Examen traitement numérique du signal
Partiel 2

Mercredi 17 décembre

Durée : 1h30

Une copie double manuscrite est autorisée. Le téléphone portable est interdit. À l'issue de l'épreuve, le **sujet est à rendre** avec la copie.

NOM : **Prénom :**

θ	0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\theta$	1	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\theta$	0	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan\theta$	0	$\sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{5}}}$	$\sqrt{2}-1$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$e^{j\theta}$	1		$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\left(1-j+j\sqrt{2}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{j}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}(1+j)$	$\frac{1}{2}+\frac{j\sqrt{3}}{2}$	j

Exercice 1. *On considère un signal $u(t) = \cos(8\pi t)$ et $v(t) = u(2t)$.*

1. *Quelle est la période de $v(t)$?*
2. *Sachant que la transformée de Fourier de $e^{2j\pi f_0 t}$ est $\delta(f - f_0)$ en déduire la transformée de Fourier de $u(t)$, notée $\hat{U}(f)$.*
3. *Est-ce que la relation entre $u(t)$ et $v(t)$ est linéaire ?*
4. *Quelle est la transformée de Fourier de $v(t)$, notée $\hat{V}(f)$?*
5. *En comparant $\hat{U}(f)$ et $\hat{V}(f)$, peut-on y voir une confirmation de la troisième question ?*

Solution :

1. $v(t) = \cos(8\pi\times 2t) = \cos(2\pi 8t)$, $v(t)$ est donc une sinusoïde de fréquence 8Hz et de période $\frac{1}{8}$s
2. $u(t) = \frac{1}{2}e^{j2\pi 4t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi 4t}$. Aussi par linéarité, $\widehat{U}(f) = \frac{1}{2}\delta(f-4) + \frac{1}{2}\delta(f+4)$ L'unité de la fréquence est le Hz.
3. La relation entre $u(t)$ et $v(t)$ est linéaire, plus précisément la transformation qui à un signal $x(t)$ associe $y(t) = x(2t)$ est une relation linéaire. Soit α et β deux réels et $x_1(t)$ et $x_2(t)$ deux signaux. Soit $y_1(t)$ et $y_2(t)$ les signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$ transformés par cette relation : $y_1(t) = x_1(2t)$ et $y_2(t) = x_2(2t)$. Soit $x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$. Soit $y(t)$ le signal $x(t)$ transformé par cette même relation : $y(t) = x(2t)$ On a bien une relation linéaire :

$$y(t) = x(2t) = \alpha x_1(2t) + \beta x_2(2t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$

La relation n'est pas temps invariant. En effet,

Soit $u_1(t) = \mathbf{1}_{[0,1]}(t)$ alors $v_1(t) = \mathbf{1}_{[0,\frac{1}{2}]}(t)$.

Soit $u_2(t) = u_1(t-1) = \mathbf{1}_{[1,2]}(t)$ alors $v_2(t) = \mathbf{1}_{[\frac{1}{2},1]}(t) \neq v_1(t-1) = \mathbf{1}_{[1,\frac{3}{2}]}(t)$.

Ceci est contradictoire avec l'invariance dans le temps.

```
cd L:\t1\TNS\XEX\FIG
t=-0.1:1e-2:4.1;
x=(cos(2*pi*t)>0);
[B,A]=butter(2,0.05);
disp(B), disp(A),
y=x;
for k=1:4 y=filter(B,A,y); end
figure(1); plot(1:length(x),x,'linewidth',2,1:length(y),y,'linewidth',2);
set(gca,'FontSize',20);
saveas(1,'fig_xex124a.png');
[H,W]=freqz(B,A);
figure(2); subplot(211); plot(W,abs(H),'linewidth',2);
set(gca,'FontSize',20); grid;
subplot(212); plot(W,angle(H),'linewidth',2);
set(gca,'FontSize',20);
saveas(2,'fig_xex124b.png');
0.0055427   0.0110854   0.0055427
1.00000  -1.77863   0.80080
```

Table 1: Simulation de l'exercice 2

4. $v(t) = \cos(16\pi t)$ et donc $\widehat{V}(f) = \frac{1}{2}\delta(f-8) + \frac{1}{2}\delta(f+8)$. On pourrait dire aussi que c'est une propriété de la série de Fourier. Lorsqu'on contracte un signal périodique, les coefficients $\widehat{X}_k$ restent identiques mais les fréquences associées ne sont plus les mêmes, elles sont contractées. Ainsi on a la propriété suivante :

$$\widehat{V}(f) = \widehat{U}\left(\frac{f}{2}\right)$$

5. Si la relation entre $u(t)$ et $v(t)$ était linéaire et temps invariante, il existerait $\widehat{H}(f)$ tel que $\widehat{V}(f) = \widehat{H}(f)\widehat{U}(f)$. Mais cette relation n'est pas possible car aucune valeur de $\widehat{H}(f)$ ne peut transformer une valeur nulle en un Dirac. Donc la relation entre $u(t)$ et $v(t)$ n'est pas à la fois linéaire et temps invariante.

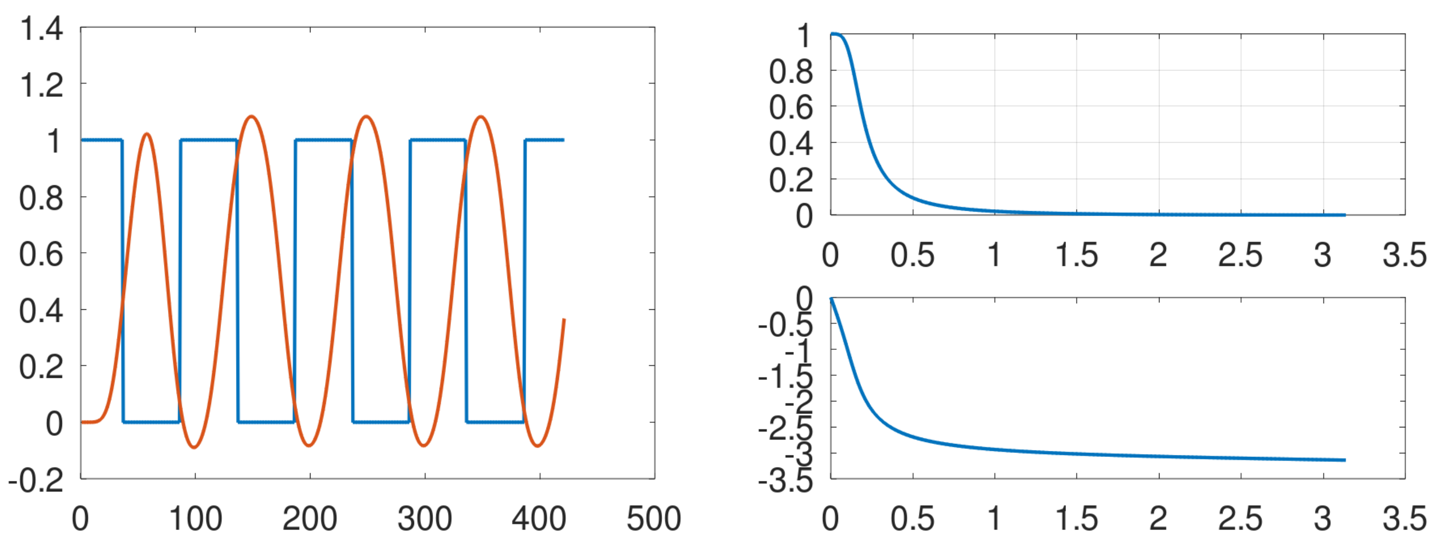

Figure 1: À gauche : signal rectangulaire (x_n) et signal filtré (y_n). À droite : réponse fréquentielle associée au vecteur `A` et `B`. Exercice 2.

Exercice 2. *() On réalise la simulation écrite dans l'encadré .*

1. *Sur la gauche de la figure 1, l'échelle des abscisses n'est pas correcte. En considérant l'encadré, quelle serait la première valeur t_0, la dernière valeur t_∞ et la fréquence d'échantillonnage f_e ?*

2. *Les valeurs respectives des deux vecteurs lignes* `A` *et* `B` *sont affichés à la fin de l'encadré . Donnez la relation entrée sortie du filtre associée à ces deux vecteurs.*

3. *La réponse fréquentielle est affichée à droite de la figure 1. Donnez approximativement la fréquence de coupure du filtre représenté. Décrivez le calcul à faire et l'approximation que vous considérez.*

4. *Sur la gauche de la figure 1, la courbe approximativement sinusoïdale représente le vecteur* `y` *calculé avec la boucle* `for` *répétant quatre fois l'instruction de filtrage. Donnez la fonction de transfert $H(z)$ associée à la transformation de* `x` *en* `y`*.*

5. *La fréquence de coupure associée à $H(z)$ est-elle plus faible, identique ou plus élevée que celle estimée à la question 3. Justifiez votre réponse.*

6. *Quelle devrait être la fréquence de coupure d'un filtre transformant le signal* `x` *en un signal* `y` *approximativement sinusoïdal ? Justifiez votre réponse en estimant grossièrement la transformée de Fourier de* `x`*.*

Solution :

1. $t_0 = -0.1$s, $t_\infty = 4.1$s et $f_e = \frac{1}{1e-2} = 100$Hz.
2. $$y_n - 1.77y_{n-1} + 0.801y_{n-2} = 0.0056x_n + 0.011x_{n-1} + 0.0055x_{n-2} \tag{1}$$
3. On lit sur la courbe en haut à droite de la figure 1 que $W = 0.16\text{rad.s}^{-1}$. Ceci signifie $f_c = \frac{W}{2\pi} f_e = 2.5$Hz.
4. $$H(z) = \left(\frac{0.0055 + 0.011z^{-1} + 0.0055z^{-2}}{1 - 1.78z^{-1} + 0.801z^{-2}}\right)^4 \tag{2}$$
5. Je note H_o la fonction de transfert associé à `B` et `A`. La fréquence de coupure de H est plus faible parce que
$$|\widehat{H}(f_c)| = |\widehat{H}_o(f_c)|^4 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 = 0.25 < \sqrt{2}/2 \tag{3}$$
Comme $f \mapsto \left|\widehat{H}\right|$ est approximativement décroissante, la fréquence de coupure de H_o est plus faible.
6. Le signal $x(t)$ est périodique de période 1s, il a donc des raies en 0Hz, 1Hz et tous les multiples de 1Hz. Il faut que la fréquence de coupure soit supérieure à 1Hz et inférieure à 2Hz.

Exercice 3. *On considère le filtre dont la relation entrée sortie est définie par*

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + \frac{d}{dt}y(t) + y(t) = x(t)$$

On considère la fréquence d'échantillonnage $f_e = 10$Hz. On utilise la transformée bilinéaire pour discrétiser ce filtre.

1. *Trouvez la relation entrée-sortie du filtre numérique discrétisé* [1]*.*

2. *Calculez le module de la réponse fréquentielle du filtre ainsi discrétisé.*

Solution :

[1]Trouvez la relation qui lie x_n à y_n

1. Le filtre analogique a pour fonction de transfert.

$$H(p) = \frac{1}{p^2 + p + 1}$$

On trouve le filtre numérique en remplaçant p par $\frac{2}{T_e}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$

$$H^{\#}(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{(1 + 2f_e + 4f_e^2) + 2(1 - 4f_e^2)z^{-1} + (1 - 2f_e + 4f_e^2)z^{-2}}$$

On en déduit la relation entrée-sortie

$$421y_n - 798y_{n-1} + 381y_{n-2} = x_n + 2x_{n-1} + x_{n-2}$$

2. On a tout d'abord le module de la réponse fréquentielle du filtre analogique.

$$\left|\widehat{H}(f)\right| = \frac{1}{\sqrt{1 - 4\pi^2 f^2 + 16\pi^4 f^4}}$$

On applique la transformée non-linéaire des fréquences $f = \frac{f_e}{\pi}\tan\left(\frac{\pi f^{\#}}{f_e}\right)$

$$\left|\widehat{H}^{\#}(f^{\#})\right| = \left|\widehat{H}(f)\right| = \frac{1}{\sqrt{1 - 4f_e \tan^2\left(\frac{\pi f^{\#}}{f_e}\right) + 16f_e^4 \tan^4\left(\frac{\pi f^{\#}}{f_e}\right)}}$$