Examen traitement numérique du signal
Télécom 2 et Instrumentation 2

Jeudi 18 décembre 2025

Durée : 1h30

Une copie double manuscrite est autorisée. Le téléphone portable est interdit. À l'issue de l'épreuve, le **sujet est à rendre** avec la copie.

NOM : **Prénom :**

Exercice 1. *() On considère le filtre analogique de fonction de transfert*

$$G(p) = \frac{p^2+1}{(p+1)^2}$$

Indication : $\int_0^{+\infty} te^{-(p+1)t}\,dt = \frac{1}{(p+1)^2}$ *et* $\int_0^{+\infty} e^{-(p+1)t}\,dt = \frac{1}{(p+1)}$.

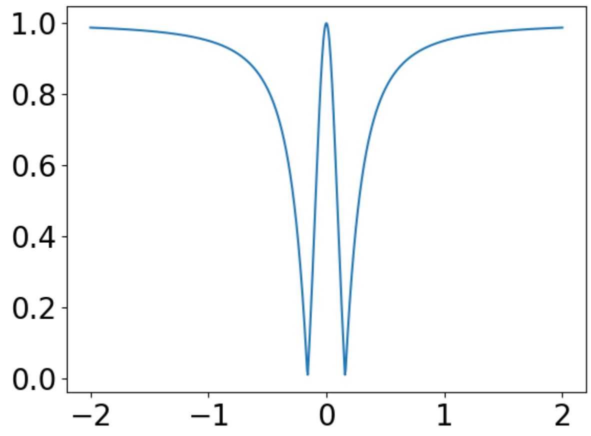
1. *Quelles sont les pôles et les zéros de ce filtre ?*
2. *Ce filtre est-il stable ?*
3. *Ce filtre est-il à minimum de phase, à phase minimal ?*
4. *Tracez la réponse fréquentielle de ce filtre ?*
5. *A quoi peut servir un tel filtre ?*
6. *Que vaut la réponse impulsionnelle ?*

Solution :

1. Les zéros sont j et $-j$. Les pôles sont -1, c'est un pôle double.
2. Le filtre est stable parce que le pôle est dans la zone stable.
3. Ce filtre n'est pas à minimum de phase parce que le zéro n'est pas dans la zone de stabilité. Le filtre n'est pas à phase linéaire car sa réponse impulsionnelle n'est pas composé d'un nombre fini de termes (c'est un filtre à réponse impulsionnelle infinie car composé d'un dénominateur non-constant).
4. La réponse fréquentielle se déduit de la fonction de transfert $H(p)$.

$$|\widehat{H}(f)| = \left|\frac{(j2\pi f)^2+1}{(1+j2\pi f)^2}\right| = \frac{|1-4\pi^2 f^2|}{1+4\pi^2 f^2} = \left|-1+\frac{2}{1+4\pi^2 f^2}\right| \tag{1}$$

   Cette réponse fréquentielle est paire. L'expression $-1+\frac{2}{1+4\pi^2f^2}$ est une fonction décroissante sur $[0,+\infty[$. Elle devient nulle en $f=\frac{1}{2\pi}$. Du fait de la valeur absolue, le module est décroissant sur $[0,\frac{1}{2\pi}]$ et croissant sur $[\frac{1}{2\pi},+\infty[$.



5. C'est un filtre coupe-bande qui permet par exemple d'être robuste vis-à-vis d'un bruit serait limité à une bande de fréquence étroite.

6. On cherche a, b, c de façon à ce que

$$H(p) = a + \frac{b}{p+1} + \frac{c}{(p+1)^2} \tag{2}$$

On trouve $a = 1, b = -1/2, c = 1/2$. Et du coup on a

$$h(t) = \delta(t) + \frac{1}{2}(t-1)e^{-t}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t) \tag{3}$$

Simulation :

```
import numpy as np
f=np.linspace(-2,2,700)
p=1j*2*np.pi*f
H=(p**2+1)/(p+1)**2
import seb
plt,np = seb.debut()
plt.close('all')
fig,ax=plt.subplots()
ax.plot(f,np.abs(H))
fig.show()
fig.savefig('/home/gabriel/L/t1/TNS/XEX/FIG/fig_xex38_figa.png')
```

Vérification de la réponse impulsionnelle

```
import seb
plt,np = seb.debut()
t=np.linspace(0,10,1000)
h=0.5*(t-1)*np.exp(-t)
f=np.linspace(-5,5,300)
H_ex=
H=seb.TF(t,h,f)
```

Exercice 2. *() Dans une application très particulière, on a des sons formés de trois notes de musiques, une plus grave, la deuxième moins grave et la troisième plus aigüe. Les notes sont joués avec une intensité similaire. Les fréquences sont très différentes avec une différence d'au moins* 100Hz*. Ces fréquences sont entre* 200Hz *et* 1000Hz*. Les sons ont une durée identiques d'une minute, ils sont échantillonnés à* 4kHz*. Ils sont composés successivement des trois notes avec une durée identique pour chaque note. Le premier type de sons forment la séquence* grave, moyen, aigüe*, la deuxième la séquence* moyen, aigüe, grave *et le troisième la séquence* aigüe, grave, moyen*. En s'inspirant des techniques proposées en cours, expliquez en détail et avec des pseudo-programmes, ce que vous proposez pour en faire la classification. Quelle est la durée des trames choisies ? Quelle est la normalisation choisie ? Quels sont le/les descripteurs choisis ? Comment proposez-vous de calculer la distance ? Quel type de classifieurs utilisez-vous ?*

Solution :
On constitue un certain nombre de sons, on range chaque type de sons dans un répertoire. La prédiction du type associé à un son se fait de la façon suivante.

1. On découpe le son en trames de 50ms sans chevauchement. La longueur n'a pas être plus grande pour avoir une meilleur résolution fréquentielle (de l'ordre de l'inverse de la durée des trames).
2. Il n'est pas utile ici de retirer le début et la fin du son, ni de normaliser le son.
3. On utilise le zero crossing rate comme descripteur qui nous donne, ici, une estimation de la fréquence de la sinusoïde sur la trame. Le descripteur vaut 1 pour cette trame si la fréquence obtenue est égale, plus basse ou légèrement supérieure que les autres fréquences obtenus avec les autres trames. Il vaut 3 pour cette trame si la fréquence obtenue est égale, légèrement plus basse ou supérieure que les autres fréquences obtenus avec les autres trames. Il vaut 2 s'il ne vaut ni 1 ni 3.
4. On utilise une distance adaptée aux signaux de même durée en utilisant une norme euclidienne sur les valeurs des trois descripteurs.
5. On utilise la technique du plus proche voisin.

Exercice 3. *()*
On considère un filtre défini par

$$cy_n + dy_{n-1} = ax_n + bx_{n-1} \tag{4}$$

Choisissez a, b, c, d *tels que si* $x_n = 1$ *alors* $y_n = 0$ *et si* $x_n = (-1)^n$ *alors* $y_n = \frac{1}{2}(-1)^n$.

Solution :
La première contrainte signifie que $\widehat{H}(0) = H(1) = 0$, la deuxième contrainte signifie que $\widehat{H}\left(\frac{f_e}{2}\right) = H(-1) = 0.5$. Comme la fonction de transfert de ce filtre est

$$H(z) = \frac{a + bz^{-1}}{c + dz^{-1}} \tag{5}$$

les deux contraintes signifient que

$$\frac{c+d}{a+b} = 0 \text{ et } \frac{c-d}{a-b} = 0.5 \tag{6}$$

Je choisis par exemple $a = 1$ et $b = 0$ et les contraintes conduisent à $c = -d = \frac{1}{4}$.

Exercice 4. *On considère un signal temps continu défini par la figure 1 avec l'unité s.*
On rappelle que $\sin(2\pi + \theta) = \sin(\theta)$.
La formule de ce signal est de la forme suivante.

$$s(t) = a\sin(\pi b(t + c))\mathbf{1}_{[d,e]}[t]$$

Trouvez a, b, c, d, e

Solution : Pour trouver les valeurs des paramètres, vous pouvez suivre les explications données dans une des annexes du polycopié de TNS.

```
a=2;b=4; c=0; d=-0.5; e=2;
t=-1:1e-3:5;
s=a*sin(pi*b*(t+c)).*(t<=e).*(t>=d);
figure(1); plot(t,s);
```

Exercice 5. *() On considère un filtre analogique idéal défini par sa réponse fréquentielle*

$$\widehat{H}(f) = \mathbf{1}_{[-f_c,f_c]}(f)$$

où $f_c = 100\text{Hz}$. *On considère un signal* $x(t) = \mathbf{1}_{[0,T/2[}(t) - \mathbf{1}_{[T/2,T[}(t)$ *périodique de période* $T = 15ms$ *et dont la transformée de Fourier est composées de raies définies par*

$$\widehat{X}_{2k} = 0 \text{ et } \widehat{X}_{2k+1} = \frac{2}{j\pi(2k+1)}$$

les raies correspondent aux fréquences $f_k = \frac{k}{T}$. *Indication :* $1/15 = 0,0667$ *et* $2/pi = 0.637$.

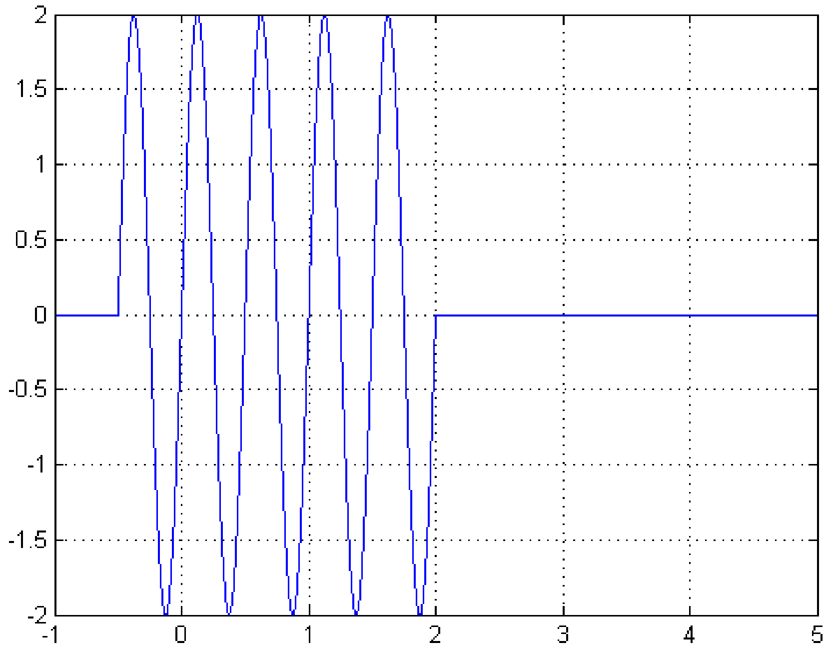


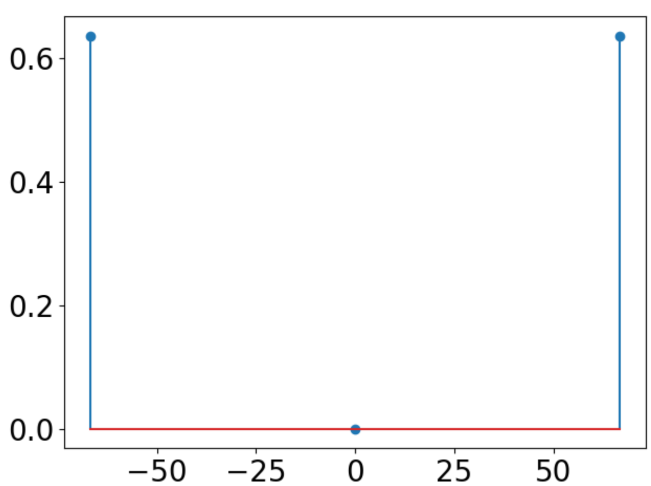
Figure 1: graphe de l'exercice 4

1. *Exprimez la transformée de Fourier de $y(t)$ en fonction de celle de $x(t)$*
2. *Calculez la transformée de Fourier de $y(t)$.*
3. *Représentez le module de la transformée de Fourier de $y(t)$ sur un graphique.*
4. *Calculez $y(t)$.*

solution :

1. $\widehat{Y}_k = \widehat{X}_k$ si $|k| \leq 1$ et $\widehat{Y}_k = 0$ sinon. En effet $\frac{1}{T} \leq f_c \leq \frac{2}{T}$.
2.

$$\widehat{Y}(f) = \frac{2}{j\pi}\delta(f - \frac{1}{T}) - \frac{2}{j\pi}\delta(f + \frac{1}{T})$$



3.

4.

$$y(t) = \mathrm{TF}^{-1}\left[\frac{2}{j\pi}\delta(f - \frac{1}{T}) - \frac{2}{j\pi}\delta(f + \frac{1}{T})\right] = \frac{4}{\pi}\frac{e^{j2\pi\frac{t}{T}} - e^{-j2\pi\frac{t}{T}}}{2j} = \frac{4}{\pi}\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right) \quad (7)$$

Simulation :

```
import seb
plt,np = seb.debut()
T=15e-3;
f = np.array([-1/T,0,1/T])
X = np.array([2/np.pi,0,2/np.pi])
plt.close('all')
fig,ax=plt.subplots()
ax.stem(f,X)
plt.tight_layout()
fig.show()
fig.savefig('L:/t1/TNS/XEX/FIG/fig_xex72b.png')
```