\nu) = \sqrt{\frac{b}{a}} \left(\frac{a + 2i\pi\nu}{b + 2i\pi\nu} \right)$$

2. Montrez que $|H(\nu)| = 1$ pour une seule fréquence notée ν_0 qui vaut

$$\nu_0 = \frac{\sqrt{ab}}{2\pi}$$

3. Montrez que $H(0) = \sqrt{\frac{a}{b}}$ et que

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} |H(\nu)| = \sqrt{\frac{b}{a}}$$

4. Montrez que

$$|H(\nu)| = \sqrt{\frac{b}{a}} \sqrt{1 - \frac{(b^2 - a^2)}{b^2 + 4\pi^2\nu^2}}$$

5. Montrez que

- si $a < b$, $\nu \mapsto |H(\nu)|$ est décroissante de $-\infty$ à 0 et croissante de 0 à $+\infty$, le filtre est un passe-haut ;

- si $b < a$, $\nu \mapsto |H(\nu)|$ est croissante de $-\infty$ à 0 et décroissante de 0 à $+\infty$, le filtre est un passe-bas ;

6. Représentez graphiquement $|H(\nu)|$ en fonction de ν .

7. Montrez que

$$H(\nu) = \sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{b}{a}} \left(\frac{a-b}{b+2i\pi\nu} \right)$$

8. En observant que $X_b(\nu) = \frac{\sqrt{b}}{b+2i\pi\nu}$, montrez que la réponse impulsionnelle du filtre est

$$h(t) = \sqrt{\frac{b}{a}} \delta(t) + \left(1 - \frac{b}{a}\right) \sqrt{ab} e^{-bt} \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)$$

9. En utilisant l'exercice 69, (p. 23), montrez que la relation entrée-sortie peut s'exprimer ainsi

$$y(t) = \sqrt{\frac{b}{a}} x(t) + \sqrt{ab} \left(1 - \frac{b}{a}\right) e^{-bt} \int_0^t e^{b\tau} x(\tau) d\tau$$

lorsque $x(t)$ est nul pour $t \leq 0$.

10. Montrez que si $x(t) = x_a(t)$ alors $y(t) = x_b(t)$.

Exercice 74 On considère un filtre dont la relation entrée-sortie est définie par

$$\frac{d}{dt}y(t) + by(t) = \sqrt{\frac{b}{a}} \frac{d}{dt}x(t) + \sqrt{ab}x(t)$$

Montrez que la réponse fréquentielle est

$$H(\nu) = \sqrt{\frac{b}{a}} \left(\frac{a + i2\pi\nu}{b + i2\pi\nu} \right)$$

Exercice 75 On considère $\alpha \in [0, 1[$ et un signal $x_\alpha(t)$ défini par

- $x_\alpha(t)$ est périodique de période 1
- Pour $t \in [0, \alpha]$, $x_\alpha(t) = 1$
- Pour $t \in]\alpha, 1]$, $x_\alpha(t) = 0$
- $X_{\alpha,k}$ sont les coefficients de Fourier de $x_\alpha(t)$.

On considère un signal non-périodique $x'_\alpha(t) = \mathbf{1}_{[0,\alpha]}(t)$ dont la transformée de Fourier est notée $X'_\alpha(\nu)$.

On considère un filtre de réponse impulsionnelle $h(t) = \delta(t - \frac{1}{2})$.

- $y_\alpha(t)$ est la sortie du filtre obtenue lorsqu'en entrée on met $x_\alpha(t)$. Les coefficients de Fourier sont notés $Y_{\alpha,k}$.
- $y'_\alpha(t)$ est la sortie du filtre obtenue lorsqu'en entrée on met $x'_\alpha(t)$. Sa transformée de Fourier est notée $Y'_\alpha(\nu)$.

1. Montrez que pour $t \in [0, 1[$,

$$\forall t \in [0, 1[, \quad x_\alpha(t) = x'_\alpha(t)$$

2. Montrez que $X_{\alpha,0} = \alpha$

3. Calculez la réponse fréquentielle du filtre notée $H(\nu)$ et montrez que

$$H(\nu) = e^{-i\pi\nu}$$

4. Montrez que $y_\alpha(t)$ est périodique de période 1.

5. Montrez que

$$Y_{\alpha,k} = (-1)^k X_{\alpha,k}$$

Ceci permet dans l'exercice 62 (p. 19) de trouver les puissances de $x_\alpha(t)$ et de $y_\alpha(t)$.

6. Montrez que

$$y'_\alpha(t) = \mathbf{1}_{[\frac{1}{2}, \alpha + \frac{1}{2}]}(t)$$

7. Montrez que pour $t \in [0, 1[$,

$$y_\alpha(t) = y'_\alpha(t) + y'_\alpha(t+1)$$

8. Montrez que $y_\alpha(t) = x_\alpha(t - \frac{1}{2})$. Ceci permet dans l'exercice 44 (p. 14) de réaliser des représentations graphiques de $x_\alpha(t)$ et $y_\alpha(t)$.

9. Montrez que

- si $\alpha \leq \frac{1}{2}$, $y_\alpha(t) = \mathbf{1}_{[\frac{1}{2}, \alpha + \frac{1}{2}]}(t)$ pour $t \in [0, 1]$
- si $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1[$, $y_\alpha(t) = \mathbf{1}_{[0, \alpha - \frac{1}{2}]}(t) + \mathbf{1}_{[\frac{1}{2}, 1]}(t)$ pour $t \in [0, 1]$

10. Vérifiez en utilisant cette nouvelle caractérisation de $y_\alpha(t)$ qu'on a bien

$$Y_{\alpha,0} = \alpha \text{ et } P_{y_\alpha} = \alpha$$

Chapter 11

Autocorrélation

11.1 Exercices

Exercice 76 On cherche à calculer l'autocorrélation, $\varphi_{xx}(t)$ pour $x(t) = e^{-\pi t^2}$. On admet ici que

$$\text{TF} \left[e^{-\pi t^2} \right] (\nu) = e^{-\pi \nu^2}$$

1. Calculez $s_{xx}(\nu) = \text{TF}[\varphi_{xx}(t)]$ et montrez que

$$S_{xx}(\nu) = e^{-2\pi \nu^2}$$

2. Montrez que $S_{xx}(\nu) = X(\sqrt{2}\nu)$

3. Montrez que

$$\varphi_{xx}(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi t^2}{2}}$$

Exercice 77 On considère $x(t) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)e^{-\alpha t}$ avec $\alpha > 0$, et $y(t) = x(t) * x(t)$.

1. Montrez que

$$y(t) = \left(\int_0^t x(\tau)x(t-\tau) d\tau \right) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$$

2. Montrez que

$$y(t) = te^{-\alpha t} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$$

Exercice 78 On considère $x(t) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)e^{-\alpha t}$ avec $\alpha > 0$ et $\varphi_{xx}(t)$ son autocorrélation.

1. Montrez que $\varphi_{xx}(-t) = \varphi_{xx}(t)^*$, ici $*$ signifiant le conjugué.
2. Pour $t \geq 0$, montrez que

$$\varphi(t) = \int_t^{+\infty} x(\tau)x(\tau-t)^* d\tau$$

3. Montrez que

$$\varphi_{xx}(t) = \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha|t|} \text{ pour } t \in \mathbb{R}$$

Exercice 79 On considère $x(t) = e^{-\alpha t} \mathbf{1}_{\mathbb{R}}(t)$ avec $\alpha > 0$. L'autocorrélation de ce signal est déjà calculé et vaut

$$\varphi_{xx}(t) = \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha|t|}$$

L'exercice 42 (p. 12) a permis de montrer que $E_x = \frac{1}{2\alpha}$. Calculez $\varphi_{xx}(0)$ et observez que ici

$$E_x = \varphi_{xx}(0)$$

Exercice 80 On considère $x(t) = e^{-\alpha t} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$ et $\varphi_{xx}(t)$ son autocorrélation.

1. Montrez que

$$\text{TF}[x(t)](\nu) = \frac{1}{\alpha + 2i\pi\nu}$$

2. En exprimant $\text{TF}[\varphi_{xx}(t)](\nu)$ en fonction de $X(\nu)$, montrez que

$$\varphi_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\nu)|^2 d\nu$$

3. Avec l'exercice 79 (p. 28), on sait que $\varphi_{xx}(0) = \frac{1}{2\alpha}$. À partir de la question précédente et avec $\alpha = 2\pi$, montrez que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\nu}{1 + \nu^2} = \pi$$

Exercice 81 En utilisant les exercices 77 et 80 (p. 28 et p. 29), montrez que

$$\text{TF}\left[te^{-\alpha t} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)\right] = \frac{1}{(\alpha + 2i\pi\nu)^2}$$

Chapter 12

Distributions et propriétés

12.1 Exercices

Exercice 82 On note $H(t) = \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)$. On admet que

$$\text{TF}[H(t)](\nu) = \frac{1}{2i\pi} \text{vp}\left(\frac{1}{\nu}\right) + \frac{1}{2}\delta(\nu)$$

et qu'on a déjà calculé

$$\text{TF}\left[\mathbf{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(t)\right](\nu) = \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}$$

1. En utilisant que

$$\mathbf{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(t) = H\left(t + \frac{1}{2}\right) - H\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

qui a été calculé dans l'exercice 5 (p. 3), montrez que

$$\text{TF}\left[\mathbf{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(t)\right] = \text{TF}[H(t)](\nu) \times 2i \sin(\pi\nu)$$

2. Montrez que $\delta(\nu) \sin(\pi\nu) = 0$

3. Montrez que

$$\frac{1}{2i\pi} \text{vp}\left(\frac{1}{\nu}\right) 2i \sin(\pi\nu) = \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}$$

Exercice 83 On considère $x(t) = t\mathbf{1}_{[0,1]}(t)$, $y(t) = \mathbf{1}_{[0,1]}(t)$ et $z(t) = \delta'(t) * x(t)$. On note $X(\nu)$, $Y(\nu)$ et $Z(\nu)$ les transformées de Fourier de ces trois signaux. On cherche à calculer $X(\nu)$, de deux façons différentes. On considère qu'on a déjà calculé

$$\text{TF}\left[\mathbf{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(t)\right](\nu) = \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}$$

1. Montrez que

$$Y(\nu) = \frac{1 - e^{-2i\pi\nu}}{2i\pi\nu}$$

2. En utilisant les expressions de la dérivée d'un quotient de deux fonctions, montrez que

$$\frac{d}{d\nu}Y(\nu) = \frac{-1}{2i\pi} \left(\frac{1}{\nu^2} - \frac{1}{\nu^2}e^{-2i\pi\nu} - \frac{2i\pi}{\nu}e^{-2i\pi\nu} \right)$$

3. En déduire que

$$X(\nu) = - \left(\frac{1 - e^{-2i\pi\nu} 2i\pi\nu - e^{-2i\pi\nu}}{4\pi^2\nu^2} \right)$$

4. Un calcul mathématique utilisant un développement limité à l'ordre 2 de $x \mapsto e^x$ au voisinage de $x = 0$ permet d'affirmer que

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} X(\nu) = \frac{1}{2}$$

Retrouvez ce résultat en utilisant explicitement $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt$

5. Montrez que

$$z(t) = \mathbf{1}_{[0,1]}(t) - \delta(t-1)$$

6. Calculez $Z(\nu)$ et montrez que

$$Z(\nu) = \frac{1 - e^{-2i\pi\nu} 2i\pi\nu - e^{-2i\pi\nu}}{2i\pi\nu}$$

7. Montrez que $Z(\nu) = 2i\pi\nu X(\nu)$

8. Déduisez des deux questions précédentes que

$$X(\nu) = - \left(\frac{1 - e^{-2i\pi\nu} 2i\pi\nu - e^{-2i\pi\nu}}{4\pi^2\nu^2} \right)$$

Exercice 84 On considère trois signaux $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ définis par

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \mathbf{1}_{[0,1]}(t) \\ z(t) = x(t) * y(t) \end{cases}$$

Leur transformée de Fourier sont notées $X(\nu)$, $Y(\nu)$, $Z(\nu)$.

1. Montrez que

$$x(t) * y(t) = \int_{t-1}^t x(\tau) d\tau$$

2. Montrez que $z(t) = t - \frac{1}{2}$

3. Montrez que

$$X(\nu) = \frac{-1}{2i\pi} \delta'(\nu)$$

4. Sachant que $\text{TF} \left[\mathbf{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(t) \right] (\nu) = \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}$, montrez que

$$Y(\nu) = \frac{1 - e^{-2i\pi\nu}}{2i\pi\nu}$$

5. Pour cette question, on admet d'une part qu'en général pour un signal $f(t)$, on a

$$f(t)\delta'(t) = f(0)\delta'(t) - f'(0)\delta(t)$$

D'autre part un calcul mathématique utilisant un développement limité à l'ordre 2 de $x \mapsto e^x$ nous informe que

$$\left. \frac{dY(\nu)}{d\nu} \right|_{\nu=0} = -i\pi \text{ et } Y(0) = 1$$

La première partie de cette équation signifie que la dérivée en $\nu = 0$ de $Y(\nu)$ vaut $-i\pi$. Montrez alors que

$$Z(\nu) = \frac{i}{2\pi}\delta'(\nu) - \frac{1}{2}\delta(\nu)$$

6. Retrouvez $Z(\nu)$ en utilisant que $z(t) = t - \frac{1}{2}$.

Exercice 85 On considère les signaux $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ définis par

$$\begin{cases} x(t) = \mathbf{1}_{[0,1]}(t) \\ y(t) = \frac{1}{2}\delta(t) - \frac{i}{2\pi} \text{vp} \left(\frac{1}{t} \right) \\ z(t) = x(t) * y(t) \end{cases}$$

Leurs transformées de Fourier sont notées $X(\nu)$, $Y(\nu)$ et $Z(\nu)$. On admet ici que

$$\int_{\mathbb{R}} \text{vp} \left(\frac{1}{\tau} \right) f(\tau) d\tau = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{-|\epsilon|} \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau + \int_{|\epsilon|}^{+\infty} \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau \right]$$

1. Montrez que

$$z(t) = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[0,1]}(t) - \frac{i}{2\pi} \ln \left| \frac{t}{t-1} \right|$$

2. Représentez la partie réelle et imaginaire de $z(t)$

3. Montrez que

$$Y(\nu) = -H(\nu) = -\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(\nu)$$

4. Montrez que $Z(\nu) = 0$ pour $\nu < 0$, représentez $|Z(\nu)|$. On admet ici que $X(\nu) = \frac{1-e^{-2i\pi\nu}}{2i\pi\nu}$.