

Examen Signal et bruit (3 heures)

Sujet à rendre avec la copie

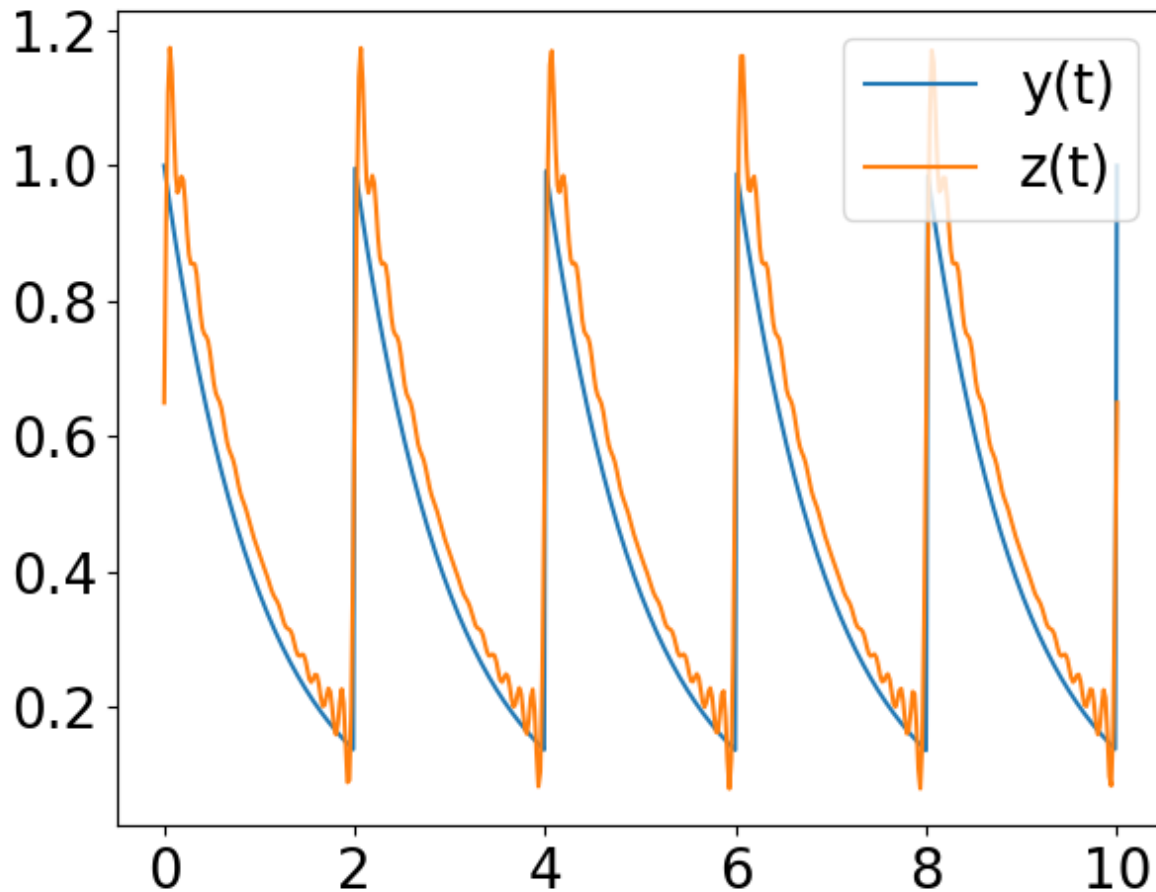
Nom :
Prénom :

Les téléphones portables ne sont pas autorisés. Une copie double manuscrite est autorisée.

Exercice 1. *On considère deux programmes définis par deux fonctions `fct1` et `fct2`.*

```
def fct1():
    import seb
    plt,np = seb.debut()
    t=np.linspace(0,50,5000)
    x=np.exp(-t)
    f=np.linspace(-20,20,5000)
    X1=1/(1+1j*2*np.pi*f)
    X2=seb.TF(t,x,f)
    print(f"np.max(np.abs(X1-X2)):.3g")

def fct2():
    t=np.linspace(0,10,500)
    y=np.exp(-(np.mod(t,2)))
    z=np.zeros(len(t))
    for k in range(-15,15):
        z += 1/(1+1j*2*np.pi*k/2) \
            /2*np.exp(1j*2*np.pi*k*t/2)
    plt.close('all')
    fig,ax = plt.subplots()
    ax.plot(t,y,label='y(t)')
    ax.plot(t,z,label='z(t)')
    plt.tight_layout()
    fig.show()
```



1. Expliquez ce que fait `fct1`. Le programme affiche la valeur 0.00497, que pouvez-vous en déduire ?
2. Le programme `fct2` affiche la courbe ci-dessus. Expliquez ce qu'est $y(t)$.
La fonction `np.mod` en réalité `numpy.mod` appliqué au vecteur `t` et à une valeur `T`, donne un vecteur dont les valeurs sont le reste de la division euclidienne de chaque composante de `t` par `T`.
Ainsi `print(np.mod(np.array([0,4,5,14,13,12,30,31,32]),3))` produit
`[0 1 2 2 1 0 0 1 2]`
3. Expliquez ce qu'est $z(t)$.
4. Expliquez où se trouve l'erreur qui explique que $y(t) \neq z(t)$.
5. Écrivez le programme de façon que $y(t) = z(t)$.

Solution :

1. Ce résultat montre pour tout $f \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{1 + j2\pi f} \approx \text{TF}[e^{-t} \mathbb{I}[t \geq 0]](f) \quad (1)$$

2. $y(t)$ désigne le signal périodique qui vaut e^{-t} pour $t \in [0, 2[$. Ceci est confirmé par le graphique.
3. $z(t)$ est la reconstruction de $y(t)$ en utilisant les coefficients de la série de Fourier de $y(t)$ noté \hat{Y}_k en utilisant la périodicité $T = 2$.

$$z(t) = \sum_{k=-15}^{+15} \hat{Y}_k e^{j2\pi k \frac{t}{2}} \quad (2)$$

Les coefficients de la série de Fourier sont calculés à partir de la transformée de Fourier de $e^{-t}\mathbb{I}[t \geq 0]$ qui vaut $\frac{1}{1+j2\pi f}$ et donne des coefficients de la série de Fourier

$$\hat{Y}_k = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + j2\pi \frac{k}{2}} \quad (3)$$

4. Les vrais coefficients de la série de Fourier notés ici \hat{Y}_k^* doivent être calculés à partir de la transformée de Fourier de $e^{-t}\mathbb{I}[0 \leq t \leq 2](t)$ et non $e^{-t}\mathbb{I}[t \geq 0]$.

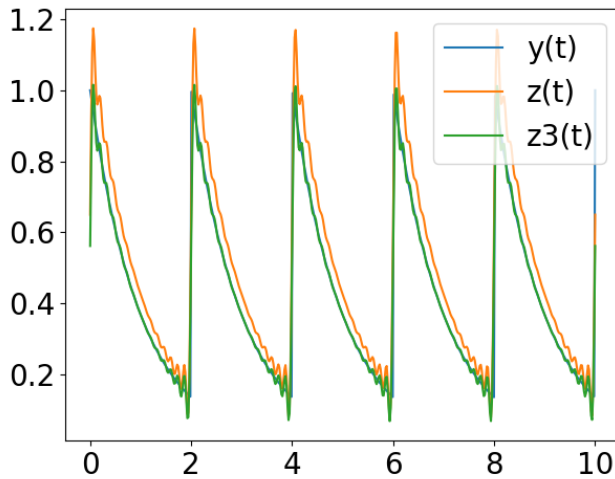
5.

$$\text{TF}[e^{-t}\mathbb{I}[0 \leq t \leq 2](t)](f) = \frac{1 - e^{-(1+j2\pi f)^2}}{1 + j2\pi f} \quad (4)$$

Ce qui conduit à

$$\hat{Y}_k^* = \frac{1}{2} \frac{1 - e^{-(1+j2\pi \frac{k}{2})^2}}{1 + j2\pi \frac{k}{2}} \quad (5)$$

```
def fct3():
    t=np.linspace(0,10,500)
    y=np.exp(-(np.mod(t,2)))
    z=np.zeros(len(t),dtype=complex)
    for k in range(-15,15):
        Y2k= 1/(1+1j*2*np.pi*k/2)/2*(1-np.exp(-(1+1j*2*np.pi*k/2)*2))
        z += Y2k*np.exp(1j*2*np.pi*k*t/2)
    return t,y,np.real(z)
```



Exercice 2. On considère $x(t) = e^{-2t}\mathbb{I}[t \geq 0](t)$ et $y_n = \frac{1}{2^n}\mathbb{I}[n \in \mathbb{N}](n)$.

1. Pour quelle fréquence d'échantillonnage f_e , y_n est l'échantillonnage de $x(t)$?
2. Pourquoi devrait-on plutôt considérer $y_n = \frac{1}{2^n}\mathbb{I}[n \in \mathbb{N}](n) - 0.5\delta_n$?
3. Quelle relation a-t-on entre $\hat{Y}(f)$ et $\hat{X}(f)$. $\hat{Y}(f)$ et $\hat{X}(f)$ sont les transformées de Fourier de y_n et $x(t)$.

Solution :

1. Je choisis $T_e = \frac{\ln(2)}{2}$ En effet

$$x(nT_e) = e^{-2nT_e}\mathbb{I}[n \geq 0] = e^{-2n\frac{\ln(2)}{2}}\mathbb{I}[n \geq 0] = e^{n\ln(1/2)}\mathbb{I}[n \geq 0] = \frac{1}{2^n}\mathbb{I}[n \geq 0] = y_n \quad (6)$$

- Il n'y a pas de discontinuités pour $x(t)$ pour $t = nT_e$ quand $n \neq 0$. Mais pour $n = 0$, $x(0^+) = 1$ et $x(0^-) = 0$ et donc il faut prendre $y_0 = 0.5(1 + 0) = 0.5 = 1 - 0.5$. Je retranche donc 0.5 pour $n = 1$, ce qui donne le résultat $y_n = \frac{1}{2^n} \llbracket n \geq 0 \rrbracket - 0.5\delta_n$.
- Ici $f_e = 1/T_e = \frac{2}{\ln(2)}$.

$$\hat{Y}(f) = f_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{X}(f - kf_e) \quad (7)$$

Exercice 3. On considère la relation entrée-sortie définie par une équation différentielle.

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 3\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = x(t) - x(t-1) \quad (8)$$

- Après avoir explicité la réponse fréquentielle, donnez un programme informatique permettant de calculer le module de la réponse fréquentielle.
- Donnez un programme informatique permettant de calculer sa réponse impulsionnelle sans utiliser la réponse fréquentielle.
- Calculez le module de sa réponse fréquentielle en la mettant sous la forme de $\frac{\sqrt{a+b\cos(c)}}{\sqrt{df^4+ef^2+g}}$
- En montrant qu'il existe α et β tel que

$$\hat{H}(f) = \left(\frac{\alpha}{j2\pi f + 2} + \frac{\beta}{j2\pi f + 1} \right) (1 - e^{-j2\pi f}) \quad (9)$$

calculez la réponse impulsionnelle.

Solution :

- La réponse fréquentielle est

$$\hat{H}(f) = \frac{1 - e^{-j2\pi f}}{(j2\pi f)^2 + 3j2\pi f + 2} \quad (10)$$

```
def H(f):
    num = 1-np.exp(-1j*2*np.pi*f)
    den = (1j*2*np.pi*f)**2+3*1j*2*np.pi*f+2
    return np.abs(num/den)
```

- La réponse impulsionnelle que je note $h(t)$ est la sortie du filtre quand je met à l'entrée $x(t) = \delta(t)$, c'est donc la solution de

$$\frac{d^2}{dt^2}h(t) + 3\frac{d}{dt}h(t) + 2h(t) = \delta(t) - \delta(t-1) \quad (11)$$

Je pose $\tilde{y}(t)$ la solution de cette équation différentielle

$$\frac{d^2}{dt^2}\tilde{y}(t) + 3\frac{d}{dt}\tilde{y}(t) + 2\tilde{y}(t) = \delta(t) \quad (12)$$

Et le caractère temps invariant du filtre fait que $h(t) = \tilde{y}(t) - \tilde{y}(t-1)$. En effet

$$\frac{d^2}{dt^2}h(t) + 3\frac{d}{dt}h(t) + 2h(t) = \frac{d^2}{dt^2}\tilde{y}(t) + 3\frac{d}{dt}\tilde{y}(t) + 2\tilde{y}(t) - \frac{d^2}{dt^2}\tilde{y}(t-1) - 3\frac{d}{dt}\tilde{y}(t-1) - 2\tilde{y}(t-1) = \delta(t) - \delta(t-1) \quad (13)$$

```
t = seb.linspace(0,5,1000)
yt= seb.sol_eq_diff((1,3,2),t)
yt1= seb.sol_eq_diff((1,3,2),t-1)
h = yt-yt1
```

3. Du fait que $e^{-j2\pi f} = \cos(2\pi f) - j \sin(2\pi f)$, le module du numérateur de $\hat{H}(f)$ est

$$|1 - e^{-j2\pi f}| = \sqrt{(1 - \cos(2\pi f))^2 + \sin^2(2\pi f)} = \sqrt{1 - 2\cos(2\pi f) + \cos^2(2\pi f) + \sin^2(2\pi f)} = \sqrt{2 - 2\cos(2\pi f)} \quad (14)$$

On trouve donc

$$|\hat{H}(f)| = \frac{\sqrt{2 - 2\cos(2\pi f)}}{\sqrt{16\pi^2 f^2 + 20\pi^2 f^2 + 4}} \quad (15)$$

4. $\alpha = -1, \beta = 1$.

$$h(t) = e^{-t} \mathbb{I}[t \geq 0] - e^{-(t-1)} \mathbb{I}[t \geq 1] - e^{-2t} \mathbb{I}[t \geq 0] + e^{-2(t-1)} \mathbb{I}[t \geq 1] \quad (16)$$

Exercice 4. On considère un filtre défini par une réponse impulsionnelle $h(t) = e^{-(t+0.5)} \mathbb{I}[t \geq -0.5](t)$ et une entrée $x(t) = \sin(2\pi t)$. On note $y(t)$ la sortie du filtre.

1. Calculez $y(t)$ en fonction de t , $r = \frac{1}{\sqrt{1+4\pi^2}}$ et $\phi = \arctan(2\pi)$ (c'est-à-dire $\frac{1}{1+j2\pi} = re^{-j\phi}$).
2. Expliquez en détail le montage électronique permettant de visualiser $y(t)$ avec un oscilloscope.
3. Donnez le programme en Python permettant de simuler $y(t)$.

Solution :

1. $x(t) = \sin(2\pi t)$ est périodique de période 1, ces coefficients de la série de Fourier sont $\hat{X}_1 = \frac{1}{2j}$ et $\hat{X}_{-1} = -\frac{1}{2j}$. La réponse fréquentielle du filtre est $\hat{H}(f) = \frac{e^{j\pi f}}{1+j2\pi f}$. Donc les coefficients de la série de Fourier sont

$$\hat{Y}_1 = \hat{H}(1)\hat{X}_1 = \frac{1}{2j} \frac{e^{j\pi}}{1+j2\pi} = 0.5jre^{-j\phi} \text{ et } \hat{Y}_{-1} = \hat{H}(-1)\hat{X}_{-1} = -\frac{1}{2j} \frac{e^{-j\pi}}{1-j2\pi} = -0.5jre^{j\phi} \quad (17)$$

Finalement

$$y(t) = r \left(-\frac{1}{2j} e^{-j\phi+j2\pi t} + \frac{1}{2j} e^{+j\phi-j2\pi t} \right) = -r \sin(2\pi t - \phi) \quad (18)$$

2. Je considère un montage RC composé d'un générateur basse fréquence, un condensateur $C = 1\mu\text{F}$ et une résistance $R = 1\text{M}\Omega$. Je mesure la sortie aux bornes du condensateur et j'impose en entrée un signal $x(t)$, cela me permet de réaliser un filtre de réponse impulsionnelle $h_1(t) = e^{-t} \mathbb{I}[t \geq 0]$. Pour avoir $y(t)$ en sortie, j'avance l'entrée de 0.5s. J'impose en entrée une tension $x(t) = \sin(2\pi(t+0.5)) = \sin(2\pi t + \pi) = -\sin(2\pi t)$.
3.

```
t = seb.linspace(-2,5,1000)
h = np.exp(-(t+0.5))*(t>=-0.5)+0
x = np.sin(2*np.pi*t)
y = seb.convolution(t,x,t,h,t)
```

Exercice 5. On considère un filtre défini par sa réponse impulsionnelle $h(t)$. On place en entrée de ce filtre un signal déterministe $x(t)$ et on note $y(t)$ le signal déterministe en sortie de ce filtre. On note $R_x(t)$ l'autocorrélation de $x(t)$ défini par

$$R_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)x(\tau-t) d\tau \quad (19)$$

Proposez **une** réponse impulsionnelle de la forme $h(t) = \alpha\delta(t-\gamma) + \beta\delta(t-\epsilon)$ telle que

$$E_y = E_x - R_x(1) \quad (20)$$

E_x et E_y sont les énergies associées à $x(t)$ et $y(t)$.

Solution : La relation entrée-sortie est :

$$y(t) = \alpha x(t-\gamma) + \beta x(t-\epsilon) \quad (21)$$

Après calcul,

$$E_y = (\alpha^2 + \beta^2)E_x + 2\alpha\beta R_x(\gamma-\epsilon) \quad (22)$$

Je choisis $\gamma = 1, \epsilon = 0, \alpha = -\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Exercice 6. On considère une réponse impulsionnelle $h_1(t)$ et la même mais avancée $h_2(t) = h_1(t+1)$. On note $C_{h_1}(t)$ et $C_{h_2}(t)$ les produits de convolution de $h_1(t)$ et $h_2(t)$.

$$\begin{cases} C_{h_1}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau)h_1(t-\tau) d\tau \\ C_{h_2}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(\tau)h_2(t-\tau) d\tau \end{cases} \quad (23)$$

1. Trouvez une relation entre $C_{h_1}(t)$ et $C_{h_2}(t)$
2. Démontrez cette relation.
3. Donnez un programme en Python permettant de vérifier expérimentalement cette affirmation en tirant aléatoirement le retard et un ensemble de paramètres utilisé pour définir des réponses impulsionnelles.

1.

$$C_{h_2}(t) = C_{h_1}(t+2) \quad (24)$$

2.

$$C_{h_2}(t) = \text{TF}^{-1}(\text{TF}[h_2(t)])^2 = \text{TF}^{-1}(e^{j2\pi f} \text{TF}[h_1(t)])^2 = \text{TF}^{-1}[(\text{TF}[h_1(t)])^2](t+2) = C_{h_1}(t+2) \quad (25)$$

3. L'idée que je propose pour le programme est d'abord de calculer une échelle de temps \mathbf{t} , puis de tirer aléatoirement des coefficients a_0, \dots, a_5 et à partir de ces coefficients de définir une réponse impulsionnelle

$$h_1(t) = a_0\Pi((t-a_1)/a_2) + a_3\mathbb{C}((t-a_4)/a_5) \quad (26)$$

Je calcule $h_2(t) = h_1(t+1)$ et ensuite pour une nouvelle échelle de temps t_r , les autocorrélations pour ensuite voir si effectivement elles sont similaires en les affichant sur un graphique.

```
import seb
plt,np = seb.debut()
import numpy.random as nr
fe = 20000
t = seb.arange(0,20,1/fe)
tr = seb.arange(-10,10,1/fe)
a = nr.uniform(0.1,3,6)
h1 = a[0]*seb.fonction_P((t-a[1])/a[2])+a[3]*seb.fonction_P((t-a[4])/a[5])
h2 = a[0]*seb.fonction_P((t+1-a[1])/a[2])+a[3]*seb.fonction_P((t+1-a[4])/a[5])
Ch1 = seb.convolution(t,h1,t,h1,tr)
Ch2 = seb.convolution(t,h2,t,h2,tr)
plt.close('all')
fig,ax = plt.subplots()
ax.plot(tr,Ch1)
ax.plot(tr,Ch2)
plt.tight_layout()
fig.show()
```

Exercice 7. On considère un processus aléatoire

$$\vec{X}(t) = \vec{A}e^{-t}\mathbb{I}[t \geq \vec{B}](t) \quad (27)$$

\vec{A} et \vec{B} sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent respectivement une loi gaussienne centrée d'écart-type 1 et une loi uniforme sur $[0,2]$.

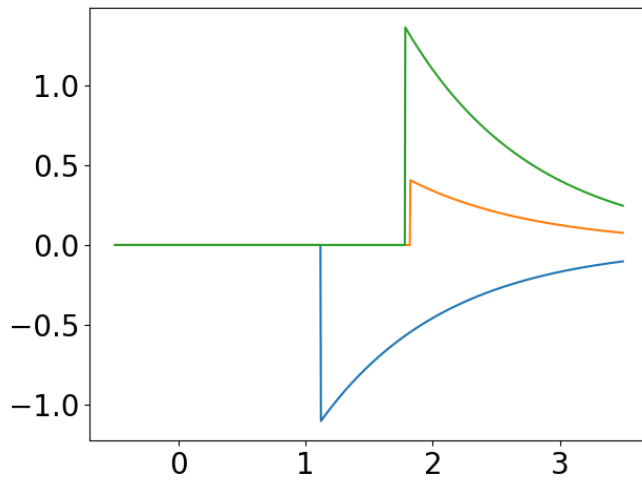
1. Dessinez trois trajectoires de $\vec{X}(t)$.
2. Calculez $E[\vec{A}]$ et $E[\vec{A}^2]$. Calculez $P(\alpha\vec{A} \leq 1)$ pour $\alpha \geq 0$ en séparant le cas où $\alpha = 0$ et $\alpha \neq 0$.
3. Calculez $P(\vec{B} < b)$ en utilisant les opérateurs min et max. Montrez que $E\left[\frac{e^{2\vec{B}} - e^{-2\vec{B}}}{2}\right] = \frac{e^4 - e^{-4} - 2}{8}$

4. On définit une variable aléatoire $\bar{E}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{X}^2(t) dt$. Calculez $E[\bar{E}_x]$.
5. On définit un signal déterministe $y(t) = P(\bar{X}(t) \leq 1)$. Calculez $y(t)$.
6. Écrivez des programmes estimant toutes ces quantités.

On rappelle qu'une variable aléatoire gaussienne de moyenne μ et d'écart-type σ a une densité de probabilité définie $f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$ et que $\int_{-\infty}^a f(x) dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{a-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)$

Solution :

```
1. t = np.linspace(-2,2,1000)
   A = np.random.normal(0,1,3)
   B = np.random.uniform(0,1,3)
   x0 = A[0]*np.exp(-(t-B[0]))*(t>=B[0])
   x1 = A[1]*np.exp(-(t-B[1]))*(t>=B[1])
   x2 = A[2]*np.exp(-(t-B[2]))*(t>=B[2])
```



2.

$$E[\bar{A}] = 0 \text{ et } E[\bar{A}^2] = 1^2 + 0^2 = 1 \quad (28)$$

$$P(\alpha \bar{A} \leq 1) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\alpha\sqrt{2}}\right) & \text{si } \alpha > 0 \end{cases} \quad (29)$$

3. $P(\bar{B} \leq b)$ vaut 0 si $b \leq 0$ et 1 si $b \geq 2$. Entre ces deux valeurs, on a

$$P(\bar{B} \leq b) = \int_0^b \frac{db'}{2} = \frac{b}{2} \quad (30)$$

On peut résumer ces différentes fonctions avec

$$P(\bar{B} \leq b) = \max(\min(1, b/2), 0) \quad (31)$$

La densité de probabilité de \bar{B} étant $\mathbb{I}[0 \leq b \leq 2](t)/2$

$$E\left[\frac{e^{2\bar{B}} - e^{-2\bar{B}}}{2}\right] = \int_0^2 \left(\frac{e^{2b} - e^{-2b}}{4}\right) db = \frac{e^4 + e^{-4} - 2}{8} \quad (32)$$

4.

$$E_x = \int_0^{\infty} \frac{A^2}{B} e^{-2t} dt = \frac{A^2}{B} \left[-\frac{1}{2} e^{-2t} \right]_0^{\infty} = \frac{A^2}{2B} e^{-2B} \quad (33)$$

Comme \vec{A} et \vec{B} sont indépendantes,

$$E[E_x] = \frac{E[A^2]}{2} E \left[e^{-2B} \right] = \frac{1 - e^{-4}}{8} \quad (34)$$

En effet

$$E \left[e^{-2B} \right] = \int_0^2 e^{-2b} \frac{db}{2} = \frac{1 - e^{-4}}{4} \quad (35)$$

5. En utilisant les probabilités conditionnelles,

$$\begin{aligned} P(\vec{X}(t) \leq 1) &= P(\vec{A}e^{-t} \leq 1)P(\vec{B} \leq t) + P(0 \leq 1)P(\vec{B} > t) \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{e^t}{\sqrt{2}} \right) \right) \max(\min(1, t/2), 0) + (1 - \max(\min(1, t/2), 0)) \end{aligned} \quad (36)$$

6. J'ai rajouté des boucles du fait que $E[e^{-2B}]$ ne converge pas bien.

```
t = nr.normal(0,1)
K = 10**6
L = 10**4
A = nr.normal(0,1,K)
A_th = 0
A2_th = 1
print(f"{np.mean(A)-A_th=: .2g} {np.mean(A**2)-A2_th=: .2g}")
val = 0
for _ in range(L):
    B = nr.uniform(0,2,K)
    B_exp = (np.exp(2*B)-np.exp(-2*B))/2
    val += np.mean(B_exp)/L

B_exp_th = (np.exp(4)+np.exp(-4)-2)/8
B_t = (B<=t).astype(np.float64)
B_t_th = np.maximum(0,np.minimum(1,t/2))
print(f"{np.mean(B_exp)-B_exp_th=: .2g} ")
print(f"{np.mean(B_t)-B_t_th=: .2g}")

t = nr.normal(0,1)+1
K = 10**7
L = 10**4
A = nr.normal(0,1,K)
B = nr.uniform(0,2,K)
x = (A*np.exp(-t)*(t>=B)).astype(np.float64)

P = np.mean(x<=1)
P_th = (1/2+1/2*seb.erf(np.exp(t)/np.sqrt(2)))* \
np.maximum(np.minimum(1,t/2),0)+\
(1-np.maximum(np.minimum(1,t/2),0))
print(f"{t=: .2f} {P-P_th=: .2g} {P=: .2g} {P_th=: .2g}")
```