Examen Signal et bruit (3 heures)
Sujet à rendre avec la copie

Nom :
Prénom :

Lundi 3 novembre

Les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisées. Aucun autre document n'est autorisé.

Exercice 1. *On considère le signal* $y(t) = \frac{1}{t+1}$. *On utilise la porte* $\Pi(t) = [\![-1/2 \leq t \leq 1/2]\!](t)$.

1. *Calculez* $\delta(t-5) * y(t)$
2. *On définit* $z(t) = \Pi(t) * y(t)$. *Calculez* $z(0)$.
3. *Donnez un pseudo-programme permettant de simuler* $z(0)$

Solution

1. $\frac{1}{t-4}$.
2. $\ln(3)$.
3.
```
t = seb.arange(-3,5,1e-4)
x = seb.fonction_P(t)
y = 1/(t+1)
z = seb.convolution(t,x,t,y,0)
print(np.abs(z-np.log(3)))
```

Exercice 2. *On considère le signal* $y(t)$ *défini par*

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 0.5\frac{d}{dt}y(t) + \frac{1}{4}y(t) = \delta(t) - \delta(t-2) \tag{1}$$

1. *Donnez un pseudo-programme permettant de simuler la réponse à cette équation différentielle sans utiliser* `seb.TFI` *mais en utilisant par exemple* `seb.sol_eq_diff`.

Solution

```
t = np.linspace(-1,5,200)
y1= seb.sol_eq_diff((1,0.5,1/4),t)
y2= seb.sol_eq_diff((1,0.5,1/4),t-2)
y = y1-y2
```

Exercice 3. *On considère le signal* $y(t)$ *défini par*

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 0.5 * \frac{d}{dt}y(t) + \frac{1}{4}y(t) = \delta(t) - \delta(t-2) \tag{2}$$

1. *Calculez* $\widehat{Y}(f)$ *la transformée de Fourier de* $y(t)$
2. *En déduire le pseudo-programme pour estimer* $y(t)$, *choisissez l'échelle en fréquence avec soin.*

Solution

1. $\widehat{Y}(f) = \frac{1-e^{-j4\pi f}}{(j2\pi f)^2+\frac{1}{4}}$

2.
```
t = np.linspace(-1,5,200)
f = np.linspace(-50,50,10000)
Y = (1-np.exp(-1j*4*np.pi*f))/((1j*2*np.pi*f)**2+0.5*(1j*2*np.pi*f)+1/4)
y = seb.TFI(f,Y,t)
```

Exercice 4. *On considère le signal $m(t) = (1-e^{-t})[\![t \geq 4 \text{ et } t \leq 5]\!](t)$.*

1. *Calculez sa dérivée en faisant attention aux discontinuités.*

Réponse

$$\frac{d}{dt}x(t) = e^{-t}[\![4 \leq t \leq 5]\!](t) + (1-e^{-4})\delta(t-4) - (1-e^{-5})\delta(t-5) \tag{3}$$

Exercice 5. *On considère le signal $m(t) = (1-e^{-t})[\![t \geq 4 \text{ et } t \leq 5]\!](t)$.*

1. *Calculez E_m son énergie.*
2. *Calculez A_m sa somme.*
3. *Donnez un pseudo-programme permettant d'estimer ces quantités.*

Solution

1. $E_m = 1 + 2(e^{-5} - e^{-4}) + 0.5(e^{-8} - e^{-10})$
2. $A_m = 1 + e^{-5} - e^{-4}$
3.
```
t = np.linspace(-1,50,20000)
x = (1-np.exp(-t))*(t>=4)*(t<=5)+0
Ex= np.real(seb.TF(t,x**2,0))
Ax= np.real(seb.TF(t,x,0))
Ex_th = 1+2*(np.exp(-5)-np.exp(-4))+0.5*(np.exp(-8)-np.exp(-10))
Ax_th =1+np.exp(-5)-np.exp(-4)
assert np.abs(Ex -Ex_th)<1e-3
assert np.abs(Ax -Ax_th)<1e-3
```

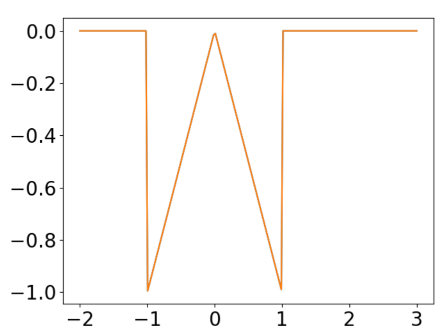

Figure 1: Représentation graphique du signal $x(t)$ (exercice 6)

Exercice 6. *On considère le signal décrit par la figure 1.*

1. *Écrire les équations du signal $x(t)$ avec $[\![\ ]\!]$.*

2. *Écrire les équations du signal $x(t)$ avec une des fonctions de base $\Pi(t), \mathbb{C}(t), \mathbb{D}(t), \mathbb{H}, \mathbb{T}(t)$. Pour chaque fonction de base utilisée rappelez la définition utilisée.*

3. *Donnez un pseudo-programme permettant de simuler la figure 1.*

Simulation et réponse à question 3

```
t = np.linspace(-2,3,200)
x = t*(t>=-1)*(t<0)-t*(t>=0)*(t<1)+0
y = -seb.fonction_D(t+0.5)-seb.fonction_C(t-0.5)
plt,np = seb.debut()
plt.close('all')
fig,ax = plt.subplots()
ax.plot(t,x)
ax.plot(t,y)
plt.tight_layout()
plt.savefig('./figures/fig_exSEB43c.png')
fig.show()
```

Solution

1. $x(t) = t * ivt \geq -1$ et $t \leq 0(t) - t[\![t > 0$ et $t \leq 1]\!](t)$
2. $x(t) = -\mathbb{D}(t+\frac{1}{2}) - \mathbb{C}(t-\frac{1}{2})$