

Utilisation de logiciels de calcul formel

Dans ce document, je voudrai montrer comment réaliser un calcul formel. Je propose deux outils. Le premier est le site de Wolfram.

<https://www.wolframalpha.com/>

Le deuxième est l'utilisation de la toolbox `symbolic` dans Octave. Ce qui est possible aussi en ligne avec

<https://octave-online.net/>

L'utilisation d'octave avec la toolbox `symbolic` a l'avantage de pouvoir être utilisé hors ligne, mais son installation présente quelques difficultés présentées dans l'annexe A. Le site Wolfram me semble de loin le plus intéressant.

1 Dérivation et intégration

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{-1}{x^2}$$

Wolfram:

derivative of 1/x

Octave:

```
syms x
diff(1/x,x)
help @sym/diff
```

$$\int_1^x \left(\frac{1}{t} \right) dt = \ln(x) + C^{te}$$

Wolfram:

integral of 1/x

Octave:

```
syms x
int(1/x,x)
help @sym/int
```

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{t^2 + 1} \right) dt = \pi$$

Wolfram:

integral of 1/(x^2+1) between -infinity and +infinity

Octave:

```
syms x
int(1/(x^2+1),x,-Inf,Inf)
help @sym/int
```

2 Exemples de signaux

L'indicatrice n'est pas vraiment défini mais on peut l'obtenir comme soustraction deux fonctions échelons.

$$\mathbf{1}_{[2,3]}(t)$$

Wolfram:

```
theta(x-2)-theta(x-3)
```

Octave:

```
syms x
heaviside(x-2)-heaviside(x-3)
help @sym/heaviside
```

La distribution Dirac est définie

$$\int_{-2}^2 \delta(x) dx = 1$$

Wolfram:

```
integral of dirac(x) between -2 and 2
```

Octave:

```
syms x
int(dirac(x), -2, 2)
help @sym/dirac
```

Cela peut ne pas forcément fonctionner au premier essai.

3 Transformée de Fourier

$$\mathcal{TF}[\mathbf{1}_{[2,3]}(t)](\nu) = \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu} e^{-i5\pi\nu}$$

Wolfram:

```
fourier transform of theta(x-2)-theta(x-3)
```

Il faut ensuite transformer le résultat

$$\mathcal{TF}[x(t)](\nu) = \sqrt{2\pi} \mathcal{TF}_{\text{Wolfram}}[x(t)](-2\pi\nu) \quad (1)$$

Si on fait la transformée de Fourier de l'échelon d'Heaviside, le résultat comporte aussi un dirac.

Octave:

```
syms x
fourier(heaviside(x-2)-heaviside(x-3))
help @sym/fourier
```

Il faut ensuite transformer le résultat

$$\mathcal{TF}[x(t)](\nu) = \mathcal{TF}_{\text{Octave}}[x(t)](2\pi\nu) \quad (2)$$

Si on fait la transformée de Fourier de l'échelon d'Heaviside, le résultat omet le dirac.

4 Série de Fourier

On considère $x(t) = \mathbf{1}_{[0, \frac{1}{2}]}(t)$ périodique de période 1.

$$X_k = \frac{1 - (-1)^k}{i2\pi k}$$

Wolfram: Dans ce site, le signal est supposé périodique de période 2π . Au moyen d'une dilatation de l'échelle des temps, on définit $y(t) = x(\frac{t}{2\pi}) = \mathbf{1}_{[0, \pi]}(t)$ pour $t \in [0, 2\pi[$. On sait que la dilatation de l'échelle des temps ne modifie pas les coefficients de la série de Fourier.

```
fourier series (theta(x)-theta(x-pi), x, 6)
```

Ici on ne peut lire que les coefficients Y_k pour $k \in \{-6, \dots, 6\}$. Ce sont les coefficients devant les termes e^{ikx} .

Octave: Il semble que la série de Fourier n'est pas encore implémentée. Cela étant, on peut tout simplement poser $z(t) = x(t)\mathbf{1}_{[0, 1]}(t)$ un signal non-périodique, calculer sa transformée de Fourier et en déduire les coefficients X_k avec $X_k = Z(k)$.

```
syms x
fourier (heaviside(x)-heaviside(x-0.5))
```

Il faut ensuite transformer le résultat

$$X_k = \mathbb{TF}_{\text{Octave}}[z(t)](2\pi k) = -\frac{i}{2k\pi} + \frac{ie^{-i\pi k}}{2k\pi} = -i \frac{1 - (-1)^k}{2k\pi} \quad (3)$$

Si on fait la transformée de Fourier de l'échelon d'Heaviside, le résultat omet le dirac.

5 Graphique

On cherche à représenter les fonctions suivantes

$$\nu \mapsto |\mathbb{TF}[\mathbf{1}_{[2,3]}(t)](\nu)| \text{ et } \nu \mapsto \arg(\mathbb{TF}[\mathbf{1}_{[2,3]}(t)](\nu))$$

Wolfram:

```
abs(fourier transform of theta(x-2)-theta(x-3))
arg(fourier transform of theta(x-2)-theta(x-3))
```

Octave:

```
syms x
spectre=fourier (heaviside(x-2)-heaviside(x-3))
ezplot(abs(spectre))
ezplot(angle(spectre))
help @sym/ezplot
```

A Installation d'octave avec sa toolbox symbolic

Octave peut s'installer depuis

<https://www.gnu.org/software/octave/index>

Il est nécessaire d'installer python3. Si vous ne l'avez sur votre ordinateur, il semble conseillé d'utiliser

<https://github.com/cbm755/octsympy/releases>

Il semble que le module de python requis soit `Sympy`. Ce qui peut par exemple se faire avec Anaconda

```
conda update sympy
```

Sous Windows, il peut être utile de donner un sens à la commande `python` dans une fenêtre dos quelconque, pour cela il faut ajouter à la variable d'environnement `PATH`, le répertoire contenant le programme `python.exe`. Une façon de faire est taper `cmd` suivi de `shift+ctr+enter` pour ouvrir en mode administrateur une fenêtre Dos, puis taper `control` puis `system` puis paramètres avancés et variables d'environnement et rajouter une ligne à la liste des contenus de `PATH`. Il peut être utile de donner à la variable d'environnement `PYTHON` sous Octave le chemin et le nom du programme `python.exe`

```
setenv PYTHON
\end{document}
suivi sur la même ligne du chemin et de {\tt python.exe}.
```

Sous Octave, il reste à taper les commandes

```
\begin{verbatim}
pkg install -forge symbolic
pkg load symbolic
```

Le bon fonctionnement peut être testé avec

```
syms x
factor(x^2-x-6)
```

Dans le cas où cela ne fonctionne pas, il y a encore les commandes suivantes qui peuvent aider.

```
sympref reset
sympref diagnose
```