Examen traitement numérique du signal
Partiel 2

Mercredi 17 décembre

Durée : 1h30

Une copie double manuscrite est autorisée. Le téléphone portable est interdit. À l'issue de l'épreuve, le **sujet est à rendre** avec la copie.

NOM : **Prénom :**

θ	0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\theta$	1	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\theta$	0	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan\theta$	0	$\sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{5}}}$	$\sqrt{2}-1$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$e^{j\theta}$	1		$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\left(1-j+j\sqrt{2}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{j}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}(1+j)$	$\frac{1}{2}+\frac{j\sqrt{3}}{2}$	j

Exercice 1. *On considère un signal* $u(t) = \cos(8\pi t)$ *et* $v(t) = u^2(t)$.

1. *Quelle est la période de* $v(t)$ *?*
2. *Sachant que la transformée de Fourier de* $e^{2j\pi f_0 t}$ *est* $\delta(f - f_0)$ *en déduire la transformée de Fourier de* $u(t)$, *notée* $\hat{U}(f)$.
3. *Est-ce que la relation entre* $u(t)$ *et* $v(t)$ *est linéaire et temps invariant ? Justifiez votre réponse soit en expliquant pourquoi soit en donnant un contre-exemple.*
4. *Quelle est la transformée de Fourier de* $v(t)$, *notée* $\hat{V}(f)$ *?*
5. *En comparant* $\hat{U}(f)$ *et* $\hat{V}(f)$, *peut-on y voir une confirmation de la troisième question ?*

Solution :

1. $v(t) = \frac{1+\cos(16\pi t)}{2}$ et donc $T = 1/8$
2. $\widehat{U}(f) = \frac{1}{2}\delta(f-4) + \frac{1}{2}\delta(f+4)$
3. Non la relation n'est pas linéaire en effet, si $u_1(t) = 1$ et $u_2(t) = 1$ il n'est pas vrai que $(u_1 + u_2)^2 = u_1^2 + u_2^2$. Oui la relation est temps invariant en effet $(u(t-\tau))^2 = u^2(t-\tau)$.
4. $v(t) = \cos^2(8\pi t) = \frac{1+\cos(16\pi t)}{2}$ Aussi
$$\widehat{V}(f) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{4}\delta(f-8) + \frac{1}{4}\delta(f+8)$$
5. Si la relation entre $u(t)$ et $v(t)$ était linéaire et temps invariant il existerait $\widehat{H}(f)$ tel que $\widehat{V}(f) = \widehat{H}(f)\widehat{U}(f)$ Pourtant ce n'est pas possible car aucune valeur de $\widehat{H}(f)$ ne peut transformer une valeur nulle en un Dirac.

Exercice 2. *On considère le filtre dont la relation entrée sortie est définie par*

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 0.5\frac{d}{dt}y(t) + y(t) = x(t)$$

On considère la fréquence d'échantillonnage $f_e = 2\text{Hz}$. On utilise la transformée bilinéaire pour discrétiser ce filtre.

1. *Trouvez la relation entrée-sortie du filtre numérique discrétisé* [1].
2. *Calculez le module de la réponse fréquentielle du filtre ainsi discrétisé.*

Solution :

1. Le filtre analogique a pour fonction de transfert.

$$H(p) = \frac{1}{p^2 + 0.5p + 1}$$

On trouve le filtre numérique en remplaçant p par $\frac{2}{T_e}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} = 4\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$

$$H^{\#}(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{19 - 30z^{-1} + 15z^{-2}}$$

On en déduit la relation entrée-sortie

$$19y_n - 30y_{n-1} + 15y_{n-2} = x_n + 2x_{n-1} + x_{n-2}$$

2. On a tout d'abord le module de la réponse fréquentielle du filtre analogique.

$$\left|\widehat{H}(f)\right| = \frac{1}{\sqrt{1 - 7\pi^2 f^2 + 16\pi^4 f^4}}$$

On applique la transformée non-linéaire des fréquences $f = \frac{f_e}{\pi}\tan\left(\frac{\pi f^{\#}}{f_e}\right) = \frac{2}{\pi}\tan\left(\frac{\pi f^{\#}}{f_e}\right)$

$$\left|\widehat{H}^{\#}(f^{\#})\right| = \left|\widehat{H}(f)\right| = \frac{1}{\sqrt{1 - 28\tan^2\left(\frac{\pi f^{\#}}{f_e}\right) + 256\tan^4\left(\frac{\pi f^{\#}}{f_e}\right)}}$$

Exercice 3. *() On réalise la simulation écrite dans l'encadré .*

1. *Sur la gauche de la figure 1, l'échelle des abscisses n'est pas correcte. En considérant l'encadré, quelle serait la première valeur t_0, la dernière valeur t_∞ et la fréquence d'échantillonnage f_e ?*
2. *Les valeurs respectives des deux vecteurs lignes* `A` *et* `B` *sont affichés à la fin de l'encadré . Donnez la relation entrée sortie du filtre associée à ces deux vecteurs.*
3. *La réponse fréquentielle est affichée à droite de la figure 1. Donnez approximativement la fréquence de coupure du filtre représenté. Décrivez le calcul à faire et l'approximation que vous considérez.*
4. *Sur la gauche de la figure 1, la courbe approximativement sinusoïdale représente le vecteur* `y` *calculé avec la boucle* `for` *répétant quatre fois l'instruction de filtrage. Donnez la fonction de transfert $H(z)$ associée à la transformation de* `x` *en* `y`*.*
5. *La fréquence de coupure associée à $H(z)$ est-elle plus faible, identique ou plus élevée que celle estimée à la question 3. Justifiez votre réponse.*
6. *Quelle devrait être la fréquence de coupure d'un filtre transformant le signal* `x` *en un signal* `y` *approximativement sinusoïdal ? Justifiez votre réponse en estimant grossièrement la transformée de Fourier de* `x`*.*

[1] Trouvez la relation qui lie x_n à y_n

```
cd L:\t1\TNS\XEX\FIG
t=-0.1:1e-2:4.1;
x=(cos(2*pi*t)>0);
[B,A]=butter(2,0.05);
disp(B), disp(A),
y=x;
for k=1:4 y=filter(B,A,y); end
figure(1); plot(1:length(x),x,'linewidth',2,1:length(y),y,'linewidth',2);
set(gca,'FontSize',20);
saveas(1,'fig_xex124a.png');
[H,W]=freqz(B,A);
figure(2); subplot(211); plot(W,abs(H),'linewidth',2);
set(gca,'FontSize',20); grid;
subplot(212); plot(W,angle(H),'linewidth',2);
set(gca,'FontSize',20);
saveas(2,'fig_xex124b.png');
0.0055427   0.0110854   0.0055427
1.00000   -1.77863   0.80080
```

Table 1: Simulation de l'exercice 3

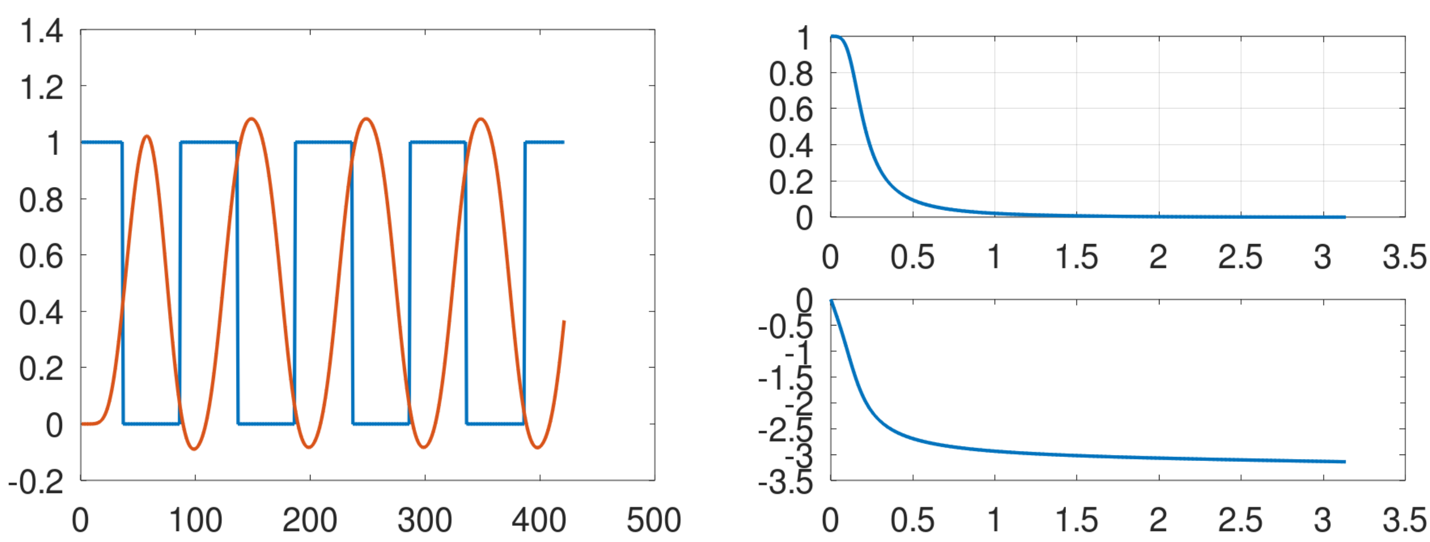

Figure 1: À gauche : signal rectangulaire (x_n) et signal filtré (y_n). À droite : réponse fréquentielle associée au vecteur `A` et `B`. Exercice 3.

Solution :

1. $t_0 = -0.1\text{s}$, $t_\infty = 4.1\text{s}$ et $f_e = \frac{1}{1e-2} = 100\text{Hz}$.
2. $$y_n - 1.77y_{n-1} + 0.801y_{n-2} = 0.0056x_n + 0.011x_{n-1} + 0.0055x_{n-2} \tag{1}$$
3. On lit sur la courbe en haut à droite de la figure 1 que $W = 0.16\text{rad.s}^{-1}$. Ceci signifie $f_c = \frac{W}{2\pi} f_e = 2.5\text{Hz}$.
4. $$H(z) = \left(\frac{0.0055 + 0.011z^{-1} + 0.0055z^{-2}}{1 - 1.78z^{-1} + 0.801z^{-2}} \right)^4 \tag{2}$$
5. Je note H_o la fonction de transfert associé à `B` et `A`. La fréquence de coupure de H est plus faible parce que
$$|\widehat{H}(f_c)| = |\widehat{H}_o(f_c)|^4 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^4 = 0.25 < \sqrt{2}/2 \tag{3}$$
Comme $f \mapsto \left|\widehat{H}\right|$ est approximativement décroissante, la fréquence de coupure de H_o est plus faible.
6. Le signal $x(t)$ est périodique de période 1s, il a donc des raies en 0Hz, 1Hz et tous les multiples de 1Hz. Il faut que la fréquence de coupure soit supérieure à 1Hz et inférieure à 2Hz.