Examen traitement numérique du signal

Mercredi 13 décembre

Durée : 1h30

Une copie double manuscrite est autorisée. Le téléphone portable est interdit. À l'issue de l'épreuve, le **sujet est à rendre** avec la copie.

NOM : **Prénom :**

Exercice 1.

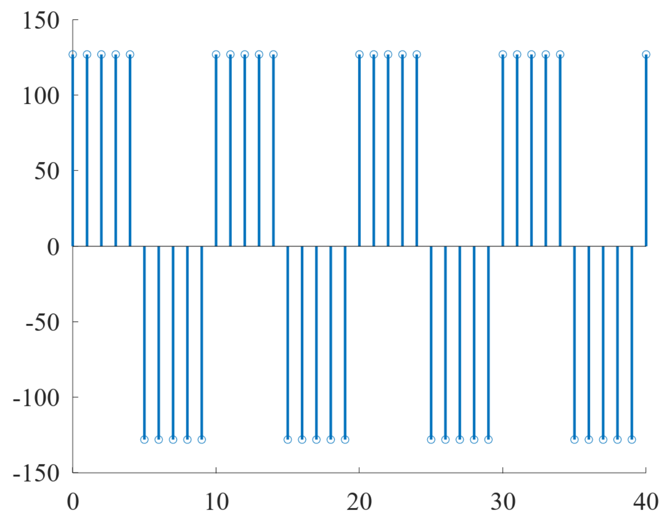

Figure 1: Première ligne d'une image, l'échelle des abscisses correspond au numéro des échantillons et non à une échelle en temps.

On dispose d'une caméra vidéo qui envoie le signal vidéo à une carte disposée dans un ordinateur relié à internet. On cherche à visualiser à distance la vidéo transmise. La caméra délivre 25 images par seconde avec une résolution de 64 par 64 pixels. Chaque pixel est codé sur 256 niveaux de gris. Les différents pixels de chaque image sont transmis les uns derrière les autres sous la forme d'une suite de nombre entre -127 et 128, notée x_n.

1. *Quelle est la période d'échantillonnage de* x_n *? Quelle est la fréquence d'échantillonnage ? Quel serait le débit de cette liaison internet (i.e. nombre de bits par secondes) ?*

On préfère utiliser qu'un quart de ce débit. Pour cela on sous-échantillonne le signal en ne considérant qu'un nombre tous les 4 nombres. Mathématiquement cela revient à écrire que $y_n = x_{4n}$. *En Matlab, on écrirait cela sous la forme :*

```
y=x(1:4:end);
```

On note $x(t)$ *et* $y(t)$ *les signaux en temps dont* x_n *et* y_n *seraient obtenus par échantillonnages.*

2. *Compte tenu de l'énoncé un peu différent, que sont les nouvelles fréquences d'échantillonnage de* x_n *et* y_n.

3. *D'après le critère de Shannon-Nyquist, quelle condition devrait vérifier* $x(t)$ *pour qu'à partir de* y_n *on puisse reconstruire* $x(t)$.

4. *On considère une image dont la première ligne est définie par* x_n *qui est une alternance de bande blanche (teinte codée ici à* 128*) et de bandes noires (teinte codée ici à* -127*). Les bandes blanches et noires juxtaposées et font chacune 5 pixels. La suite* x_n *est représentée sur la figure 1. Représenter la suite* y_n *sur la figure 1. Le critère de Shannon-Nyquist est-il respecté ?*

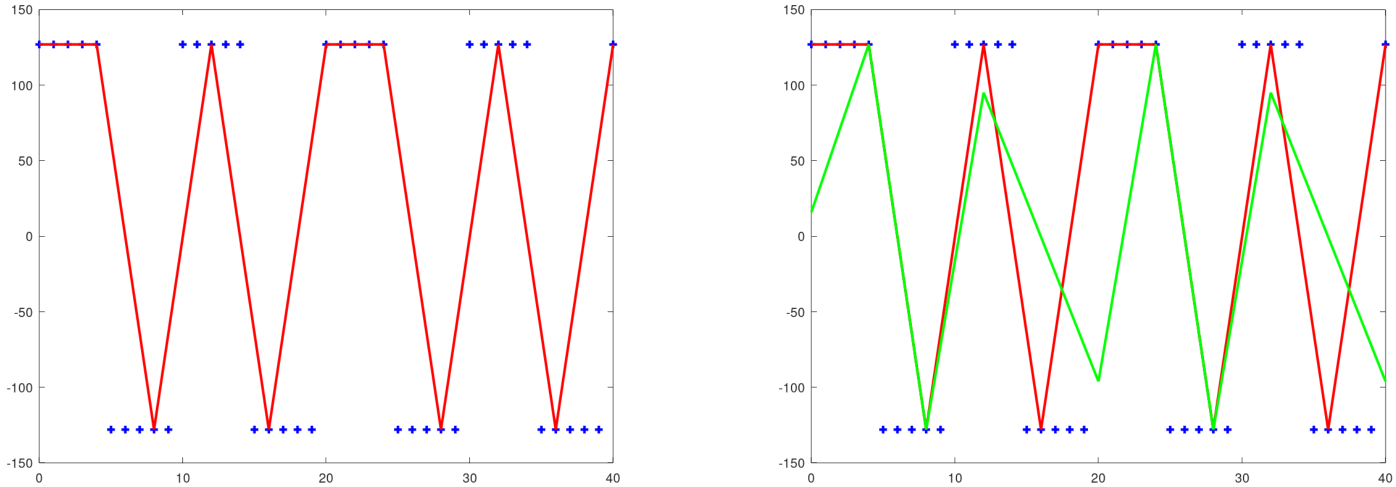

Figure 2: Graphe représentant à gauche x_n et y_n, à droite x_n, y_n et z_n.

On utilise maintenant un filtre anti-repliement de spectre avant de prélever un échantillon sur quatre. Maintenant les données transmises sont $z_n = \frac{1}{8}(x_{4n} + 3x_{4n-1} + 3x_{4n-2} + x_{4n-3})$.

5. *Dessiner* z_n *sur la figure 1. Pourrait-on reconstruire* x_n *à partir de* z_n.

6. *Quelle est la réponse impulsionnelle du filtre qui a permis de construire* z_n *à partir de* x_n *?*

Solution :

1. $T_e = \frac{1}{f_e}$ $f_e = 25 * 64 * 64 = 102$kHz. Le débit est de $fe \times 8 = 819$kbps.

2. $f_e^y = \frac{f_e}{4}$ et $f_e^x = f_e$.

3. Le spectre de $u(t)$ doit vérifier $f_{\max} < \frac{f_e^y}{2} = \frac{f_e}{8}$.

4.
```
n=0:40;
xn=127*(mod(n,10)<5)-128*(mod(n,10)>=5);
set(gca, 'FontSize', 20, 'fontName','Times');
figure(1); stem(n,xn,'b','linewidth',2); %fig_xex36b.png
n1=n(1:4:end);
yn=xn(1:4:end);
figure(1); plot(n,xn,'b+','linewidth',2,n1,yn,'r-','linewidth',2); %fig_xex36b_2.png
```

5.
```
zn=filter([1 3 3 1]/8,1,xn)(1:4:end);
figure(1); plot(n,xn,'b+','linewidth',2,n1,yn,'r-','linewidth',2,n1,zn,'g-','linewidth',2); %fig_
```
On ne peut retrouver x_n.

6. La réponse impulsionnelle est $h_n = \frac{1}{8}(\delta_n + 3\delta_{n-1} + 3\delta_{n-2} + \delta_{n-3})$

Exercice 2. *On considère un signal* $x(t) = \mathbf{1}_{[0,1.5[}(t) - \mathbf{1}_{[1.5,3[}(t)$ *périodique de période* 3.

1. *Sachant que la transformée de Fourier de* $\mathbf{1}_{[-1/2,1/2]}(t)$ *vaut* $\frac{\sin(\pi f)}{\pi f}$, *calculez la transformée de Fourier de* $y_1(t) = \mathbf{1}_{[0,1[}$

2. *Calculez la transformée de Fourier de* $y_2(t) = \mathbf{1}_{[0,1.5[}(t)$

3. *Calculez la transformée de Fourier de* $y_3(t) = x(t) = \mathbf{1}_{[0,1.5[}(t) - \mathbf{1}_{[1.5,3[}(t)$

4. *En remarquant les points communs entre la série de Fourier et la transformée de Fourier* $\hat{X}_k = \frac{1}{3}\hat{Y}_3(\frac{k}{3})$

5. *montrez que la transformée de Fourier de $x(t)$ est*

$$\hat{X}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2}{j\pi(2k+1)}\delta\left(f - \frac{2k+1}{3}\right)$$

Solution :

1.

$$\hat{Y}_1(f) = e^{-j\pi f}\frac{\sin(\pi f)}{\pi f}$$

2. $y_2(t) = \mathbf{1}_{[0,3/2[}(t) = y_1(\frac{2t}{3})$

$$\hat{Y}_2(f) = e^{-j\pi\frac{3f}{2}}\frac{\sin(\pi 3f/2)}{\pi f}$$

3. $y_3(t) = y_2(t) - y_2(t - \frac{3}{2})$

$$\hat{Y}_3(f) = \hat{Y}_2(f) - \hat{Y}_2(f)e^{-j\pi 3f/2} = e^{-j\pi\frac{3f}{2}}\frac{\sin(\pi 3f/2)}{\pi f}(1 - e^{-j\pi 3f}) = 2je^{-j\pi 3f}\frac{\sin^2(\pi 3f/2)}{\pi f}$$

4. On applique les transformées de Fourier sur $y_3(t)$ et sur $x(t)$ avec $T = 3$.

$$\begin{cases} \widehat{Y}_3(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} y_3(t)e^{-j2\pi ft}\,dt = \int_0^T x(t)e^{-j2\pi ft}\,dt \\ \\ \widehat{X}_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-j2\pi\frac{k}{T}t}\,dt \qquad\qquad = \frac{1}{T}\widehat{Y}_3\left(\frac{k}{T}\right) \end{cases}$$

$$\widehat{X}_0 = 0 \text{ et } \widehat{X}_k = 2je^{-j\pi k}\frac{\sin^2(\pi k/2)}{\pi k}$$

On observe que si k est paire, $\widehat{X}_k = 0$. On pose alors $k = 2k' + 1$.

$$\widehat{X}_k = 2je^{-j\pi(2k'+1)}\frac{\sin^2(\pi(2k'+1)/2)}{\pi(2k'+1)} = \frac{2}{j\pi(2k'+1)}$$

Exercice 3. *On considère un filtre défini par sa relation entrée-sortie :*

$$\frac{d}{dt}y(t) + \frac{1}{2}y(t) = x(t) - x(t-2) \tag{1}$$

1. *Trouvez sa réponse fréquentielle et montrez que le module de cette réponse fréquentielle est*

$$\left|\widehat{H}(f)\right| = \frac{4\left|\sin(2\pi f)\right|}{\sqrt{16\pi^2 f^2 + 1}}$$

2. *Représentez graphiquement le module de la réponse fréquentielle sur l'intervalle $f \in [-1, 1]$, en soignant l'échelle des abscisses.*

Solution :

1. Les propriétés de la transformée de Fourier sur le retard montre que

$$\text{TF}\left[x(t-2)\right](f) = \widehat{X}(f)e^{-4j\pi f}$$

La réponse fréquentielle est

$$\widehat{H}(f) = \frac{1 - e^{-4j\pi f}}{1/2 + 2j\pi f}$$

2.

$$\left|\widehat{H}(f)\right| = 2\frac{\left|e^{-2j\pi f}2j\sin(2\pi f)\right|}{|1+4j\pi f|} = 4\frac{|\sin(2\pi f)|}{\sqrt{1+16\pi^2 f^2}}$$

3. La courbe est sur la figure **??**.

```
f=-1:1e-3:1;
H=abs((1-exp(-4*j*pi*f))./(1/2+2*j*pi*f));
H1=4*abs(sin(pi*f*2))./sqrt(1+16*pi^2*f.^2);
figure(1); plot(f,H,f,H1,'linewidth',2);
set(gca, 'FontSize', 20, 'fontName','Times');
```

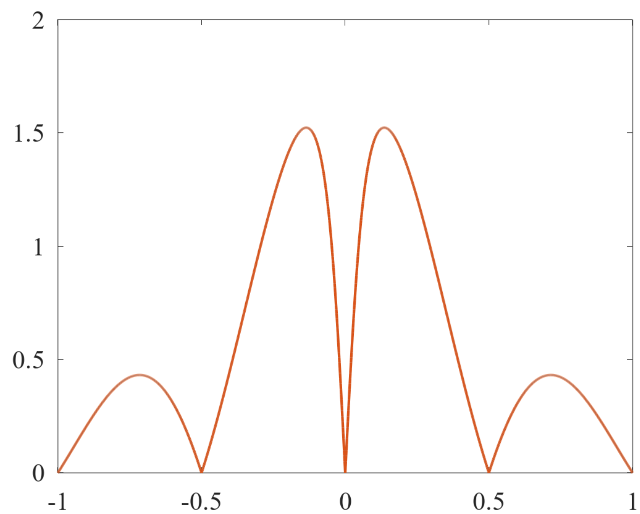

Figure 3: Module de la réponse fréquentielle Exercice 3