Examen Signal et bruit (3 heures)
Sujet à rendre avec la copie

Nom :
Prénom :

Les téléphones portables ne sont pas autorisés. Une copie double manuscrite est autorisée.

Exercice 1. *On considère la relation entrée-sortie définie par une équation différentielle.*

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t)+3\frac{d}{dt}y(t)+2y(t)=x(t)+x(t-1) \tag{1}$$

1. *Après avoir explicité la réponse fréquentielle, donnez un programme informatique permettant de calculer le module de la réponse fréquentielle.*
2. *Donnez un programme informatique permettant de calculer sa réponse impulsionnelle sans utiliser la réponse fréquentielle.*
3. *Calculez le module de sa réponse fréquentielle en la mettant sous la forme de* $\frac{\sqrt{a+b\cos(c)}}{\sqrt{df^4+ef^2+g}}$
4. *En montrant qu'il existe* α *et* β *tel que*

$$\widehat{H}(f)=\left(\frac{\alpha}{j2\pi f+1}+\frac{\beta}{j2\pi f+2}\right)\left(1+e^{-j2\pi f}\right) \tag{2}$$

calculez la réponse impulsionnelle.

Solution :

1. La réponse fréquentielle est

$$\widehat{H}(f)=\frac{1+e^{-j2\pi f}}{(j2\pi f)^2+3j2\pi f+2} \tag{3}$$

```
def H(f):
  num = 1+np.exp(-1j*2*np.pi*f)
  den = (1j*2*np.pi*f)**2+3*1j*2*np.pi*f+2
  return np.abs(num/den)
```

2. La réponse impulsionnelle que je note $h(t)$ est la sortie du filtre quand je met à l'entrée $x(t)=\delta(t)$, c'est donc la solution de

$$\frac{d^2}{dt^2}h(t)+3\frac{d}{dt}h(t)+2h(t)=\delta(t)+\delta(t-1) \tag{4}$$

Je pose $\tilde{y}(t)$ la solution de cette équation différentielle

$$\frac{d^2}{dt^2}\tilde{y}(t)+3\frac{d}{dt}\tilde{y}(t)+2\tilde{y}(t)=\delta(t) \tag{5}$$

Et le caractère temps invariant du filtre fait que $h(t)=\tilde{y}(t)+\tilde{y}(t-1)$. En effet

$$\frac{d^2}{dt^2}h(t)+3\frac{d}{dt}h(t)+2h(t)=\frac{d^2}{dt^2}\tilde{y}(t)+3\frac{d}{dt}\tilde{y}(t)+2\tilde{y}(t)+\frac{d^2}{dt^2}\tilde{y}(t-1)+3\frac{d}{dt}\tilde{y}(t-1)+2\tilde{y}(t-1)=\delta(t)+\delta(t-1) \tag{6}$$

```
t = seb.linspace(0,5,1000)
yt= seb.sol_eq_diff((1,3,2),t)
yt1= seb.sol_eq_diff((1,3,2),t-1)
h = yt+yt1
```

3. Du fait que $e^{-j2\pi f} = \cos(2\pi f) - j\sin(2\pi f)$, le module du numérateur de $\widehat{H}(f)$ est

$$|1 + e^{-j2\pi f}| = \sqrt{(1 + cos(2\pi f))^2 + \sin^2(2\pi f)} = \sqrt{1 + 2\cos(2\pi f) + \cos^2(2\pi f) + \sin^2(2\pi f)} = \sqrt{2 + 2\cos(2\pi f)} \quad (7)$$

On trouve donc

$$|\widehat{H}(f)| = \frac{\sqrt{2 + 2\cos(2\pi f)}}{\sqrt{16\pi^2 f^2 + 20\pi^2 f^2 + 4}} \quad (8)$$

4. $\alpha = 1$, $\beta = -1$.

$$h(t) = e^{-t}[\![t \geq 0]\!] + e^{-(t-1)}[\![t \geq 1]\!] - e^{-2t}[\![t \geq 0]\!] - e^{-2(t-1)}[\![t \geq 1]\!] \quad (9)$$

Exercice 2. *On considère un filtre défini par une réponse impulsionnelle $h(t) = e^{-(t+0.5)}[\![t \geq -0.5]\!](t)$ et une entrée $x(t) = \sin(2\pi t)$. On note $y(t)$ la sortie du filtre.*

1. *Calculez $y(t)$ en fonction de t, $r = \frac{1}{\sqrt{1+4\pi^2}}$ et $\phi = arctan(2\pi)$ (c'est-à-dire $\frac{1}{1+j2\pi} = re^{-j\phi}$).*

2. *Expliquez en détail le montage électronique permettant de visualiser $y(t)$ avec un oscilloscope.*

3. *Donnez le programme en Python permettant de simuler $y(t)$.*

Solution :

1. $x(t) = \sin(2\pi t)$ est périodique de période 1, ces coefficients de la série de Fourier sont $\widehat{X}_1 = \frac{1}{2j}$ et $\widehat{X}_{-1} = -\frac{1}{2j}$. La réponse fréquentielle du filtre est $\widehat{H}(f) = \frac{e^{j\pi f}}{1+j2\pi f}$. Donc les coefficients de la série de Fourier sont

$$\widehat{Y}_1 = \widehat{H}(1)\widehat{X}_1 = \frac{1}{2j}\frac{e^{j\pi}}{1+j2\pi} = 0.5jre^{-j\phi} \text{ et } \widehat{Y}_{-1} = \widehat{H}(-1)\widehat{X}_{-1} = -\frac{1}{2j}\frac{e^{-j\pi}}{1-j2\pi} = -0.5jre^{j\phi} \quad (10)$$

Finalement

$$y(t) = r\left(-\frac{1}{2j}e^{-j\phi+j2\pi t} + \frac{1}{2j}e^{+j\phi-j2\pi t}\right) = -r\sin(2\pi t - \phi) \quad (11)$$

2. Je considère un montage RC composé d'un générateur basse fréquence, un condensateur $C = 1\mu\text{F}$ et une résistance $R = 1\text{M}\Omega$. Je mesure la sortie aux bornes du condensateur et j'impose en entrée un signal $x(t)$, cela me permet de réaliser un filtre de réponse impulsionnelle $h_1(t) = e^{-t}[\![t \geq 0]\!]$. Pour avoir $y(t)$ en sortie, j'avance l'entrée de 0.5s. J'impose en entrée une tension $x(t) = \sin(2\pi(t + 0.5)) = \sin(2\pi t + \pi) = -\sin(2\pi t)$.

3.
```
t = seb.linspace(-2,5,1000)
h = np.exp(-(t+0.5))*(t>=-0.5)+0
x = np.sin(2*np.pi*t)
y = seb.convolution(t,x,t,h,t)
```

Exercice 3. *On considère un filtre défini par sa réponse impulsionnelle $h(t)$. On place en entrée de ce filtre un signal déterministe $x(t)$ et on note $y(t)$ le signal déterministe en sortie de ce filtre. On note $R_x(t)$ l'autocorrélation de $x(t)$ défini par*

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t-\tau)\,dt \quad (12)$$

Proposez **une** *réponse impulsionnelle de la forme $h(t) = \alpha\delta(t-\beta) + \gamma\delta(t-\epsilon)$ telle que*

$$E_y = E_x + R_x(-1) \quad (13)$$

E_x et E_y sont les énergies associées à $x(t)$ et $y(t)$.

Solution : La relation entrée-sortie est :

$$y(t) = \alpha x(t-\beta) + \gamma x(t-\epsilon) \quad (14)$$

Après calcul,

$$E_y = (\alpha^2 + \gamma^2)E_x + 2\alpha\gamma R_x(\beta - \epsilon) \quad (15)$$

Je choisis $\beta = 0$, $\epsilon = 1$, $\alpha = \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Exercice 4. *On considère une réponse impulsionnelle $h_1(t)$ et la même mais retardée $h_2(t) = h_1(t-1)$. On note $R_{h_1}(t)$ et $R_{h_2}(t)$ les autocorrélations de $h_1(t)$ et $h_2(t)$.*

$$R_h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)h(\tau - t)\, d\tau \tag{16}$$

1. *Proposez une relation en $R_{h_2}(t)$ et $R_{h_1}(t)$*
2. *Démontrez cette relation.*
3. *Donnez un programme en Python permettant de vérifier expérimentalement cette affirmation en tirant aléatoirement le retard et un ensemble de paramètres utilisé pour définir des réponses impulsionnelles.*

1.

$$R_{h_2}(t) = R_{h_1}(t) \tag{17}$$

2.

$$R_{h_2}(t) = \mathrm{TF}^{-1}\left|\mathrm{TF}[h_2(t)]\right|^2 = \mathrm{TF}^{-1}\left|e^{-j2\pi f}\mathrm{TF}[h_1(t)]\right|^2 = \mathrm{TF}^{-1}\left|\mathrm{TF}[h_1(t)]\right|^2 = R_{h_1}(t) \tag{18}$$

3. L'idée que je propose pour le programme est d'abord de calculer une échelle de temps `t`, puis de tirer aléatoirement des coefficients $a_0, \dots a_5$ et à partir de ces coefficients de définir une réponse impulsionnelle

$$h_1(t) = a_0\Pi((t-a_1)/a_2) + a_3\mathbb{C}((t-a_4)/a5) \tag{19}$$

Je calcule $h_2(t) = h_1(t-1)$ et ensuite pour une nouvelle échelle de temps t_r, les autocorrélations pour ensuite voir si effectivement elles sont similaires en les affichant sur un graphique.

```
import seb
plt,np = seb.debut()
import numpy.random as nr
fe  = 2000
t   = seb.arange(0,50,1/fe)
tr  = seb.arange(-20,20,1/fe)
a   = nr.uniform(0.1,3,6)
h1  = a[0]*seb.fonction_P((t-a[1])/a[2])+a[3]*seb.fonction_P((t-a[4])/a[5])
h2  = a[0]*seb.fonction_P((t-1-a[1])/a[2])+a[3]*seb.fonction_P((t-1-a[4])/a[5])
Rh1 = seb.correlation(t,h1,t,h1,tr)
Rh2 = seb.correlation(t,h2,t,h2,tr)
plt.close('all')
fig,ax = plt.subplots()
ax.plot(tr,Rh1)
ax.plot(tr,Rh2)
plt.tight_layout()
fig.show()
```

Exercice 5. *On considère un processus aléatoire*

$$\vec{X}(t) = \vec{A}e^{-t}[\![t \geq \vec{B}]\!](t) \tag{20}$$

$\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent respectivement une loi gaussienne centrée d'écart-type 1 *et une loi uniforme sur* $[0, 2]$.

1. *Dessinez trois trajectoires de $\vec{X}(t)$.*
2. *Calculez $E[\vec{A}]$ et $E[\vec{A}^2]$. Calculez $P(\alpha\vec{A} \leq 1)$ pour $\alpha \geq 0$ en séparant le cas où $\alpha = 0$ et $\alpha \neq 0$.*
3. *Calculez $P(\vec{B} < b)$ en utilisant les opérateurs* min *et* max*. Montrez que $E\left[\frac{e^{2\vec{B}}-e^{-2\vec{B}}}{2}\right] = \frac{e^4-e^{-4}-2}{8}$*

4. *On définit une variable aléatoire* $\overset{r}{E}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \overset{r}{X}^2(t)\,dt$ *Calculez* $E[\overset{r}{E}_x]$.

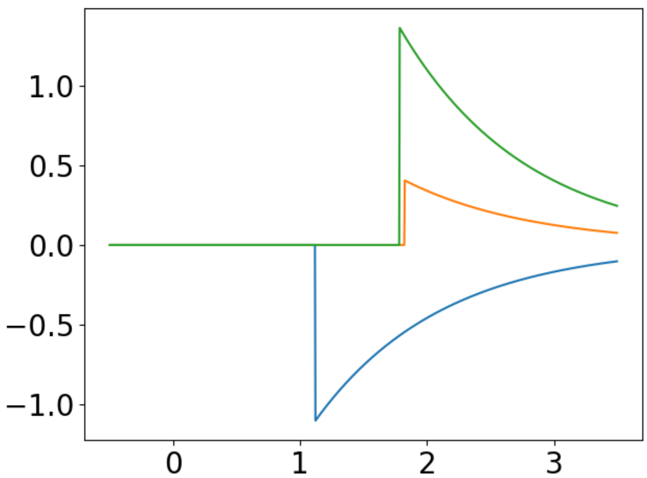
5. *On définit un signal déterministe* $y(t) = P(\overset{r}{X}(t) \leq 1)$. *Calculez* $y(t)$.

6. *Écrivez des programmes estimant toutes ces quantités.*

On rappelle qu'une variable aléatoire gaussienne de moyenne μ *et d'écart-type* σ *a une densité de probabilité définie* $f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, *que* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$ *et que* $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathit{erf}\left(\frac{a-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)$

Solution :

1.
```
t = seb.linspace(-2,2,1000)
A = nr.normal(0,1,3)
B = nr.uniform(0,1,3)
x0 = A[0]*np.exp(-(t-B[0]))*(t>=B[0])
x1 = A[1]*np.exp(-(t-B[1]))*(t>=B[1])
x2 = A[2]*np.exp(-(t-B[2]))*(t>=B[2])
```



2.

$$\mathrm{E}[\overset{r}{A}] = 0 \text{ et } \mathrm{E}[\overset{r}{A}^2] = 1^2 + 0^2 = 1 \tag{21}$$

$$\mathrm{P}(\alpha\overset{r}{A} \leq 1) = \begin{cases} 1 \text{ si } \alpha = 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{1}{\alpha\sqrt{2}}\right) \text{ si } \alpha > 0 \end{cases} \tag{22}$$

3. $\mathrm{P}(\overset{r}{B} \leq b)$ vaut 0 si $b \leq 0$ et 1 si $b \geq 2$. Entre ces deux valeurs, on a

$$\mathrm{P}(\overset{r}{B} \leq b) = \int_0^b \frac{db'}{2} = \frac{b}{2} \tag{23}$$

On peut résumer ces différentes fonctions avec

$$\mathrm{P}(\overset{r}{B} \leq b) = \max(\min(1, b/2), 0) \tag{24}$$

La densité de probabilité de $\overset{r}{B}$ étant $[\![0 \leq b \leq 2]\!](t)/2$

$$\mathrm{E}\left[\frac{e^{2\overset{r}{B}} - e^{-2\overset{r}{B}}}{2}\right] = \int_0^2 \left(\frac{e^{2b} - e^{-2b}}{4}\right) db = \frac{e^4 + e^{-4} - 2}{8} \tag{25}$$

4.

$$E_x = \overset{r}{A}^2 \int_{\overset{r}{B}}^{+\infty} e^{-2t}\,dt = \overset{r}{A}^2 \left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_{\overset{r}{B}}^{+\infty} = \frac{\overset{r}{A}^2}{2} e^{-2\overset{r}{B}} \tag{26}$$

Comme $\overset{r}{A}$ et $\overset{r}{B}$ sont indépendante,

$$\mathrm{E}[E_x] = \frac{\mathrm{E}[\overset{r}{A}^2]}{2} \mathrm{E}\left[e^{-2\overset{r}{B}}\right] = \frac{1-e^{-4}}{8} \tag{27}$$

En effet

$$\mathrm{E}\left[e^{-2\overset{r}{B}}\right] = \int_0^2 e^{-2b}\frac{db}{2} = \frac{1-e^{-4}}{4} \tag{28}$$

5. En utilisant les probabilités conditionnelles,

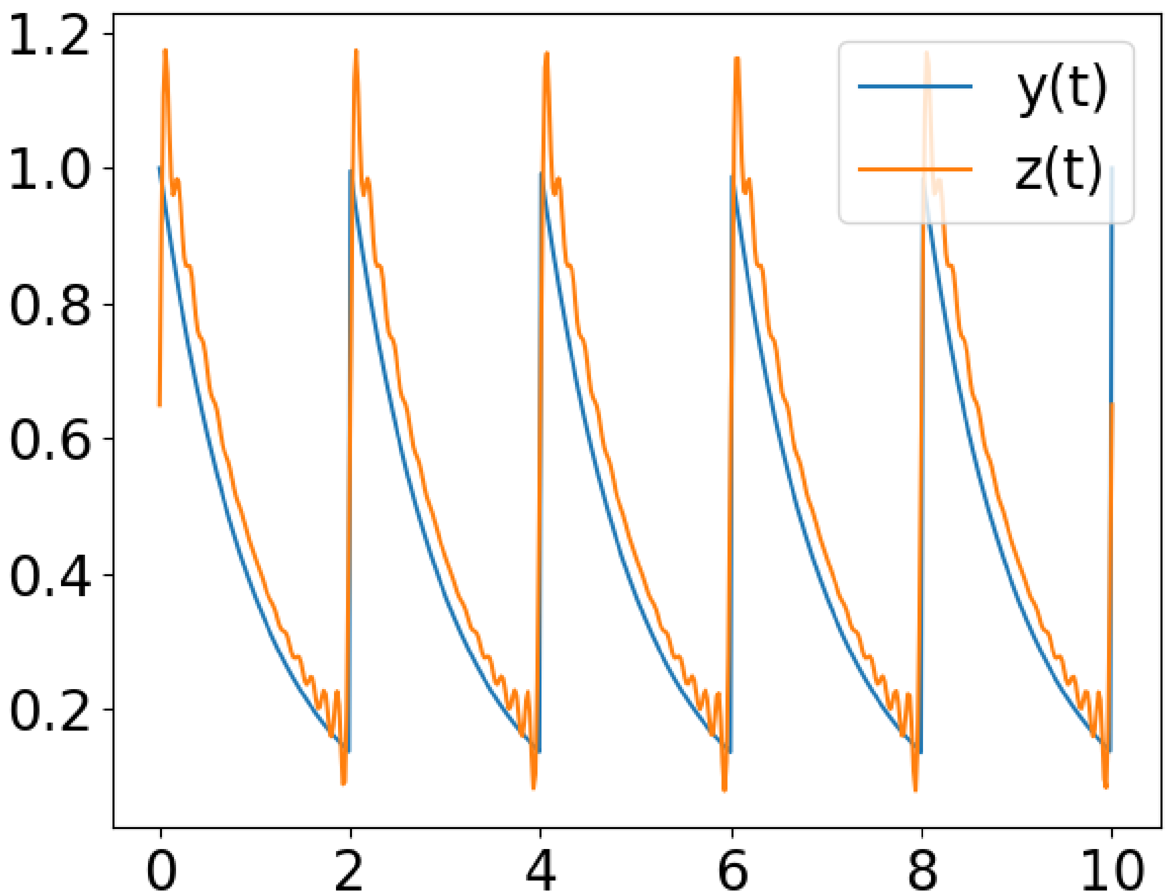
$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\overset{r}{X}(t) \leq 1) &= \mathrm{P}(\overset{r}{A}e^{-t} \leq 1)\mathrm{P}(\overset{r}{B} \leq t) + \mathrm{P}(0 \leq 1)\mathrm{P}(\overset{r}{B} > t) \\ &= \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\mathrm{erf}\left(\tfrac{e^t}{\sqrt{2}}\right)\right) \max(\min(1, t/2), 0) + (1 - \max(\min(1, t/2), 0)) \end{aligned} \tag{29}$$

6. J'ai rajouté des boucles du fait que $\mathrm{E}[e^{-2B}]$ ne converge pas bien.

```
t = nr.normal(0,1)
K = 10**6
L = 10**4
A = nr.normal(0,1,K)
A_th = 0
A2_th = 1
print(f"{np.mean(A)-A_th=:.2g} {np.mean(A**2)-A2_th=:.2g}")
val = 0
for _ in range(L):
B = nr.uniform(0,2,K)
B_exp = (np.exp(2*B)-np.exp(-2*B))/2
val += np.mean(B_exp)/L

B_exp_th = (np.exp(4)+np.exp(-4)-2)/8
B_t = (B<=t).astype(np.float64)
B_t_th = np.maximum(0,np.minimum(1,t/2))
print(f"{np.mean(B_exp)-B_exp_th=:.2g} ")
print(f"{np.mean(B_t)-B_t_th=:.2g}")

t = nr.normal(0,1)+1
K = 10**7
L = 10**4
A = nr.normal(0,1,K)
B = nr.uniform(0,2,K)
x = (A*np.exp(-t)*(t>=B)).astype(np.float64)

P = np.mean(x<=1)
P_th = (1/2+1/2*seb.erf(np.exp(t)/np.sqrt(2)))* \
np.maximum(np.minimum(1,t/2),0)+\
(1-np.maximum(np.minimum(1,t/2),0))
print(f"{t=:.2f} {P-P_th=:.2g}  {P=:.2g} {P_th=:.2g}")
```

Exercice 6. *On considère deux programmes définis par deux fonctions* `fct1` *et* `fct2`*.*

```
def fct1():
  import seb
  plt,np = seb.debut()
  t=np.linspace(0,50,5000)
  x=np.exp(-t)
  f=np.linspace(-20,20,5000)
  X1=1/(1+1j*2*np.pi*f)
  X2=seb.TF(t,x,f)
  print(f"np.max(np.abs(X1-X2)):.3g")

def fct2():
  t=np.linspace(0,10,500)
  y=np.exp(-(np.mod(t,2)))
  z=np.zeros(len(t))
  for k in range(-15,15):
    z += 1/(1+1j*2*np.pi*k/2) \
    /2*np.exp(1j*2*np.pi*k*t/2)
  plt.close('all')
  fig,ax = plt.subplots()
  ax.plot(t,y,label='y(t)')
  ax.plot(t,z,label='z(t)')
  plt.tight_layout()
  fig.show()
```



1. *Expliquez ce que fait* `fct1`*. Le programme affiche la valeur* 0.00497*, que pouvez-vous en déduire ?*

2. *Le programme* `fct2` *affiche la courbe ci-dessus. Expliquez ce qu'est* $y(t)$*.*

   La fonction `np.mod` *en réalité* `numpy.mod` *appliqué au vecteur* `t` *et à une valeur* `T`*, donne un vecteur dont les valeurs sont le reste de la division euclidienne de chaque composante de* `t` *par* `T`*.*

Ainsi `print(np.mod(np.array([0,4,5,14,13,12,30,31,32]),3))` *produit*
`[0 1 2 2 1 0 0 1 2]`

3. *Expliquez ce qu'est $z(t)$.*

4. *Expliquez où se trouve l'erreur qui explique que $y(t) \neq z(t)$.*

5. *Écrivez le programme de façon que $y(t) = z(t)$.*

Solution :

1. Ce résultat montre pour tout $f \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{1+j2\pi f} \approx \text{TF}[e^{-t}[\![t \geq 0]\!](t)](f) \tag{30}$$

2. $y(t)$ désigne le signal périodique qui vaut e^{-t} pour $t \in [0, 2[$. Ceci est confirmé par le graphique.

3. $z(t)$ est la reconstruction de $y(t)$ en utilisant les coefficients de la série de Fourier de $y(t)$ noté $\widehat{Y}_k$ en utilisant la périodicité $T = 2$.

$$z(t) = \sum_{k=-15}^{+15} \widehat{Y}_k e^{j2\pi k \frac{t}{2}} \tag{31}$$

Les coefficients de la série de Fourier sont calculés à partir de la transformée de Fourier de $e^{-t}[\![t \geq 0]\!]$ qui vaut $\frac{1}{1+j2\pi f}$ et donne des coefficients de la série de Fourier

$$\widehat{Y}_k = \frac{1}{2} \frac{1}{1+j2\pi\frac{k}{2}} \tag{32}$$

4. Les vrais coefficients de la série de Fourier notés ici $\widehat{Y}_k^*$ doivent être calculés à partir de la transformée de Fourier de $e^{-t}[\![0 \leq t \leq 2]\!](t)$ et non $e^{-t}[\![t \geq 0]\!]$.

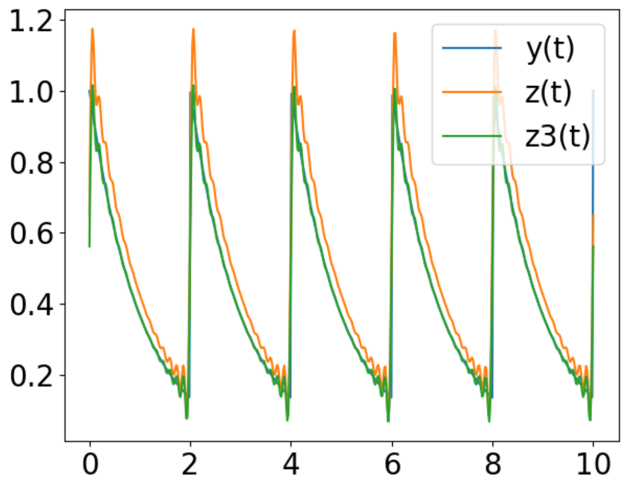
5.

$$\text{TF}[e^{-t}[\![0 \leq t \leq 2]\!](t)](f) = \frac{1-e^{-(1+j2\pi f)2}}{1+j2\pi f} \tag{33}$$

Ce qui conduit à

$$\widehat{Y}_k^* = \frac{1}{2} \frac{1-e^{-(1+j2\pi\frac{k}{2})2}}{1+j2\pi\frac{k}{2}} \tag{34}$$

```
def fct3():
  t=np.linspace(0,10,500)
  y=np.exp(-(np.mod(t,2)))
  z=np.zeros(len(t),dtype=complex)
  for k in range(-15,15):
    Y2k= 1/(1+1j*2*np.pi*k/2)/2*(1-np.exp(-(1+1j*2*np.pi*k/2)*2))
    z += Y2k*np.exp(1j*2*np.pi*k*t/2)
  return t,y,np.real(z)
```



Exercice 7. *On considère* $x(t) = e^{-2t}[\![t \geq 0]\!](t)$ *et* $y_n = \frac{1}{2^n}[\![n \in \mathbb{N}]\!](n)$*.*

1. *Pour quelle fréquence d'échantillonnage* f_e*,* y_n *est l'échantillonnage de* $x(t)$ *?*
2. *Pourquoi devrait-on plutôt considérer* $y_n = \frac{1}{2^n}[\![n \in \mathbb{N}]\!](n) - 0.5\delta_n$ *?*
3. *Quelle relation a-t-on entre* $\widehat{Y}(f)$ *et* $\widehat{X}(f)$*.* $\widehat{Y}(f)$ *et* $\widehat{X}(f)$ *sont les transformées de Fourier de* y_n *et* $x(t)$*.*

Solution :

1. Je choisis $T_e = \frac{\ln(2)}{2}$ En effet

$$x(nT_e) = e^{-2nT_e}[\![n \geq 0]\!] = e^{-2n\frac{\ln(2)}{2}}[\![n \geq 0]\!] = e^{n\ln(1/2)}[\![n \geq 0]\!] = \frac{1}{2^n}[\![n \geq 0]\!] = y_n \tag{35}$$

2. Il n'y a pas pas de discontinuités pour $x(t)$ pour $t = nT_e$ quand $n \neq 0$. Mais pour $n = 0$, $x(0^+) = 1$ et $x(0^-) = 0$ et donc il faut prendre $y_0 = 0.5(1 + 0) = 0.5 = 1 - 0.5$. Je retranche donc 0.5 pour $n = 1$, ce qui donne le résultat $y_n = \frac{1}{2^n}[\![n \geq 0]\!] - 0.5\delta_n$.

3. Ici $f_e = 1/T_e = \frac{2}{\ln(2)}$.

$$\widehat{Y}(f) = f_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{X}(f - kf_e) \tag{36}$$