

Introduction au signal et bruit

Exercices

Gabriel Dauphin

September 4, 2025

Contents

1	Relations entrées-sorties sans effet mémoire	2
2	Signaux temps continu, fonction affine par morceaux	3
3	Définition et utilisation de la transformée de Fourier	4
4	Propriété de la transformée de Fourier	5
5	Diracs	6
6	Transformées de Fourier, dérivation et équations différentielles	7
7	Filtres et effet mémoire	9
8	Description fréquentielle des filtres	10
9	Signaux périodiques	11
10	Filtres agissant sur des signaux périodiques	12
11	Échantillonnage d'un signal non-périodique	13
12	Peigne de Diracs	14
13	Modélisation stochastique du bruit	15
14	Filtrage des processus aléatoires	16
15	Autocorrélation et densité spectrale	17
15.1	Exercices	17

Chapter 1

Relations entrées-sorties sans effet mémoire

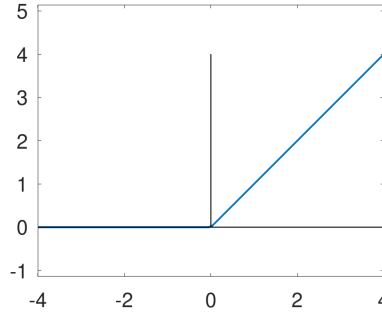


Figure 1.1

Exercice 1 Le graphique représente la relation entrée-sortie d'un Relu pour Rectified Linear Unit.

1. En utilisant la figure 1.1, combien valent les signaux en sortie lorsque respectivement, les signaux en entrées valent -3 et 3 ?
2. Combien valent les puissances de ces signaux ?
3. Proposez une formule utilisant la valeur absolue, l'addition et la multiplication pour modéliser cette relation ?
4. On considère le filtre $\mathcal{H}_1(x) = 0.5x$ et $\mathcal{H}_2(x) = |x|$, montrez comment en les associant on peut fabriquer le filtre Relu.
5. Écrire le pseudo-code permettant de générer la figure 1.1.

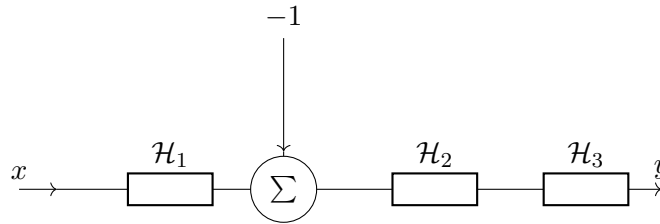


Figure 1.2

Exercice 2 Les filtres \mathcal{H}_1 , \mathcal{H}_2 et \mathcal{H}_3 sont définis par

$$\mathcal{H}_1(x) = |x| \quad \mathcal{H}_2(x) = \min(1, x) \quad \mathcal{H}_3(x) = \max(0, x) \quad (1.1)$$

On appelle \mathcal{H} le filtre décrit par la figure 1.2 et associé à la relation transformant x en y .

1. Calculez les sorties y associées aux valeurs $-2, -1, 0, 1, 2$ pour x .
2. Écrivez la formule modélisant \mathcal{H} ?
3. Dessinez la relation transformant x en y sur un graphe.

Chapter 2

Signaux temps continu, fonction affine par morceaux

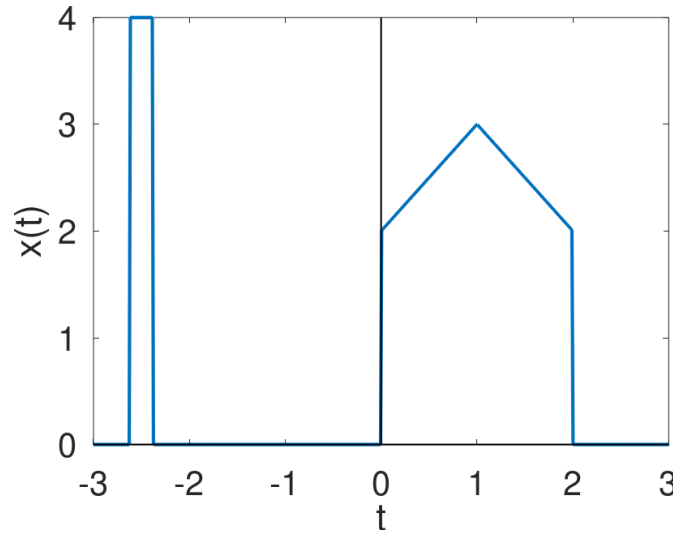


Figure 2.1: Visualisation de $x(t)$ qui a la forme d'une maison avec son lampadaire

Exercice 3 On considère le signal $x(t)$ décrit par la figure 2.1.

1. Calculez les valeurs de $x(t)$ pour les valeurs de t $-2.5, 0.5, 1, 2.5$.
2. Écrivez une formule décrivant $x(t)$ au moyen de différents intervalles de temps.
3. Utilisez quelques unes des fonctions de base présentées en cours pour définir $x(t)$.
4. Utilisez le crochet d'Iverson pour décrire $x(t)$.

Exercice 4 On considère le signal $x(t)$ ainsi défini

$$x(t) = (at + b) \llbracket t_1 \leq t \leq t_2 \rrbracket \quad (2.1)$$

1. Représentez ce signal pour $a = 1$, $b = 0$ et $t_1 = 2$, $t_2 = 3$.
2. Représentez ce signal pour $a = -1$, $b = 1$ et $t_1 = 0$, $t_2 = 1$.
3. Montrez que pour $a = 0$, $x(t)$ peut se mettre sous la forme

$$x(t) = \alpha \Pi(\gamma t + \delta) \quad (2.2)$$

4. Montrez que pour $a > 0$, $x(t)$ peut se mettre sous la forme

$$x(t) = \alpha \Pi(\gamma t + \delta) + \beta \mathcal{C}(\gamma t + \delta) \quad (2.3)$$

5. Donnez un pseudo-code permettant de visualiser de signal.

Chapter 3

Définition et utilisation de la transformée de Fourier

Exercice 5 On cherche à déterminer la transformée de Fourier de $s(t) = e^{-|t|}$.

1. Calculer la somme et l'énergie de ce signal.
2. On note $s_1(t) = s(t)\mathbb{I}[t \geq 0](t)$. Calculez la transformée de Fourier de $s_1(t)$ notée $\hat{S}_1(f)$.
3. On note $s_2(t) = s(t)\mathbb{I}[t \leq 0](t)$. Calculez la transformée de Fourier de $s_2(t)$ notée $\hat{S}_2(f)$.
4. On remarque $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$ pour $t \neq 0$. Que peut-on en déduire sur la relation entre $\hat{S}(f)$ et $\hat{S}_1(f)$ et $\hat{S}_2(f)$.
5. Déduisez $\hat{S}(f)$.
6. En établissant le lien avec la première question, déterminez $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+4\pi^2 t^2} dt$.

Chapter 4

Propriété de la transformée de Fourier

Exercice 6 *Cet exercice cherche à illustrer la notion de parité.*

1. *On considère le signal $s(t) = e^{-|t|}$. Montrez que la transformée de Fourier de ce signal est à valeurs réelles.*
2. *En considérant différentes fonctions de bases, proposez un algorithme montrant que la transformée de Fourier d'un signal pair est réel et que la transformée de Fourier d'un signal impair est imaginaire pur.*

Chapter 5

Diracs

Exercice 7 On considère le signal $x(t) = \Pi(t) = \llbracket -0.5 \leq t \leq 0.5 \rrbracket(t)$.

1. Calculez sa dérivée $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$.
2. Calculez $z(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$.
3. Calculez la transformée de Fourier de $y(t)$ notée $\hat{Y}(f)$ et en déduire celle de $x(t)$ notée $\hat{X}(f)$.
4. Représentez les signaux $x(t), y(t), z(t)$.

Chapter 6

Transformées de Fourier, dérivation et équations différentielles

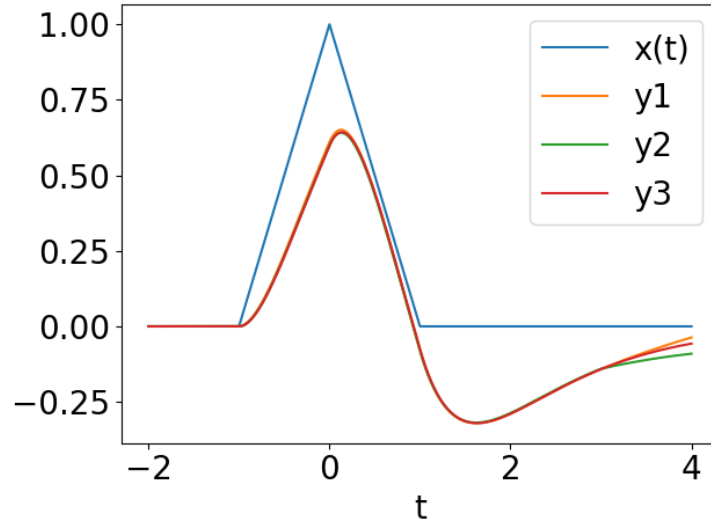


Figure 6.1: Visualisation de l'entrée $x(t)$ et de la sortie $y(t)$ illustrant l'exercice 8.

Exercice 8 On considère un filtre défini par l'équation différentielle

$$LC \frac{d^2}{dt^2} y(t) + RC \frac{d}{dt} y(t) + y(t) = RC \frac{d}{dt} x(t) \quad (6.1)$$

avec $R = 3$, $C = 0.5$, $L = 1$. On considère un signal en entrée défini par $x(t) = \mathbb{T}(t)$ et on cherche à simuler le signal de sortie $y(t)$ associé à ce filtre décrit par l'équation (6.1).

1. Montrez que

$$\frac{d}{dt} \mathbb{T}(t) = \int_{-\infty}^t [\delta(\tau - 1) - 2\delta(\tau) + \delta(\tau + 1)] d\tau \quad (6.2)$$

2. On appelle $\tilde{y}(t)$ la solution de cette deuxième équation différentielle

$$LC \frac{d^2}{dt^2} \tilde{y}(t) + RC \frac{d}{dt} \tilde{y}(t) + \tilde{y}(t) = \delta(t) \quad (6.3)$$

Exprimez $y(t)$ en fonction de $\tilde{y}(t)$.

3. En utilisant les fonctions `sol_eq_diff`, `deriver`, `integrer` et `retarder` de `seb`, donnez un pseudo-programme permettant de simuler $y(t)$.

Exercice 9 On considère un filtre dont la réponse fréquentielle vérifie

$$\hat{H}(f) = \frac{j2\pi fRC}{1 - 4\pi^2 f^2 + 4jRC\pi f} \quad (6.4)$$

1. Trouvez l'équation différentielle associée à la relation entrée-sortie ?
2. Trouvez l'équation différentielle associée à la réponse impulsionnelle ?
3. Proposez un algorithme permettant de calculer la réponse impulsionnelle.

Exercice 10 On considère l'équation différentielle associée à une relation entrée-sortie :

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 3\frac{d}{dt}y(t) + y(t) = x(t) \quad (6.5)$$

1. Donnez la réponse fréquentielle.
2. Donnez un algorithme donnant la réponse impulsionnelle.
3. Écrivez le polynôme caractéristique.
4. Trouvez les solutions de ce polynôme.
5. En déduire la réponse impulsionnelle.

Chapter 7

Filtres et effet mémoire

Exercice 11 Dans cet exercice, on cherche à montrer par simulation que

$$\Pi(t) * \Pi(t) = \mathbb{T}(t) \quad (7.1)$$

où $\Pi(t) = \mathbb{I}[|t| \leq 0.5](t)$ et $\mathbb{T}(t) = (1 - |t|)\mathbb{I}[|t| \leq 1](t)$.

1. Montrez que $\Pi(t) * \Pi(t) = \text{sinc}^2(f)$ où $\text{sinc}(f) = \frac{\sin(\pi f)}{\pi f}$.
2. Proposez un algorithme utilisant la transformée de Fourier pour montrer l'équation (7.1).
3. Donnez un autre algorithme utilisant le produit de convolution pour démontrer aussi l'équation (7.1).

Exercice 12 Dans cet exercice, on cherche à montrer par simulation que

$$\Pi(t) * \Pi(t) = \mathbb{T}(t) \quad (7.2)$$

où $\Pi(t) = \mathbb{I}[|t| \leq 0.5](t)$ et $\mathbb{T}(t) = (1 - |t|)\mathbb{I}[|t| \leq 1](t)$.

1. On note $s(t) = \Pi(t) * \Pi(t)$, donnez une expression intégrale à $s(t)$.
2. Montrez que pour $t < -1$, $s(t) = 0$.
3. Montrez que $s(-t) = s(t)$ et que donc $s(t)$ est un signal pair.
4. En déduire que pour $t > 1$, $s(t) = 0$.
5. Montrez que $s(0) = 1$.
6. Montrez que $s(t) = 1 - t$ pour $t \in [0, 1]$.
7. Déduisez que $s(t) = \mathbb{T}(t)$.

Chapter 8

Description fréquentielle des filtres

Chapter 9

Signaux périodiques

Chapter 10

Filtres agissant sur des signaux périodiques

Chapter 11

Échantillonnage d'un signal non-périodique

Chapter 12

Peigne de Diracs

Chapter 13

Modélisation stochastique du bruit

Chapter 14

Filtrage des processus aléatoires

Chapter 15

Autocorrélation et densité spectrale

15.1 Exercices

Exercice 13 Le signal montré sur la figure 15.1 est noté $x(t)$. Sa transformée de Fourier est notée \hat{X} .

1. $x(t)$ est-il un signal temps continu, temps discret, périodique, non-périodique, déterministe ou aléatoire.
2. Donnez une expression de $x(t)$ sous la forme de sa description sur plusieurs intervalles.
3. Donnez une expression de $x(t)$ en fonction de $\mathbf{1}()$.
4. Calculez $x(0)$, $x(1)$, E_x .
5. Calculez $\hat{X}(0)$ et $\hat{X}(1)$.
6. Construire $y_1(t) = x\left(\frac{t}{2}\right)$
7. Construire $y_1(t) = x(t-1)$
8. Construire $y_1(t) = \frac{1}{2}x(t)$
9. Construire $y_1(t) = x(t) - x(t-2)$

Exercice 14 Le signal montré sur la figure 15.2 est noté $x(t)$. Sa transformée de Fourier est notée \hat{X} . Ce signal est de la forme $x(t) = ae^{-bt}\mathbf{1}(t \geq 0)$.

1. $x(t)$ est-il un signal temps continu, temps discret, périodique, non-périodique, déterministe ou aléatoire.
2. Justifiez la valeur de a avec la courbe exponentielle sur la figure 15.2.
3. Justifiez la valeur de b avec la ligne tangente à la courbe exponentielle sur la figure 15.2.
4. Donnez une expression de $x(t)$ en fonction de $\mathbf{1}()$.
5. Calculez $x(0)$, $x(1)$, E_x .
6. Calculez $\hat{X}(0)$ et $\hat{X}(1)$.
7. Construire $y_1(t) = x\left(\frac{t}{2}\right)$
8. Construire $y_1(t) = x(t-1)$
9. Construire $y_1(t) = \frac{1}{2}x(t)$
10. Construire $y_1(t) = x(t) - x(t-2)$

Exercice 15 Le signal étudié ici est $x(t) = t\mathbf{1}(t \in [0, 1]) + (2-t)\mathbf{1}(t \in [1, 2])$ On considère $y(t)$ obtenu en périodisant le signal $x(t)$ pour $t \in [0, 3]$.

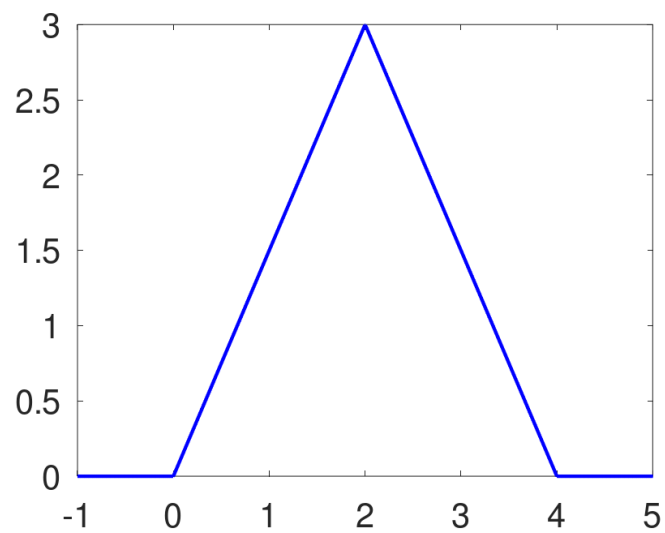


Figure 15.1: Graphe de $x(t)$ relatif à l'exercice 13.

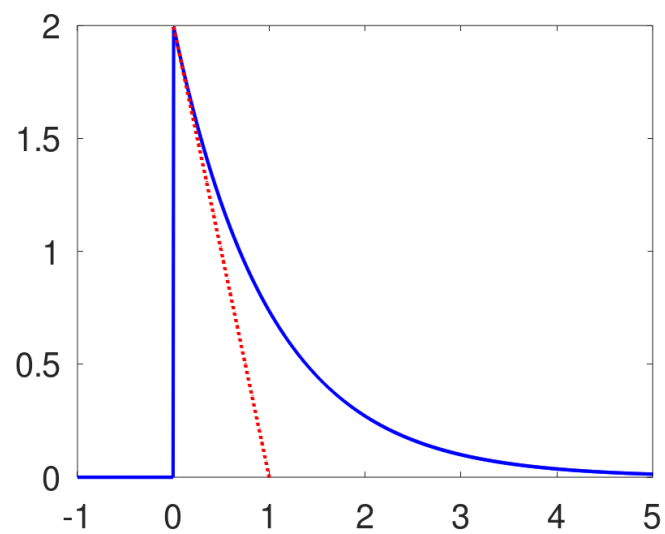


Figure 15.2: Graphe de $x(t)$ et de sa tangente pour l'exercice 14.

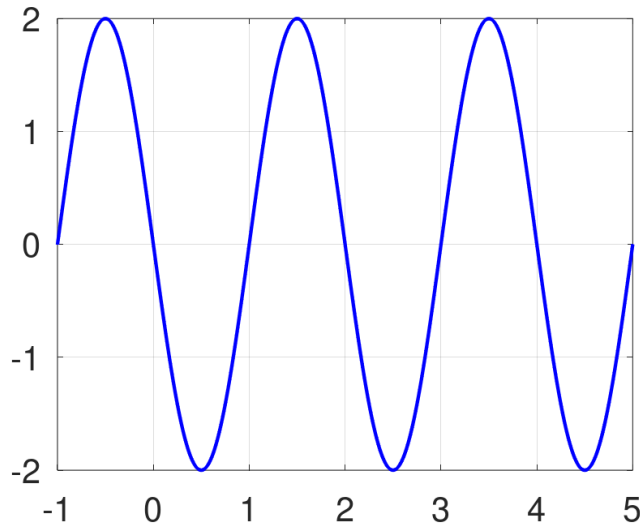


Figure 15.3: Graphe de $x(t)$ relatif à l'exercice 16.

1. $x(t)$ est-il un signal temps continu, temps discret, périodique, non-périodique, déterministe ou aléatoire.
2. $y(t)$ est-il un signal temps continu, temps discret, périodique, non-périodique, déterministe ou aléatoire.
3. Dessiner $x(t)$ pour $t \in [-1, 5]$ sur un graphe.
4. Dessiner $y(t)$ pour $t \in [-1, 5]$ sur le même graphe.
5. Calculez $x(0)$, $x(-2)$, E_x et P_x .
6. Calculez $y(0)$, $y(-2)$, E_y et P_y .
7. Calculez \hat{X}_0 et \hat{Y}_0 .
8. Calculez \hat{X}_0 et \hat{Y}_0 .
9. Dessiner sur le graphe $y_1(t) = y\left(\frac{t}{2}\right)$
10. Dessiner sur le graphe $y_2(t) = y(t - 1)$
11. Dessiner sur le graphe $y_3(t) = \frac{1}{2}y(t)$
12. Dessiner sur le graphe $y_4(t) = y(t) - y(t - 2)$

Exercice 16 Le signal montré sur la figure 15.3 est noté $x(t)$. Sa transformée de Fourier est notée \hat{X} . Ce signal est de la forme $x(t) = a \cos(bt + c)$.

1. $x(t)$ est-il un signal temps continu, temps discret, périodique, non-périodique, déterministe ou aléatoire.
2. Justifiez la valeur de a en observant la valeur maximale et minimale sur la figure 15.3.
3. Justifiez la valeur de b en mesurant la période sur la figure 15.3.
4. Justifiez la valeur de c en interprétant cette courbe comme en retard (ou en avance) par rapport à $a \cos(bt)$ sur la figure 15.2.
5. Calculez $x(0)$, $x(1)$, P_x .
6. Calculez \hat{X}_0 et \hat{X}_1 .
7. Dessiner sur le graphe $y_1(t) = x\left(\frac{t}{2}\right)$

8. Dessiner sur le graphe $y_1(t) = x(t - 1)$

9. Dessiner sur le graphe $y_1(t) = \frac{1}{2}x(t)$

10. Dessiner sur le graphe $y_1(t) = x(t) - x(t - 2)$