

CENTRO UNIVERSITÁRIO SERRA DOS ÓRGÃOS – UNIFESO
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA – CCT
CURSO DE BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO DE PROGRAMAÇÃO DINÂMICA

GABRIEL LAGOA DUARTE

Teresópolis
2017

CENTRO UNIVERSITÁRIO SERRA DOS ÓRGÃOS – UNIFESO
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA – CCT
CURSO DE BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO DE PROGRAMAÇÃO DINÂMICA

GABRIEL LAGOA DUARTE

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Centro Universitário Serra dos Órgãos –
UNIFESO como requisito obrigatório para
obtenção do título de Bacharel em Ciência da
Computação.

Orientador: Rafael Gomes Monteiro

Teresópolis
2017

CENTRO UNIVERSITÁRIO SERRA DOS ÓRGÃOS – UNIFESO
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA – CCT
CURSO DE BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO DE PROGRAMAÇÃO DINÂMICA

GABRIEL LAGOA DUARTE

Trabalho de Conclusão de Curso aprovado como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel no Centro Universitário Serra dos Órgãos – UNIFESO pela banca examinadora:

Nome do(a) Professor(a) Orientador(a)
(Presidente de Banca) por extenso - titulação
abreviada

Nome do(a) Convidado(a) por extenso -
titulação abreviada

Nome do(a) Convidado(a) por extenso -
titulação abreviada

Teresópolis
dia de mês da defesa de 2017

*Dedico esta monografia a minha família,
pelo apoio fornecido e aos meus amigos.*

AGRADECIMENTOS

Texto dos agradecimentos.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Gráfico das principais classes de complexidade	14
Figura 2	Árvore de recursão do Fibonacci de 5	15

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Principais classes de funções para analisar algoritmos	14
Tabela 2	Otimizações de programação dinâmica	17

LISTA DE SÍMBOLOS

LISTA DE SIGLAS

ICT	Information and Communication Technology
IDE	Integrated Development Environment
LIS	Longest Increasing Subsequence

LISTA DE ALGORITMOS

Algoritmo 1	Implementação Fibonacci sem programação dinâmica	16
Algoritmo 2	Implementação Fibonacci com programação dinâmica	16
Algoritmo 1	Implementação Mochila	23
Algoritmo 2	Implementação LIS	24

RESUMO

Escrever um texto que contemple todo o conteúdo do trabalho, com espaçamento 1,5, justificado. Conforme as normas NBR 14724:2011 e NBR 6028:2003, da ABNT, o resumo é elemento obrigatório, constituído de parágrafo único; uma sequência de frases concisas e objetivas e não de uma simples enumeração de tópicos, não ultrapassando 500 palavras. O resumo deve ressaltar o objetivo, o método, os resultados e as conclusões do documento. Deve-se usar o verbo na voz ativa e na terceira pessoa do singular. Devem ser seguidos, logo abaixo, das palavras representativas do conteúdo do trabalho, isto é, palavras-chave e/ou descritores, que são palavras principais do texto, sendo de 3 a 5, separadas por ponto)

Palavras-chave: Palavra-chave 1. Palavra-chave 2. ...

ABSTRACT

Abstract text (maximum of 500 words).

Keywords: Keyword 1. Keyword 2. ...

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	13
2.1	COMPLEXIDADE DE ALGORITMOS	13
2.2	PROGRAMAÇÃO DINÂMICA	14
2.2.1	Otimizações	16
2.3	ENSINO DE ALGORITMOS	17
3	TRABALHOS RELACIONADOS.....	20
4	METODOLOGIA	21
5	DESENVOLVIMENTO (ALTERAR NOME)	22
5.1	REDUÇÃO DE ESPAÇO	22
5.2	ESTRUTURA DE DADOS RMQ	23
5.3	DIVIDE AND CONQUER OPTIMIZATION	25
5.4	KNUTH OPTIMIZATION	25
5.5	CONVEX HULL TRICK	25
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	26
6.1	CONCLUSÕES	26
6.2	TRABALHOS FUTUROS	26
	REFERÊNCIAS.....	27

1 INTRODUÇÃO

Motivação: - Uma das áreas mais importantes da maratona de programação - Está em alta nas últimas competições

Justificativa: - Poucos trabalhos na área - Livros não abordam esse assunto

Objetivos - Gerar um trabalho que explique as principais técnicas de otimização utilizadas

Alterações necessárias no modelo \LaTeX

- Adicionar uma lista de equações
- Tentar adicionar links no sumário
- Quadro != Tabela

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, são apresentados os conceitos que servem de insumo para a elaboração das etapas seguintes desse trabalho. Na seção 2.1 são demonstrados alguns conceitos necessários para identificar e classificar a complexidade de um algoritmo. A seção 2.2 explica o básico sobre programação dinâmica, seus principais termos e o conceito de otimização, que servirá de base para a elaboração dos capítulos seguintes. Por fim, no capítulo 2.3 é feita uma análise de alguns trabalhos relacionados com o ensino de programação.

2.1 COMPLEXIDADE DE ALGORITMOS

Na ciência da computação, analisar um algoritmo está relacionado com a identificação da quantidade de recursos necessários para sua execução, podendo ser a quantidade de memória utilizada, largura de banda de comunicação, hardware do computador. Porém mais frequentemente a preocupação maior é em se medir o tempo computacional gasto para realizar determinado código (CORMEN *et al.*, 2009).

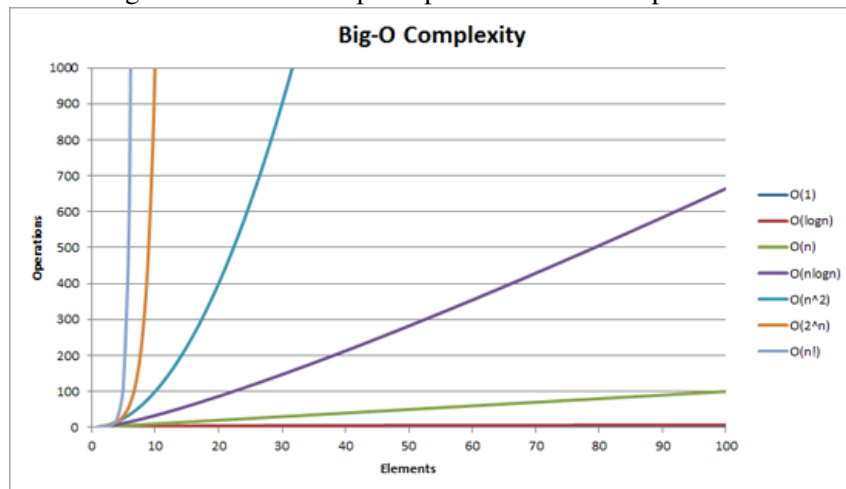
Quando é feita a análise de complexidade, é possível identificar qual classe um determinado algoritmo pertence. A tabela 1 lista algumas classes de forma ordenada, sendo a primeira função a melhor possível e a última a pior. Após classificar um algoritmo, é possível escolher entre diversas soluções para um mesmo problema, qual é a mais adequada no momento e poder saber antes de executar quanto tempo e memória o algoritmo irá gastar quando o tamanho da entrada for n , onde n corresponde, geralmente a quantidade de elementos que devem processados. Na figura 1 é possível observar o comportamento de algumas funções na medida que a quantidade de elementos aumenta.

Tabela 1: Principais classes de funções para analisar algoritmos

Notação	Exemplo de algoritmos
$O(1)$	Determinar se um número é par ou ímpar
$O(\log n)$	Busca binária
$O(\sqrt{n})$	Determinar se um número é primo
$O(n)$	Procurar um elemento em um <i>array</i> não ordenado
$O(n * \log n)$	<i>Merge sort</i> ¹
$O(n^2)$	<i>Bubble sort</i> ²
$O(n^3)$	<i>Floyd-Warshall</i> ³
$O(n^c)$	Encontrar o maior emparelhamento em um grafo
$O(c^n)_{c>1}$	Resolver o problema do caixeiro viajante ⁴ com programação dinâmica
$O(n!)$	Resolver o problema do caixeiro viajante com força bruta

Fonte: Próprio Autor.

Figura 1: Gráfico das principais classes de complexidade



Fonte: PERRETT, 2010

2.2 PROGRAMAÇÃO DINÂMICA

Programação dinâmica é uma técnica que combina soluções de subproblemas, da mesma maneira que a divisão e conquista, que divide o problema em subproblemas, resolve cada

¹ Ver mais em: <http://quiz.geeksforgeeks.org/merge-sort/>

² Ver mais em: <http://quiz.geeksforgeeks.org/bubble-sort/>

³ Ver mais em: <http://www.geeksforgeeks.org/dynamic-programming-set-16-floyd-warshall-algorithm/>

⁴ Ver mais em: <http://www.geeksforgeeks.org/travelling-salesman-problem-set-1/>

cálculo do $fib(5)$. Através dela, é fácil ver que diversos estados estão se repetindo, por exemplo: $fib(2)$ aparece três vezes e sempre que é encontrado ele é dividido no $fib(1)$ e $fib(0)$, assim deixando a complexidade deste algoritmo em $O(2^N)$. Ao aplicar programação dinâmica neste algoritmo é possível reduzir a complexidade para $O(N)$, pois cada estado será expandido uma única vez.

O código a seguir mostra como seria a implementação da função sem a utilização de programação dinâmica.

Algoritmo 1: Implementação Fibonacci sem programação dinâmica

```
1 int fib(int i){
2     if(i <= 1)
3         return i;
4     return fib(i - 1) + fib(i - 2);
5 }
```

Para otimizar o código e utilizar programação dinâmica basta incluir uma tabela que salva todos os estados. Sua inclusão faz uma alteração mínima no código, como é mostrado no algoritmo 2.

Algoritmo 2: Implementação Fibonacci com programação dinâmica

```
1 #define MAX 20
2 int tabela[MAX + 1];
3
4 int fib(int i){
5     if(tabela[i] != -1)
6         return tabela[i];
7     if(i <= 1)
8         return tabela[i] = i;
9     return tabela[i] = fib(i - 1) + fib(i - 2);
10 }
```

Para mais informações sobre programação dinâmica e suas técnicas, o site *TopCoder*⁵ possui um artigo amplo com vários problemas e dicas para soluções. Ele divide sua explicação em teoria e prática, começando nos tópicos mais simples e indo até alguns mais avançados.

2.2.1 Otimizações

Ao utilizar programação dinâmica para otimizar um problema, normalmente ocorre uma queda drástica na classe de complexidade associada a solução, como é o caso da sequência de Fibonacci, discutida na seção 2.2, onde foi possível sair de uma complexidade exponencial para

⁵<https://www.topcoder.com/community/data-science/data-science-tutorials/>

uma linear. Apesar de parecer uma ótima forma de solucionar um problema, às vezes apenas aplicar programação dinâmica não é suficiente, e existem casos onde é possível e necessário otimizar ainda mais.

Para utilizar uma técnica de otimização de programação dinâmica, alguns critérios em relação a função de recorrência devem ser correspondidos. Cada técnica tem uma abordagem que possibilita a resolução de um conjunto de problemas que compartilham certas propriedades.

A tabela 2 ilustra algumas formas otimizações existentes, que possibilitam tanto na redução de espaço, quanto de tempo. Estas técnicas serão discutidas no capítulo 5.

Tabela 2: Otimizações de programação dinâmica

Nome/Tipo	Característica
Redução de espaço	Reduz a quantidade de memória necessária quando um estado depende de uma quantidade fixa de outros estados
Estrutura de dados	Reduz a complexidade de tempo com o auxílio de uma estrutura de dados que consegue responder a consultas do tipo mínimo ou máximo em um intervalo de uma <i>array</i>
<i>Divide and Conquer</i>	Realiza divisão e conquista para encontrar o ponto ótimo necessário para se resolver o estado atual, reduzindo a complexidade temporal
<i>Knuth Optimization</i>	Utiliza informações de onde estava a solução ótima de um estado anterior para diminuir o espaço de busca dos outros, assim reduzindo a complexidade temporal
<i>Convex Hull Trick</i>	Através de conceitos geométricos, essa técnica possibilita a redução da complexidade temporal

Fonte: Próprio Autor.

2.3 ENSINO DE ALGORITMOS

O ensino de algoritmos, por se tratar de assuntos que normalmente não são tão simples, com uma fundamentação matemática extensa, não é uma tarefa fácil, portanto foi feita uma busca na literatura de trabalhos que têm por objetivo criar uma metodologia de ensino. Assim servindo de modelo para o que está aqui sendo desenvolvido.

Szlávi e Zsakó (2003) apresentaram diversas metodologias relacionadas ao ensino de programação. O autor discute sobre alguns modelos e exemplifica quando e para qual nível de estudante cada método será mais proveitoso ao ser aplicado. Estes métodos determinam a forma

de estruturar o curso que deseja ser ensinado e a maneira de explicar os conteúdos. Os métodos discutidos no trabalho são:

- **Metodológico, orientado a algoritmos:** Neste há uma divisão bem clara em todas as etapas do processo de programação, desde a estruturação do que será desenvolvido, até a documentação final. Este é recomendado para ser utilizado com estudantes no final do ensino médio ou que estejam se preparando para um trabalho na área de informática.
- **Orientado a dados:** Este método é similar ao anterior, porém aqui tem o foco nas estruturas de dados, assim, muitas vezes conseguindo evitar os grandes teoremas que normalmente são complexos.
- **Orientado a especificação:** A especificação da forma que o programa deve funcionar é a parte mais significativa, todos os algoritmos são gerados sistematicamente através das rígidas instruções. Método indicado para estudantes universitários de informática, pois este será bem sucedido se os alunos possuírem um profundo conhecimento matemático.
- **Orientado a problemas:** Este método possui grandes diferenças dos outros, neste toda a etapa de programação é vista como uma única tarefa que não pode ser dividida. Dentre todos os métodos discutidos, este é o único recomendável para todos os tipos de estudantes, pois o foco é desenvolver nos alunos uma forma mais algorítmica de pensar sem estar preocupado com o treinamento profissional.
- **Orientado a linguagem:** Método semelhante ao orientado a problemas, porém o ensino dependente totalmente de uma linguagem de programação, todos os ensinamentos são voltados especificamente para a linguagem adotada. Devido a estes fatores esse método está desatualizado e não é tão útil nos dias atuais.
- **Orientado a instruções:** Semelhante ao orientado a linguagem, porém aqui é definido uma linguagem geral, uma forma de pseudocódigo.
- **Orientado a matemática:** Os problemas a serem resolvidos com esta técnica, são retirados da matemática, onde cada problema individual é relacionado com algum outro utilizando os princípios básicos da matemática. Esta não é uma metodologia eficaz para o ensino de programação, porém o ensino de matemática com o auxílio de programação pode ser útil devido a forma de raciocínio que as duas áreas possuem.

Uma ampla pesquisa na literatura com o foco na parte educacional do estudo de programação foi feita. Diversos métodos e tópicos foram identificados e analisados para poder ser realizada uma classificação, e assim, auxiliar os professores a identificar em seus alunos características comuns e padrões, que poderão ser contornados com base no que já foi realizado e está documentado na literatura, é mostrado por Robins, Rountree (2003).

Pears *et al.* (2007) desenvolveu um *survey* que reúne algumas formas da literatura de ensinar a introdução de programação. Além disso, os trabalhos reunidos, foram classificados e agrupados pela forma de ensino e pelos métodos aplicados.

Zsakó e Nóra (2008) realizaram uma análise nos principais métodos e aplicações que auxiliam no aprendizado e no ensino dos tópicos de ICT (do inglês, *Information and Communication Technology*). Para cada método é exemplificado o seu funcionamento, como realizar a sua aplicação e para qual nível de estudante ele é mais apropriado.

No trabalho desenvolvido por Papp-varga, Szlávi e Zsakó (2008), foi feita uma análise semelhante a que foi realizada no trabalho apresentado na subseção anterior. Porém, o foco deste é o ensino de uma linguagem de programação, portanto os métodos apresentados demonstram os passos ideais para transmitir os conceitos da linguagem proposta.

Radošević, Orehovački e Lovrenčić (2009), se propõem em criar uma ferramenta que facilite o aprendizado de linguagens de programação básicas, como C++, ao invés da utilização de IDE (do inglês, *Integrated Development Environment*). A finalidade desta ferramenta é ajudar os estudantes em não cometer erros que são comuns a quem está iniciando. Além disso, oferecer uma forma mais simples do professor auxiliar seus alunos.

Vihavainen, Paksula e Luukkainen (2011), discutem como ensinar o básico de programação para quem está começando. O autor propõe um modelo de ensino e faz a aplicação deste em uma turma de um curso de ciência da computação. O modelo discutido tem três estágios, no primeiro o professor oferece aos estudantes um modelo conceitual de um problema e como o mesmo foi resolvido. A todo momento de explicação o professor fala todos os seus pensamentos e explica o motivo de ter feito determinada decisão, deixando os alunos acompanharem toda a sua linha de raciocínio. Na segunda etapa, o estudante é exposto a um problema que será resolvido com a orientação de um instrutor que não entrega diretamente a resposta, mas sim sugestões que façam os alunos serem capazes de descobrir as respostas para suas próprias perguntas. A última etapa é quando os alunos conseguem resolver as tarefas sozinhos e não precisam mais do auxílio de um instrutor. Ao final do trabalho é feito um comparativo entre uma turma que utilizou da metodologia proposta e uma que não usou, e os resultados foram positivos, mostrando que a quantidade de evasão e reprovação foram reduzidos.

Apesar de existirem diversos trabalhos que tratam sobre o ensino de algoritmos e programação, todos os encontrados têm um foco para um nível básico de conhecimento, levando em conta alunos que estão iniciando nesta área, portanto, não será aplicado nenhum deste diretamente. No capítulo 4 será discutido a metodologia elaborada para a construção do trabalho.

3 TRABALHOS RELACIONADOS

Nesta seção são apresentados alguns trabalhos que tem um objetivo similar ao deste projeto. Em todos os encontrados a intenção do autor foi criar um conteúdo teórico sobre algoritmos e programação. Apesar de apenas um trabalho possuir conteúdo relacionado a programação dinâmica, todos eles são úteis para a elaboração da metodologia a ser desenvolvida.

Tommasini (201-) em seu trabalho visa ensinar programação dinâmica para quem está iniciando nesta área. Sua maior motivação foi a falta de um bom material didático sobre esse tema. Seu trabalho tem um foco muito didático, apresentando diversas técnicas, problemas com soluções e propondo vários exercícios para o leitor praticar o que foi ensinado. Ao final do trabalho é apresentada uma lista de problemas de maratonas de programação sobre os assuntos desenvolvidos no texto.

No trabalho proposto por Dalalio (2013), foi realizado um estudo de algoritmos e estruturas de dados para a resolução de problemas relacionados a *String Matching*¹. Seu texto é bem didático, mostrando diversos problemas e as diversas formas de resolução, apresentando a complexidade e seu código. Ao final diversos problemas são propostos para que o leitor os resolva utilizando os conceitos elaborados no texto.

Couto (2016) desenvolveu um trabalho voltado ao ensino de algoritmos, seu foco principal são os algoritmos aplicados em sequências de caracteres. Seu texto ficou dividido entre diversos capítulos, onde cada um deles apresentava uma estrutura de dados diferente, assim podendo mostrar ao leitor quando é melhor utilizar uma em relação as outras.

¹https://en.wikipedia.org/wiki/String_searching_algorithm

4 METODOLOGIA

Após a análise dos trabalhos levantados na seção 2.3, pode-se destacar os trabalhos elaborados por Szlávi e Zsakó (2003) e Vihavainen, Paksula e Luukkainen (2011). O primeiro em um dos métodos discutidos é abordado uma forma mais metodológica na hora de transmitir uma informação, onde em cada etapa do ensino há uma clara divisão. No segundo trabalho é mostrado uma maneira de ensino baseada no desenvolvimento de uma linha de raciocínio, em que o aluno ou o leitor, vai acompanhando todos os passos que o instrutor fez até chegar numa conclusão.

A metodologia aplicada no próximo capítulo tomará como base esses dois trabalhos, levando uma linha bem dividida entre os tópicos, porém sempre fazendo o leitor entender toda a linha de raciocínio, com algumas pausas a fim de deixar quem está lendo pensar em uma solução para um problema, antes de ser mostrado a resposta, além disso alguns exercícios serão propostos para quem desejar praticar o que está sendo demonstrado.

A estrutura de cada seção será dividida em seis partes, sendo elas:

- **Problema:** Será apresentado um problema com todas as informações que são importantes para ser resolvido através de programação dinâmica;
- **Solução ingênua:** A partir da descrição do problema será elaborada uma solução que utilize programação dinâmica, juntamente com a análise de complexidade, podendo ser temporal e/ou de espaço;
- **Análise de particularidades:** Após uma solução ter sido desenvolvida será levantado as características do problema, sendo elas a forma que os cálculos estão sendo desenvolvidos, como está sendo armazenado as informações, para que com estes dados possa ser feita alguma otimização. Neste ponto o leitor já começa a imaginar o que pode ser realizado para melhorar a solução;
- **“Nome da técnica”:** Com todas as análises feitas, será formulado a técnica em questão, mostrando o seu funcionamento e como esta pode ser aplicada no problema;
- **Benefícios:** Tendo aplicado a otimização, uma análise dos benefícios será feita juntamente com as novas complexidades;
- **Código final:** Ao final uma forma de implementação do problema com a linguagem C++ será apresentada, com o objetivo de sanar possíveis dúvidas do leitor.

Entre cada tópico pode existir algumas paradas com sugestões de tarefas que o leitor pode fazer, para tentar exercitar os conteúdos, estas serão apresentadas conforme o seguinte modelo:

<i>Sugestão de tarefa ao leitor...</i>
--

5 DESENVOLVIMENTO (ALTERAR NOME)

Aqui entra o desenvolvimento real do trabalho com as principais técnicas de otimização

5.1 REDUÇÃO DE ESPAÇO

Dentre as otimizações disponíveis, as que envolvem redução de memória são as mais simples de serem aplicadas, seu uso pode ser facilmente entendido no problema da mochila¹. Esse problema deseja maximizar o valor dos itens colocados em uma mochila, onde estes possuem um valor e um peso associado, enquanto a mochila possui uma capacidade máxima de peso. Além disso, nenhum item pode ser dividido.

$$dp[i][j] = \begin{cases} 0 & \text{se } i = 0 \text{ ou } j = 0, \\ \max(valor[i-1] + dp[i-1][j - peso[i-1]], dp[i-1][j]) & \text{se } peso[i-1] \leq j, \\ dp[i-1][j] & \text{se } peso[i-1] > j \end{cases} \quad (1)$$

O problema da mochila pode ser resolvido através da relação de recorrência apresentada acima, onde $dp[i][j]$ representa o valor máximo que pode se conseguir ao colocar os i -ésimos primeiros itens em uma mochila de capacidade j . Os vetores *valor* e *peso*, representam o valor e peso associado a cada um dos n itens, respectivamente. A resposta para o problema estará em $dp[n][capacidade]$.

Analisando a complexidade da equação 1 é fácil ver que será necessário $O(n * capacidade)$, tanto de memória, quanto de tempo. Porém, é notório que para solucionar a linha i da matriz de programação dinâmica, só são necessárias as respostas que já foram calculadas na linha $i - 1$, portanto podemos trabalhar apenas com duas linhas consecutivas da matriz, sempre alternando entre linha par e ímpar.

$$dp[i\&1][j] = \begin{cases} 0 & \text{se } i = 0 \text{ ou } j = 0, \\ \max(valor[i-1] + dp[\sim i\&1][j - peso[i-1]], dp[\sim i\&1][j]) & \text{se } peso[i-1] \leq j, \\ dp[\sim i\&1][j] & \text{se } peso[i-1] > j \end{cases} \quad (2)$$

A equação 2 demonstra como reduzir a memória. Os valores que serão utilizados nas linhas da DP serão sempre 0 ou 1, assim o total de memória necessária é de $2 * capacidade$, deixando com uma complexidade de $O(capacidade)$. A resposta para o problema da mochila

¹<http://www.geeksforgeeks.org/dynamic-programming-set-10-0-1-knapsack-problem/>

utilizando esta relação estará em $dp[n+1][capacidade]$.

O seguinte código mostra a implementação do problema da mochila com memória linear.

Algoritmo 1: Implementação Mochila

```

1
2 int mochila(){
3     int valor[] = {60, 100, 120};
4     int peso[] = {10, 20, 30};
5     int capacidade = 50, n = 3;
6
7     int dp[2][capacidade + 1];
8     for(int i = 0; i <= n; i++){
9         for(int j = 0; j <= capacidade; j++){
10             if(!i || !j)
11                 dp[i&1][j] = 0;
12             else if(peso[i - 1] <= j)
13                 dp[i&1][j] = max(valor[i-1] + dp[~i&1][j-peso[i-1]],
14                                 dp[~i&1][j]);
15             else
16                 dp[i&1][j] = dp[~i&1][j];
17         }
18     }
19     return dp[n&1][capacidade];
20 }
```

5.2 ESTRUTURA DE DADOS RMQ

Um dos problemas clássicos de programação dinâmica é o LIS (do inglês, *Longest Increasing Subsequence*). Neste, o objetivo é encontrar a maior subsequência de um *array* onde todos os elementos estão ordenados de forma crescente.

Imaginemos o seguinte *array*:

2,5,3,7,11,8

Uma das solução para este conjunto é a subsequência 2,3,7,8, que possui tamanho quatro.

Para resolver este problema pode ser usado programação dinâmica com a seguinte recorrência:

$$dp[i] = \begin{cases} 1 & \text{se } i = 0 \\ \max(dp[j] + 1)_{0 \leq j < i} & \text{se } i \neq 0 \text{ e } v[j] \leq v[i] \end{cases} \quad (3)$$

A equação 3, resolve o problema do LIS, com a complexidade $O(n^2)$ de tempo e $O(n)$ de memória, porém é notório que quando está sendo calculado a $dp[i]$, ou seja, a maior LIS que termina no i -ésimo índice, está sendo percorrido todos elementos do *array* que estão a esquerda e que possuem um valor menor ou igual que o elemento atual. Em outras palavras, queremos o maior elemento da dp que seu valor está no intervalo $[0..v[i]]$.

A partir destas observações podemos melhorar a complexidade dessa solução com o auxílio de uma estrutura de dados que consegue consultar máximo ou mínimo de intervalo de um *array* de forma mais eficiente. Pode ser ela uma *SegmentTree*² ou *BIT*³, com isso é possível remover a busca linear no *array* pelo maior elemento e trocar por uma busca logarítmica, deixando a solução final com $O(n * \log n)$.

O código a seguir mostra uma maneira de implementar o LIS utilizando *BIT*.

Algoritmo 2: Implementação LIS

```

1
2 #define MAXN 20
3 int v[] = {2, 5, 3, 7, 11, 8};
4 int bit[MAXN];
5 int dp[MAXN];
6
7 void update(int x, int v){
8     for(; x < MAXN; x+=x&-x)
9         bit[x] = max(bit[x], v);
10 }
11
12 int get(int x){
13     int ans = 0;
14     for(; x; x-=x&-x)
15         ans = max(ans, bit[x]);
16     return ans;
17 }
18
19 int lis(int n){
20     int ans = 0;
21
22     for(int i = 0; i < n; i++){

```

²<http://www.geeksforgeeks.org/segment-tree-set-1-range-minimum-query/>

³<http://www.geeksforgeeks.org/binary-indexed-tree-or-fenwick-tree-2/>

```
23         dp[i] = 1+get(v[i]);
24         update(v[i], dp[i]);
25         ans = max(ans, dp[i]);
26     }
27
28     return ans;
29 }
```

5.3 DIVIDE AND CONQUER OPTIMIZATION

Problemas:

- Kattis Branch Assignment WF 2016

5.4 KNUTH OPTIMIZATION

Problemas:

- Codechef = CHEFAOR
- URI 2475

5.5 CONVEX HULL TRICK

Problemas:

- URI 2481

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Considerações finais do trabalho, com conclusão e trabalhos futuros

6.1 CONCLUSÕES

6.2 TRABALHOS FUTUROS

REFERÊNCIAS

- CORMEN, T. H. *et al.* **Introduction to Algorithms**. Favoritenstrasse 9/4th Floor/1863: The MIT Press, 2009.
- HOM, E. J. **What is the Fibonacci Sequence?** 2013. Disponível em: <<http://www.livescience.com/37470-fibonacci-sequence.html>>. Acesso em: 02 abr. 2017.
- PAPP-VARGA, Z.; SZLÁVI, P.; ZSAKÓ, L. Ict teaching methods – programming languages. In: **Annales Mathematicae et Informaticae** 35. [s.n.], 2008. p. 163–172. Disponível em: <<https://www.researchgate.net/publication/228955901>>.
- PEARS, A. *et al.* A survey of literature on the teaching of introductory programming. In: **Working Group Reports on ITiCSE on Innovation and Technology in Computer Science Education**. New York, NY, USA: ACM, 2007. (ITiCSE-WGR '07), p. 204–223. Disponível em: <<http://doi.acm.org/10.1145/1345443.1345441>>.
- PERRETT, D. **CompSci 101 - Big-O Notation**. 2010. Disponível em: <<http://www.daveperrett.com/articles/2010/12/07/comp-sci-101-big-o-notation/>>. Acesso em: 23 abr. 2017.
- RADOŠEVIĆ, D.; OREHOVAČKI, T.; LOVRENČIĆ, A. New approaches and tools in teaching programming. 2009. Disponível em: <<https://www.researchgate.net/publication/224930648>>.
- ROBINS, A.; ROUNTREE, J.; ROUNTREE, N. Learning and teaching programming: A review and discussion. **Computer Science Education**, v. 13, n. 2, p. 137–172, 2003. Disponível em: <<http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1076/csed.13.2.137.14200>>.
- SCHWARTZ, H. R. **Memoization using Closures**. 2011. Disponível em: <<https://harryrschwartz.com/2011/01/06/memoization-using-closures.html>>. Acesso em: 02 abr. 2017.
- SZLÁVI, P.; ZSAKÓ, L. Methods of teaching programming. 2003. Disponível em: <<https://www.researchgate.net/publication/235925815>>.
- VIHAVAINEN, A.; PAKSULA, M.; LUUKKAINEN, M. Extreme apprenticeship method in teaching programming for beginners. In: **Proceedings of the 42Nd ACM Technical Symposium on Computer Science Education**. New York, NY, USA: ACM, 2011. (SIGCSE '11), p. 93–98. ISBN 978-1-4503-0500-6. Disponível em: <<http://doi.acm.org/10.1145/1953163.1953196>>.
- ZSAKÓ, L.; NÓRA, C. Ict teaching methods applications. In: **Mittermeir R., Syslo M. (eds.) Informatics Education contributing across the curriculum, proc. of selected papers - 3rd ISSEP conference**. [s.n.], 2008. p. 47–53. Disponível em: <<https://www.researchgate.net/publication/235925718>>.

FUNDAÇÃO EDUCACIONAL SERRA DOS ÓRGÃOS – FESO
CENTRO UNIVERSITÁRIO SERRA DOS ÓRGÃOS – UNIFESO
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA – CCT
CURSO DE BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

DECLARAÇÃO DE PRÓPRIA AUTORIA

Teresópolis, XX/XX/2017

Eu, Gabriel Lagoa Duarte, declaro para fins de conclusão do Curso de Bacharelado em Ciência da Computação do UNIFESO, que este Trabalho de Conclusão de Curso é de minha própria autoria, estando ciente das consequências disciplinares a que estarei sujeito caso seja comprovada fraude ou má-fé. Sem mais, subscrevo-me,

Atenciosamente,

Gabriel Lagoa Duarte