Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Estudios Superiores Acatlán

CÁLCULO III *Apuntes Calculo III*

Alumno:	**Villafuerte Aguilar Christian Gabriel**
Alumno:	**Martinez Martinez Andrés A.**
Profesor:	**Guzman Fuentes Ricardo**
Grupo:	**1302 y 1305**

Matematicas Aplicadas y Computación

Índice

-1. Lógica (Repaso)

-1.1. Proposiciones Lógicas

Definición -1.1: Proposición

Una **proposición** es un enunciado con sujeto, verbo y predicado, que en algún contexto tiene asignado un **valor de verdad**, es decir, puede ser verdadero (V) o falso (F), pero no ambos a la vez.

Ejemplo -1.1: Proposiciones y no proposiciones

Son proposiciones (admiten V o F):

1. Hoy miércoles 13 de agosto no llueve.
2. El techo se está laminando.
3. Juan fue al mercado a las 11:12 a.m.
4. La URSS se disolvió en el 91.
5. El cielo es azul.
6. La Tierra es un planeta en el Sistema Solar.
7. Pedro come tacos al día.
8. Hay murciélagos en la clase de cálculo III.

No son proposiciones (no admiten claramente V o F):

1. ¡Qué bonito día!
2. ¿A qué hora llegas?
3. Cierra la puerta.

Nota:

Una proposición siempre se puede representar por una letra: $p, q, r, \ldots$.

-1.2. Conectivos Lógicos: Disyunción, Conjunción y Negación

Definición -1.2: Conectivos

Sea U un universo de discurso y sea p una proposición lógica en U.

1. **Conjunción ($p \wedge q$).** Dados p y q proposiciones en U, la proposición "p y q" es verdadera si y sólo si p es verdadera y q es verdadera; en otro caso es falsa.
2. **Disyunción ($p \vee q$).** Dados p y q proposiciones en U, la proposición "p o q" es falsa si y sólo si p es falsa y q es falsa; en otro caso es verdadera.

3. **Negación ($\neg p$).** Dada p proposición en U, la proposición "no p" es verdadera si p es falsa, y es falsa si p es verdadera.
4. **Implicación ($p \Rightarrow q$).** La proposición "si p entonces q" es verdadera si p es falsa o q es verdadera (sólo es falsa si V $\to$ F).
5. **Bicondicional ($p \Leftrightarrow q$).** La proposición "p si y sólo si q" es verdadera si p y q tienen el mismo valor de verdad.

Definición -1.3: Tautología y contradicción

- Una proposición compuesta es una **tautología** si por su forma es siempre verdadera, sin importar el contexto (ejemplo: $p \vee \neg p$).
- Una proposición compuesta es una **contradicción** si por su forma es siempre falsa, sin importar el contexto.

-1.3. Tablas de Verdad

Para dos proposiciones p y q, existen $2^2 = 4$ combinaciones posibles de valores de verdad.

Ejemplo -1.2: Tablas de verdad básicas

Disyunción $p \vee q$

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Conjunción $p \wedge q$

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Implicación $p \Rightarrow q$

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Bicondicional $p \Leftrightarrow q$

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Ejemplo -1.3: Tabla de verdad compuesta

Sean $P := R \vee S$ y $Q := T \wedge W$. Estudiemos la tabla de $P \vee Q$:

R	S	T	W	$(R \vee S)$	$(T \wedge W)$	$P \vee Q$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	F	V	F	V
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
F	F	F	F	F	F	F

(Se muestran solo filas representativas por espacio).

Definición -1.4: Equivalencia lógica

Dadas proposiciones p y q, diremos que p es equivalente a q ($p \equiv q$) si $p \Leftrightarrow q$ es una tautología.

Ejemplo -1.4: Equivalencias importantes

1. $p \vee \neg p$ es una tautología (Principio del tercio excluso).
2. $p \Rightarrow q \equiv \neg(p \wedge \neg q)$.
3. $\neg(\neg p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$.

-1.4. Argumentos y Demostraciones

Definición -1.5: Razonamiento Válido

Un **razonamiento** es una implicación donde el antecedente es una conjunción de premisas ($P_1 \ldots P_n$) y el consecuente es la conclusión (R). Es **válido** si:

$$(P_1 \wedge \cdots \wedge P_n) \Rightarrow R$$

es una tautología.

Ejemplo -1.5: Ejemplo numérico de inferencia

Queremos probar: $9 - 1 = (3 - 1)(3 + 1)$.

- Partimos de la identidad: $8 = 8$.
- Premisas aritméticas: $2(4) = 8, 3 - 1 = 2, 3 + 1 = 4$.
- Sustitución: $(3 - 1)(3 + 1) = 2(4) = 8$.
- Por otro lado: $9 - 1 = 8$.
- Conclusión: $9 - 1 = (3 - 1)(3 + 1)$ es verdadero.

0. Conjuntos (Repaso)

0.1. Conjuntos y Subconjuntos

Definición 0.1: Conjunto Potencia

Sea A un conjunto. El **conjunto potencia** de A es el conjunto formado por todos los subconjuntos de A:

$$P(A) := \{B : B \subset A\}.$$

Si $|A| = n$, entonces $|P(A)| = 2^n$.

Ejemplo 0.1: S

i $A = \{1, 2, 3\}$ entonces:

$$P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}.$$

Definición 0.2: Relaciones de Inclusión

Sean A, B conjuntos.

- **Subconjunto ($A \subset B$):** Si $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$.
- **Subconjunto propio ($A \subsetneq B$):** Si $A \subset B$ y $A \neq B$.
- **Conjunto Vacío ($\varnothing$):** Es el conjunto que no contiene elementos.

Ejemplo 0.2: Ejercicios de comprensión (Tarea resuelta)

1. $U = \{1, \ldots, 10\}$, $p(x)$: "x es par" $\implies A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.
2. $U = \{a, \ldots, z\}$, $p(x)$: "x es vocal" $\implies A = \{a, e, i, o, u\}$.
3. $U =$ Facultades UNAM, $p(x)$: "Imparte MAC" $\implies A = \{$FES Acatlán$\}$.

0.2. Operaciones con Conjuntos

Sean $A = \{u \in U : p(u)\}$ y $B = \{u \in U : q(u)\}$.

1. **Unión:** $A \cup B := \{u \in U : p(u) \vee q(u)\}$.
2. **Intersección:** $A \cap B := \{u \in U : p(u) \wedge q(u)\}$.
3. **Diferencia:** $A \setminus B := \{u \in U : p(u) \wedge \neg q(u)\}$.
4. **Diferencia Simétrica:** $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
5. **Complemento:** $A^c := \{u \in U : \neg p(u)\}$.

Teorema 0.1: Igualdad de conjuntos

$A = B$ si y sólo si $A \subset B$ y $B \subset A$. Equivalente a $\forall u : p(u) \Leftrightarrow q(u)$.

Propiedades Fundamentales (Leyes del Álgebra de Conjuntos)

Para cualesquiera A, B, C subconjuntos de U:

a) $A \cup B = B \cup A$ (Conmutatividad)
b) $A \cap B = B \cap A$
c) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (Asociatividad)
d) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (Asociatividad corregida)
e) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (Distributividad)
f) $A \cap A^c = \varnothing$
g) $A \cup A^c = U$
h) $A \cap U = A$
i) $A \cup \varnothing = A$
j) $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$
k) $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$

0.3. Supremo e Ínfimo

Definición 0.3: Cotas

Sea $S \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío.

- $M \in \mathbb{R}$ es **cota superior** de S si $\forall x \in S, x \leq M$.
- $m \in \mathbb{R}$ es **cota inferior** de S si $\forall x \in S, m \leq x$.

Si S tiene cota superior e inferior, se dice que es **acotado**.

Definición 0.4: Supremo e Ínfimo

- **Supremo** (sup S)**:** Es la *menor* de las cotas superiores.

$$\alpha = \sup S \iff \forall \epsilon > 0, \exists x \in S \text{ tal que } \alpha - \epsilon < x \leq \alpha.$$

- **Ínfimo** (ínf S)**:** Es la *mayor* de las cotas inferiores.

Teorema 0.2: Axioma del Supremo

Todo subconjunto no vacío de números reales que esté acotado superiormente tiene un supremo en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 0.3: S

ea $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$.

- El conjunto está acotado superiormente (ej. 2, 1.5, 10 son cotas).
- $\sup A = \sqrt{2}$. Notar que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, lo que muestra la necesidad de los Reales.

0.4. Funciones y Límites

Definición 0.5: Función

Una función $f : A \to B$ es una relación que asigna a cada elemento $x \in A$ un **único** elemento $y \in B$, denotado por $f(x)$.

- **Dominio (D_f):** Conjunto de valores donde la función está definida.
- **Imagen (Im_f):** Conjunto de valores que toma la función: $\{f(x) : x \in A\}$.

Definición 0.6: Límite de una función (Definición $\epsilon - \delta$)

Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene a c (excepto posiblemente en c). Decimos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a c es L, y escribimos:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

si para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que:

$$0 < |x - c| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon.$$

Ejemplo 0.4: Límite básico

Demostrar que $\lim_{x \to 2}(3x - 1) = 5$.

- Dado $\epsilon > 0$, buscamos δ tal que $0 < |x - 2| < \delta \implies |(3x - 1) - 5| < \epsilon$.
- Manipulamos: $|3x - 6| < \epsilon \implies 3|x - 2| < \epsilon \implies |x - 2| < \epsilon/3$.
- Tomamos $\delta = \epsilon/3$. Así queda demostrado formalmente.

1. FUNCIONES, LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES REALES DE UN VECTOR

1.1. Topologias de los espacios cartesianos

Sea $I = \{1, \ldots, n\}$ y sea $A_i = A$ para todo $i \in I$. Entonces,

$$\prod_{i \in I} A_i = A^n.$$

Si $u \in \prod_{i \in I} A_i$, entonces u es de la forma

$$u = (u_1, \ldots, u_n).$$

Podemos definir una función

$$\beta : I \to A,$$

tal que

$$\beta(1) = u_1, \ \beta(2) = u_2, \ \ldots, \ \beta(n) = u_n.$$

En este caso, el conjunto $(u_1, \ldots, u_n)^*$ corresponde a la imagen ordenada de β, es decir,

$$(u_1, \ldots, u_n)^* = \mathrm{Im}(\beta) \text{ con el orden natural inducido por } I.$$

Por lo tanto, podemos ver que

$$A^n \cong A^I := \{\, \beta : I \to A \mid \beta \text{ es función y su imagen está ordenada como } * \,\}.$$

Además, por notación de producto cartesiano indexado:

$$A^I := \prod_{i \in I} A.$$

Definición 1.1: Unión arbitraria de conjuntos e intersección arbitraria

Sean $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de conjuntos definidos por las pp.ll.aa.

P_α. Para cada $\alpha \in I$, con I un conjunto de índices. Entonces:

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha := \{w \mid \exists \alpha \in I : P_\alpha(w)\}$$

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha := \{w \mid \forall \alpha \in I : P_\alpha(w)\}$$

Definición 1.2: Topología

Una colección (o familia)

$$\tau \subset \mathcal{P}(X), \text{ con } X \text{ un conjunto, la cual cumple:}$$

1. $\emptyset, X \in \tau$
2. $\forall \{A_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset \tau : \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \in \tau$
3. $\forall |I| \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \forall \{A_n\}_{n \in I} \subset \tau : \bigcap_{n \in I} A_n \in \tau$

Se llama topología para X a la pareja (X, τ), se llama espacio topológico.

Nota:

. Los elementos de τ se les denomina abiertos en (X, τ).

- Expander $\to$ **Unión**
$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-n, n)$$
- $\to$ **Intersección**
$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (n, n+1)$$
- **Contraer**
$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\} = [0, 0]$$
$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$$

Ejemplo 1.1: Trabajo realizado

1. Si X es un conjunto y $\tau = \mathcal{P}(X)$. Resulta que (X, τ) es un espacio topológico.

   Por definición de $\mathcal{P}(X)$, $\emptyset, X \in \mathcal{P}(X)$.

   Unión arbitraria de subconjuntos e intersección arbitraria de subconjuntos de X es subconjunto de X.

   Es decir:
$$\forall \{A_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset \tau : \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha, \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \in \tau.$$

2. Nuevamente si X es un conjunto y $\tau = \{\emptyset, X\}$. Entonces 1, de la definición anterior se cumple.

   Por otro lado si $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset \tau$, puede pasar:

   Caso 1: $\forall \alpha \in I : A_\alpha = \emptyset$.

En este caso,
$$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha = \emptyset \in \tau.$$

Caso 2: $\exists \alpha_0 \in I : A_{\alpha_0} \neq \emptyset$.
Es decir, si $A_{\alpha_0} = X$, entonces
$$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha = X \in \tau.$$

Ahora si $I = \{1, \dots, n\}$ y $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I} \subset \tau$, pasará:

Caso 1: $\forall \alpha \in I : A_\alpha = X$. En este caso,
$$\bigcap_{n\in I} A_\alpha = X \in \tau.$$

Caso 2: $\exists \alpha \in I : A_\alpha = \emptyset$. Aquí vemos que
$$\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha = \emptyset \in \tau.$$

$\therefore$ τ es topología para X.

3. Para $X = \{1, 2\}$, tenemos que
$$P(X) = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2\}\}$$
y además
$$\begin{aligned} Z \in P(P(X)) = \{&\emptyset, \{X\}, \overset{\text{Induccion}}{\{\emptyset, X\}}, \overset{\text{no}}{\{\emptyset, \{1\}\}},\\ &\overset{\text{no}}{\{\emptyset, \{2\}\}}, \overset{\text{no}}{\{X, \{1\}\}}, \overset{\text{no}}{\{X, \{2\}\}}, \overset{\text{no}}{\{\{1\}, \{2\}\}},\\ &\tau_1\{\emptyset, X, \{1\}\}, \tau_2\{\emptyset, X, \{2\}\}, \overset{\text{no}}{\{X, \{1\}, \{2\}\}},\\ &\overset{\text{no}}{\{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}}, \overset{\text{no}}{\{\emptyset\}}, \overset{\text{no}}{\{\{1\}\}}, \overset{\text{no}}{\{\{2\}\}}\ \overset{\text{Discreta}}{P(X)}\ \}\end{aligned}$$
Por definición del conjunto potencia.

Veamos el caso de τ.
Ya cumple que $\emptyset, X \in \tau_1$. Por otro lado,
si $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha\in I} \subset \tau$ y $I = \{1, \dots, n\}$, con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Caso 1: si $\emptyset = \{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ terminamos.
Caso 2: $\forall \alpha \in I : A_\alpha = \emptyset$. Igualmente terminamos ya que $\cup\mathcal{A} = \emptyset$.
Caso 3: $\forall \alpha \in I : A_\alpha = X$. Así $\cup\mathcal{A} = X$.
Caso 4: $\forall \alpha \in I : A_\alpha = \{1\}$. Entonces $\cup\mathcal{A} = \{1\}$.
Caso 5: Si $\forall \alpha \in I : A_\alpha \in \{\emptyset, X\}$. Se observa que $\cup\mathcal{A} = X$.

Caso 6: $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1\}\} \implies \bigcup \mathcal{A} = \{1\} \in \tau$.
Caso 7: $\mathcal{A} = \{X, \{1\}\} \implies \bigcup \mathcal{A} = X \in \tau$.
Caso 8: $\mathcal{A} = \tau$. Así $\cup\mathcal{A} = X \in \tau$.
$\cup\mathcal{A} \in \tau, \forall \mathcal{A} \subset \tau$**.**

Veamos el caso de τ_1.
Ya cumple que $\emptyset, X \in \tau_1$. Por otro lado,
si $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha\in I} \subset \tau_1$ y $I = \{1, \ldots, n\}$, con $n \in \mathbb{N}$ o $I = \emptyset$.

Caso 1: si $\emptyset = \{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ terminamos.
Caso 2: $\exists \alpha_0 \in I : A_{\alpha_0} = \emptyset$. Igualmente terminamos ya que $\cap\mathcal{A} = \emptyset$.
Caso 3: $\forall \alpha \in I : A_\alpha \neq \emptyset \in \tau_1$

Subcaso 3.1: $\exists \beta \in I : A_\beta = \{1\}$, tendremos que

$$\cap\mathcal{A} = \{1\} \in \tau_1$$

Subcaso 3.2: $\forall \alpha \in I : A_\alpha = X$. Terminamos porque

$$\cap\mathcal{A} = X.$$

$\therefore \cap\mathcal{A} \in \tau, \forall \mathcal{A} \subset \tau$ cuando $\mathcal{A}$ es finita.

Así concluimos que τ, es una topología de X.

Demostración.
Demostración de que $\tau_2 = \{\emptyset, X, \{2\}\}$ es una Topología
Para $X = \{1, 2\}$, queremos demostrar que $\tau_2 = \{\emptyset, X, \{2\}\}$ es una topología sobre X. Debemos verificar las tres condiciones.

1. $\emptyset, X \in \tau_2$
Por la propia definición de τ_2, esta condición se cumple.

2. Uniones Arbitrarias
Sea $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha\in I} \subset \tau_2$. Debemos verificar que $\cup\mathcal{A} \in \tau_2$.

Caso 1: Si $\mathcal{A} = \emptyset$, entonces $\cup\mathcal{A} = \emptyset \in \tau_2$.

Caso 2: Si $\forall \alpha \in I : A_\alpha = \emptyset$. Entonces $\cup\mathcal{A} = \emptyset \in \tau_2$.

Caso 3: Si $\forall \alpha \in I : A_\alpha = X$. Entonces $\cup\mathcal{A} = X \in \tau_2$.

Caso 4: Si $\forall \alpha \in I : A_\alpha = \{2\}$. Entonces $\cup\mathcal{A} = \{2\} \in \tau_2$.

Caso 5: Si $\mathcal{A}$ contiene combinaciones de $\{\emptyset, X\}$, entonces $\cup\mathcal{A}$ es $\emptyset$ o X, ambos en τ_2.

Caso 6: Si $\mathcal{A}$ contiene combinaciones de $\{\emptyset, \{2\}\}$, entonces $\cup\mathcal{A} = \{2\} \in \tau_2$.

Caso 7: Si $\mathcal{A}$ contiene combinaciones de $\{X, \{2\}\}$, entonces $\cup\mathcal{A} = X \in \tau_2$.

Caso 8: Si $\mathcal{A} = \tau_2 = \{\emptyset, X, \{2\}\}$, entonces $\cup\mathcal{A} = X \in \tau_2$.

Concluimos que $\cup\mathcal{A} \in \tau_2, \forall\mathcal{A} \subset \tau_2$.

3. Intersecciones Finitas
Sea $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha\in I} \subset \tau_2$ con I un conjunto de índices finito.

Caso 1: Si $\mathcal{A} = \emptyset$, por convención $\cap\mathcal{A} = X \in \tau_2$.

Caso 2: Si $\exists\alpha_0 \in I$ tal que $A_{\alpha_0} = \emptyset$, entonces $\cap\mathcal{A} = \emptyset \in \tau_2$.

Caso 3: Si $\forall\alpha \in I : A_\alpha \neq \emptyset$. Entonces los elementos de $\mathcal{A}$ solo pueden ser X y $\{2\}$.

Subcaso 3.1: Si $\exists\beta \in I : A_\beta = \{2\}$, tendremos que

$$\cap\mathcal{A} = \{2\} \in \tau_2$$

dado que la intersección de cualquier conjunto con $\{2\}$ es $\{2\}$ o $\emptyset$.

Subcaso 3.2: Si $\forall\alpha \in I : A_\alpha = X$. Terminamos porque

$$\cap\mathcal{A} = X \in \tau_2.$$

$\therefore \cap\mathcal{A} \in \tau_2, \forall\mathcal{A} \subset \tau_2$ cuando $\mathcal{A}$ es finita.

Así concluimos que τ_2 es una topología sobre X.

■

1.1.1. Topologia cofinita

Ejemplo 1.2: Cofinitas

4. Para un conjunto X, defina

$$\eta = \{A \subset X : A = \emptyset \vee X \setminus A \text{ es finito}\}.$$

1. $\emptyset, X \in \eta$.
2. $\forall\,\mathcal{A} \subset \eta : \bigcup\mathcal{A} \in \eta$.

   Si $\bigcup\mathcal{A} = \emptyset$, fin.

   Si no, entonces

$$X \setminus \bigcup\mathcal{A} = \bigcap_{\alpha\in I}(X \setminus A_\alpha) \subset X \setminus A_{\alpha_0}$$

para algún $\alpha_0 \in I$.

Como $A_{\alpha_0} \in \eta$, se tiene que $X \setminus A_{\alpha_0}$ es finito. Por lo tanto, $X \setminus \bigcup \mathcal{A}$ es finito.

3. Sea $\mathcal{A} \subset \eta$ con $|\mathcal{A}| \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

   Si $\mathcal{A} = \emptyset$, $\cap\mathcal{A} = \emptyset \in \eta$. Si $|\mathcal{A}| > 0$, entonces

   i) Si $\cap\mathcal{A} = \emptyset$, terminamos.

   ii) Si $\cap\mathcal{U} \neq \emptyset$. Entonces

   $$X \setminus \bigcap \mathcal{A} = \bigcup_{k=1}^{n} X \setminus A_k$$

   donde $I = \{1, \ldots, n\}$, y $n \in \mathbb{N}$.

   Así $\cap\mathcal{A} \in \eta$.

   $\therefore$ η es topología de X.

5. Para un conjunto X, defina

$$\eta = \{A \subset X : A = \emptyset \vee X \setminus A \text{ es numerable}\}.$$

1. $\emptyset, X \in \eta$.

2. $\forall \mathcal{A} \subset \eta : \cup\mathcal{A} \in \eta$.

   Si $\cup\mathcal{A} = \emptyset$, fin.

   Si no, $X \setminus \cup\mathcal{A} = \bigcap_{\alpha \in I}(X \setminus A_\alpha) \subset X \setminus A_{\alpha_0}$ con $\alpha_0 \in I$. Como $A_{\alpha_0} \in \eta$, $X \setminus A_{\alpha_0}$ es numerable. Por lo cual $X \setminus \cup\mathcal{A}$ es numerable.

3. Sea $\mathcal{A} \subset \eta$ con $|\mathcal{A}| \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

   Si $\mathcal{A} = \emptyset$, $\cap\mathcal{A} = \emptyset \in \eta$. Si $|\mathcal{U}| > 0$, entonces

   i) Si $\cap\mathcal{A} = \emptyset$, terminamos.

   ii) Si $\cap\mathcal{A} \neq \emptyset$. Entonces

   $$X \setminus \bigcap \mathcal{A} = \bigcup_{k=1}^{n} (X \setminus A_k)$$

   donde $I = \{1, \ldots, n\}$, y $n \in \mathbb{N}$.

   Así $\cap\mathcal{A} \in \eta$.

   $\therefore$ η es topología de X.

1.1.2. Espacios topológicos

Definición 1.3: Base

Para (X, τ) un espacio topológico. Un conjunto $B \subset \tau$ que cumple que $\forall U \in \tau, \in n \subset B$ t $\cup n$ = U B se llama **base** para τ.

Ejemplo 1.3: 1

Si $X = \{1, 2\}$ y $\tau = \mathcal{P}(X)$, tendremos que

$B_1 = \tau$ es base, trivialmente. Más aún

$B_2 = \{\{1\}, \{2\}\}$ también es base para τ.

Nota:

Recordando que

$$A = \bigcup_{a \in \mathcal{A}} \{A\}$$

si $A \subset \tau$.

tome a n como

1. $n = \emptyset$ si $A = \emptyset$
2. $n = \{\{1\}\}$ si $A = \{1\}$
3. $n = \{\{2\}\}$ si $A = \{2\}$
4. $n = \{\{1, 2\}\}$ si $A = X$

Con esto verificamos que

$$A = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$$

Nota:

Las bases no son únicas.

Definición 1.4: Base para topologia

Sea X un conjunto y $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$, entonces diremos que $\mathcal{B}$ es una **base** para una topología en X si y solo si cumple:

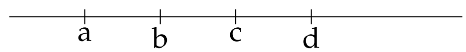
1. $\forall x \in X, \exists q \in \mathcal{B}$ tal que $x \in q$.
2. $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}, \forall x \in B_1 \cap B_2, \exists B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

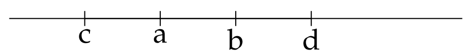
La topología en cuestión es $\mathcal{T} = \{\bigcup_{i \in I} \eta \mid \eta \subset \mathcal{B}\}$.

Ejemplo 1.4: Topologia usual

En $\mathbb{R}$, la base es $\mathcal{B} = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$. Y con este, vemos que si $U \in \mathbb{R}$, el intervalo $U \in (U-1, U+1) \in B$.
Por otro lado, si $(a,b),(c,d) \in \mathcal{B}$ y $x \in (a,b) \cap (c,d)$, con $(a,b) \cap (c,d) \neq \emptyset$. En caso de que la intersección sea vacía, la condición se cumple por vacuidad.

Tomando $e = \max(a,c)$ y $f = \min(b,d)$





Tendremos que $x \in (e,f) \subset (a,b) \cap (c,d)$ y $(e,f) \in \mathcal{B}$.

Definición 1.5: Metrica

Una función $d : W \times W \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ con W un conjunto se le llama función **distancia** o **métrica** sobre W si y solo si cumple:

1. $d(w_1, w_2) \geq 0 \quad \forall w_1, w_2 \in W$
2. $d(w_1, w_2) = d(w_2, w_1) \quad \forall w_1, w_2 \in W$
3. $d(w, U) = 0$ si y solo si $U = W$
4. $d(w, U) + d(U, V) \geq d(w, V) \quad \forall w, U, V \in W$

Ejemplo 1.5: Métrica Discreta

Sea X un conjunto y $d : X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ definida por

$$d(U,V) = \begin{cases} 0 & \text{si } U = V, \\ 1 & \text{si } U \neq V. \end{cases}$$

Con esto vemos que $d(U,W) \geq 0$ para cada $U, W \in X$, y que $d(U,W) = 0$ si y sólo si $U = W$. Además:

- Si $d(U,W) = 0$, entonces $d(W,U) = 0$.
- Si $U \neq W$, entonces $d(U,W) = d(W,U) = 1$.

Ejemplo 1.6: Métrica del taxi

En $\mathbb{R}^n$, con $n \in \mathbb{N}$, definimos $d_T : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ por:

$$d_T(U, W) = \sum_{i=1}^{n} |U_i - W_i|.$$

Ejemplo 1.7: Métrica Euclidiana

En $\mathbb{R}^n$ tenemos la **distancia euclidiana**

$$\begin{aligned} d_E : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto \left[(u - v) \cdot (u - v)\right]^{1/2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (u_i - v_i)^2} \end{aligned}$$

donde $p \cdot q = pIq^T$ para $p, q \in \mathbb{R}^n$ e $I \in M_n(\mathbb{R})$. Además, recordemos que $p \cdot q = q \cdot p$ y que $p \cdot p \geq 0$ para todo $p, q \in \mathbb{R}^n$.

Ejemplo 1.8: Distancia d_p

En $\mathbb{R}^n$, para $p \in [1, \infty)$, definimos la **distancia** d_p

$$\begin{aligned} d_p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto \left(\sum_{i=1}^{n} |u_i - v_i|^p \right)^{1/p} \end{aligned}$$

Ejemplo 1.9: Para $\mathbb{R}^n$

Definamos

$$\begin{aligned} d_\infty : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto \max_{i \in \{1, \ldots, n\}} \{|u_i - v_i|\} \end{aligned}$$

Definición 1.6: Espacio Métrico

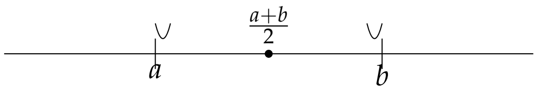
Sean (X, d) espacio métrico y $r \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, defina la bola abierta con centro en $u \in X$ y radio r como

$$B_n^r = B(r, u) = B_r(u) := \{v \in X : d(u, v) < r\}.$$

Proposición 1.1: Topología Usual

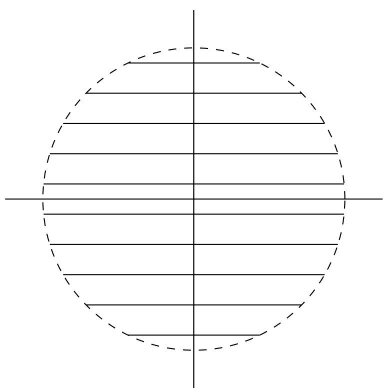
En $\mathbb{R}$, $\beta_E = \{B_r(a) \mid r \in \mathbb{R}, r > 0, a \in \mathbb{R}\}$ genera la topología usual de $\mathbb{R}$.

Demostración. Note que si (a,b) es abierto en $\mathbb{R}$, basta tomar $u = \frac{a+b}{2}$ y $r = \frac{b-a}{2}$ y tendremos que $(a,b) = B_r(u)$.
Más aún, si $r \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ y $u \in \mathbb{R}$, note que $(u-r, u+r) = B_r(u)$.



En $\mathbb{R}^2$, tomemos d_D, d_T y d_E las métricas discreta, del taxi, y euclideana respectivamente. Tome $u = \theta$ y $r = 1$. Entonces, ¿cómo son los "dibujos" de $B_r(u)$ en cada métrica?

En d_E tenemos que se dibuja $B_r(u)$ como un círculo.



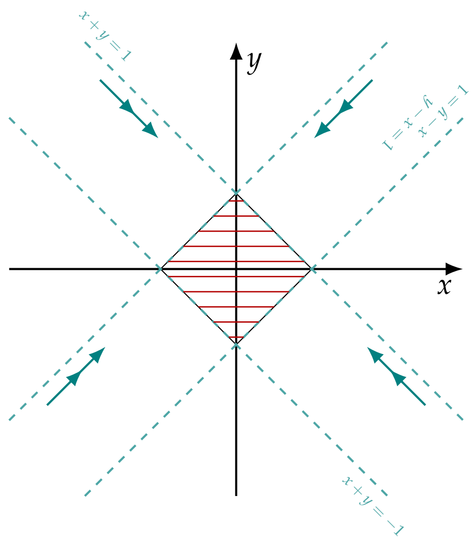
Puesto que $B_1(\theta)$ es el disco unitario en $\mathbb{R}^2$ abierto.

$$x^2 + y^2 < 1.$$

En d_T observemos que $(x,y) \in B_1(\theta)$ sii

$$|x| + |y| < 1, \text{..........}, (*).$$

- **Caso I:** $x, y \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$. Así * se transforma en $x + y < 1$.
- **Caso II:** $x, y \in \mathbb{R}_-$. Así * se transforma en $x + y > -1$.
- **Caso III:** $x < 0 \le y$. Así * se transforma en $y - x < 1$.
- **Caso IV:** $y < 0 \le x$. Así * se transforma en $x - y < 1$.



En dis observe que $(x,y) \in B_1(\theta)$ sii

$$d((x,y),\theta) < 1.$$

Pero $d((x,y),\theta) = 1$ sii $(x,y) \neq \theta$.
Y que $d((x,y),\theta) < 1$ implicará que $d((x,y),\theta) = 0$.

- O

$\blacksquare$

Definición 1.7: Metrizable

Para (X,d) un espacio métrico, el conjunto

$$\beta = \{B_r(u) \mid r \in \mathbb{R}, r > 0, u \in X\}$$

es una base para una topología de X y se llama topología dada por la métrica d, τ_d.
Si τ es una topología y existe d métrica en X y d genera a τ, diremos que (X,τ) es metrizable.

Definición 1.8: Topología Usual

En $\mathbb{R}^n$ con la métrica euclideana d_E, la topología τ_{d_E} se llama **topología usual de** $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.9: Conjunto ordenado

Sean $(X, \leq)$ conjunto ordenado. Sean $a, b \in X$:

$$(a, b) := \{u \in X : a < u \wedge u < b\}$$

$$[a, b] := \{u \in X : (a < u \vee a = u) \wedge (u < b \vee u = b)\}$$

Definición 1.10: Definiciones de intervalos en un conjunto ordenado

Sea X un conjunto ordenado (x,<).

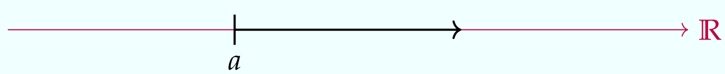
$$\begin{aligned}
(a, \infty) &:= \{u \in X \mid a < u\} \\
[a, \infty) &:= \{u \in X \mid a < u \vee u = a\} \\
(-\infty, a) &:= \{u \in X \mid a > u\} \\
(-\infty, a] &:= \{u \in X \mid u < a \vee u = a\}
\end{aligned}$$

Si X tiene primer elemento, $x_0 \in X$ entonces

$$\begin{aligned}
[-\infty, a) &= [x_0, a) \\
[-\infty, a] &= [x_0, a]
\end{aligned}$$

Si X tiene un último elemento x_1, entonces

$$\begin{aligned}
(a, \infty] &= (a, x_1] \\
[a, \infty] &= [a, x_1]
\end{aligned}$$



En $\mathbb{N}$

$$[-\infty, 3] = [1, 3] = \{1, 2, 3\}$$

En $\mathbb{Z}^-$

$$(-4, \infty) = (-4, -1] = \{-3, -2, -1\}$$

Definición 1.11: Orden lexcográfico

En $\mathbb{R}^n$, definamos $<$ como
$u, v \in \mathbb{R}^n$
$u < v \quad$ sii

1) $u_1 < v_1$

2) $u_1 = v_1 \wedge u_2 < v_2$

3) $u_1 = v_1 \wedge u_2 = v_2 \wedge u_3 < v_3$

$\vdots$

j) $(\forall i \in \{1, \ldots, j-1\} : u_i = v_i) \wedge u_j < v_j$

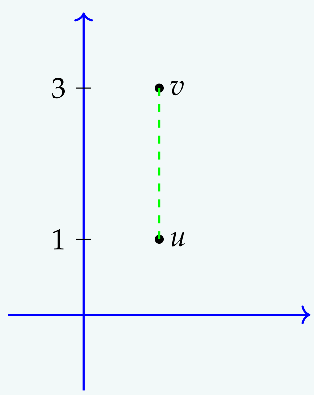
n) $(\forall i \in \{1, \ldots, n-1\} : u_i = v_i) \wedge u_n < v_n$

Ejercicio 1.1: En $\mathbb{R}^2$

Sea $u := (1, 1)$ y $V := (1, 3)$.

$$(u, v) = \{w \in \mathbb{R}^2 \mid u < w < v\} \neq \emptyset$$

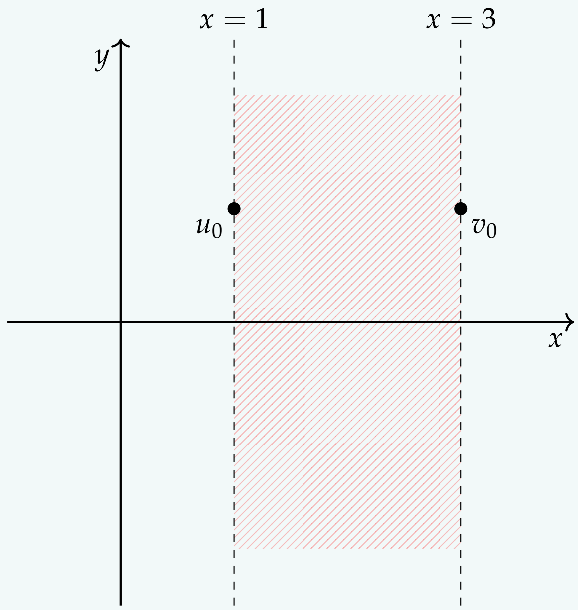
ya que $(1, 2) \in (u, v)$, puesto que $1 = 1 \wedge 2 > 1$, es decir $u < (1, 2)$, más aún $1 = 1 \wedge 2 < 3$, esto es $(1, 2) < v$.



Para $u_0 := (1, 1)$ y $v_0 := (3, 1)$.

$$I_0 = (u_0, v_0) \neq \emptyset$$

ya que $(2, 1) \in (u_0, v_0)$, Porque $1 < 2$, entonces $u_0 < (2, 1)$; más aún $3 > 2$ y por definición $(2, 1) < v_0$.



$w \in I_0$ siempre que

$$(u_1 = 1 \wedge 1 < u_2) \vee (1 < u_1 < 3 \wedge u_2 \in \mathbb{R}) \vee (u_1 = 3 \wedge u_2 < 1)$$

$$\implies I_0 = \{1\} \times (1, \infty) \cup (1, 3) \times \mathbb{R} \cup \{3\} \times (-\infty, 1)$$

Definición 1.12: Definición de Orden en $\mathbb{R}$

En $\mathbb{R}$, definamos $<$ como:
$u, v \in \mathbb{R}$:

$$u < v \quad \text{sii} \quad u^2 < v^2$$

$$\text{o bien } u^2 = v^2 \text{ y } u < v.$$

Definición 1.13: Definición de Orden en $\mathbb{R}^2$

En $\mathbb{R}^2$, defina $<$ como:
$u, v \in \mathbb{R}^2$:

$$u < v \quad \text{sii} \quad u_2 - u_1^2 < v_2 - v_1^2$$

$$\text{o bien } u_2 - u_1^2 = v_2 - v_1^2 \text{ y } u_1 < v_1.$$

Definición 1.14: Definición de Topología del Orden

Sea $(X, <)$ un conjunto ordenado, entonces la topología generada por

$$B_o = \{(a, b) \mid a, b \in X\}$$

se llama la **topología del orden** en X.

Definición 1.15: Conjunto abierto $\mathbb{R}^2$ con Orden Lexicográfico

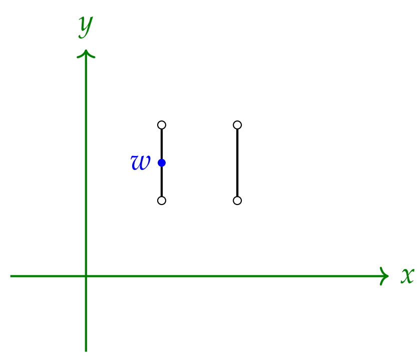
En $\mathbb{R}^2$ con el orden lexicográfico (del diccionario) un abierto es de la forma

$$\bigcup_{i\in I}(u_i, v_i)$$

con I un conjunto de índices y $u_i, v_i \in \mathbb{R}^2 \quad \forall i \in I$.

Ejemplo 1.10: Conjunto abierto

$$U = ((1,1),(1,2)) \cup ((2,1),(2,2))$$



Y este conjunto no es abierto en la topología usual de $\mathbb{R}^2$. Porque si $r \in \mathbb{R}_+$, $B_r(w) \not\subset U \quad \forall w \in U$, ya que si $r_0 = \text{mín}\{\frac{1}{2}, r\}$ así $\tilde{w} = (w_1 + r_0, w_2) \in B_r(w)$ pero $\tilde{w} \notin U$.

Definición 1.16: Familia de espacios topologícos top. caja y prod

Sea $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ una familia de espacio top.

así el conjunto

$$\beta = \left\{\prod_{\alpha\in I} U_\alpha \mid \forall\alpha \in I : U_\alpha \in \tau_\alpha\right\}$$

genera la **topología caja** de $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ (τ_{caja}) (β es base de la top. caja).

y el conjunto

$$\gamma' = \left\{\prod_{\alpha\in I} U_\alpha \mid \exists J \subset I \text{ con } |J| < \infty \text{ tq } \forall\alpha \in I \setminus J : U_\alpha = X_\alpha \text{ y } \forall\alpha \in J : U_\alpha \in \tau_\alpha\right\}$$

es **subbase** de la **topología producto** para $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ (τ_{prod}).

Si $U \in \tau_{caja}$, existe $\{V_i\}_{i\in J} \subset \beta$ t $U = \bigcup_{i\in J} V_i$, donde $V_i = \prod_{\alpha\in I} U^i_\alpha$ con $U^i_\alpha \in \tau_\alpha, \forall\alpha \in I, \forall i \in J$.

Es decir

$$U = \bigcup_{i \in J} \left(\prod_{\alpha \in I} U_\alpha^i \right)$$

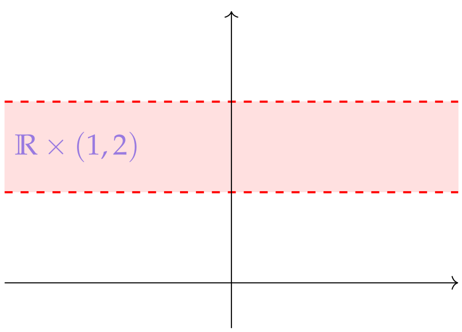
Por otro lado si $U \in \tau_{prod}$

$$U = \bigcup_{k \in J} \left(\bigcap_{i=1, \alpha \in I} W_\alpha^{k_i} \right) \quad \text{con } n_k \in \mathbb{N}, \forall k \in J$$

Ejemplo 1.11: Basico y subbásico

Sea $X_1 = X_2 = \mathbb{R}$ y $\tau_1 = \tau_2 = \tau_u$
Un subbásico de la τ_{prod} será:

$$\mathbb{R} \times (1,2)$$



El cual es básico

en τ_{box}.

En el caso que $X_n = \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ con X_n la topología usual de $\mathbb{R}$, τ_u.

El conjunto $W = \prod_{n \in \mathbb{N}} (0,1)$ es elemento de τ_{box} es decir, $W \in \beta$, por def de τ_{box}. Pero $W \notin \tau_{prod}$ por def de τ_{prod}.

Tome $J = \{1, 7, 8, 6, 26, 13\}$ y $V_j = (0,1)$ $\forall j \in J$ y $U_n = \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N} \setminus J$. Así,
$W_1 = \prod_{n \in \mathbb{N}} U_n$
el cual $W_1 \in \tau_{prod}$ y $W_1 \in \tau_{caja}$.

$$W_1 = (0,1) \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} \times (0,1) \times \mathbb{R} \times \ldots$$

Definición 1.17: i-ésima proyección

Sean $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ familia de conjuntos, la **función**

$$\pi_i : \prod_{\alpha\in I} X_\alpha \longrightarrow X_i$$

$$u \longmapsto u_i$$

con $i \in I$ fijo, se llama **i-ésima proyección**.

Definición 1.18: Definiciones topológicas

Sea (X, τ) un espacio topológico.

1. $U \subset X$ con $U \in \tau$, entonces U es **abierto** en X.
2. $U \subset X$ es **cerrado** en X si y sólo si $X \setminus U \in \tau$, es decir $X \setminus U$ es abierto.
3. $w \in X$ es un **punto interior** de $A \subset X$ si y sólo si existe $U \in \tau$ tal que $w \in U \subset A$.
   El conjunto de puntos interiores de A se denota por A°.
4. $w \in X$ es **punto frontera** de $A \subset X$ si y sólo si para todo $U \in \tau$ con $w \in U$, se cumple que: $U \cap A \neq \phi$ y $U \cap A^c \neq \phi$.
   El conjunto de puntos frontera de A se denota por ∂A o bien Fr A.
5. $w \in X$ es **punto de acumulación** de $A \subset X$ si y sólo si para todo $U \in \tau$ con $w \in U$, se cumple que: $A \cap (U \setminus \{w\}) \neq \phi$.
   El conjunto de puntos de acumulación de A se denota como A'.
6. $w \in X$ es punto de aderencia de $A \subset X$ si y sólo si para todo $U \in \tau, w \in U = U \cap A \neq 0$
   El conjunto de puntos de aderencia de A se denota por $\bar{A}$, el cual se llama cerradura de A.
7. $x_0 \in X$ es punto exterior de $A \subset X$ sii $\exists U \in \tau$ tal que $x_0 \in U \subset X \setminus A$.
8. Para (X, τ) espacio topologico, diremos que $x_0 \in X$ es **punto aislado** de A si: $x_0 \in A$ y existe $U \in \tau$ tal que $U \cap A = \{x_0\}$.

Definición 1.19: Espacios Métricos

Sea (X, d) un espacio métrico, $a \in X$ y $A \subset X$. Se define que a es

1. **Punto interior de** A, si existe $r \in \mathbb{R}_+$ tal que $B_r(a) \subset A$.
   *El conjunto de puntos interiores de A se llama **interior de A** y se denota por $\mathring{A}$ o $int(A)$.*
2. **Punto frontera de** A, si para cada $r \in \mathbb{R}_+$, se cumple que $B_r(a) \cap A \neq \emptyset$ y $B_r(a) \cap A^c \neq \emptyset$.
   *El conjunto de puntos frontera de A se llama **frontera de A** y se denota por ∂A o $Fr(A)$.*
3. **Punto de adherencia de** A, si para cada $r \in \mathbb{R}_+$, se cumple que $B_r(a) \cap A \neq \emptyset$.
   *El conjunto de puntos de adherencia de A se llama **cerradura o clausura de** A y se denota por $\bar{A}$.*

4. **Punto de acumulación de** A, si para cada $r \in \mathbb{R}_+$, se cumple que $(B_r(a) \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset$.

   El conjunto de puntos de acumulación de A se llama ***conjunto derivado de*** *A y se denota por* A'.

5. **Punto exterior de** A, si existe $r \in \mathbb{R}_+$ tal que $B_r(a) \subset A^c$.

   El conjunto de puntos exteriores de A se llama ***exterior de*** *A y se denota por* $Ext(A)$.

6. Para (X, d) espacio métrico, diremos que $x_0 \in X$ es **punto aislado** de $A \subset X$ si: $x_0 \in A$ y existe $r \in \mathbb{R}_+$ tal que $B_r(x_0) \cap A = \{x_0\}$.

Nota:

Si β es base para (X, τ) un espacio topológico, la definición anterior de puntos de acumulación y otros, bastará probarlas para los elementos de β.

Definición 1.20:

Definición 1.21: Vecindades en un espacio topológico

Si (X, τ) es un espacio topológico. Diremos que:

1. $A \subset X$ es **vecindad** de $x_0 \in X$ sii $x_0 \in \mathring{A}$.
2. $A \subset X$ es **vecindad abierta** de $x_0 \in X$ sii A es vecindad de x_0 y $A \in \tau$.
3. $A \subset X$ es **vecindad cerrada** de $x_0 \in X$ sii $x_0 \in A$ y $X \backslash A \in \tau$.

Definición 1.22: Vecindades en un espacio métrico

Si (X, d) es un espacio métrico. Diremos que:

1. $A \subset X$ es **abierto** en X sii

   $\underline{\forall a \in A, \exists r \in \mathbb{R}_+ : B_r(a) \subset A.}$

   Corolario: A es abierto sii $A = \mathring{A}$.
   Corolario: $\forall r \in \mathbb{R}_+, \forall a \in X : B_r(a)$ es abierto en X.

2. $A \subset X$ es **cerrado** sii Ext A es abierto.

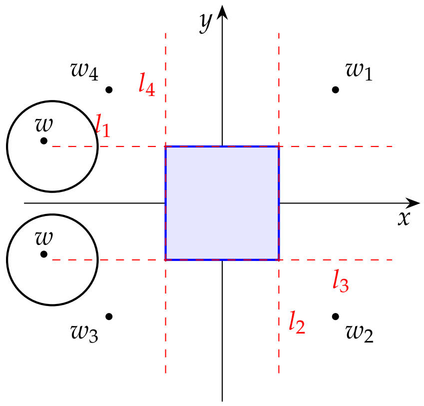
   Corolario: $A \subset X$ es cerrado sii $X \setminus A$ es abierto.

3. $A \subset X$ es **vecindad** de $x_0 \in X$ sii $x_0 \in \mathring{A}$.
4. $A \subset X$ es **vecindad abierta** de $x_0 \in X$ sii $x_0 \in A$ y A es abierto en X.
5. $A \subset X$ es **vecindad cerrada** de $x_0 \in X$ sii $x_0 \in A$ y A es cerrado en X.

Ejemplo 1.12: $\mathbb{R}^2$ con la métrica euclidiana

Considere a

$$W = [-1,1) \times (-1,1] \cup \{(2,2),(-2,2),(-2,-2),(2,-2)\}$$



Af: $W^\circ = (-1,1) \times (-1,1)$.

$\vdash (-1,1) \times (-1,1) \subset W^\circ$

Sean $l_1, l_2, l_3, l_4 \subset \mathbb{R}^2$ las rectas

$$l_1 : y = 1, \quad l_2 : x = 1,$$
$$l_3 : y = -1, \quad l_4 : x = -1$$

Tomemos $r_1, r_2, r_3, r_4 \in \mathbb{R}_+$ y $w \in (-1,1) \times (-1,1)$, con $r_i = d(w, l_i)$ para $i \in \{1, ..., 4\}$.

Defina así

$$r = \frac{1}{2} \min\{r_1, r_2, r_3, r_4\}.$$

Ahora si $p \in B_r(w)$, entonces

$$d(p, w) < r.$$

Use desigualdad del triángulo y tendrá que

$$p \in (-1,1) \times (-1,1).$$

Sea $w \in \mathbb{R}^2 \setminus ((-1,1) \times (-1,1))$.

Si $w \notin \underbrace{[-1,1] \times [-1,1]}_{V}$, tome $\delta = \frac{1}{2} d(w, W)$, así por desigualdad del triángulo vemos que

$$B_\delta(w) \subset W^c,$$

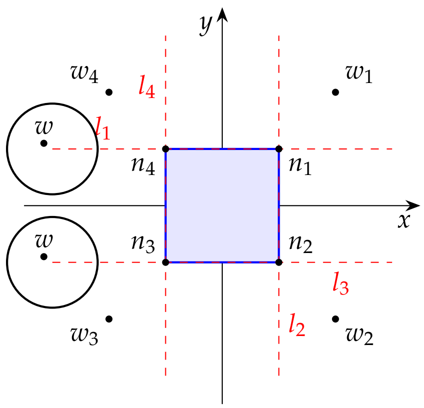
si $w \notin \{w_1, \ldots, w_4\}$.

Por otro lado, si $w \in \{w_1, \ldots, w_4\}$, tome $\delta = \frac{1}{2} d(w, V)$ y así

$$B_\delta(w) \cap W^c = \{w\}.$$

$\therefore w$ no es interior de W.

$$W = [-1,1] \times [-1,1] \cup \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$$



$$W = (-1,1)^2$$
$$\partial W = A \cup \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$$
$$\text{Puntos } n = \{n_1 = (1,-1), n_2 = (1,1), n_3 = (-1,1), n_4 = (-1,-1)\}$$

$$\begin{aligned} A = &\{\lambda n_1 + (1-\lambda)n_2 \mid \lambda \in [0,1]\} \cup \{\lambda n_3 + (1-\lambda)n_2 \mid \lambda \in [0,1]\} \\ &\cup \{\lambda n_4 + (1-\lambda)n_3 \mid \lambda \in [0,1]\} \cup \{\lambda n_1 + (1-\lambda)n_4 \mid \lambda \in [0,1]\} \end{aligned}$$

Definición 1.23: Punto Aislado en espacio topologico

Para (X, τ) esp. top., diremos que $x_0 \in X$ es punto aislado de A si: $x_0 \in A$ y existe $U \in \tau$ tal que $U \cap A = \{x_0\}$.

Definición 1.24: Punto Aislado en espacio métrico

Para (X, d) esp. mét., diremos que $x_0 \in X$ es punto aislado de $A \subset X$ si: $x_0 \in A$ y existe $r \in \mathbb{R}_+$ tal que $B_r(x_0) \cap A = \{x_0\}$.

Para puntos frontera: $\partial W = A \cup \{w_1, \ldots, w_4\}$

En efecto, para w_i, $i \in \{1, \ldots, 4\}$, para cada $r \in \mathbb{R}_+$, tomé $v_{r,i} = w_i + \frac{r}{2}e_1$, así $\pi_1(v_{r,i}) = \pi_1(w_i) + \frac{r}{2} = \pm 2 + \frac{r}{2} \neq \pm 2$ y $\pi_2(v_{r,i}) = \pm 2$, así $v_{r,i} \notin W$. Más aún $v_{r,i} \in B_r(w_i)$, puesto $d(v_{r,i}, w_i) = \|w_i - (w_i + \frac{r}{2}e_1)\| = \frac{r}{2} < r$. Con esto $B_r(w_i) \cap A^c \neq \emptyset$. Como $w_i \in B_r(w_i)$, pasa que $B_r(w_i) \cap A \neq \emptyset$. Por lo tanto $w_i \in \partial W$, $\forall i \in \{1, \ldots, 4\}$.

Para puntos Exteriores:

$$\text{Ext}(W) = \mathbb{R}^2 \setminus ([-1,1]^2 \cup \{w_1, \ldots, w_4\}) = B$$

Basta tomar $\delta = \frac{1}{2}d(p, [-1,1]^2 \cup \{w_1, \ldots, w_4\})$ para $p \in B$.

Teorema 1.1: Puntos Exteriores

En un esp. mét. X, para $A \subset X$: $x_0 \in \partial A \implies d(x_0, A) = 0$. #

$\implies B_\delta(p) \subset W^c$.
Entonces $B \subset \text{Ext}(W)$.
Por def. de punto exterior, si $p \in \text{Ext}(W)$, entonces $p \notin W$. Ahora bien, si $p \in \{\lambda n_1 + (1-\lambda)n_2 \mid \lambda \in (0,1)\} \cup \{\beta n_4 + (1-\beta)n_1 \mid \beta \in (0,1)\}$, entonces $p \in \partial W$, es decir,

$$\forall r \in \mathbb{R}_+ : B_r(p) \cap W \neq \emptyset.$$

por lo cual $p \notin \text{Ext}(W)$.

$$\therefore \text{Ext}(W) = B.$$

Para Adherencia:

Teorema 1.2: Puntos adherencia

$\overline{A} = \partial A \cup A$.

$$\text{Entonces } \overline{W} = [-1,1]^2 \cup \{w_1, \ldots, w_4\}.$$

Para Puntos de Acumulacion:

$$W' = [-1,1]^2$$

En efecto, si $w_0 \in W^\circ = (-1,1)^2$, $\exists r_0 \in \mathbb{R}$: $B_{r_0}(w_0) \subset W$, así para $r \in \mathbb{R}_+$, dado, tomé $\delta = \frac{1}{2}\min\{r, r_0\}$ y $v = w_0 + \delta e_1$, luego entonces $v \in W$, $v \in B_r(w_0)$ y $w_0 \neq v$. Por lo que $W \cap (B_r(w_0) \setminus \{w_0\}) \neq \emptyset$.

Para $p \in [-1,1]^2 \setminus (-1,1)^2$, $r \in \mathbb{R}_+$, fijo, tomé $\delta = \begin{cases} 0 & \text{si } r \geq 2 \\ \frac{r}{2} & \text{si } r \in (0,2) \end{cases}$ y $v = \delta p$ por ende $d(v,p) < r$, $p \neq v$ y $v \in W$.

$$\therefore W' = [-1,1]^2$$

Puntos Aislados

Teorema 1.3: Puntos Aislados

En un espacio métrico (X,d), si $A \subset X$ es un conjunto finito de puntos, entonces todos los puntos de A son puntos aislados.

El conjunto dado es:

$$W = [-1,1) \times (-1,1] \cup \{(2,2), (-2,2), (-2,-2), (2,-2)\}$$

El conjunto W es la unión de dos subconjuntos:

1. **El rectángulo**: $R = [-1, 1) \times (-1, 1]$
2. **El conjunto de puntos**: $P = \{(2, 2), (-2, 2), (-2, -2), (2, -2)\}$

- El **rectángulo** R es un conjunto continuo, no discreto. Cualquier punto dentro de esta región tiene infinitos puntos en su entorno, por lo que **no contiene puntos aislados**.
- El **conjunto** P está formado por cuatro puntos específicos. Es un conjunto **finito**. Por el teorema anterior, al ser un conjunto finito, **todos sus puntos son aislados**.

Si se tiene un conjunto finito de puntos, la distancia de cualquier punto p_i al punto más cercano de ese conjunto (que no sea p_i) siempre será mayor que cero. Si se toma un radio r menor a esa distancia, la bola $B_r(p_i)$ contendrá únicamente a p_i.
En el caso de W, los puntos de P son aislados no solo dentro de P, sino también con respecto al conjunto completo W, ya que el rectángulo R no contiene a ninguno de estos puntos, y la distancia de cualquier punto de P a cualquier punto de R es mayor que cero. Por lo tanto, podemos encontrar una bola de radio suficientemente pequeño alrededor de cada punto de P que no intersecte a R.
Con el teorema sobre conjuntos finitos, concluimos que todos los puntos del conjunto $P = \{(2, 2), (-2, 2), (-2, -2), (2, -2)\}$ son puntos aislados de W.
El conjunto de puntos aislados de W es:

$$\text{aislados}(W) = \{(2, 2), (-2, 2), (-2, -2), (2, -2)\}$$

1.2. Conceptos de funciones reales de un vector, funciones vectoriales de un real y funciones vectoriales de un real

Definición 1.25: Función de varias variables (finitas)

Una función $f : A \to B$, con A y B conjuntos, se dirá de varias variables (finitas) si y sólo si $\exists n \in \prod v$, $\exists A = \{A_i\}_{i \in I}$, con $I = \{1, \ldots, n\}$, y A_i es un conjunto para cada $i \in I$ tal que

$$A \subset \prod_{i=1}^{n} A_i$$

Definición 1.26: Continuidad por vecindades

Sean $(Y, \mathcal{N})$ y (X, τ) espacios topológicos y $f : X \to Y$. Se dirá que es continua sii

$$\forall V \in \mathcal{N} = \quad f^{-1}(V) \in \tau$$

Recordando de Cálculo I, una función $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua si f es continua para cada $p \in A$. Es decir:

$$\begin{aligned} \forall p \in A, \quad \forall \epsilon \in \mathbb{R}_+, \quad \exists \delta \in \mathbb{R}_+ : \quad & 0 < |u - p| < \delta \implies |f(u) - f(p)| < \epsilon \\ & u \in B_\delta(p) \setminus \{p\} \implies f(u) \in B_\epsilon(f(p)) \end{aligned}$$

$f^{-1}(B_\epsilon(f(p)))$ es un conjunto abierto.

Se sigue que

$u \in B_\delta(p) \subset f^{-1}(B_\epsilon(f(p)))$

Si $u \in f^{-1}(B_\epsilon(f(p)))$, existe $w \in B_\epsilon(f(p))$ tal que $f(u) = w$.

Ejemplo 1.13: Funciones

1. La función identidad en $\mathbb{R}$
$$\begin{aligned} I : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$
es continua en la topología usual de $\mathbb{R}$. En efecto, si $(a, b) \subset \mathbb{R}$ (codominio) entonces $I^{-1}(a, b) = (a, b)$ el cual es un abierto en $\mathbb{R}$.

2. La función
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto |\cos(2u) - 1|^{\sin(3u+1)} \end{aligned}$$
es continua si en $\mathbb{R}$ (dominio) tenemos la topología discreta. En efecto, si $A \subset \mathbb{R}$ (codominio) es abierto, $f^{-1}(A) \in p(\mathbb{R})$ es abierto y asi f es continua.

3. La función (parte entera)
$$\begin{aligned} p : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \lfloor x \rfloor \end{aligned}$$
sabemos que no es continua si $\mathbb{R}$ tiene la topología usual. Pero si tomamos a $\mathbb{R}$ con la topología discreta, es continua.

4. La función $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, con $n \in \mathbb{N}$.
$$A \mapsto \det(A)$$
Tomando $\mathbb{C}$ con la topología indiscreta $\mathcal{T}_0$ y cualquier topología $\mathcal{T}$ en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, tendremos que f es continua. Puesto que:
$$f^{-1}(\mathbb{C}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \in \mathcal{T} \quad \text{y} \quad f^{-1}(\varnothing) = \varnothing \in \mathcal{T}$$

5. Si tengo una función $f : X \to Y$ (conocida a priori) y $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una familia de subconjuntos de X, ¿cuándo es f continua sin tener en X la topología discreta y en Y la indiscreta, ademas $x_\alpha \in \tau_X, \forall \alpha \in I$?

6. Si tengo una función $f : X \to Y$ (conocida a priori) y $\{Y_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una familia de subconjuntos de Y, ¿cuándo es f continua sin tener en X la topología discreta y en Y la indiscreta, ademas $Y_\alpha \in \tau_Y, \forall \alpha \in I$?

Definición 1.27: Definición (Continuidad ϵ - δ en un espacio métrico)

Dados dos espacios métricos (X, d_X) y (Y, d_Y), una función $f : X \to Y$ se dirá continua en $a \in X$ sii a es un punto de acumulación de X ($a \in X'$) y

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+, \exists \delta \in \mathbb{R}_+ \text{ tal que:}$$

$$\begin{array}{rcl} u \in B_\delta(a) \setminus \{a\} & \Longrightarrow & f(u) \in B_\epsilon(f(a)) \\ \text{equivalentemente,} & & \\ 0 < d(u,a) < \delta & \Longrightarrow & d(f(u), f(a)) < \epsilon \end{array}$$

Ejemplo 1.14: Ejemplos Continuidad

1. Los vistos en Cálculo I.
2. Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, con la métrica discreta en $\mathbb{R}^2$ y la métrica usual en $\mathbb{R}$.

$$u \mapsto 1$$

f es continua en $(1,1)$, puesto que dado $\epsilon \in \mathbb{R}_+$, se puede tomar $\delta = \frac{1}{2}$. Así, para cada $u \in B_\delta(1,1)$, implicará que $f(u) \in B_\epsilon(f(1))$.

Pues con la métrica discreta, $B_\delta(1,1) = \{(1,1)\}$.

Es más, si $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $u \mapsto \log(|u_1| + 1)$, esta es continua en $(8,20)$ cuando en el dominio $\mathbb{R}^2$ tenemos la métrica discreta (*). Puesto que dado $\epsilon \in \mathbb{R}$, tomando $\delta = \frac{1}{2}$, tenemos que $B_\delta(8,20) = \{(8,20)\}$. Así, si $u \in B_\delta(8,20) \setminus \{(8,20)\}$, la condición se cumple trivialmente e implicará que $f(u) \in B_\epsilon(\log 9)$.

Desigualdad de cauchy schwarz
Si $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$, para $n \in \mathbb{N}$.

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

$$((a_1, \ldots, a_n) \cdot (b_1, \ldots, b_n))^2 \leq (a_1, \ldots, a_n)^2 (b_1, \ldots, b_n)^2$$

$$(a \cdot b)^2 \leq \|a\|^2 \|b\|^2$$

Si $\exists t \in \mathbb{R}$ tal que $a = tb$, entonces:

$$a \cdot b = \|a\|^2 \|b\|^2$$

Propiedades del producto interno usual en $\mathbb{R}^n$
Sean $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ y $a, b \in \mathbb{R}$, entonces:

1. $\theta \cdot v = v \cdot \theta = 0$
2. $u \cdot u > 0 \quad$ (si $u \neq \theta$)
3. $u \cdot u = 0 \iff u = \theta$
4. $u \cdot (av + bw) = a(u \cdot v) + b(u \cdot w)$
5. $(u + v) \cdot (u + v) = u \cdot u + v \cdot v + 2(u \cdot v)$

1.2.1. Función continua

Definición 1.28: Función Continua (Topológica).

Sean X, Y espacios topológicos, diremos que una función $f : X \to Y$ es una función continua si y solo si para todo conjunto abierto V de Y su preimagen (imagen inversa) es abierto en X. es decir $f^{-1}(V)$ es abierto en X.

.

Definición 1.29: Función Continua (Métrica $\epsilon - \delta$)

Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios métricos, una función $f : X \to Y$ es una función continua en $x \in X$ si y solo si para todo $0 < \epsilon \in \mathbb{R}$ existe $0 < \delta \in \mathbb{R}$ tales que si $y \in Y$ satisface que $d_X(x, y) < \delta$ entonces $d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon$. Diremos que es continua si lo es en cada punto de X.

1.2.2. Rectangulo Abierto (hipercubo o rectangulo de dimension n)

Definición 1.30: Rectángulo Abierto

Un subconjunto R de $\mathbb{R}^n$ se denomina **rectángulo (abierto de dimensión n)** si y solo si existen $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$R = \prod_{i=1}^{n}(a_i, b_i) = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n).$$

Definición 1.31: Centro de un Rectángulo

Diremos que $u \in \mathbb{R}^n$ es el **centro de un rectángulo** $R \subset \mathbb{R}^n$ si y solo si existen $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}1$ tales que

$$R = \prod_{i=1}^{n}(a_i, b_i) \quad \wedge \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\} : \frac{a_i + b_i}{2} = u_i.$$

1.2.3. Topología usual de $\mathbb{R}^n$

En $\mathbb{R}^n$ la topología a utilizar (salvo que se diga lo contrario), será la generada por la base

$$\mathcal{B}_1 = \{B_r(u) \subset \mathbb{R}^n : r \in \mathbb{R}_+ \wedge u \in \mathbb{R}^n\}$$

donde $B_r(u)$ es la **bola abierta de radio r con centro en** u.

Como vimos esta topología es la misma que la generada por

$$\mathcal{B}_2 = \{R \subset \mathbb{R}^n : R \text{ es un rectángulo abierto}\}.$$

Ejemplo 1.15: Funciones Proyeccion

Recuerda que para $u \in \mathbb{R}^n$, u se puede ver como

$$u = (u_1, u_2, \ldots, u_n).$$

Con esto, las **funciones proyección en** $\mathbb{R}^3$ son:

$$\pi_1 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \pi_1(u) = u_1$$

$$\pi_2 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \pi_1(u) = u_2$$

$$\pi_3 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \pi_1(u) = u_3$$

¿Las funciones proyección son continuas?
Si $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ es una familia de espacios topológicos, ¿π_β es continua para cada $\beta \in I$?, es más, ¿qué topología tiene $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$?

Definición 1.32: Topología Caja (Base)

Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia indexada de espacios topológicos. La **topología caja** tiene como base a la colección:

$$\mathcal{B}_{\text{box}} := \left\{ \prod_{\alpha \in I} U_\alpha : U_\alpha \in \tau_\alpha \right\}$$

Definición 1.33: Topología Producto (Subbase)

Sea $\pi_\beta : \prod X_\alpha \to X_\beta$ la proyección canónica. La **topología producto** se define mediante la subbase:

$$\mathcal{S}_{\text{prod}} := \{\pi_\beta^{-1}(U_\beta) : U_\beta \in \tau_\beta, \beta \in I\}$$

Esta es la topología más "gruesa"que hace continuas a todas las proyecciones.

Observación:Nótese que si el conjunto de índices I es infinito, la Topología Caja es estrictamente más fina que la Topología Producto. Coinciden si y solo si I es finito.

1.3. Dominio de una función real de un vector

1.3.1. Funciones y mapeos

Sea f una función con dominio un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ y con un conjunto imagen (rango) contenido en $\mathbb{R}^m$. Es decir, a cada vector $u \in A$, f le asigna un único valor $f(u)$, una m**-tupla en** $\mathbb{R}^m$. Estas funciones f son llamadas **funciones vector valuadas** si $1 < m$, y **funciones real valuadas** si $m = 1$.

Ejemplo 1.16: Funciones Real Valuadas

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Las funciones de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son:

- $f(t) = t\cos(t)$.
- $f(a) = a$
- $f(w) = tg(w)$.

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ Las funciones de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ con $w = (w_1, w_2, w_3)$ son:

- $f(w) = w_1 + w_2$.
- $f(w) = \cos(w_1)$.
- $f(w) = w_1^2 - w_2^2$.

Ejemplo 1.17: Vector Valuadas

$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con:

- $m = 2$, $n = 1$ y $h(t) = (\cos(t), \sin(t))$.
- $m = 3$, $n = 2$ y $h(u) = (u_1 u_2, \cos(u_1)\sin(u_2))$.
- $m = 5$, $n = 1$ y $h(w) = (w, w^2, w^3, w^4, w^5)$.

Definición 1.34: Varias variables

Una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es denominada **función de varias variables** si $1 < n$.

1.3.2. Gráfica

Para una función $Q : U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la **gráfica** de la función Q es el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ definido como:

$$\operatorname{graf} Q := \{(v, Q(v)) \in \mathbb{R}^2 : v \in U\},$$

este conjunto puede ser pensado como una "**curva**" en el plano $\mathbb{R}^2$, pero no siempre es una curva.

Definición 1.35: Gráfica

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Se define la **gráfica** de la función f como el conjunto de $\mathbb{R}^{n+m}$ siguiente:

$$\operatorname{graf}(f) := \{((x_1, \ldots, x_n), f(x_1, \ldots, x_n)) \in \mathbb{R}^{n+m} : (x_1, \ldots, x_n) \in U\},$$

o de manera compacta

$$\operatorname{graf}(f) := \{(v, f(v)) \in \mathbb{R}^{n+m} : v \in U\}.$$

Nota:

Si $m = 1$ y $n = 1$ lo que podemos tener es una **curva**, si $m = 1$ y $n = 2$ es una **superficie** o bien para $m = 2$ y $n = 1$. Para cuando $n + m > 3$ ya no podemos visualizar la gráfica de la función como tal.

1.3.3. Conjuntos de nivel, curvas y superficies

Definición 1.36: Conjunto de Nivel

Para una función $g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, un **conjunto de nivel** es el que está determinado por la imagen inversa de una constante, es decir, si $c \in \mathbb{R}^m$ el conjunto $A := \{a \in U : f(a) = c\}$ es un **conjunto de nivel**.

Observación: Si tomamos al conjunto A como en la definición, tenemos que $A = g^{-1}\{c\}$.

Definición 1.37: Curva y Superficie de Nivel

Una **curva de nivel** es un conjunto de nivel para una función $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Una **superficie de nivel** es un conjunto de nivel para una función $h : W \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

Ejemplo 1.18: Curvas de nivel

1. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con $f(x, y) = x^2 + y^2$, entonces
   - $A_0 = f^{-1}\{0\}$ y
   - $A_1 = f^{-1}\{1\}$

   Son **curvas de nivel** para f.
2. Si $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con $g(u, v) = \sqrt{v^2 + u^2}$, entonces
   - $B_0 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : g(u, v) = 0\}$ y
   - $B_1 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : g(u, v) = -3\}$

   Son **curvas de nivel** para g.

1.3.4. Sección

Por una sección de la gráfica (subconjunto de $\mathbb{R}^3$) de la función f se entenderá como la intersección de la gráfica con un plano ("**vertical**").

Ejemplo 1.19: Sección

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con $f(x, y) = x^2 + y^2$ y sea P_1 el plano xz, entonces la sección es

$$P_1 \cap \mathrm{graf}(f) = \{u \in \mathbb{R}^3 : u_3 = u_1^2 \wedge u_2 = 0\}$$

La gráfica de la función

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$w \mapsto w_1^2 - w_2^2$$

es llamada un **paraboloide hiperbólico** (**silla de montar**), centrada en el origen. Bosquejemos su gráfica.

Primero dibujemos las curvas de nivel. Las curvas de nivel están dadas por $u_1^2 - u_2^2 = c$ para $c \in \mathbb{R}$.
Caso 1) Si $c = 0$**, entonces la curva de nivel es la que posee como ecuación**

$$x^2 = y^2 \wedge z = 0.$$

Las cuales son **dos rectas que se cruzan en el origen** y que poseen las siguientes ecuaciones

$$x = y \wedge z = 0 \quad \text{y} \quad x = -y \wedge z = 0$$

Caso 2) Si $c > 0$ entonces la curva de nivel es una **hipérbola** con ecuaciones

$$x^2 - y^2 = c \wedge z = c.$$

Con **vértices** en $(\pm\sqrt{c}, 0, c)$ y **focos** en $(\pm\sqrt{2c}, 0, c)$.
Caso 3) Si $c < 0$ entonces la curva de nivel es una **hipérbola** con ecuaciones

$$x^2 - y^2 = c \wedge z = c.$$

Con **vértices** en $(0, \pm\sqrt{-c}, c)$ y **focos** en $(0, \pm\sqrt{-2c}, c)$.

1.4. Límites de funciones reales de un vector

Definición 1.38: Límite

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Diremos que f tiene como **límite** L, cuando x tiende a c, sii $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+, \exists \delta \in \mathbb{R}^+$ tal que, para todo x en el dominio f:
$0 < |x - c| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$

Definición 1.39: Límite (con Vecindades)

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, ($A$ un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$). Sean $w \in A'$, $b \in \mathbb{R}^m$. Decimos que el punto b es **límite de** f **cuando** x **se aproxima a** w si y solo si para toda $N \subset \mathbb{R}^m$ vecindad abierta de b, existe $U \subset \mathbb{R}^n$ vecindad abierta de w tal que para cada $p \in U \cap A$ con $p \neq w$ se cumple que $f(p) \in N$.

Definición 1.40: Límite (con Bolas Abiertas)

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (A un abierto) y $w \in A'$. Un punto $b \in \mathbb{R}^m$ es **límite de** f **cuando** u **tiende a** w si y solo si para cada $B_\epsilon(b) \subset \mathbb{R}^m$, existe $B_\delta(w) \subset \mathbb{R}^n$ tal que si $f(B_\delta(w) \cap A) \subset B_\epsilon(b)$.

Definición 1.41: Límite (Epsilon-Delta)

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, con A un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Sean $w \in A'$, $b \in \mathbb{R}^m$. Decimos que el punto b es **límite de f cuando x se aproxima a w** si y solo si para cada $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ existe $\delta \in \mathbb{R}^+$ tal que para cada $p \in A$ con $0 < \|p - w\| < \delta$ entonces $\|f(p) - b\| < \epsilon$.

Nota:

Las definiciones anteriores son equivalentes, se deja al lector hacer la demostración de este hecho.

Nota:

Si $m = 1$, tenemos que $\|u\| = |u|$.

1.4.1. Propiedades de la norma

Proposición 1.2: Propiedad de la norma

Para cada $u, v \in \mathbb{R}^n$ y cada $c \in \mathbb{R}$ tenemos que:

1. $0 \leq \|u\|$.
2. $\|u\| = 0$ si y solo si $u = (0, \ldots, 0)$.
3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ **desigualdad del triángulo**.
4. $\|cu\| = |c|\|u\|$.

Recuerda que

$$\|u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2} = \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2}.$$

Demostración.

1. Se desprende directamente de la definición de norma.
2. Se desprende directamente de la definición de norma.
3. La desigualdad de **Cauchy-Schwarz** nos dice que

$$|u \cdot v|^2 \leq (u \cdot u)(v \cdot v).$$

Entonces, se sigue que

$$\begin{aligned} 2u \cdot v \leq 2|u \cdot v| &\leq 2\|u\|\|v\| \\ \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2u \cdot v &\leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\| \\ (u + v) \cdot (u + v) &= (\|u\| + \|v\|)^2 \\ \|u + v\| &\leq \|u\| + \|v\|. \end{aligned}$$

4. Sabemos que $\|cu\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(cu_i)^2}$ además que la raíz cuadrada de un producto de dos reales no negativos es el producto de las raíces cuadradas de dichos reales. Además

$$\sum_{i=1}^{n}(cu_i)^2 = c^2\sum_{i=1}^{n}u_i^2.$$

luego entonces

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(cu_i)^2} = \sqrt{c^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}u_i^2}$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(cu_i)^2} = |c|\sqrt{\sum_{i=1}^{n}u_i^2}.$$

Por lo tanto

$$\|cu\| = |c|\|u\|.$$

■

Teorema 1.4: Límite unico

Si el límite de una función existe es único.

Demostración.Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, con A un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $w \in A'$, $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^m$, tal que b_1 y b_2 son límites de f cuando x se aproxima a w, con $b_1 \neq b_2$.

Por lo que para $\epsilon_0 = \frac{\|b_1 - b_2\|}{2}$, existen $0 < \delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$ tales que

1. Para cada $p \in A$ con $0 < \|p - w\| < \delta_1$ entonces $\|f(p) - b_1\| < \epsilon_0$.
2. Para cada $p \in A$ con $0 < \|p - w\| < \delta_2$ entonces $\|f(p) - b_2\| < \epsilon_0$.

Tomando a $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$, tenemos que para cada $p \in A$ con $0 < \|p - w\| < \delta$ entonces $\|f(p) - b_1\| < \epsilon_0$ y $\|f(p) - b_2\| < \epsilon_0$.

Por la **desigualdad del triángulo** tenemos que

$$\|b_1 - b_2\| = \| -(f(p) - b_1) + (f(p) - b_2)\| \leq \|f(p) - b_1\| + \|f(p) - b_2\|$$

pero por lo visto anteriormente

$$\|f(p) - b_1\| + \|f(p) - b_2\| < \epsilon_0 + \epsilon_0 = 2\epsilon_0 = \|b_1 - b_2\|.$$

Luego entonces

$$\|b_1 - b_2\| < \|b_1 - b_2\|$$

lo que es una **contradicción**. Por lo tanto $b_1 = b_2$. ■

Nota:

Diremos que $f(p)$ se aproxima a b mientras que p se aproxima a w. Lo cual denotamos como

$$\lim_{p\to w} f(p) = b$$

o bien

$$f(p) \to b$$
$$p \to w$$

No siempre existe el límite, esto pasa cuando $f(p)$ no se aproxima a ningún punto y diremos que el límite no existe.

1.4.2. Propiedades de los Límites

Proposición 1.3: Propiedades de los Límites

Para cada $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, con A un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $w \in A'$, $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^m$ y $c \in \mathbb{R}$.

- Si $\lim_{p\to w} f(p) = b$, entonces $\lim_{p\to w} cf(p) = cb$.
- Si $\lim_{p\to w} f(p) = b_1$ y $\lim_{p\to w} g(p) = b_2$ entonces
  - $\lim_{p\to w}(f+g)(p) = b_1 + b_2$.
  - Si $m = 1$, entonces $\lim_{p\to w}(fg)(p) = b_1 b_2$.
- Si $m = 1$, $\lim_{p\to w} f(p) = b \neq 0$ y $f(p) \neq 0$ para cada $p \in A$, entonces $\lim_{p\to w}\left(\frac{1}{f}\right)(p) = \frac{1}{b}$.

Teorema 1.5: Teorema (Límite por Componentes)

Para cada $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, con A un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $w \in A'$, $b \in \mathbb{R}^m$. Si $f(p) = (f_1(p), \ldots, f_m(p))$ donde $f_1, \ldots, f_m : A \to \mathbb{R}$ son las **funciones componentes** de f, entonces

$$\lim_{p\to w} f(p) = b = (b_1, \ldots, b_m)$$

si y solo si

$$\lim_{p\to w} f_1(p) = b_1, \ldots, \lim_{p\to w} f_m(p) = b_m.$$

Definición 1.42: Función Componente

Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, la función

$$f_i = \pi_i \circ f \quad \text{para } i \in \{1, \ldots, m\}$$

se llama la ***i*-ésima componente de** f.

Nota:

$$f = \sum_{i=1}^{m} f_i e_i \quad \text{y } f_i : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$\forall i \in \{1, \ldots, m\}$$

Ejercicio 1.2: Cálculo de Límites

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, calcular los siguientes límites:
   - $\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x, y)$.
   - $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$.
   - $\lim_{(x,y)\to(-1,-1)} f(x, y)$.
2. Sea $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ con $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1$, calcular los siguientes límites:
   - $\lim_{(x,y,z)\to(1,0,0)} g(x, y, z)$.
   - $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,1)} g(x, y, z)$.
   - $\lim_{(x,y,z)\to(-1,-1,-1)} g(x, y, z)$.
3. Sea $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ con $h(u) = u_1^2$, calcular los siguientes límites:
   - $\lim_{u\to(1,0,0,0)} h(u)$.
   - $\lim_{u\to(0,0,0,0)} h(u)$.
   - $\lim_{u\to(0,1,1,1)} h(u)$.

1.4.3. Límite de la Función Proyección

$\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
La función π_i tiende a u_i cuando w tiende a $u = (u_1, \ldots, u_n)$.

$$\therefore \lim_{w\to u} \pi_i(w) = u_i.$$

Demostración.Dada $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, tome $\delta = \epsilon$. así, si $w \in B_\delta(u) \setminus \{u\}$, implica que

$$\|w - u\| < \delta.$$

Por otro lado sabemos que

$$|w_i - u_i|^2 \leq \sum_{k=1}^{n} |w_k - u_k|^2 = \|w - u\|^2$$

es decir

$$|w_i - u_i| \leq \|w - u\| < \delta = \epsilon.$$

Así vemos que

$$\lim_{w\to u} (\pi_i \pi_j)(w) = u_i u_j$$

Notemos que

$$\pi_1^2(x,y) = x^2$$
$$\pi_2^2(x,y) = y^2$$

■

1.4.4. Pruebas de Límites

Límite de una Función Constante
Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$u \mapsto c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}^m$$

entonces

$$\lim_{u\to w} f(u) = c.$$

Demostración. Dado $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, tome $\delta = 1$. así, para $w \in A$ con $u \in B_\delta(w) \setminus \{w\}$, es decir

$$\|u - w\| < \delta.$$

Por otro lado vemos que

$$|f(u) - f(w)| = |c - c| = 0 < \epsilon$$

■

Ejercicio 1.3: Límites

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ con $f(t) = (0, 0, t)$, calcular los siguientes límites:
   - $\lim_{t\to 0} f(t)$.
   - $\lim_{t\to 1} f(t)$.
   - $\lim_{t\to -1} f(t)$.
2. Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ con $g(x,y) = (x, y, x^2, y^2)$, calcular los siguientes límites:
   - $\lim_{(x,y)\to(1,0)} g(x,y)$.
   - $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$.
   - $\lim_{(x,y)\to(-1,-1)} g(x,y)$.

Definición 1.43: Composición de funciones

Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $g : B \subset \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^s$ son funciones, si $r = m$ y además $f(A) \subset B$ entonces podemos definir la función **composición** de f con g como la función

$$g \circ f : A \to \mathbb{R}^s$$
$$u \mapsto g(f(u))$$

Definición 1.44: Funciones equivalentes

Dos funciones $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $g : B \subset \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^s$ son **equivalentes ("iguales")** si y solo si

$n = r, A = B, m = s$

y para todo $u \in A$ se cumple que $f(u) = g(u)$. Denotaremos este hecho como $f \equiv g$.

Cálculo de Límite por Factorización

Cálculo del Límite:

$$\overbrace{\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}}^{f} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \overbrace{\lim_{x\to 1} x+1}^{g} = \overbrace{2}^{h}$$

Definición 1.45: Las funciones

$$f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$$
$$g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$$
$$h : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$$

Nota:

Dos funciones f y g son equivalentes si y solo si $Domf = Domg$, $Codf = Codg$, además para todo $u \in Domf$ $g(u) = f(u)$. Más aún puede que $Domf \subset Domg$ y las funciones ser equivalentes en $Domf$ pero no en todo el $Domg$ e incluso podría no estar definida la función f en el domino de g. Un ejemplo rápido son las funciones $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ con $f(t) = \frac{t^2}{t}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $g(t) = t$, es fácil ver que f no está definida en 0, pero fuera de ese valor las funciones son equivalentes, es decir $f \equiv g$ en $Domf$.

Observación: Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una función, entonces $f_i = \pi_i \circ f$ para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$.

1.4.5. Restricción de una función

Definición 1.46: Restricción de una función

Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una función y $B \subset A$, definimos la **restricción** de f al conjunto B como la función

$$f|_B : B \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
$$u \mapsto f|_B(u) = f(u).$$

Nota:

El símbolo $f \equiv |_{Domf \cap Domg}$ podremos entenderlo como $f|_{Domf \cap Domg} = g|_{Domf \cap Domg}$.

1.5. Continuidad de funciones reales de un vector

Ya hemos visto cuando una función es continua mediante topología y métricas. Ahora, podemos entenderlas mediante límites.

Definición 1.47: Continuidad

Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función y $w \in A$. Diremos que f es **continua en el punto** w si y solo si $\lim_{u \to w} f(u) = f(w)$. Diremos que f es **continua en todo** A si y solo si es continua en cada punto $w \in A$. Una función es **discontinua** (no es continua) en w si y solo si $\lim_{u \to w} f(u) \neq f(w)$. Diremos que una función es **discontinua** (no continua) si existe al menos un punto $w \in A$ donde f es discontinua.

Observación: Si no se pide que $w \in Domf$ no se puede hablar de $f(w)$ puesto no está definida la función para esos elementos. Más aún, si solamente decimos que f es continua entenderemos que f es continua en todo su dominio.

Ejemplo 1.20: Funciones

- Las funciones constantes son continuas.
- Las funciones identidad son continuas.
- Las funciones proyección son continuas.
- Las funciones norma son continuas.

Propiedades 1.1: Funciones continuas

Sean $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ funciones continuas y $c \in \mathbb{R}$ entonces:

- cf es continua.
- $f + g$ son continuas.
- $f \cdot g$ es continua. Donde
$$\begin{aligned} f \cdot g : A \subset \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto f(u) \cdot g(u) \end{aligned}$$
- Si $m = 1$ y $0 \notin f(A)$ entonces $\frac{1}{f}$ es continua.

Proposición 1.4: Para funcion continua

La función $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua si y solo si para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$ la función f_i es continua.

Teorema 1.6: Continuidad

Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una función. La función f es continua en $w \in A$ si y solo si para todo $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ existe $\delta \in \mathbb{R}^+$ tal que para todo $u \in A$ con $\|u - w\| < \delta$ entonces $\|f(u) - f(w)\| < \epsilon$.

Nota:

Aquí la diferencia entre la definición de límite y este teorema es que aquí no se pide que $0 < \|u - w\| < \delta$, es decir u puede tomar el valor de v.

1.5.1. Límites infinitos

Definición 1.48: Límites infinitos

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función con $m = 1$ y $w \in \partial A$ entonces decimos que $\lim_{u \to w} f(u) = \infty$ si y solo si para cada $N \in \mathbb{R}^+$ existe $\delta \in \mathbb{R}^+$ tal que para cada $u \in A$ con $0 < \|u - w\| < \delta$ entonces $N < f(u)$

.

1.5.2. Tipos de Límites Infinitos y en el Infinito

Ejemplo 1.21: Límites que involucran el infinito.

1. $\underset{x \to a}{f(x) \to \infty}$
2. $\underset{x \to a}{f(x) \to -\infty}$
3. $\underset{x \to \infty}{f(x) \to b}$
4. $\underset{x \to -\infty}{f(x) \to b}$
5. $\underset{x \to \infty}{f(x) \to \infty}$
6. $\underset{x \to \infty}{f(x) \to -\infty}$
7. $\underset{x \to -\infty}{f(x) \to \infty}$
8. $\underset{x \to -\infty}{f(x) \to -\infty}$

1.5.3. Curvas y trayectorias

Definición 1.49: Trayectoria

Una **trayectoria** α en $\mathbb{R}^n$ es una función $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ donde I es un intervalo. Una **curva** α es el conjunto imagen de una trayectoria α. Si $I = [a, b]$ se denomina puntos de finales de la curva a los puntos $\alpha(a)$ y $\alpha(b)$. A la función α se le denomina la **parametrización** de la curva.

Teorema 1.7: Límite por Trayectoria

Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función, $w \in \partial A \cup A$. Si $\lim_{u \to w} f(u) = b$, si $\alpha : I \to A \subset \mathbb{R}^n$ es una trayectoria continua tal que existe $c \in [a, b]$ con la propiedad que $\lim_{t \to c} \alpha(t) = w$, entonces

$$\lim_{t \to c} (f \circ \alpha)(t) = b.$$

Pregunta ¿Es necesaria la continuidad de α?

Ejemplo 1.22: Cálculo de Límite por Trayectorias

Función:

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$$
$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Límite en el origen:

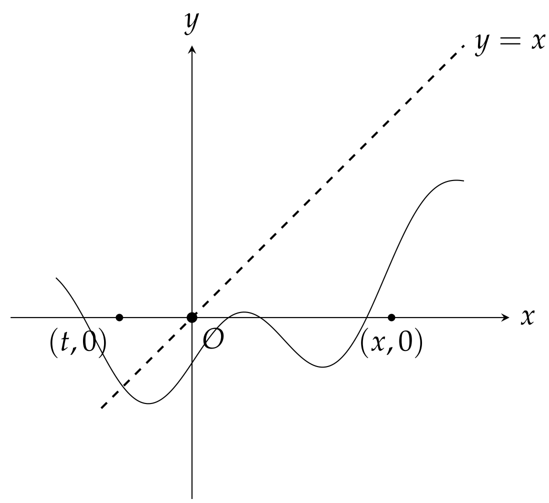
$$\lim_{(x,y) \to 0} f(x, y) = 0? \quad \frac{1}{2}?$$

Análisis de trayectoria α:

$$\alpha : (-1, 1) \to \mathbb{R}^2$$
$$t \mapsto (t, 0)$$
$$\lim_{t \to 0} \alpha(t) = 0$$

Límite sobre la trayectoria α:

$$(f \circ \alpha)(t) = f(\alpha(t)) = f(t, 0) = 0 = b$$



Observación: Una manera de ver que no existe un límite (o no continuidad de una función) en un punto, basta con encontrar dos trayectorias α_1, α_2 tales que los $\lim_{t\to c}(f \circ \alpha_1)(t)$ y $\lim_{t\to c}(f \circ \alpha_2)(t)$ no coinciden en al menos una trayectoria tal que el limite $\lim_{t\to c}(f \circ \alpha)(t)$ no existe.

1.6. Adicional

1.6.1. Prueba de puntos

Ejercicio 1.4: Prueba de Puntos

Sea $R = [0, 1] \times [-2, -1] \subset \mathbb{R}^2$,

1. Prueba que existe $r \in \mathbb{R}_+$ tal que $B_r\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right) \subset R$.
2. Prueba que para cada $r \in \mathbb{R}_+$, $B_r(0, -2) \cap (R \setminus \{(0, -2)\}) \neq \emptyset$ y $B_r(0, -2) \cap R^c \neq \emptyset$.

Demostración.Prueba de puntos

Demostración de Punto Interior

Debemos demostrar que el punto $a = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ es un punto interior del conjunto R. Para ello, utilizamos la siguiente definición.

Definición a utilizar

Definición 1.50: Punto Interior en un espacio métrico

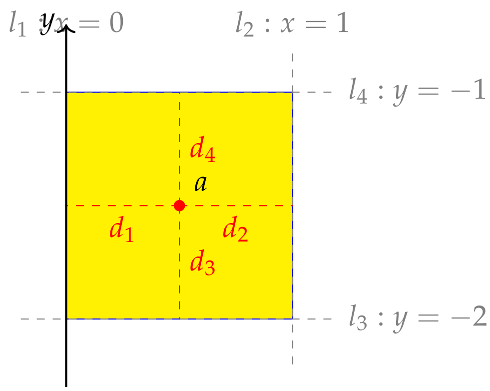
Sea (X, d) un espacio métrico, $a \in X$ y $A \subset X$. Se define que a es:

1. Punto interior de A, si existe $r \in \mathbb{R}_+$ tal que $B_r(a) \subset A$.

Inicio demostración:

El conjunto es $R = [0,1] \times [-2,-1]$ y el punto es $a = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$. El espacio es $\mathbb{R}^2$ con la métrica euclidiana. Calculamos la distancia desde el punto a hasta las fronteras del rectángulo R, que son las rectas $x = 0$, $x = 1$, $y = -2$ y $y = -1$.

1. Distancia a la recta $l_1 : x = 0$: $\quad d_1 = \left|\frac{1}{2} - 0\right| = \frac{1}{2}$
2. Distancia a la recta $l_2 : x = 1$: $\quad d_2 = \left|1 - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$
3. Distancia a la recta $l_3 : y = -2$: $\quad d_3 = \left|-\frac{3}{2} - (-2)\right| = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$
4. Distancia a la recta $l_4 : y = -1$: $\quad d_4 = \left|-\frac{3}{2} - (-1)\right| = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$



El valor mínimo de estas distancias es $\frac{1}{2}$. Elijamos un radio r que sea estrictamente menor, por ejemplo, $r = \frac{1}{4}$.
Ahora, debemos demostrar que cualquier punto $p = (p_x, p_y) \in B_{1/4}(a)$ también está en R. Si $p \in B_{1/4}(a)$, entonces la distancia euclidiana $d(p,a) < \frac{1}{4}$.

$$\sqrt{\left(p_x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(p_y - \left(-\frac{3}{2}\right)\right)^2} < \frac{1}{4}$$

De esta desigualdad se deduce que:

- $|p_x - \frac{1}{2}| < \frac{1}{4} \implies -\frac{1}{4} < p_x - \frac{1}{2} < \frac{1}{4} \implies \frac{1}{4} < p_x < \frac{3}{4}$
- $|p_y + \frac{3}{2}| < \frac{1}{4} \implies -\frac{1}{4} < p_y + \frac{3}{2} < \frac{1}{4} \implies -\frac{7}{4} < p_y < -\frac{5}{4}$

Dado que $0 < \frac{1}{4} < p_x < \frac{3}{4} < 1$, se cumple que $p_x \in [0,1]$. Y dado que $-2 < -\frac{7}{4} < p_y < -\frac{5}{4} < -1$, se cumple que $p_y \in [-2,-1]$.
Por lo tanto, cualquier punto p en la bola $B_{1/4}\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ está contenido en R. Hemos encontrado un $r = \frac{1}{4} \in \mathbb{R}_+$ que cumple la condición.

Demostración Punto de Acumulación

Probaremos que para cada $r \in \mathbb{R}_+$, $B_r(0,-2) \cap (R \setminus \{(0,-2)\}) \neq \emptyset$.

Definición a utlizar:

Definición 1.51: Punto de Acumulación en un espacio métrico

Sea (X, d) un espacio métrico, $a \in X$ y $A \subset X$. Se define que a es:

1. Punto de acumulación de A, si para cada $r \in \mathbb{R}_+$, se cumple que $(B_r(a) \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset$.

Inicio de la Demostración:

Sea un $r \in \mathbb{R}_+$ arbitrario. Debemos encontrar un punto $p = (p_x, p_y)$ tal que $p \in B_r(0, -2)$, $p \in R$ y $p \neq (0, -2)$.
Elijamos $\delta = \text{mín}\left(\frac{r}{2}, 1\right)$ y sea el punto $p = (\delta, -2)$. Esta elección asegura que $\delta > 0$, $\delta < r$ y $0 < \delta \leq 1$. Por lo tanto, $p \in R = [0, 1] \times [-2, -1]$ y como $\delta > 0$, $p \neq (0, -2)$.
La distancia de p a $(0, -2)$ es:

$$d(p, (0, -2)) = d((\delta, -2), (0, -2)) = \sqrt{(\delta - 0)^2 + (-2 - (-2))^2} = \delta$$

Como $\delta < r$, el punto p está en $B_r(0, -2)$. Hemos encontrado un punto que cumple todas las condiciones.

Demostración Punto Frontera

Probaremos que para cada $r \in \mathbb{R}_+$, $B_r(0, -2) \cap R^c \neq \emptyset$.

Definición a utilizar:

Definición 1.52: Punto Frontera en un espacio métrico

Sea (X, d) un espacio métrico, $a \in X$ y $A \subset X$. Se define que a es:

1. Punto frontera de A, si para cada $r \in \mathbb{R}_+$, se cumple que $B_r(a) \cap A \neq \emptyset$ y $B_r(a) \cap A^c \neq \emptyset$.

Inicio de la demostración:

Sea un $r \in \mathbb{R}_+$ arbitrario. Debemos encontrar un punto $q = (q_x, q_y)$ tal que $q \in B_r(0, -2)$ y $q \notin R$ (es decir, $q \in R^c$).
Elijamos $\delta = \frac{r}{2}$ y sea el punto $q = (-\delta, -2)$. Como la coordenada x de q es $-\delta < 0$, el punto q no pertenece a $R = [0, 1] \times [-2, -1]$. Por lo tanto, $q \in R^c$.
La distancia de q a $(0, -2)$ es:

$$d(q, (0, -2)) = d((-\delta, -2), (0, -2)) = \sqrt{(-\delta - 0)^2 + (-2 - (-2))^2} = \delta$$

Como $\delta = \frac{r}{2} < r$, el punto q está en $B_r(0, -2)$. Hemos demostrado que para cualquier $r > 0$, la bola abierta $B_r(0, -2)$ contiene puntos tanto de R (distintos de $(0, -2)$) como de su complemento R^c.

$\blacksquare$

1.6.2. Condiciones equivalentes para la clasificación de un puntos

Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$. A continuación se presentan las condiciones equivalentes para la clasificación de un punto $x \in X$ con respecto al conjunto A.

Puntos de Adherencia

Teorema 1.8: Equivalencia para Puntos de Adherencia

Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un punto $x \in X$:

1. x es un **punto de adherencia** de A. (Es decir, para toda vecindad abierta U de x, se cumple que $U \cap A \neq \emptyset$).
2. El punto x no es un punto exterior de A.
3. Para todo conjunto cerrado F que contiene a A, se cumple que $x \in F$.
4. *(En espacios métricos)* La distancia del punto x al conjunto A es cero: $d(x, A) = 0$.
5. *(En espacios métricos)* Existe una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $x_n \in A$ para todo n, tal que la sucesión converge a x.

Nota:

Nota: El conjunto de todos los puntos de adherencia de A es la **clausura** de A, denotada por $\overline{A}$.

Puntos de Acumulación:

Teorema 1.9: Equivalencia para Puntos de Acumulación

Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un punto $x \in X$:

1. x es un **punto de acumulación** (o punto límite) de A. (Es decir, para toda vecindad abierta U de x, se cumple que $(U \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$).
2. Toda vecindad abierta U de x contiene infinitos puntos de A (Válido en espacios T_1, como los espacios métricos).
3. x es un punto de adherencia del conjunto $A \setminus \{x\}$.
4. *(En espacios métricos)* Existe una sucesión de puntos distintos $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $x_n \in A$ para todo n, tal que la sucesión converge a x.

Nota:

El conjunto de puntos de acumulación es el **conjunto derivado**, A'.

Puntos interiores:

Teorema 1.10: Equivalencia para Puntos Interiores

Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un punto $x \in X$:

1. x es un **punto interior** de A. (Es decir, existe un conjunto abierto U tal que $x \in U \subset A$).
2. El conjunto A es una vecindad de x.
3. El punto x no pertenece a la frontera de A.
4. El punto x no es un punto de adherencia del complemento de A, A^c.

Nota:

El conjunto de puntos interiores es el **interior** de A, A° o $int(A)$.

Puntos Frontera

Teorema 1.11: Equivalencia para Puntos Frontera

Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un punto $x \in X$:

1. x es un **punto frontera** de A. (Es decir, para toda vecindad abierta U de x, $U \cap A \neq \emptyset$ y $U \cap A^c \neq \emptyset$).
2. El punto x no es ni punto interior ni punto exterior de A.
3. x es un punto de adherencia de A y también es un punto de adherencia de su complemento A^c.

Nota:

La frontera de A se denota por ∂A o $Fr(A)$, y se cumple que $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$.

Puntos Aislados

Teorema 1.12: Equivalencia para Puntos Aislados

Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un punto $x \in X$:

1. x es un **punto aislado** de A. (Es decir, $x \in A$ y existe una vecindad abierta U de x tal que $U \cap A = \{x\}$).
2. El punto x pertenece al conjunto A pero no es un punto de acumulación de A.
3. El conjunto unitario $\{x\}$ es un subconjunto abierto en la topología de subespacio de A.

Nota:

Se cumple que $A = A' \cup \{\text{puntos aislados de A}\}$.

Teoremas Prácticos para Encontrar Puntos

Teorema 1.13: Sobre la Clausura ($\overline{A}$)

La clausura es la unión del conjunto con sus puntos de acumulación: $\overline{A} = A \cup A'$.

Nota:

Para encontrar la clausura, toma los puntos de A y agrégale sus puntos de acumulación.

Teorema 1.14: Cerrado

Un conjunto A es cerrado si y solo si es igual a su clausura: A es cerrado $\iff A = \overline{A}$.

Teorema 1.15: Sobre el Interior (A°)

Un conjunto A es abierto si y solo si es igual a su interior: A es abierto $\iff A = A^\circ$.

Teorema 1.16: Sobre la Frontera (∂A)

La frontera es la clausura menos el interior: $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$.

Nota:

Esta es la fórmula más útil para calcular la frontera. Encuentra $\overline{A}$ y A°, y luego resta el segundo del primero.

Teorema 1.17: Relación entre Puntos

Un punto $x \in A$ es o un punto aislado de A o un punto de acumulación de A.

Nota:

Si un punto de A no es de acumulación, entonces es aislado.

Relaciones Fundamentales entre Conjuntos de Puntos

- La **clausura** es la unión del conjunto y su frontera:
$$\overline{A} = A \cup \partial A$$
- La **clausura** es también la unión del conjunto y sus puntos de acumulación:
$$\overline{A} = A \cup A'$$
- La **frontera** es la clausura menos el interior:
$$\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$$
- El espacio completo X es la unión disjunta del interior, la frontera y el exterior de A:
$$X = A^\circ \cup \partial A \cup \operatorname{Ext}(A)$$

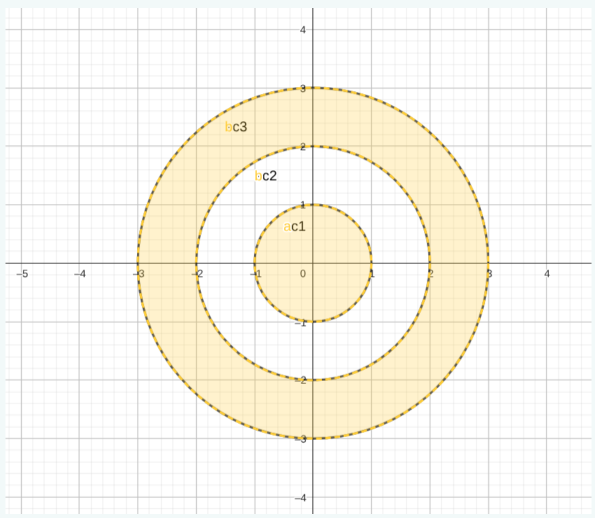
1.6.3. Ejemplo de Cálculo de puntos

Ejercicio 1.5: Cálcular para el conjunto

Calcular frontera $Fr(A)$, el interior $int(A)$, y A' para el conjunto:

$$A := \left\{w \in \mathbb{R}^2 : ||w|| < 1 \vee 2 < ||w|| < 3\right\}.$$

Debemos identificar cuáles son los puntos de la frontera de A, cuáles forman parte del interior y cuáles son puntos de acumulación de A (esto es, pertenecen a A') en $\mathbb{R}^2$.
Si gráficamos el conjunto podemos observar intituivamente cual podría ser cada conjunto que se nos pide, aún así debemos verificar que sea así.



Grafica 1
Para los puntos interiores:
Para $\{w : ||w|| < 1\}$. Sea w tal que $||w|| < 1$ definamos $r_1 = 1 - ||w|| > 0$ y $v \in B_r(w)$. entonces tenemos que:

$$||v|| \leq ||v - w|| + ||w|| < r_1 + ||w|| = 1$$

así $B_{r_1}(w) \subset \{||v|| < 1\}$ y w es interior de A.
Ahora para $\{w : 2 < ||w|| < 3\}$. tomemos $r_2 = min\{||w|| - 2, 3 - ||w||\}$. Como $||w|| - 2 > 0$ y $3 - ||w|| > 0$ entonces $r_2 > 0$.
Ahora con $v \in B_{r_2}(w)$ por la desigualdad del tríangulo tenemos que:

$$|\ ||v|| - ||w||\ | \leq ||v - w|| < r_2$$

Por lo cual $||v|| > ||w|| - r_2 \geq 2$ y $||v|| < ||w|| + r_2 \leq 3$ entonces $2 < ||v|| < 3$. Además $B_{r_2}(w) \subset \{2 < ||v|| < 3\}$ y cualquier w es punto interior de A.
Y por el teorema que nos dice que la unión de dos conjuntos abiertos es abierta entonces tenemos que:

$$int(A) = A$$

Para la frontera de A podemos usar el teorema $Fr(A) = \bar{A} \setminus int(A)$. por lo que necesitamos calcular $\bar{A}$ entonces:

Cada punto de $\{||w|| \leq 1\}$ es adherente a $\{||w|| < 1\}$ entonces si $||w|| = 1$, para cualquier $r > 0$ tomemos $\varepsilon = \frac{r}{2}$ y $0 < \varepsilon < r$ considerando el punto:

$$v = (1-\varepsilon)\frac{w}{||w||}$$

entonces tenemos que $||v|| = 1-\varepsilon < 1$ con $v \in A$, además $||v-w|| = |\,||v|| - (1-\varepsilon)| = \varepsilon < r$. Así $v \in B_r(w)$ y por lo tanto $w \in \bar{A}$ y $\{||w|| \leq 1\} \subset \bar{A}$.
Ahora para $\{2 \leq ||w|| \leq 3\}$ es adherente a $\{2 < w < 3\}$. Entonces si $2 < ||w|| < 3$ ya está en A, ahora bien si $||w|| = 2$ para $r > 0$ tomemos $0 < \varepsilon < min\{r, 1\}$ y también:

$$v = (2+\varepsilon)\frac{w}{||w||}$$

Entonces $2 < ||w|| < 3$ y $||v-w|| = \varepsilon < r$.Así $B_r(w) \cap A \neq \varnothing$. Analogamente para $||w|| = 3$ tomar $v = (3-\varepsilon)\frac{w}{||w||}$. Por lo tanto $\{2 \leq ||w|| \leq 3\}$.
Por otro lado tomemos $w \in A$ con $1 < ||w|| < 2$ definamos:

$$d = min\{||w|| - 1, 2 - ||w||\}$$

Ahora tomemos $r = d$ entonces para todo $v \in B_r(w)$ se tiene que:

$$||v|| \geq ||w|| - ||v-w|| > ||w|| - r \geq ||w|| - d \geq 1$$

con esto notamos que $B_r(w)$ no contiene puntos $||v|| < 1$ y $||v|| > 2$. Así entonces $B_r(w) \cap A = \varnothing$ y $w \notin \bar{A}$ de igual manera es analogo para $||w|| > 3$ o $||w|| < 1$.Por lo tanto:

$$\bar{A} = \{||w|| \leq 1\} \cup \{2 \leq ||w|| \leq 3\}$$

Ahora si al realizar $\bar{A} \setminus int(A)$ obtendremos la frontera de A, por lo que tenemos:

$$Fr(A) = \bar{A} \setminus int(A) = (\{||w|| \leq 1\} \setminus \{||w|| < 1\}) \cup (\{2 \leq ||w|| \leq 3\} \setminus \{2 < ||w|| < 3\})$$

Por lo tanto $Fr(A) = \{||w|| = 1\} \cup \{||w|| = 2\} \cup \{||w|| = 3\}$.
Ahora calculemos A' tomemos $w \in A$ y $u = \frac{w}{||w||}$ por casos tenemos que:

- Si $||w|| < 1$ tomemos $r_0 = 1 - ||w|| > 0$ y tenemos $B_{r_0}(w) \subset A$ para todo $r > 0$. Entonces $B_{min\{r,r_0\}}$ contiene infinitos puntos de A distintos de w por lo tanto w es de acumulación.

- Si $2 < ||w|| < 3$ tomemos $r_0 = min\{||w|| - 2, 3 - ||w||\} > 0$ con $B_{r_0}(w) \subset A$ y por lo tanto w es de acumulación.

- Si $||w|| = 1$ tomemos $r > 0$ y $\varepsilon = min\{\frac{r}{2}, \frac{1}{2}\}$ consideremos $v = (1-\varepsilon)u$. Entonces $||v|| = 1 - \varepsilon < 1$ por lo que $v \in A$ y además

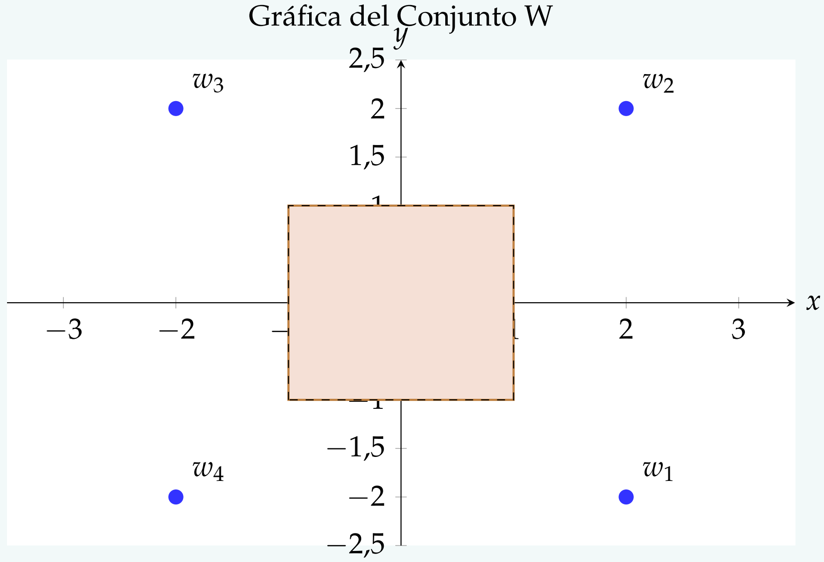
  $$||v-w|| = ||(1-\varepsilon)u - 1u|| = \varepsilon < r$$

  Así $(B_r(w) \setminus \{w\} \cap A \neq \varnothing$ para todo $r > 0$. por lo tanto $||w|| = 1$ es de acumulación.

- Si$||w|| = 2$ con $r > 0$ tomemos $0 < \varepsilon < min\{r, 1\}$ y $v = (2+\varepsilon)u$. Entonces $2 < ||w|| < 3$. Por lo que $v \in A$, además $||v - w|| = \varepsilon < r$. Y por lo tanto $||w|| = 3$ es de acumulación.
- Si$||w|| = 3$ con $r > 0$ tomemos $0 < \varepsilon < min\{r, 1\}$ y $v = (3-\varepsilon)u$. Entonces $2 < ||w|| < 3$. Por lo que $v \in A$, además $||v - w|| = \varepsilon < r$. Y por lo tanto $||w|| = 3$ es de acumulación.
- Ahora bien si $1 < ||w|| < 2$ definamos $d = min\{||w|| - 1, 2 - ||w||\} > 0$. Entonces existe $r = d$ tal que $(B_r(w) \setminus \{w\}) \cap A = \varnothing$. Por lo tanto w no es de acumulación.
- Si $||w|| > 3$ hay una distancia positiva hacía A y no es de acumulación.

Con esto podemos concluir el cálculo de estos conjuntos de puntos.
Probar que los vértices y las aristas del conjunto W visto en clase, son frontera. Lo que es, demostrar que los puntos n_1, n_2, n_3, n_4 pertenecen a la frontera de W, así como también las aristas que conectan sus vértices.
Con $W = [-1, 1) \times (-1, 1] \cup \{(2, 2), (-2, 2), (-2, -2), (2, -2)\}$

Gráfica del Conjunto W



Nuestra afirmación que tenemos es que $A = \{\lambda n_1 + (1-\lambda)n_2 | \lambda \in [0, 1]\} \cup \{\lambda n_3 + (1-\lambda)n_2 | \lambda \in [0, 1]\} \cup \{\lambda n_4 + (1-\lambda)n_3 | \lambda \in [0, 1]\} \cup \{\lambda n_1 + (1-\lambda)n_4 | \lambda \in [0, 1]\} \subset \delta W$ y también $n_i = \{n_2 = (1, 1), n_3 = (-1, 1), n_4 = (-1, -1), n_1 = (1, -1)\} \subset \delta W$.
entonces si $w \in \{\lambda n_1 + (1-\lambda)n_2 | \lambda \in [0, 1]\}$ para cada $r \in \mathbb{R}_+$ tomemos $v_{r_i} = w - \frac{r}{2}e_1$, Así entonces tenemos que:

$$\pi_1(v_{r_i}) = \pi_1(w) + r = \pm 2 + r \neq \pm 2$$

y además $\pi_2(v_{r_i}) = \pm 2$, así $v_{r_i} \notin W$. Más aún $v_{r_i} \in B_r(w)$ puesto que $d(v_{r_i}, w) = ||w - (w - \frac{r}{2}e_1)|| = \frac{r}{2} < r$. Con esto $B_r(w) \cap A^c \neq \varnothing$. Como $w \in B_r(w)$, entonces $B_r(w) \cap A \neq \varnothing$. Por lo tanto $w \in \delta W$.

Ahora bien si $w \in \{\lambda n_3 + (1-\lambda)n_2 | \lambda \in [0,1]\}$ para cada $r \in \mathbb{R}_+$ tomemos $v_{r_i} = w + \frac{r}{2}e_2$, Así entonces tenemos que:

$$\pi_1(v_{r_i}) = \pi_1(w) + r = \pm 2 + r \neq \pm 2$$

y además $\pi_2(v_{r_i}) = \pm 2$, así $v_{r_i} \notin W$. Más aún $v_{r_i} \in B_r(w)$ puesto que $d(v_{r_i}, w) = ||w - (w + \frac{r}{2}e_2)|| = \frac{r}{2} < r$. Con esto $B_r(w) \cap A^c \neq \varnothing$. Como $w \in B_r(w)$, entonces $B_r(w) \cap A \neq \varnothing$. Por lo tanto $w \in \delta W$.
Si $w \in \{\lambda n_4 + (1-\lambda)n_3 | \lambda \in [0,1]\}$ para cada $r \in \mathbb{R}_+$ tomemos $v_{r_i} = w + \frac{r}{2}e_1$, Así entonces tenemos que:

$$\pi_1(v_{r_i}) = \pi_1(w) + r = \pm 2 + r \neq \pm 2$$

y además $\pi_2(v_{r_i}) = \pm 2$, así $v_{r_i} \notin W$. Más aún $v_{r_i} \in B_r(w)$ puesto que $d(v_{r_i}, w) = ||w - (w + \frac{r}{2}e_1)|| = \frac{r}{2} < r$. Con esto $B_r(w) \cap A^c \neq \varnothing$. Como $w \in B_r(w)$, entonces $B_r(w) \cap A \neq \varnothing$. Por lo tanto $w \in \delta W$.
Si $w \in \{\lambda n_1 + (1-\lambda)n_4 | \lambda \in [0,1]\}$ para cada $r \in \mathbb{R}_+$ tomemos $v_{r_i} = w - \frac{r}{2}e_2$, Así entonces tenemos que:

$$\pi_1(v_{r_i}) = \pi_1(w) + r = \pm 2 + r \neq \pm 2$$

y además $\pi_2(v_{r_i}) = \pm 2$, así $v_{r_i} \notin W$. Más aún $v_{r_i} \in B_r(w)$ puesto que $d(v_{r_i}, w) = ||w - (w - \frac{r}{2}e_2)|| = \frac{r}{2} < r$. Con esto $B_r(w) \cap A^c \neq \varnothing$. Como $w \in B_r(w)$, entonces $B_r(w) \cap A \neq \varnothing$. Por lo tanto $w \in \delta W$.
Por lo tanto $A \subset \delta W$.
Ahora para n_i con $i = \{1,2,3,4\}$ tenemos casos por lo que si es n_1 basta con tomar para cada $r \in \mathbb{R}_+$,$v_{r_i} = w + \frac{r}{2}(e_2 - e_1)$, Así entonces tenemos que:

$$\pi_1(v_{r_i}) = \pi_1(w) + r = \pm 2 + r \neq \pm 2$$

y además $\pi_2(v_{r_i}) = \pm 2$, así $v_{r_i} \notin W$. Más aún $v_{r_i} \in B_r(w)$ puesto que $d(v_{r_i}, w) = ||w - (w + \frac{r}{2}(e_2 - e_1))|| = \frac{r}{2} < r$. Con esto $B_r(w) \cap A^c \neq \varnothing$. Como $w \in B_r(w)$, entonces $B_r(w) \cap A \neq \varnothing$. Por lo tanto $w \in \delta W$.
Ahora si es n_2 basta con tomar para cada $r \in \mathbb{R}_+$,$v_{r_i} = w - \frac{r}{2}e_1$, Así entonces tenemos que:

$$\pi_1(v_{r_i}) = \pi_1(w) + r = \pm 2 + r \neq \pm 2$$

y además $\pi_2(v_{r_i}) = \pm 2$, así $v_{r_i} \notin W$. Más aún $v_{r_i} \in B_r(w)$ puesto que $d(v_{r_i}, w) = ||w - (w - \frac{r}{2}e_1)|| = \frac{r}{2} < r$. Con esto $B_r(w) \cap A^c \neq \varnothing$. Como $w \in B_r(w)$, entonces $B_r(w) \cap A \neq \varnothing$. Por lo tanto $w \in \delta W$.
Si es n_3 basta con tomar para cada $r \in \mathbb{R}_+$,$v_{r_i} = w + \frac{r}{2}e_1$, Así entonces tenemos que:

$$\pi_1(v_{r_i}) = \pi_1(w) + r = \pm 2 + r \neq \pm 2$$

y además $\pi_2(v_{r_i}) = \pm 2$, así $v_{r_i} \notin W$. Más aún $v_{r_i} \in B_r(w)$ puesto que $d(v_{r_i}, w) = ||w - (w + \frac{r}{2}e_1)|| = \frac{r}{2} < r$. Con esto $B_r(w) \cap A^c \neq \varnothing$. Como $w \in B_r(w)$, entonces $B_r(w) \cap A \neq \varnothing$. Por lo tanto $w \in \delta W$.
Si es n_4 basta con tomar para cada $r \in \mathbb{R}_+$,$v_{r_i} = w + \frac{r}{2}(e_1 - e_2)$, Así entonces tenemos que:

$$\pi_1(v_{r_i}) = \pi_1(w) + r = \pm 2 + r \neq \pm 2$$

y además $\pi_2(v_{r_i}) = \pm 2$, así $v_{r_i} \notin W$. Más aún $v_{r_i} \in B_r(w)$ puesto que $d(v_{r_i}, w) = ||w - (w + \frac{r}{2}(e_1 - e_2))|| = \frac{r}{2} < r$. Con esto $B_r(w) \cap A^c \neq \varnothing$. Como $w \in B_r(w)$, entonces $B_r(w) \cap A \neq \varnothing$.
Por lo tanto $w \in \delta W$.
Por lo tanto tanto A como los n_i son frontera de W.

1.6.4. Ejercicio top. continuas

Ejercicio 1.6:

Sean π_1 y π_2 las funciones proyección en $\mathbb{R}^3$. Queremos saber si π_1, π_2 y $\pi_1 + \pi_2$ son continuas usando primero la topología usual de $\mathbb{R}^3$, y luego la topología del orden lexicográfico. En ambos casos usamos la topología usual en $\mathbb{R}$.

Definición 1.53: Función Proyección

Si tenemos una familia de conjuntos $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$, la función proyección sobre la i-ésima coordenada se define como:

$$\pi_i : \prod_{\alpha \in I} X_\alpha \to X_i, \quad u \mapsto u_i$$

para algún i fijo en I. A esta función se le llama la *i-ésima proyección*.

Caso Topología Usual
Tomemos un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}$. Queremos ver si el conjunto $\pi_1^{-1}(U)$ es abierto en $\mathbb{R}^3$.

Demostración. Sabemos que:

$$\pi_1^{-1}(U) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in U\} = U \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Como U es abierto en $\mathbb{R}$, y el producto de conjuntos abiertos también es abierto en la topología producto, entonces $\pi_1^{-1}(U)$ es abierto en $\mathbb{R}^3$.
Por lo tanto, π_1 es continua. Lo mismo ocurre con π_2, así que ambas son continuas.
Dado que la suma de funciones continuas también es continua, concluimos que $\pi_1 + \pi_2$ también lo es. ■

Caso Topología del Orden Lexicográfico
Ahora consideremos $\mathbb{R}^3$ con la topología del orden lexicográfico. En este orden, la primera coordenada es la más importante para comparar los puntos.

Observación: Para π_1, el cambio de topología no afecta significativamente, ya que sigue dependiendo solo de la primera coordenada. Si tomamos un intervalo (a, b) en $\mathbb{R}$, tenemos:

$$\pi_1^{-1}((a, b)) = \{(x, y, z) : x \in (a, b)\}$$

Este conjunto sigue siendo abierto en la topología lexicográfica, por lo que π_1 permanece continua.

Ejemplo 1.23: Discontinuidad de π_2

Con π_2 la situación cambia. En la topología lexicográfica, los "vecinos" de un punto dependen fuertemente de su primera coordenada.
Si cambiamos x, también cambia la manera en que se ordenan los puntos alrededor.
Por eso, conjuntos del tipo $A = \{(x, y, z) : y \in W\}$ pueden no ser abiertos, ya que una vecindad de un punto puede incluir puntos con diferentes primeras coordenadas, rompiendo la estructura del orden.
Conclusión: π_2 no es continua en esta topología y, como consecuencia, $\pi_1 + \pi_2$ tampoco lo es.

1.6.5. Secciones Cónicas

Las cónicas son curvas obtenidas de la intersección de un cono doble con un plano. La ecuación general de segundo grado es:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

El tipo de cónica se determina por el discriminante, $\Delta = B^2 - 4AC$.

Definición 1.54: Círculo

El lugar geométrico de los puntos en un plano que equidistan de un punto fijo llamado centro.

- **Ecuación Canónica (centro en $(0,0)$):** $x^2 + y^2 = r^2$
- **Ecuación Ordinaria (centro en (h,k)):** $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

Definición 1.55: Elipse ($\Delta < 0$)

El lugar geométrico de los puntos en un plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos (focos) es constante.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$$

Donde $c^2 = a^2 - b^2$ y c es la distancia del centro al foco.

Definición 1.56: Parábola

El lugar geométrico de los puntos en un plano que equidistan de un punto fijo (foco) y una recta fija (directriz).

$$y^2 = 4px$$

(Para vértice en $(0,0)$, abriendo hacia la derecha). Donde p es la distancia del vértice al foco.

Definición 1.57: Hipérbola ($\Delta > 0$)

El lugar geométrico de los puntos cuya diferencia (en valor absoluto) de distancias a dos focos es constante.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Donde $c^2 = a^2 + b^2$ y c es la distancia del centro al foco.

Nota:

Cónicas Degeneradas Ocurren cuando el plano de intersección pasa por el vértice del cono:

- **Un punto:** $x^2 + y^2 = 0$
- **Una recta:** $x^2 = 0$
- **Dos rectas que se cortan:** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$

1.6.6. Superficies Cuádricas

Propiedades 1.2: Ecuaciones de Superficies Cuádricas

Superficies descritas por ecuaciones de segundo grado en tres variables.

1. Elipsoide:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

2. Hiperboloide de una hoja:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

3. Hiperboloide de dos hojas:

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

4. Paraboloide Elíptico:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

5. Paraboloide Hiperbólico:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c}$$

6. Cono Elíptico:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Observación: Cuádricas Degeneradas

- **Cilindro elíptico:** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
- **Cilindro parabólico:** $x^2 + 2ay = 0$
- **Cilindro hiperbólico:** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

1.6.7. Ecuación de Primer Grado

Definición 1.58: Ecuaciones Lineales

En $\mathbb{R}^2$ (Línea Recta):

$$Ax + By + C = 0$$

Donde A, B no son ambos cero.
En $\mathbb{R}^3$ (Plano):

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

El vector $\vec{n} = \langle A, B, C \rangle$ es el vector normal al plano.

1.6.8. Espacios no Hausdorff

Definición 1.59: Convergencia de una sucesión

En un espacio topológico (X, τ), una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un punto $L \in X$ si para todo entorno (conjunto abierto) U de L, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$, se cumple que $x_n \in U$.

Nota:

Una propiedad fundamental de los espacios de Hausdorff (T_2) es que el límite de cualquier sucesión convergente es **único**. Para encontrar una sucesión con más de un límite, debemos buscar un espacio que no sea de Hausdorff.

Ejemplo 1.24: La Topología Indiscreta

Consideremos $X = \{a, b\}$ con la **topología indiscreta**: $\tau = \{\emptyset, \{a, b\}\}$.
1. Verificación de no-Hausdorff: Para a y b, los únicos abiertos que los contienen son $U = \{a, b\}$ y $V = \{a, b\}$. Como $U \cap V \neq \emptyset$, el espacio no es T_2.
2. Sucesión con dos límites: Sea la sucesión constante $x_n = a$.

- **Convergencia a a:** El único abierto que contiene a a es $\{a, b\}$, y la sucesión está contenida ahí. Converge a a.
- **Convergencia a b:** El único abierto que contiene a b es $\{a, b\}$, y la sucesión está contenida ahí. Converge a b.

Conclusión: En la topología indiscreta, la sucesión $(x_n = a)$ converge a dos puntos distintos.

1.6.9. Demostraciones de funciones

Ejercicio 1.7: Demostraciones de Continuidad

Demuestra formalmente (usando $\epsilon - \delta$) que las siguientes funciones son continuas.

1. Funciones Constantes

Proposición 1.5: Continuidad de la Constante

Una función constante $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = c$, es continua en todo $\mathbb{R}$.

Demostración. Sea $a \in \mathbb{R}$ arbitrario. Debemos mostrar que $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon$.
Consideremos la diferencia:

$$|f(x) - f(a)| = |c - c| = 0$$

Como $0 < \epsilon$ se cumple siempre, podemos elegir cualquier $\delta > 0$ (e.g., $\delta = 1$). Si $|x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - f(a)| = 0 < \epsilon$. ■

2. Funciones Identidad

Proposición 1.6: Continuidad de la Identidad

La función identidad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x$, es continua.

Demostración. Sea $a \in \mathbb{R}$. Queremos que si $|x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.
Observamos que:

$$|f(x) - f(a)| = |x - a|$$

Basta elegir $\delta = \epsilon$. Así, si $|x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. ■

3. Funciones Proyección

Proposición 1.7: Continuidad de la Proyección

La k-ésima proyección $\pi_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dada por $\pi_k(\mathbf{x}) = x_k$, es continua.

Demostración. Sea $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Usamos la norma euclídea. Notemos que:

$$|\pi_k(\mathbf{x}) - \pi_k(\mathbf{a})| = |x_k - a_k| = \sqrt{(x_k - a_k)^2} \leq \sqrt{\sum (x_i - a_i)^2} = \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$$

Eligiendo $\delta = \epsilon$, si $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$, entonces la diferencia es menor que ϵ. ■

4. Funciones Norma

Proposición 1.8: Continuidad de la Norma

En un espacio vectorial normado $(V, \|\cdot\|)$, la función $f(x) = \|x\|$ es continua.

Demostración. Sea $a \in V$. Por la **desigualdad triangular inversa**:

$$|f(x) - f(a)| = |\|x\| - \|a\|| \leq \|x - a\|$$

Eligiendo $\delta = \epsilon$, si $\|x - a\| < \delta$, entonces $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. ■

2. DERIVADAS PARCIALES.

2.1. Derivadas parciales, definición, notación y cálculo

2.1.1. Derivada de una variable real

Recordando, una función $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es diferenciable en el punto $a \in I$, con I conjunto abierto, si existe el $\lim_{b\to a} \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ o de otra manera $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, más aún la derivada de ese punto se define como justamente uno de esos límites, es decir

$$f'(a) = \lim_{b\to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

La pendiente la podemos asociar a la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto $(a, f(a))$.

2.1.2. Derivadas parciales

Definición 2.1: Derivada parcial

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función con A un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Para $i \in \{1, \ldots, n\}$ fijo, y un punto $x \in A$, si existe el $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+he_i)-f(x)}{h}$ se define como la derivada parcial de f en el punto x con relación a la i-ésima variable, la cual denotaremos como $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ o bien $f_{x_i}(x)$, el dominio de la función $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ será el conjunto de todos los $x \in A$ para los que exista el límite anterior.

Nota:

∂x_i es un símbolo, indica que en una variable derivar.

$$\frac{\partial}{\partial w}(x, y, z) = xyz\frac{\partial}{\partial w}(1) = 0$$

Es decir es la derivada usual pero solo en ∂w.

2.1.3. Plano tangente y diferenciabilidad

Definición 2.2: Plano tangente para funciones de dos variables

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en (h,k). Entonces el plano en $\mathbb{R}^3$ con ecuación

$$z = f(h,k) + [f_x(h,k)](x-h) + [f_y(h,k)](y-k)$$

es llamado el plano tangente en el punto (h,k) a la gráfica de f.

Definición 2.3: Funciones de dos variables

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diremos que f es diferenciable en (h,k) sii f_x, f_y en (h,k) y además.

$$\lim_{(x,y)\to(h,k)} \frac{f(x,y) - f(h,k) - [f_x(h,k)](x-h) - [f_y(h,k)](y-k)}{\|(x,y)-(h,k)\|} = 0$$

Observación: Note que el vector normal al plano tangente es $h(h,k) = (f_x(h,k), f_y(h,k), -1)$, así el plano tiene por ecuación

$$h(h,k) \cdot ((x,y,z) - (h,k,f(h,k))) = 0$$

2.2. Derivadas de orden superior

Definición 2.4: Derivadas parciales de orden superior

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Si las derivadas parciales de primer orden $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existen en un conjunto abierto A, entonces podemos derivarlas nuevamente respecto a otra variable x_j.
Definimos las derivadas parciales de orden superior como:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right),$$

y en general, para $k \in \mathbb{N}$, una derivada parcial de orden k está dada por:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \cdots \partial x_{i_1}}\right).$$

Definición 2.5: Derivadas parciales mixtas

Las derivadas parciales en las que intervienen diferentes variables se llaman *mixtas*. Por ejemplo:

$$f_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right), \qquad f_{yx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right).$$

Teorema 2.1: Teorema de Schwarz

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función tal que todas sus derivadas parciales de orden 2 son continuas en un entorno de un punto $x \in A$.
Entonces las derivadas mixtas coinciden:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x).$$

Ejemplo 2.1: Ejemplo

Sea $f(x,y) = x^2y^3$. Entonces:

$$f_x = 2xy^3, \qquad f_y = 3x^2y^2.$$

Derivadas de orden 2:

$$f_{xx} = 2y^3, \qquad f_{yy} = 6x^2y, \qquad f_{xy} = 6xy^2, \qquad f_{yx} = 6xy^2.$$

2.2.1. Matriz Jacobiana

Nota:

Denotaremos $Df(x,y)$ y vector $(f_x(x,y), f_y(x,y))$.

Así podemos expresar $f(h,k) + [f_x(h,k)](x-h) + [f_y(h,k)](y-k)$ como

$$f(h,k) + Df(h,y)(x-h, y-k)$$

Ahora si para una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ denotaremos Df.

$$Df(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(u) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(u) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(u) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(u) \end{pmatrix}$$

La matriz jacobiana de f en el punto u y el determinante de esta como el jacobiano.

2.3. Diferenciabilidad de funciones

Definición 2.6: Función diferenciable en varias variables

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función con A abierto en $\mathbb{R}^n$. Diremos que f es diferenciable en $u \in A$ sii

$$\lim_{w \to u} \frac{\|f(w) - f(u) - Df(y)(w-y)\|}{\|w-u\|} = 0$$

Observación: La matriz jacobiana determina una app lineal $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Nota:

n filas m columnas. el dominio da las filas y el codominio las columnas.

Ejemplo 2.2: Encontrar superficie

Encuentre el plano tangente a la superficie $z = x^2 + y^4 + e^{xy}$ en el punto $(1, 0, 2)$.
Sol: Vemos que si $f(x, y) = x^2 + y^4 + e^{xy}$ tenemos que está definida en todo $\mathbb{R}^2$, además $f(1, 0) = 2$. Ahora vemos que

$$f_x(x, y) = 2x + ye^{xy} \quad \text{y que} \quad f_y(x, y) = 4y^3 + xe^{xy}$$

Así $\alpha(1, 0) = (2, 1, -1)$, por lo que el plano tangente a la gráfica de la función f en $(1, 0, 2)$ tiene por ecuación

$$(2, 1, -1) \cdot (x - 1, y, z - 2) = 0$$

Entonces la ecuación del plano tangente a la superficie en $(1, 0, 2)$ es el plano $(2, 1, -1) \cdot (x - 1, y, z - 2) = 0 \Rightarrow 2x - 2 + y - z + 2 = 2x + y - z \Rightarrow z = 2x + y$.
Se pasa z por que está en el plano tangente a la superficie $(1, 0, 2)$ en z.

Nota:

Nos sirve para aproximar la superficie cerca de ese punto en un plano (en este caso $(1, 0, 2)$)

2.3.1. Curvas (trayectorias o caminos) diferenciables

Definición 2.7: Vector velocidad

El **vector velocidad** de una trayectoria $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ en un punto $a \in I$ se define como el

$$\lim_{t \to 0} \frac{\alpha(a + t) - \alpha(a)}{t} = \frac{d\alpha}{dt}(a) = \alpha'(a) = D\alpha(a),$$

cuando existe el límite y decimos que α es diferenciable en a. Si existe el vector velocidad para todo punto en I decimos que α es diferenciable.

Nota:

Cuando $\alpha'(a) \neq 0$, determina la recta tangente a la curva α en $\alpha(a)$, a saber $L = \{\alpha(a) + t\alpha'(a) \in \mathbb{R}^n : t \in \mathbb{R}\}$.

Proposición 2.1: Trayectoria Diferenciable

Una trayectoria (camino) $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es diferenciable en un punto $a \in I$ si y solo si existe $v \in \mathbb{R}^n$ tal que para cada $t \in \mathbb{R}$ con $a + t \in I$ se cumple que

$$\lim_{t \to 0} \frac{\alpha(a+t) - \alpha(a) - tv}{t} = 0.$$

Nota:

Basta tomar $\alpha'(a) = v$.

Observación: Si α es diferenciable en $a \in I$ entonces

$$\alpha'(a) = (\alpha_1'(a), \ldots, \alpha_n'(a)),$$

donde $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Propiedades 2.1: Trayectorias diferenciables

Sean $\alpha, \gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ trayectorias diferenciables entonces:

1. $(\alpha + \gamma)'(t) = \alpha'(t) + \gamma'(t)$.
2. $(f(t)\alpha(t))' = f'(t)\alpha(t) + f(t)\alpha'(t)$. Donde $f : I \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable.
3. $(\alpha \cdot \gamma)'(t) = \alpha'(t)\gamma(t) + \alpha(t)\gamma'(t)$.
4. $(\|\alpha\|)' = \frac{\alpha(t)\alpha'(t)}{\|\alpha(t)\|}$.

Nota:

Si α es un camino diferenciable, entonces $\alpha' : I \to \mathbb{R}$ es un camino.

Demostración.Se deja al lector ■

Definición 2.8: Trayectoria Clase C^1

Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ trayectoria diferenciable con $\alpha' : I \to \mathbb{R}$ continua, se denomina de **clase** C^1. Cuando existe $(\alpha')'(a)$ para $a \in I$, denominamos a $\alpha''(a) = (\alpha')'(a)$ la **segunda derivada** de α en a. Si existe α'' en todo I se dice que α es dos veces diferenciable.

Observación: Si α tiene segunda derivada en a entonces

$$\alpha''(a) = (\alpha_1''(a), \ldots, \alpha_n''(a)).$$

Definición 2.9: Trayectoria Clase C^2

Si existe α'' y es continua entonces decimos que α es de **clase** C^2.

Definición 2.10: Diferenciabilidad de Orden p+1

Diremos que $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ es $p+1$ veces diferenciable cuando exista $\alpha^{(p)} : I \to \mathbb{R}^n$ (derivada de orden p de α) y es diferenciable. Entonces $\alpha^{(p+1)} = (\alpha^{(p)})'$. Cuando $\alpha^{(p)}$ es de clase C^1 diremos que α es de clase C^{p+1}.

Nota:

Una curva α es p-veces diferenciable en un punto $a \in I$ cuando existe $\delta \in \mathbb{R}_+$ tal que α es de clase C^{p-1} en el intervalo $(a-\delta, a+\delta)$ y $\alpha^{(p-1)}$ es diferenciable en a.

Definición 2.11: Clase C^0, C^∞ y C^p

Una curva α es de **clase** C^0 si es continua y entenderemos $\alpha^{(0)} = \alpha$. Si $\alpha^{(p)}$ existe para cada $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ decimos que α es de **clase** C^∞, infinitamente diferenciable o suave.

Nota:

Entenderemos por $\alpha \in C^p$ o bien $\alpha^p(I)$ que α es de clase C^p en I.

Observación: Si $\alpha \in C^p$ entonces sus componentes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in C^p$ en el sentido usual de funciones real valuadas de variable real.

2.4. Gradiente

Definición 2.12: Gradiente

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función. La matriz

$$Df(x) = (f_{x_1}(x), \ldots, f_{x_n}(x))$$

se denomina el **gradiente** de la función f y es denotado como ∇f o grad f.

De esta definición podemos ver que para $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ el operador gradiente se puede escribir como

$$\nabla f = \sum_{j=1}^{n} f_{x_j} e_j.$$

2.5. Regla de la Cadena

Teorema 2.2: Regla de la cadena

Si $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ es una curva diferenciable y $\gamma : J \subset \mathbb{R} \to I$ es una función diferenciable entonces

$$\alpha \circ \gamma : J \to \mathbb{R}^n$$

es diferenciable y

$$(\alpha \circ \gamma)'(a) = \gamma'(a)\alpha'(\gamma(a)).$$

Demostración.Se deja al alumno como ejercicio para el siguiente parcial. ■

Ejemplo 2.3: Regla de la cadena

1. $\alpha : [-1,1] = I \to \mathbb{R}^2$

$$t \mapsto \theta$$

(donde θ es el vector nulo $(0,0)$)

$\alpha'(t) = \theta \implies \alpha' \in C^1(I)$

$\forall p \in \mathbb{N} : \quad \alpha^{(p)}(t) = \theta \implies \alpha \in C^p(I)$

$\therefore \alpha \in C^\infty(I)$

Ejercicio 2.1: Regla Cadena

Para las siguientes trayectorias calcula su vector de velocidad y de aceleración (segunda derivada) y realizando la reparametrización con γ dada calcula nuevamente los vectores aceleración y velocidad y verifica la regla de la cadena.

1. $\alpha : (-1,1) \to \mathbb{R}^3, \alpha(t) = (t,t,t)$ y
   $\gamma : (-2,2) \to \mathbb{R}, \gamma(r) = \frac{r}{2}$.
2. $\alpha : [-1,1] \to \mathbb{R}^2, \alpha(t) = (\mathrm{sen}(t), \cos(t))$ y
   $\gamma : [-2\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}, \gamma(r) = \cos(t)$.
3. $\alpha : (-1,1) \to \mathbb{R}, \alpha(t) = 3$ y $\gamma : (0,3) \to \mathbb{R}, \gamma(r) = \frac{2r}{3} - 1$.
4. $\alpha : (0, 3\pi) \to \mathbb{R}^3, \alpha(t) = (e^t, \log(t), t^2)$ y
   $\gamma : (0,1) \to \mathbb{R}, \gamma(r) = 3\pi r$.
5. $\alpha : (-1,1) \to \mathbb{R}^3, \alpha(t) = \left(\int_0^t x dx, \int_0^t |x|, \int_0^t \frac{1}{|x|+1}\right)$ y
   $\gamma : (e, \pi) \to \mathbb{R}, \gamma(r) = \frac{2(r-e)}{\pi - e} - 1$.

Convexo e Conexo

2.5.1. Covexo

Definición 2.13: Convexo

Un conjunto $B \subset \mathbb{R}^n$ es convexo si y solo si para cualesquier par de puntos $p, q \in B$ el segmento de recta con ecuación vectorial

$$p + t(q - p) \quad \text{para todo } t \in [0, 1],$$

es un subconjunto de B.

Ejemplo 2.4: Convexo

1. Todo intervalo $I \subset \mathbb{R}$ es convexo.
2. Para cada $r \in \mathbb{R}$ y todo $v \in \mathbb{R}^n$, la bola de radio r y centro v es convexo, $B_r(v) \subset \mathbb{R}^n$.
3. Los planos y rectas son convexos en $\mathbb{R}^n$.

2.5.2. Conexo

Definición 2.14: Conexo

En (X, τ), $A \subset X$ es conexo sii $\forall U, V \in \tau$ con $U \cap V = \phi$ y $A \subset U \cup V$ implica que $A \subset U$ y $A \cap V = \phi$ o bien $A \subset V$ y $A \cap U = \phi$

Definición 2.15: Conjunto i-convexo

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se denomina i-convexo si y solo si para cada $a, b \in A$ tales que existe $t \in \mathbb{R}$ con $b = a + te_i$ implica que el segmento que une a con b, $|\overline{a, b}|$ (incluyendo los extremos), está contenido en A, es decir $|\overline{a, b}| \subset A$.

Nota:

Los conjuntos convexos son i-convexos pero no todo i-convexo es convexo. Basta considerar el conjunto en $\mathbb{R}^n$ dado como

$$\{u \in \mathbb{R}^n : \exists t \in \mathbb{R} \text{ tal que } p + te_1 = u \text{ o } te_1 = u\}$$

para $p \in \mathbb{R}^n$ punto fijo con p diferente al origen.

Ejemplo 2.5: Conexo

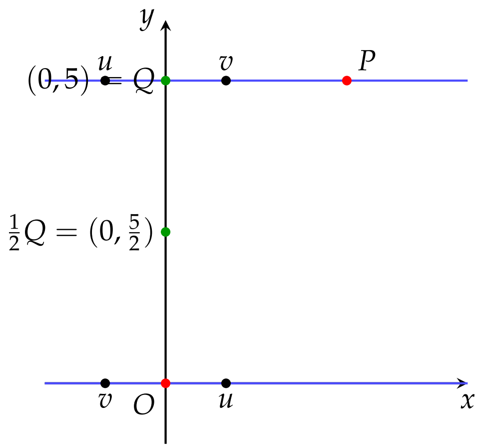
$$\mathbb{R}^2$$

$$\ell_1 = (1, 0), \quad P = (3, 5)$$

$$(0,5) = P - 3\ell_1, \quad (0,0) = 0\ell_1$$

$$O, Q \in A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists t \in \mathbb{R} : (x,y) = P + t\ell_1 \vee (x,y) = t\ell_1\}$$

Pero $\frac{1}{2}Q \notin A$ y $\frac{1}{2}Q \in \overline{OQ}$, así A no es convexo.



Por otro lado:
Si $u, v \in A$, entonces si $\exists t \in \mathbb{R}$ tal que

$$u = t_u\ell_1 + t_v,$$

es decir, u y v son colineales y estarán en la recta $P + t\ell_1$ o $t\ell_1$.

$\therefore$ A es 1-convexo.

Definición 2.16: Función que no depende de la i-ésima variable

Una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, decimos que no depende de la i-ésima variable cuando se cumple que para cualesquiera $a, b \in A$ con $b = a + te_i$ para algún $t \in \mathbb{R}$ entonces $f(a) = f(b)$.

Ejemplo 2.6: Función que no depende de la i-ésima variable

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R} : xy = 0\} \to \mathbb{R}$$

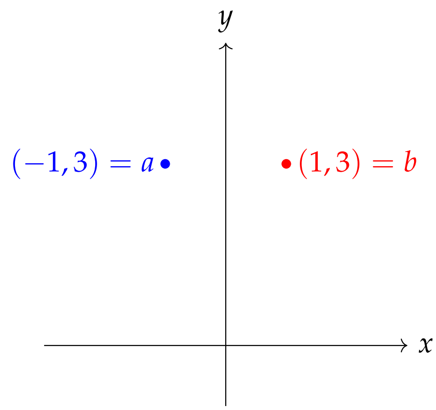
$$f(x,y) = \frac{x}{xy}$$

$$f(-1,3) = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3} \quad \text{y} \quad f(1,3) = \frac{1}{3}$$

$$a = (-1,3) \quad b = (1,3)$$

$$f(a) \stackrel{?}{=} f(a+te_1)$$

$$\frac{1}{a_2} = \frac{a_1}{a_1a_2} = \frac{a_1+t}{(a_1+t)a_2} = \frac{1}{a_2}$$



Proposición 2.2: Convexo no dependiente

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, función con A i-convexo, además $f_{e_i}(x) = 0$ para cada $x \in A$. Entonces f no depende de la i-ésima variable.

Demostración.Sean $a, b \in A$ tales que existe $t \in \mathbb{R}$ con $b = a + te_i$. Definiendo la curva $\alpha : [0,t] \to \mathbb{R}^n, s \mapsto a + re_i$, así $\gamma = f \circ \alpha$ es una función de variable real con $\mathrm{Cod}_\gamma = \mathbb{R}$, es decir $\gamma : [0,t] \to \mathbb{R}, s \mapsto f(a+se_i)$. Además como $f_{e_i}(x) = 0$ para cada $x \in A$, entonces $\gamma'(s) = f_{e_i}(\alpha(s)) = 0$, esto implica que γ es constante en $[0,t]$ por lo que $f(a) = \gamma(0) = \gamma(t) = f(b)$. ■

Ejemplo 2.7: 1-convexo pero no 2-convexo

Sea $X = [0,\infty) \times \{0\}$, así tomemos $A = \mathbb{R}^2 \setminus X$. Consideremos $f : A \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto y^2$. Observamos que A es 1-convexo pero no 2-convexo (basta tomar los puntos $(1,1)$ y $(1,-1)$ y ver que el punto $(1,0)$ esta en el segmento que uno a los dos primeros que están en A pero $(1,0)$ no está en A.) y f no depende de x, claramente. Esto es gracias a que $f_x(a) = 0$ para todo $a \in A$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+he_1) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a_2^2 - a_2^2}{h} = 0.$$

Ahora, consideremos a $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función con regla de correspondencia

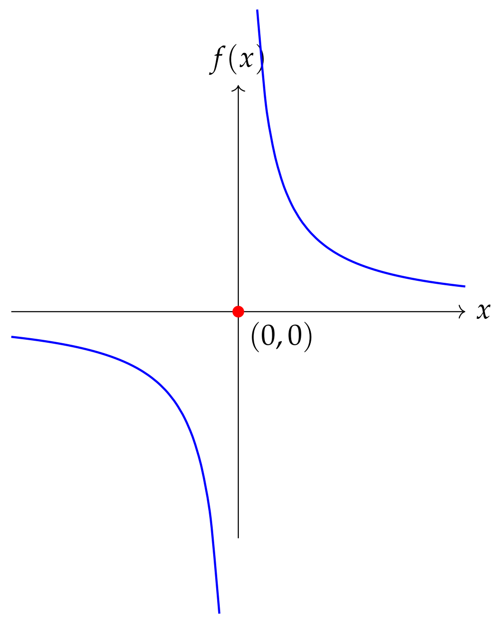
$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \\ \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0). \end{cases}$$

Ejemplo 2.8: Con grafica

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \frac{1}{x}, & x \neq 0. \end{cases}$$

$$\text{Para } x = 0, \quad f(x) = 0 \qquad \text{y} \qquad \text{para } x \neq 0, \quad f(x) = \frac{1}{x}$$



Ejemplo 2.9: S

ean $g, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

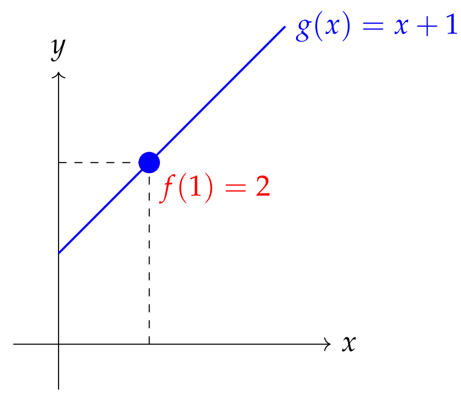
$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } x = 1 \\ \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$$
$$\equiv \quad g(x) = x + 1$$

$$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{con} \quad x \mapsto 1$$

$$f'(1) = \lim_{a \to 1} \frac{f(a) - f(1)}{a - 1} = \lim_{a \to 1} \frac{\frac{a^2-1}{a-1} - 2}{a - 1}$$

$$= \lim_{a \to 1} \frac{a^2 - 1 - 2(a-1)}{(a-1)^2} = \lim_{a \to 1} \frac{a^2 - 2a + 1}{(a-1)^2} = \lim_{a \to 1} 1 = 1$$

Gráfica de $f(x)$:



Así podemos ver que si $(x,y) \neq (0,0)$ tenemos

$$f_x(x,y) = \frac{y^3 - x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$
$$f_y(x,y) = \frac{x^3 - y^2x}{(x^2+y^2)^2}$$

Y para $(0,0)$

$$f_x(x,y) = 0.$$
$$f_y(x,y) = 0.$$

Ahora, consideremos a $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función con regla de correspondencia

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \\ \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0). \end{cases}$$

Por lo que podemos ver f posee derivadas parciales para todo los puntos donde está definida, pero como el $\lim_{u \to (0,0)} f(u)$ no existe la función f no es continua en $(0,0)$.

En conclusión, las parciales pueden existir.

2.6. Derivada direccional

Definición 2.17: Derivada Direccional

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in A$ y $v \in \mathbb{R}^n$. La derivada direccional de f en el punto a en dirección de v, la definimos como el siguiente límite en caso de existir

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = \frac{\partial f}{\partial v}(a) = f_v(a) = D_v f(a).$$

Nota:

Las derivadas parciales son las derivadas direccionales de f en dirección del vector e_i.

Tomando $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, t \mapsto a + tv$, existe $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ tal que $\alpha(I_\epsilon) \subset A$. Así al restringir α a I_ϵ se tiene que

$$(f \circ \alpha)'(0) = D_v f(a), \text{ más aún}$$

$$(f \circ \alpha)'(0) = \nabla f(\alpha(0))\alpha'(0) = \nabla f(a) \cdot v, \text{ entonces}$$
$$D_v f(a) = \nabla f(a) \cdot v.$$

Ejemplo 2.10: Ejemplo

Para $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función con regla de correspondencia

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \\ \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0). \end{cases}$$

tenemos que si $v = (c,0)$ y $w = (0,d)$ con $c,d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ entonces $D_v f(0,0) = D_w f(0,0) = 0$ pero no existe $D_{v+w} f(0,0)$.

Observación:

1. Si $r \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $D_{rv}f(a), D_v f(a)$ existen para cada $a \in A$ entonces
$$D_{rv}f(a) = rD_v f(a)$$
puesto
$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + t(rv)) - f(a)}{t} = r \lim_{t \to 0} \frac{f(a + [tr]v) - f(a)}{rt}$$

2. La derivada direccional puede existir en todos los puntos de A en todas las direcciones $v \in \mathbb{R}^n$ aunque no se cumple $D_{v+w}f(a) = D_v f(a) + D_w f(a)$.
Como podemos ver en la función $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada como
$$g(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \\ \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0). \end{cases}$$
Existen $D_v g(x,y)$ para todo $v \in \mathbb{R}^2$ y todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Además si $r, s \in \mathbb{R}$ tenemos que si $(r,s) \neq (0,0)$
$$D_{(r,s)}g(0,0) = \frac{r^2 s}{r^2 + s^2}$$
y si $r = 0 = s$ $D_{(r,s)}g(0,0) = 0$. Pero se observa que $D_{v+w}g(0,0) \neq D_v g(0,0) + D_w g(0,0)$, cuando $(r,s) \neq (0,0)$.

3. Aunque las derivadas direccionales existan no implica continuidad de f.

4. Si f tiene derivadas direccionales para toda dirección y todo punto en su domino y si $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es una trayectoria con sus componentes funciones componentes diferenciables no implica que $f \circ \lambda$ sea una función diferenciable.

Ejemplo 2.11: Ejemplo

Consideremos $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada como
$$\varphi(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \\ \frac{x^3 y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0). \end{cases}$$
Resulta ser continua. Además existen $D_v\varphi(x,y)$ y para $(0,0)$ se tiene que $D_v\varphi(0,0) = 0$, con $D_v\varphi(z) = \alpha'(0)$ para cada $z \in \mathbb{R} - \{(0,0)\}$, donde $\alpha(t) = \varphi(z + tv)$. Tomando $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, donde $\lambda(t) = \left(t, t^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{t}\right)\right)$ si $t \neq 0$ y $\lambda(0) = (0,0)$, no existe $(\varphi \circ \lambda)'(0)$.

Teorema 2.3: Valor Medio

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ función, suponiendo que el segmento $\overline{a, a+v} = B \subset A$, $f|_B$ es continua y existe $D_v f(x)$ para todo $x \in B^\circ$. Entonces existe $t \in (0,1)$ tal que
$$f(a+v) - f(a) = D_v f(a + tv).$$

Demostración.Definamos $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}, t \mapsto f(a+tv)$. Por las hipótesis α es continua en $[0,1]$ y diferenciable en $(0,1)$. Por el Teorema del Valor Medio para funciones de una variable real, existe $t_0 \in (0,1)$ tal que

$$\alpha(1) - \alpha(0) = \alpha'(t_0).$$

Como $\alpha(t_0) = f(a+t_0v)$ y $\alpha(0) = f(a)$ obtenemos

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0} \frac{\alpha(t_0+r)-\alpha(t_0)}{r} &= \lim_{r\to 0} \frac{f(a+(t_0+r)v) - f(a+t_0v)}{r} \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{f((a+t_0v)+rv) - f(a+t_0v)}{r} = D_v f(a+t_0v).\end{aligned}$$

Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = x^2, a = (1,1), v = (2,-1)$, se puede ver que $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (1+2t, 1-t)$ es un segmento de recta que une al punto a con $a+v$, además se tiene que $f(\alpha(0)) = 1, f(\alpha(1)) = 9$, además que $\nabla f(u) = (2u_1, 0), \alpha'(t) = (2,-1)$ y $(f\circ\alpha)'(t) = 4+8t$; así tomando $t_0 = \frac{1}{2}$ observamos que $f(\alpha(1)) - f(\alpha(0)) = 9-1 = 8 = (f\circ\alpha)'(t_0) = D_v f(a+t_0v)$. Esto es un caso donde aplica el teorema del Valor medio anterior. El teorema del valor medio solo garantiza la existencia pero no cómo calcularlo, entonces, ¿cómo se calcula? Esto es, el teorema nos garantiza que existe t_0 con la propiedad $f(a+v) - f(a) = D_v f(a+t_0v)$, ¿cómo lo encuentro? ■

Nota:

La existencia de $D_v f$ en todo punto del segmento abierto B° asegura solo la continuidad de $f|_{B^\circ}$ mas no de $f|_B$.

Definición 2.18: Conexo en abiertos

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es conexo si para cualquiera dos abiertos $U, V \subset \mathbb{R}^n$ con $A \subset U \cup V$ y $A \cap U \cap V = \emptyset$ implica que $A \subset V$ y $A \cap U = \emptyset$ o bien $A \subset U$ y $A \cap V = \emptyset$.

Nota:

Si $a_0, a_1 \in A$ y A es conexo existe una colección de puntos en A, $x_1, \ldots, x_k \in A$ tal que los segmentos $\overline{a_0, x_1}, \overline{x_1, x_2}, \ldots, \overline{x_{k-1}, x_k}$ y $\overline{x_k, a_1}$ (la unión de dichos segmentos se denomina poligonal con vértices en $a, x_1, \ldots, x_k, b$) está contenidos en el conjunto A. Demostrar este hecho como ejercicio.

Corolario 2.1: Funcion constante

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ función con derivadas direccionales en todos los puntos de A, A un conjunto conexo por trayectorias y abierto, además $D_v f(x) = 0$ para todo $u \in \mathbb{R}$ entonces f es constante.

Demostración.Dado $a \in A$, la existencia de $D_v f$ garantiza la continuidad de $f|_B$ para todo segmento $B = \overline{a, b}$ con $b \in A$ y $B \subset A$. Por el Teorema del Valor Medio, tenemos que

$b \subset A$ implica que $f(a) = f(b)$. Ahora para cada $x \in A$, como A es conexo, existen puntos $x_1, \ldots, x_k \in A$ tales que la poligonal con vertices $a, x_1, \ldots, x_k, x$ está en A. Así tendremos que $f(a) = f(x_1) = \cdots = f(x_k) = f(x)$. Por lo tanto f es constante en A. ■

Propiedades 2.2: Derivada Direccional

Verifica si las siguientes igualdades son verdaderas. En caso de no serlo indica que podrías modificar para que así lo sean, si es posible. Sean $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones con derivadas direccionales para toda $v \in \mathbb{R}^n$.

1. $D_v(f+g)(u) = D_v f(u) + D_v g(u)$.
2. $D_v(fg)(u) = g(u) D_v f(u) + f(u) D_v g(u)$.
3. Si g no se anula en ningún punto de A, entonces
$$D_v\left(\frac{f}{g}\right)(u) = \frac{g(u)D_v f(u) - f(u)D_v g(u)}{(g(u))^2}$$
4. Si $h : A \to B \subset \mathbb{R}$ continua, f continua y $h \circ f$ una función con funciones direccionales. Entonces
$$D_v(h \circ f)(u) = h'(f(u)) D_v f(u).$$
5. $D_v f = \nabla f \cdot v$

Pregunta ¿Qué puede decir de las funciones proyección π_i sobre sus derivadas direccionales?

Pregunta ¿De las funciones constantes?

2.7. Aplicación de la derivada direccional y gradiente

2.7.1. Derivadas parciales iteradas

Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es de clase C^2, podemos hablar de sus segundas derivadas parciales.

Las primeras derivadas parciales son funciones $\frac{\partial f}{\partial x_i} : A \to \mathbb{R}$ y las segundas derivadas parciales serían
$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f(u)}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(u) = f_{x_i x_j}$$
para cada $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Las cuales también son funciones con domino A y codominio $\mathbb{R}$.

Ejemplo 2.12: Derivadas iteradas respecto x

Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$, entonces

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}(2x) = 2$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}(2y) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}(2z) = 0$$

Ejemplo 2.13: Derivadas Iteradas respecto y

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}(2x) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}(2y) = 2$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}(2z) = 0$$

2.7.2. ¿Las derivadas cruzadas son iguales?

Teorema 2.4: Teorema de igualdad de las derivadas parciales cruzadas

Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es de clase C^2 entonces las derivadas parciales cruzadas (iteradas) son iguales, es decir

$$f_{x_i x_j} \equiv f_{x_j x_i}$$

para cada $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Nota:

Como las derivadas parciales cruzadas son funciones, nos indica que para cada $a \in A$ se debe cumplir que $f_{x_i x_j}(a) = f_{x_j x_i}(a)$. Este teorema nos ayuda a ver si una función es o no de clase C^2.

Demostración.Sea $a \in A$, como $f \in C^2$ tenemos que $f_{x_i x_j}, f_{x_j x_i} : A \to \mathbb{R}$ son funciones continuas, entonces podemos ver que

$$\begin{aligned}
f_{x_i x_j}(a) &= \lim_{t\to 0} \frac{f_{x_j}(a+te_i) - f_{x_j}(a)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[f_{x_j}(a+te_i) - f_{x_j}(a)] = \\
&= \lim_{t\to 0} \left[\frac{1}{t}\left(\lim_{h\to 0} \frac{f(a+te_i+he_j) - f(a+te_i)}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{f(a+he_j) - f(a)}{h}\right)\right] \\
&= Q
\end{aligned}$$

Como las funciones involucradas son continuas podemos "sacar"los limites de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
Q &= \lim_{t\to 0}\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{t}\frac{1}{h}[f(a+te_i+he_j) - f(a+te_i) - f(a+he_j) + f(a)]\right) \\
&= P
\end{aligned}$$

Y nuevamente como las funciones son continuas, se sigue que

$$\begin{aligned}
P &= \lim_{h\to 0}\left(\lim_{t\to 0}\frac{1}{h}\frac{1}{t}[f(a+te_i+he_j) - f(a+he_j) - f(a+te_i) + f(a)]\right) \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\left[\lim_{t\to 0}\frac{f(a+te_i+he_j) - f(a+he_j) - f(a+te_i) + f(a)}{t}\right]\right) \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\left[\lim_{t\to 0}\frac{f(a+te_i+he_j) - f(a+he_j)}{t} - \frac{f(a+te_i) - f(a)}{t}\right]\right) \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f_{x_i}(a+he_j) - f_{x_i}(a)}{h}
\end{aligned}$$

Por lo que podemos concluir que $f_{x_i x_j}(a) = f_{x_j x_i}(a)$. ■

Ejercicio 2.2: Verificación de Derivadas Cruzadas

Verificar que las derivadas cruzadas son iguales para la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto xe^{2y} + yx$

Solución: Como la función exponencial y las proyecciones son de clase C^2 entonces f es de clase C^2 por ser suma de productos de las funciones proyecciones y la exponencial. Así las derivadas parciales son:

$$\begin{aligned}
f_x(x, y) &= e^{2y} + y, \\
f_y(x, y) &= 2xe^{2y} + x,
\end{aligned}$$

De donde obtenemos que las parciales cruzadas son

$$\begin{aligned}
f_{xx}(x, y) &= 0, & f_{yy}(x, y) &= 4xe^{2y} \\
f_{xy}(x, y) &= 2e^{2y} + 1, & f_{yx}(x, y) &= 2e^{2y} + 1
\end{aligned}$$

Serie de Taylor en dos variables

Recordando el caso cuando tenemos una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase C^k en un punto a, entonces existe $R_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = f(a) + \sum_{j=1}^{k} \frac{f^{(j)}(a)(x-a)^j}{j!} + R_k(x)(x-a)^k$$
$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} + R_k(x)(x-a)^k$$

donde

$$\lim_{x\to a} R_k(x) = 0.$$

¿Se puede extender para funciones de la forma $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$?

Primero hagamos pongamos algunas notaciones que nos ayudarán a facilitar la escritura. Para cada $m \in \mathbb{N}$ definamos $P(\mathbf{u}, \mathbf{i}, m) = \prod_{j=1}^{m} u_{i_j} = u_{i_1} u_{i_2} \cdots u_{i_m}$ para $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$.

Por ejemplo para $m = 2$ tenemos que $P(\mathbf{u}, \mathbf{i}, 2) = u_{i_1} u_{i_2}$. Ahora

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)^m f(\mathbf{v}) = \sum_{i_m}^{n} \cdots \sum_{i_1}^{n} P(\mathbf{u}, \mathbf{i}, m) f_{x_{i_m} \cdots x_{i_1}}.$$

Por ejemplo para $m = 1$ obtenemos que

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) f(\mathbf{v}) = \sum_{i_1}^{n} u_{i_1} f_{x_{i_1}} = \sum_{j=1}^{n} u_j f_{x_j}.$$

Si $m = 2$,

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)^2 f(\mathbf{v}) = \sum_{i_2}^{n} \sum_{i_1}^{n} u_{i_2} u_{i_1} f_{x_{i_2} x_{i_1}} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} u_k u_j f_{x_k x_j}.$$

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función con $f \in C^k$ y $A = \overline{B_r(a)}$, además tomando $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \mathbf{a} + t\mathbf{u} := v$, donde $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ fijo, entonces si definimos $g := f \circ \alpha$ observamos que

$$g'(t) = \nabla f(\mathbf{v}) \cdot \alpha'(t) = (\mathbf{u} \cdot \nabla) f(\mathbf{v}),$$

más aun

$$g''(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f_{x_i x_j}(\mathbf{v}) u_i u_j = (\mathbf{u} \cdot \nabla)^2 f(\mathbf{v})$$

y realizando las iteraciones pertinentes tenemos que

$$g^{(m)}(t) = (\mathbf{u} \cdot \nabla)^m f(\mathbf{v}).$$

Recuerda que $\alpha^{(m)}(\mathbf{w}) = \mathbf{0}$ cuando $1 < m$.

Por Taylor tenemos que

$$g(t) = \sum_{j=0}^{k} \frac{g^{(j)}(0)t^j}{j!} + R_k(t)t^k.$$

Así tomando $t = 1$ obtenemos que

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{u}) = \sum_{j=0}^{k} \frac{(\mathbf{u}\cdot\nabla)^j f(\mathbf{a})}{j!} + R_k(\mathbf{a},\mathbf{u}).$$

Teorema 2.5: Taylor

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función con $f \in C^k$ y $A = \overline{B_r(a)}$, entonces existe una función R_k tal que para cualquier $\mathbf{u} \in B_r(\mathbf{a})$

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{u}) = \sum_{j=0}^{k} \frac{(\mathbf{u}\cdot\nabla)^j f(\mathbf{a})}{j!} + R_k(\mathbf{a},\mathbf{u})$$

donde

$$\lim_{\mathbf{u}\to\mathbf{0}} \frac{R_k(\mathbf{a},\mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|} = 0.$$

Si $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ entonces cuando $k = 1$ tenemos que

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{u}) = f(\mathbf{a}) + \big(f_x(\mathbf{a})u_1 + f_y(\mathbf{a})u_2\big) + R_1(\mathbf{a},\mathbf{u}).$$

Si $k = 2$ se tiene que

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a}+\mathbf{u}) = f(\mathbf{a}) &+ \big(f_x(\mathbf{a})u_1 + f_y(\mathbf{a})u_2\big) \\ &+ \frac{1}{2}f_{xx}(\mathbf{a})u_1^2 + f_{xy}(\mathbf{a})u_1u_2 + \frac{1}{2}f_{yy}(\mathbf{a})u_2^2 + R_2(\mathbf{a},\mathbf{u}). \end{aligned}$$

Ejemplo 2.14: Considerando reglas de correspondencia

Considerar la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con las reglas de correspondencia

- $f(x,y) = x$.
- $f(x,y) = \cos(x)$.
- $f(x,y) = \cos(xy)$.

Proposición 2.3: Función Residuo

Con las mismas condiciones del teorema de Taylor, tenemos que la función residuo es:

k=1:

$$\begin{aligned} R_1(\mathbf{a},\mathbf{u}) &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\int_0^1 (1-t)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}+t\mathbf{u})u_i u_j dt \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{c}_{ij})u_i u_j \end{aligned}$$

k=2:

$$\begin{aligned} R_2(\mathbf{a},\mathbf{u}) &= \sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}(\mathbf{a}+t\mathbf{u})u_i u_j u_l dt \\ &= \sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}(\mathbf{c}_{ijl})u_i u_j u_l. \end{aligned}$$

Con $\mathbf{c}_{ij}$ y $\mathbf{c}_{ijl}$ puntos en el segmento que une al punto $\mathbf{a}$ con $\mathbf{a}+\mathbf{u}$.

Demostración.Aquí basta usar el **Teorema del valor medio para integrales** y así se obtiene $\mathbf{c}_{ij}$ y $\mathbf{c}_{ijl}$. ■

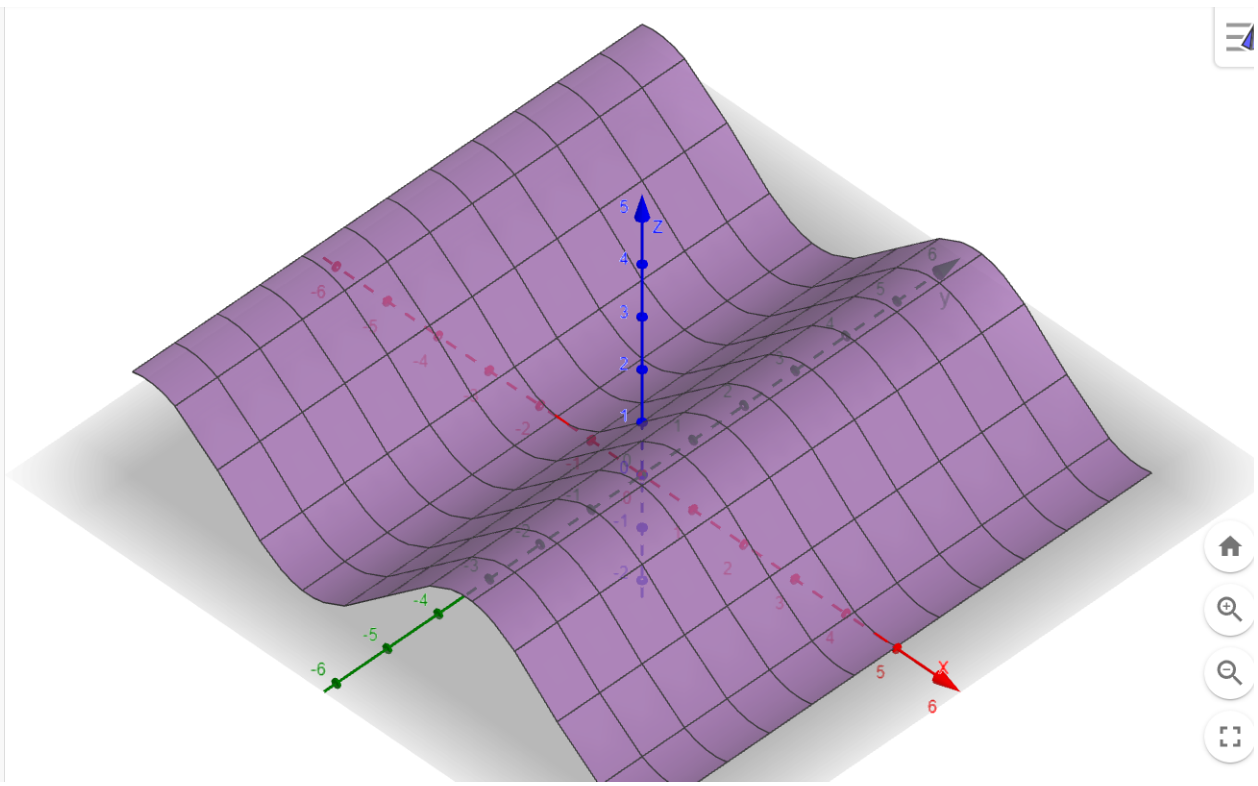


Figura 1: grf(f)

grf(f)

2.8. Máximos y mínimos

2.8.1. Valores extremos

Definición 2.19: Valores extemos

Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función (escalar), un punto $\mathbf{a} \in A$ se llama **mínimo local** de f si y solo si existe una vecindad U abierta de $\mathbf{a}$ tal que para todo $\mathbf{p} \in U$ se tiene que $f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{p})$. El punto $\mathbf{a}$ es un **máximo local** de f si y solo si existe una vecindad U abierta de $\mathbf{a}$ tal que para todo $\mathbf{p} \in U$ se tiene que $f(\mathbf{p}) \leq f(\mathbf{a})$. El punto $\mathbf{a}$ se denomina **extremo local (relativo)** si es un punto mínimo local o máximo local.

Nota:

Regularmente la vecindad U se toma como una **bola** centrada en $\mathbf{a}$, es decir $B_r(\mathbf{a})$ para algún $r \in \mathbb{R}_+$.

Ejemplo 2.15: Mínimo Local

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x^2 + 1.$$

El punto $\mathbf{a} = (0, 0)$ es un **mínimo local** ya que para $r = 1$, tenemos que si $\mathbf{p} \in B_r(\mathbf{a})$ implica que $0 \leq p_1^2$, así $f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{p})$.

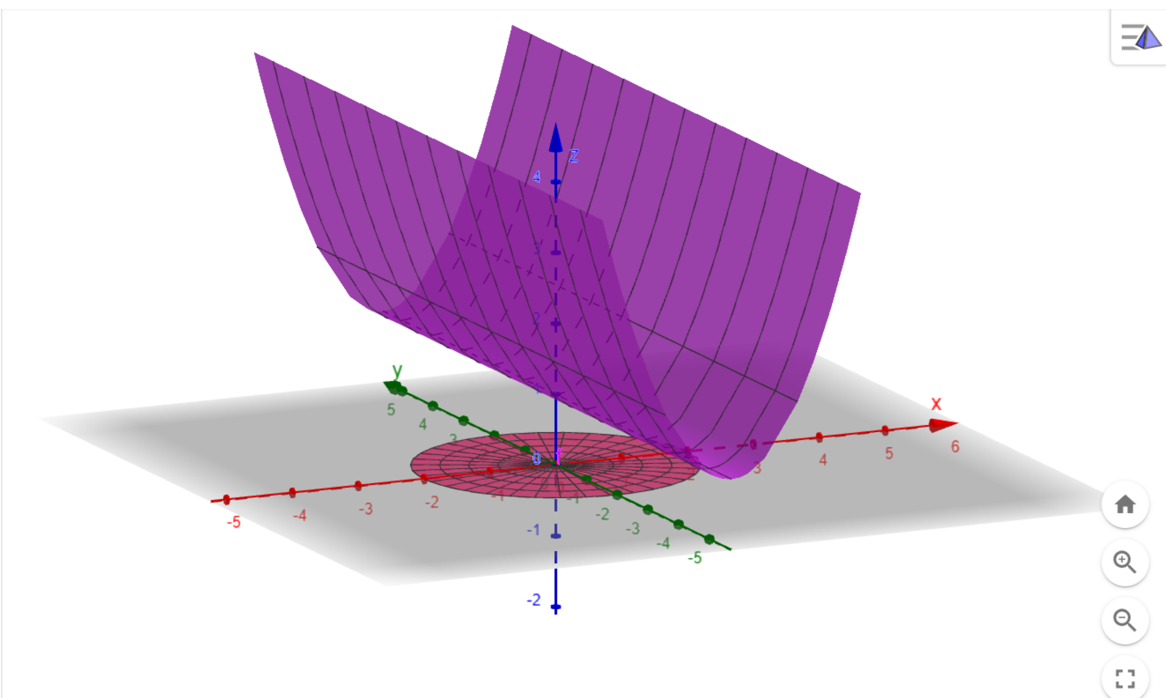


Figura 2: El punto a es un mínimo local

Grafica Mínimo local

Ejemplo 2.16: Máximo local

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto -x^2 - y^2 + 1.$$

El punto $\mathbf{a} = (0, 0)$ es un **máximo local** ya que para $r = 1$, tenemos que si $\mathbf{p} \in B_r(\mathbf{a})$ implica que $0 \leq p_1^2 + p_2^2 \leq 1$, así $f(\mathbf{p}) \leq f(\mathbf{a})$.

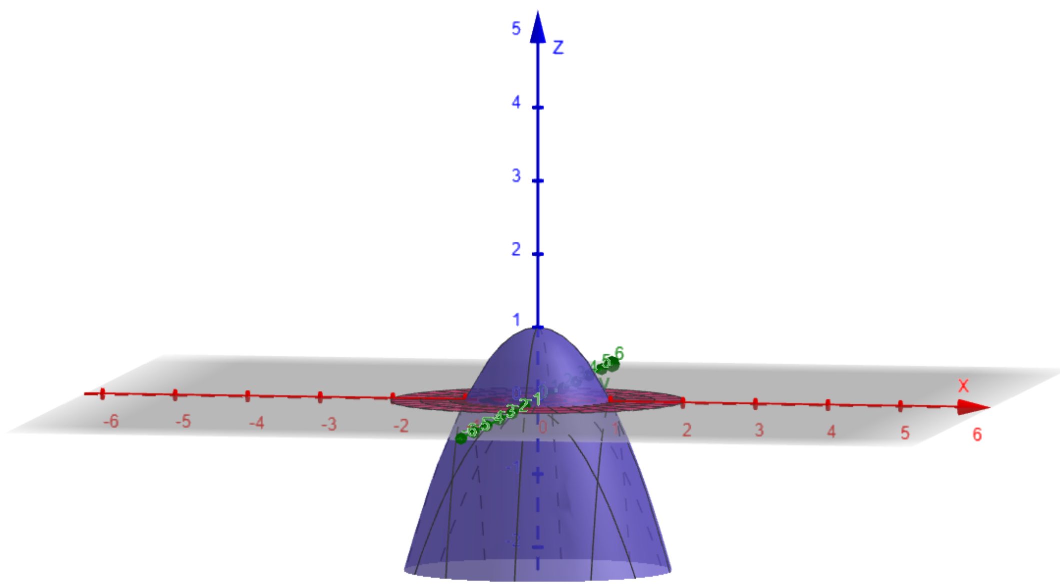


Figura 3: El punto a es un máximo local.

Grafica Mínimo local

Puntos críticos

Definición 2.20: Puntos críticos

Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función (escalar), un punto $\mathbf{a} \in A$ se llama **punto crítico** de f si f no es diferenciable en $\mathbf{a}$ o bien $Df(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$. Un punto crítico que no es punto extremo se llama **punto silla**.

Ejemplo 2.17: Punto crítico

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Podemos ver que $(0,0)$ es un **punto crítico**.

Criterio de la primera derivada

Recordando que cuando se tiene una función $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aplicamos la primera derivada para obtener los puntos críticos, al ver dónde se anula la derivada de f. Así obtenemos un teorema análogo.

Teorema 2.6: Fermat

Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función **diferenciable** con A abierto. Si en $\mathbf{a} \in A$ se alcanza un **extremo local** entonces $Df(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$; esto es $\mathbf{a}$ es un **punto crítico** local de f.

Demostración.Supongamos que f tiene un **máximo local** en $\mathbf{a}$. Entonces para cualquier $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ la función con regla de correspondencia $g(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{u})$ tiene un **máximo local** en $t = 0$. Así sabemos que $g'(0) = 0$.
Por otro lado, sabemos que $g'(0) = Df(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{u}$. Por lo que

$$Df(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{u} = 0$$

para todo $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, lo que implica que $Df(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.
De manera análoga ocurre lo mismo si $\mathbf{a}$ es un **mínimo local** de f. ■

Ejemplo 2.18: Puntos críticos

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x^2$, tenemos que

$$Df(x, y) = (2x, 0)$$

el cual se anula en los puntos de la forma $(0, y) \in \mathbb{R}^2$.

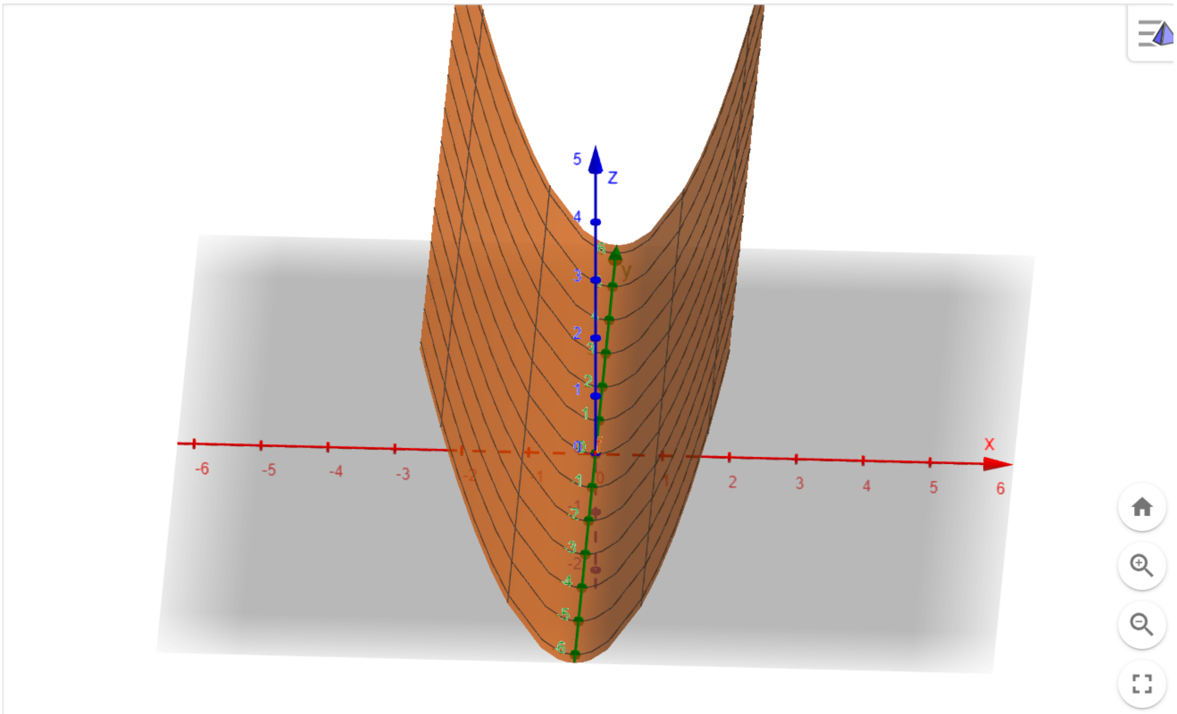


Figura 4: El eje y consta de los puntos críticos de f.

Puntos Críticos

Criterio de la segunda derivada

Recordando, en el caso de una función $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tenemos el **Criterio de la Segunda derivada**, si x es un punto crítico de f y dependiendo del signo de la segunda derivada de f podíamos decir si era un **máximo local** o **mínimo local**.

Para poder generalizar este criterio necesitamos algo más.

Hessiana

Definición 2.21: Matriz Hessiana

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^2 en el punto $\mathbf{a} \in A$. Definimos la **matriz Hessiana** de f en $\mathbf{a}$ como

$$Hf(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} \right)$$

Y el **Hessiano** de f en $\mathbf{a}$ como el determinante de la matriz Hessiana en $\mathbf{a}$. La matriz Hessiana es de la forma:

$$Hf(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.19: Matriz Hessiana

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto x^2 + y^2$. Así la matriz Hessiana de f es:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Y su Hessiano es 4.

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \cos(x) + \cos(y)$. Así la matriz Hessiana de f es:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -\cos(x) & 0 \\ 0 & -\cos(y) \end{pmatrix}$$

Y su Hessiano es $\cos(x)\cos(y)$.

Criterio de la segunda derivada para $n = 2$.

Teorema 2.7: Teorema del Hessiano para clasificación de puntos críticos

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^3 en A, abierto en $\mathbb{R}^2$.
Un punto $\mathbf{a} \in A$ es un **mínimo local** de f si se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\nabla f(\mathbf{a}) = (0,0)$.
2. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} > 0$.
3. El **Hessiano** es positivo en **a**.

Será un **máximo local** si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} < 0$ y cumple las otras dos condiciones. Y tendremos un **punto silla** si el **Hessiano** en **a** es negativo.

Ejemplo 2.20: 1

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto x^2 - 2xy + 2y^2$. Veamos cuales son máximos, mínimos locales. Primero veamos quienes son sus **puntos críticos**. Para eso, veamos quienes son los puntos que cumplen $\nabla f(x,y) = (0,0)$.

Sabemos que $\nabla f(x,y) = (2x - 2y, -2x + 4y)$, así

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \quad \text{cuando } (x,y) = (0,0).$$

Por otro lado la matriz Hessiana de f es:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Lo que nos indica que es un **mínimo local** $(0,0)$. Puesto $f_{xx}(0,0) = 2 > 0$ y el **Hessiano** es 4.

Ejemplo 2.21: 2

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto x^5y + xy^5 + xy$. Así sus **puntos críticos** serán los que cumplan que $\nabla f(x,y) = (0,0)$.
Sabemos que

$$\nabla f(x,y) = (5x^4y + y^5 + y,\ x^5 + 5xy^4 + x).$$

Por lo que vemos que solo $(x,y) = (0,0)$ es un posible **punto crítico**.
Veamos que la matriz Hessiana de f es

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 20x^3y & 5x^4 + 5y^4 + 1 \\ 5x^4 + 5y^4 + 1 & 20xy^3 \end{pmatrix}$$

Así el Hessiano de f en $(0,0)$ es -1. Por lo que $(0,0)$ es un **punto silla**.

Ejercicio 2.3: Puntos Críticos

Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por las siguientes reglas de correspondencia, clasifica sus **puntos críticos**:

1. $f(x,y) = x^2 - y^2 + xy$.
   Paso 1: Encontrar Puntos Críticos ($\nabla f = 0$) Calculamos las derivadas parciales:

   $$f_x = 2x + y$$
   $$f_y = -2y + x$$

   Igualamos a cero para formar el sistema:

   $$\begin{cases} 2x + y = 0 \implies y = -2x \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

   Sustituyendo la primera en la segunda: $x - 2(-2x) = 5x = 0 \implies x = 0$. Por tanto, $y = 0$.
   Punto crítico: $(0,0)$.
   Paso 2: Matriz Hessiana Calculamos las segundas derivadas: $f_{xx} = 2$, $f_{yy} = -2$, $f_{xy} = 1$.

   $$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Paso 3: Clasificación Calculamos el determinante (Hessiano):

$$\det(Hf) = (2)(-2) - (1)(1) = -4 - 1 = -5$$

Como el Hessiano es negativo (< 0), el punto $(0,0)$ es un **punto silla**.

2. $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy$.

   Paso 1: Puntos Críticos Calculamos el gradiente:

   $$f_x = 2x - y$$
   $$f_y = 2y - x$$

   Igualando a cero: $y = 2x$ y $x = 2y$. Esto implica que $x = 2(2x) = 4x \implies 3x = 0 \implies x = 0, y = 0$.
   Punto crítico: $(0,0)$.

   Paso 2: Matriz Hessiana Segundas derivadas: $f_{xx} = 2$, $f_{yy} = 2$, $f_{xy} = -1$.

   $$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

   Paso 3: Clasificación

   $$\det(Hf) = (2)(2) - (-1)(-1) = 4 - 1 = 3$$

   Como el Hessiano es positivo ($3 > 0$) y $f_{xx} = 2 > 0$, el punto $(0,0)$ es un **mínimo local**.

3. $f(x,y) = e^{1+x^2+y^2}$.

   Paso 1: Puntos Críticos

   $$\nabla f = (2xe^{1+x^2+y^2}, 2ye^{1+x^2+y^2})$$

   Como la función exponencial e^u nunca es cero, para que el gradiente sea nulo requerimos:

   $$2x = 0 \quad \text{y} \quad 2y = 0 \implies (0,0)$$

   Punto crítico: $(0,0)$.

   Paso 2: Matriz Hessiana Evaluamos las segundas derivadas en $(0,0)$. Notamos que en el origen $e^{1+0+0} = e$.

   - $f_{xx}(0,0) = 2e$
   - $f_{yy}(0,0) = 2e$
   - $f_{xy}(0,0) = 0$

   $$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2e & 0 \\ 0 & 2e \end{pmatrix}$$

   Paso 3: Clasificación

   $$\det(Hf) = (2e)(2e) - 0 = 4e^2$$

   Como el Hessiano es positivo ($4e^2 > 0$) y $f_{xx} = 2e > 0$, el punto $(0,0)$ es un **mínimo local**.

4. $f(x,y) = 3x^2 + 2xy$.

   Paso 1: Puntos Críticos

$$f_x = 6x + 2y = 0$$
$$f_y = 2x = 0 \implies x = 0$$

   Sustituyendo $x = 0$ en la primera ecuación: $0 + 2y = 0 \implies y = 0$.
   Punto crítico: $(0,0)$.

   Paso 2: Matriz Hessiana Segundas derivadas: $f_{xx} = 6$, $f_{yy} = 0$, $f_{xy} = 2$.

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

   Paso 3: Clasificación
$$\det(Hf) = (6)(0) - (2)(2) = -4$$
   Como el Hessiano es negativo, el punto $(0,0)$ es un **punto silla**.

5. $f(x,y) = \cos(x) + \cos(y)$.

   Paso 1: Puntos Críticos

$$\nabla f = (-\sin(x), -\sin(y)) = (0,0)$$

   Esto ocurre cuando $x = n\pi$ y $y = m\pi$ para $n, m \in \mathbb{Z}$.

   Paso 2: Matriz Hessiana

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -\cos(x) & 0 \\ 0 & -\cos(y) \end{pmatrix}$$

   El Hessiano es $\det(Hf) = \cos(x)\cos(y)$.

   Paso 3: Clasificación (Casos)

   - **Caso A (n, m pares):** Ej. $(0,0)$.
     $\det(Hf) = (1)(1) = 1 > 0$ y $f_{xx} = -1 < 0$. $\implies$ **Máximo local**.
   - **Caso B (n, m impares):** Ej. (π, π).
     $\det(Hf) = (-1)(-1) = 1 > 0$ y $f_{xx} = -(-1) = 1 > 0$. $\implies$ **Mínimo local**.
   - **Caso C (Paridad mixta):** Ej. $(\pi, 0)$.
     $\det(Hf) = (-1)(1) = -1 < 0$. $\implies$ **Punto silla**.

Definición 2.22: Extremos Globales

Para una función $f : B \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, diremos que $\mathbf{u}_0 \in B$ es un **máximo global** (total) si y solo si
$$f(\mathbf{u}_0) = \sup\{f(B)\}.$$
Y será un **mínimo global** (total) si y solo si
$$f(\mathbf{u}_0) = \text{ínf}\{f(B)\}.$$

Teorema 2.8: Teorema de Weierstrass

Una función $f : B \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donde B es **cerrado y acotado** en $\mathbb{R}^n$. Entonces existen $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in B$ tales que

$$f(\mathbf{u}_1) \leq f(\mathbf{u}) \leq f(\mathbf{u}_2).$$

Es decir, f alcanza sus extremos en B.

Demostración.Teorema

Definiciones, teoremas y propiedades a utilizar:

- **Definición:Continuidad** $\epsilon - \delta$ Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función. La función f es continua en $w \in A$ si y solo si para todo $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ existe $\delta \in \mathbb{R}^+$ tal que para todo $u \in A$ con $||u - w|| < \delta$ entonces $||f(u) - f(w)|| < \epsilon$.
- **Teorema: Unicidad del Límite** Si el límite de una función existe es único.
- **Definición: Extremos Globales** Para una función $f : B \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diremos que $u_0 \in B$ es un máximo global (total) si y solo si $f(u_0) = \sup\{f(B)\}$. Y será un mínimo global (total) si y solo si $f(u_0) = \text{ínf}\{f(B)\}$.

Inicio de la Demostración

La demostración se divide en dos partes: probar que la imagen $f(B)$ es acotada y probar que el supremo y el ínfimo pertenecen a la imagen.

Paso 1: Acotación de la imagen Supongamos por contradicción que $f(B)$ no es acotada. Entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe un punto $x_k \in B$ tal que $|f(x_k)| > k$.

- Esto genera una sucesión $\{x_k\}$ contenida en B.
- Como B es **acotado**, la sucesión está acotada. Por el teorema de Bolzano-Weierstrass (propiedad fundamental en $\mathbb{R}^n$), existe una subsucesión convergente $\{x_{k_j}\}$ tal que $x_{k_j} \to x_0$.
- Como B es **cerrado**, el límite x_0 debe pertenecer a B ($x_0 \in B$).

Dado que f es **continua** en B, y por tanto en x_0, por la definición de continuidad [Fuente: 360] y su equivalencia con límites secuenciales:

$$\lim_{j \to \infty} f(x_{k_j}) = f(x_0)$$

Sin embargo, por construcción, $|f(x_{k_j})| > k_j$, lo que implica que $|f(x_{k_j})| \to \infty$. Esto contradice que el límite sea el número real $f(x_0)$.

Conclusión 1: El conjunto imagen $f(B)$ es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$.

Paso 2: Existencia del Máximo y Mínimo Como $f(B) \subset \mathbb{R}$ es no vacío y acotado superiormente (por el Paso 1), por el Axioma del Supremo de los números reales, existe:

$$M = \sup\{f(u) : u \in B\}$$

Debemos demostrar que existe $\mathbf{u}_2 \in B$ tal que $f(\mathbf{u}_2) = M$.

1. Por definición de supremo, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $y_k \in f(B)$ tal que $M - \frac{1}{k} < y_k \leq M$. Esto implica que la sucesión $y_k \to M$.

2. Como $y_k \in f(B)$, existen puntos $z_k \in B$ tales que $f(z_k) = y_k$.

3. La sucesión $\{z_k\}$ está en B (que es acotado). Nuevamente, extraemos una subsucesión convergente $\{z_{k_j}\}$ tal que $z_{k_j} \to \mathbf{u}_2$.

4. Como B es cerrado, el punto límite $\mathbf{u}_2 \in B$.

5. Usando nuevamente la continuidad de f:

$$\lim_{j\to\infty} f(z_{k_j}) = f(\mathbf{u}_2)$$

6. Por otro lado, sabemos que la sucesión de imágenes converge al supremo:

$$\lim_{j\to\infty} f(z_{k_j}) = \lim_{j\to\infty} y_{k_j} = M$$

7. Por el **Teorema de Unicidad del Límite** [Fuente: 205], concluimos que:

$$f(\mathbf{u}_2) = M$$

Por la definición de Extremos Globales [Fuente: 948], $\mathbf{u}_2$ es el máximo global.
El procedimiento es análogo para el mínimo global $\mathbf{u}_1$, tomando $m = \inf f(B)$.

■

Definición 2.23: punto crítico no degenerado

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^2 con **Hessiano diferente de 0** en $\mathbf{a}$ y $\mathbf{a}$ es un punto crítico de f, diremos que $\mathbf{a}$ es un **punto crítico no degenerado**.

2.9. Máximos y mínimos con restricciones y multiplicadores de Lagrange

2.9.1. Transformaciones cuadráticas

Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$, la transformación lineal definida por $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, donde $T(\mathbf{u}) = \mathbf{u}A\mathbf{u}^T$ se dice **transformación cuadrática** o **función cuadrática**.

Si $A = (a_{ij})$ tendremos que

$$T(\mathbf{u}) = \mathbf{u}A\mathbf{u}^T = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_iu_j.$$

Ejemplo 2.22:

1. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

entonces la función $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{u}A\mathbf{u}^T$ la podemos ver como

$$T(\mathbf{u}) = u_1^2 + u_2^2 - u_3^2.$$

2. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

entonces la función $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{u}A\mathbf{u}^T$ la podemos ver como

$$T(\mathbf{u}) = u_1^2 - u_2^2 - u_3^2.$$

3. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

entonces la función $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{u}A\mathbf{u}^T$ la podemos ver como

$$T(\mathbf{u}) = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2.$$

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 en el punto $\mathbf{a}_0 \in A$. La matriz $Hf(\mathbf{a}_0)$ define una **función cuadrática** dada por la regla de correspondencia

$$Hf(\mathbf{a}_0)(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{x_i x_j}(\mathbf{a}_0)u_i u_j,$$

para cada $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$.
Como sabemos que $f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i}$, la matriz Hessiana resulta ser **simétrica**. Así si $\mathbf{a}_0$ es un punto crítico de f entonces por Taylor tenemos que

$$f(\mathbf{a}_0 + \mathbf{u}) = f(\mathbf{a}_0) + \nabla f(\mathbf{a}_0)\mathbf{u} + \frac{1}{2}Hf(\mathbf{a}_0)(\mathbf{u}) + R_2(\mathbf{a}_0, \mathbf{u}).$$

Recuerda que una **matriz es simétrica** si $A^T = A$. Además que si A es simétrica también lo es la matriz $B = \left(\frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})\right)$ y se tiene que

$$\mathbf{u}A\mathbf{u}^T = \mathbf{u}B\mathbf{u}^T.$$

Más aún si A es simétrica por linealidad tenemos que

$$(t\mathbf{u})A(t\mathbf{u})^T = t^2(\mathbf{u}A\mathbf{u}^T)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Definición 2.24: Definida positiva y negativa

Una función cuadrática $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es **definida positiva** si y solo si $0 < f(\mathbf{u})$ para cada $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ y $f(\mathbf{u}) = 0$ solo cuando $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Diremos que es **definida negativa** si y solo si $f(\mathbf{u}) < 0$ para todo $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ y $f(\mathbf{u}) = 0$ solo cuando $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Ejemplo 2.23:

- $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $u \mapsto u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$, es **definida positiva**.
- $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $u \mapsto -u_1^2 - u_2^2 - u_3^2$, es **definida negativa**.
- $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $u \mapsto -u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$, **no** es ni definida negativa ni definida positiva.

Observación: Si $n = 1$, tenemos que $Hf(a_0)(u) = \frac{1}{2} f''(a_0) u^2$.

Proposición 2.4: Matriz definida positiva

Si $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ es una **matriz definida positiva** (que define una función definida positiva), entonces existe $M \in \mathbb{R}_+$ tal que para todo $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$

$$M\|\mathbf{u}\|^2 \leq T(\mathbf{u}) := \mathbf{u}A\mathbf{u}^T.$$

Demostración.Definiendo $g : S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{u}A\mathbf{u}^T$, tendremos que g es continua y alcanza sus valores extremos puesto S^{n-1} es cerrado y acotado. Entonces sea $M = \min g(S^{n-1})$, como A es definida positiva obtenemos que

$$T(\mathbf{u}) = T\left(\frac{\|\mathbf{u}\|\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}\right) = \|\mathbf{u}\|^2 T\left(\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}\right) \geq \|\mathbf{u}\|^2 g\left(\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}\right) \geq M\|\mathbf{u}\|^2.$$

Y como sabemos $M\|\mathbf{0}\| = 0 = T(\mathbf{0})$. ■

Teorema 2.9: Criterio de la segunda derivada

Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^2 en el abierto A de $\mathbb{R}^n$. Sea $a_0 \in A$ un punto crítico de f, entonces a_0 es un punto mínimo local si $Hf(a_0)$ es **definida positiva**, será un **máximo local** si $Hf(a_0)$ es **negativa definida** y un **punto silla** si no es ni positiva ni definida negativa, entonces es un punto silla.

Demostración.Recordando si $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es de clase C^2 y $a_0 \in A$ es un punto crítico de f, por Taylor tendremos que

$$f(a_0 + u) - f(a_0) = \frac{1}{2} Hf(a_0) \cdot u + R_2(a_0, u)$$

donde

$$\lim_{u\to 0} \frac{R_2(a_0,u)}{\|u\|} = 0.$$

Como $\frac{1}{2}Hf(a_0)$ es definida positiva, por la proposición anterior tendremos que existe $M \in \mathbb{R}_+$ tal que

$$M\|u\|^2 \leq \frac{1}{2}Hf(a_0)\cdot u.$$

Como $\lim_{u\to 0} \frac{R_2(a_0,u)}{\|u\|} = 0$, existe $\delta \in \mathbb{R}_+$ tal que para todo $u \in A$ con $0 < \|0-u\| = \|u\| < \delta$ implica que $|R_2(a_0,u)| < M\|u\|^2$.

Así,

$$0 < Hf(a_0)\cdot u + R_2(a_0,u) = f(a_0+u) - f(a_0), \text{ para cada } u \in B_\delta(0).$$

Por definición de mínimo local se tiene que a_0 es un **mínimo local**. Análogamente se tiene el resultado para cuando $Hf(a_0)$ es definida negativa, se tendrá un **máximo local**. (Ejercicio). ■

Ejemplo 2.24: Busqueda de puntos criticos

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2 + y^2$.

- Primero buscamos los puntos críticos de f, los cuales obtenemos de resolver cuando $\nabla f(x,y) = \mathbf{0}$. Sabemos que
$$\nabla f(x,y) = (2x, 2y).$$
así el punto crítico de f solo es el punto $\mathbf{0}$.
- Veamos que la Hessiana de f en $\mathbf{0}$ es
$$Hf(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =: A.$$
- Ahora para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tenemos que
$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2x^2 + 2y^2,$$
lo que nos indica que es **definida positiva**.
- Así tendremos que $\mathbf{0}$ es un **mínimo local**.

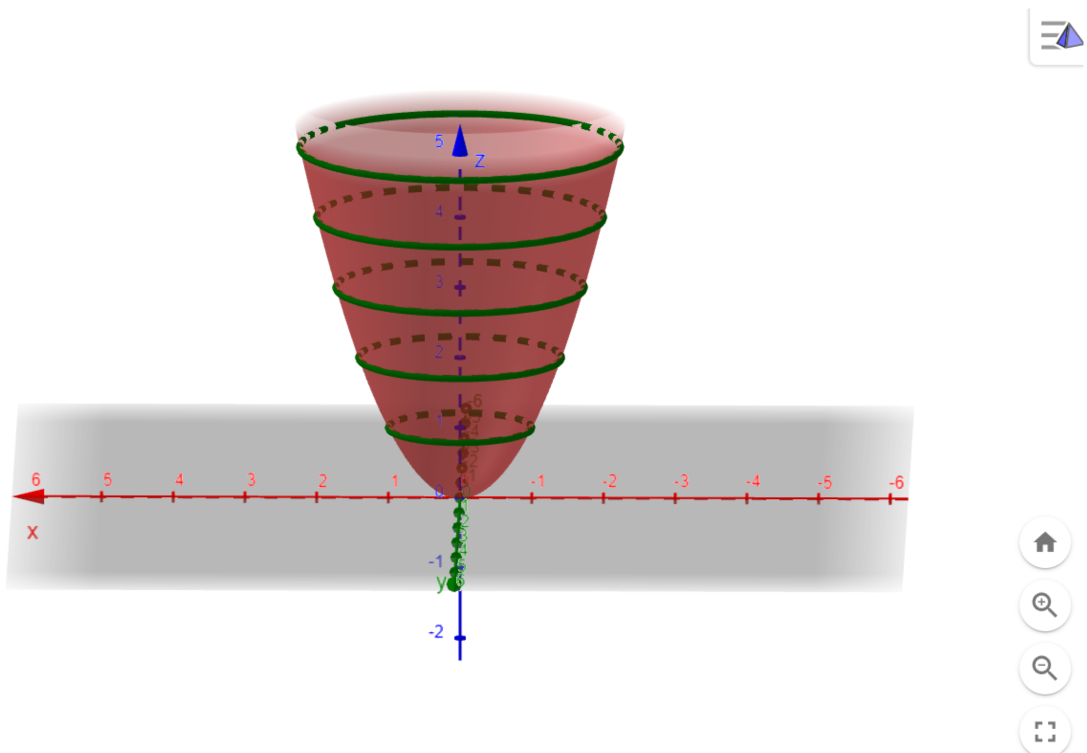
2.9.2. Criterio de la segunda derivada para n=2.

Teorema 2.10: Criterio Segunda Derivada

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^3 en A, abierto en $\mathbb{R}^2$.
Un punto $a \in A$ es un **mínimo local** de f si se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\nabla f(a) = (0,0)$.
2. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} > 0$.
3. El **Hessiano** es positivo en a.

Será un **máximo local** si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} < 0$ y cumple las otras dos condiciones. Y tendremos un **punto silla** si el Hessiano en a es negativo.



CSDn2

Teorema 2.11: Criterio de Sylvester

Una $A \in M_2(\mathbb{R})$ es una **matriz definida positiva** si y solo si $a_{11} > 0$ y $\det(A) > 0$.

Demostración.
Definiciones, teoremas y propiedades a utilizar:

1. **Definición: Función Cuadrática** Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$, la transformación definida por $T(u) = uAu^T$ se dice transformación cuadrática. Si $A = (a_{ij})$, entonces $T(u) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_iu_j$.
2. **Definición: Definida Positiva** Una función cuadrática $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es definida positiva si y solo si $0 < f(u)$ para cada $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y $f(u) = 0$ solo cuando $u = 0$.

Inicio de la Demostración:
Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ una matriz simétrica, por lo tanto $a_{12} = a_{21}$. Sea $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. La forma cuadrática asociada es:

$$f(u) = uAu^T = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

Parte 1: (⇒) Si A es definida positiva, entonces $a_{11} > 0$ y $\det(A) > 0$.
Paso 1: Probar que $a_{11} > 0$.
Consideremos el vector unitario $u_1 = (1, 0)$. Como $u_1 \neq \vec{0}$ y A es definida positiva, por definición debemos tener $f(u_1) > 0$.

$$f(1, 0) = a_{11}(1)^2 + 2a_{12}(1)(0) + a_{22}(0)^2 = a_{11}$$

Por lo tanto, $a_{11} > 0$.
Paso 2: Completar el cuadrado.
Como $a_{11} > 0$, podemos reescribir la expresión cuadrática completando el cuadrado para x:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= a_{11}\left(x^2 + \frac{2a_{12}}{a_{11}}xy\right) + a_{22}y^2 \\ &= a_{11}\left(x + \frac{a_{12}}{a_{11}}y\right)^2 - a_{11}\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}y\right)^2 + a_{22}y^2 \\ &= a_{11}\left(x + \frac{a_{12}}{a_{11}}y\right)^2 + \left(a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}\right)y^2 \end{aligned}$$

Simplificamos el coeficiente de y^2:

$$a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}} = \frac{\det(A)}{a_{11}}$$

Entonces, la forma cuadrática se puede escribir como:

$$f(x, y) = a_{11}\left(x + \frac{a_{12}}{a_{11}}y\right)^2 + \frac{\det(A)}{a_{11}}y^2 \qquad (1)$$

Paso 3: Probar que $\det(A) > 0$.
Consideremos un vector específico para eliminar el primer término. Elegimos $y = 1$ y $x = -\frac{a_{12}}{a_{11}}$. Entonces $u_2 = (-\frac{a_{12}}{a_{11}}, 1) \neq \vec{0}$. Al evaluar en la ecuación (1):

$$f(u_2) = a_{11}(0)^2 + \frac{\det(A)}{a_{11}}(1)^2 = \frac{\det(A)}{a_{11}}$$

Como A es definida positiva, $f(u_2) > 0$. Dado que ya demostramos que $a_{11} > 0$, para que el cociente sea positivo, es necesario que:

$$\det(A) > 0$$

Parte 2: ($\Leftarrow$) Si $a_{11} > 0$ y $\det(A) > 0$, entonces A es definida positiva.
Asumimos las hipótesis $a_{11} > 0$ y $\det(A) > 0$. Usamos nuevamente la forma completada (1):

$$f(x,y) = \underbrace{a_{11}\left(x + \frac{a_{12}}{a_{11}}y\right)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{\det(A)}{a_{11}}}_{>0}\underbrace{y^2}_{\geq 0}$$

Analizamos el signo de $f(x,y)$ para cualquier $u = (x,y) \neq (0,0)$:

1. El primer término es el producto de un positivo (a_{11}) y un cuadrado, por lo tanto es ≥ 0.
2. El segundo coeficiente $\frac{\det(A)}{a_{11}}$ es positivo (cociente de positivos). Por tanto, el segundo término es ≥ 0.
3. La suma es ≥ 0. ¿Puede ser cero?

$$f(x,y) = 0 \iff a_{11}\left(x + \frac{a_{12}}{a_{11}}y\right)^2 = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\det(A)}{a_{11}}y^2 = 0$$

   De la segunda parte, como el coeficiente es positivo, implica $y = 0$. Sustituyendo $y = 0$ en la primera parte, queda $a_{11}x^2 = 0$, lo que implica $x = 0$ (pues $a_{11} > 0$).

Por lo tanto, $f(x,y) > 0$ para todo $(x,y) \neq (0,0)$. Concluimos que A es **definida positiva**. ∎

2.9.3. ¿Cómo calcular puntos máximos o mínimos de cerrados? n=2.

1. Ver los puntos críticos en el interior del conjunto cerrado.
2. Ver la frontera como una curva y calcular sus máximos y mínimos.
3. Comparar los puntos de los anteriores pasos.

Ejemplo 2.25: Puntos Máximos y Minímos

Encontrar los puntos máximos y mínimos de la función $f : \overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2 + y^2 - x - y + 1$.

1. $\nabla f(x,y) = 0$ si y solo si $2x - 1 = 0$ y $2y - 1 = 0$, si y solo si $x = y = \frac{1}{2}$. Recuerda que el teorema solo aplica para abiertos. Y por el Criterio de la segunda derivada tenemos que es un **mínimo local**.
2. Ahora veamos si hay puntos críticos en la frontera, la cual la podemos parametrizar como
$$\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (\cos(t), \sin(t)).$$

Así $(f \circ \alpha)'(t) = -\cos t + \sin t$. Sabemos que los puntos críticos de esta composición son $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{5\pi}{4}$.

3. Tenemos que

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \sqrt{2} + 1 = 2 - \sqrt{2},$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \sqrt{2} + 1 = 2 + \sqrt{2}$$

Así f tiene un **mínimo** en $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y un **máximo** en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Ejercicio 2.4:

Encuentra los puntos críticos de las siguientes funciones e indica qué tipo son.

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto (x - y)(xy - 1)$.

Expandimos la función para facilitar la derivación:

$$f(x, y) = x^2y - x - xy^2 + y$$

Paso 1: Encontrar Puntos Críticos Buscamos (x, y) tales que $\nabla f(x, y) = (0, 0)$.

$$f_x = 2xy - 1 - y^2 = 0 \quad (1)$$
$$f_y = x^2 - 2xy + 1 = 0 \quad (2)$$

Sumamos las ecuaciones (1) y (2):

$$(2xy - 1 - y^2) + (x^2 - 2xy + 1) = 0 \implies x^2 - y^2 = 0 \implies y = \pm x$$

Caso $y = x$: Sustituyendo en (2):

$$x^2 - 2x(x) + 1 = 0 \implies -x^2 + 1 = 0 \implies x = \pm 1$$

Puntos obtenidos: $(1, 1)$ y $(-1, -1)$.

Caso $y = -x$: Sustituyendo en (2):

$$x^2 - 2x(-x) + 1 = 0 \implies 3x^2 + 1 = 0$$

No tiene solución real.
Puntos críticos: $P_1(1, 1)$ y $P_2(-1, -1)$.

Paso 2: Matriz Hessiana Calculamos las segundas derivadas:

$$f_{xx} = 2y, \quad f_{yy} = -2x, \quad f_{xy} = 2x - 2y$$

La matriz Hessiana es:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x-2y \\ 2x-2y & -2x \end{pmatrix}$$

Paso 3: Clasificación Evaluamos el determinante (Hessiano) en los puntos críticos.

- **En** $P_1(1,1)$**:**
$$\det(Hf(1,1)) = \det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -4$$
Como el Hessiano es negativo, $(1,1)$ es un **Punto Silla**.
- **En** $P_2(-1,-1)$**:**
$$\det(Hf(-1,-1)) = \det\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -4$$
Como el Hessiano es negativo, $(-1,-1)$ es un **Punto Silla**.

2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

Dominio: $\mathbb{R}^2 \setminus \{x = 0 \text{ o } y = 0\}$.

Paso 1: Puntos Críticos

$$f_x = y - \frac{1}{x^2} = 0 \implies y = \frac{1}{x^2}$$
$$f_y = x - \frac{1}{y^2} = 0 \implies x = \frac{1}{y^2}$$

Sustituimos y en la segunda ecuación:

$$x = \frac{1}{(1/x^2)^2} = x^4 \implies x^4 - x = 0 \implies x(x^3-1) = 0$$

Como $x \neq 0$, entonces $x = 1$. Si $x = 1$, entonces $y = 1$.
Punto crítico: $(1,1)$.

Paso 2: Matriz Hessiana

$$f_{xx} = \frac{2}{x^3}, \quad f_{yy} = \frac{2}{y^3}, \quad f_{xy} = 1$$

En el punto $(1,1)$:

$$Hf(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Paso 3: Clasificación

- Hessiano: $\det(Hf) = (2)(2) - 1 = 3 > 0$.
- $f_{xx}(1,1) = 2 > 0$.

Según el Teorema del Criterio de la Segunda Derivada ($n = 2$) , $(1,1)$ es un **Mínimo Local**.

3. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 + xy$.

Paso 1: Puntos Críticos ($\nabla f = 0$)

$$\begin{aligned} f_x &= 2x + y = 0 \quad (1) \\ f_y &= 2y + x = 0 \quad (2) \\ f_z &= 2z = 0 \implies z = 0 \end{aligned}$$

De (1) $y = -2x$. Sustituyendo en (2): $2(-2x) + x = -3x = 0 \implies x = 0$. Por tanto $y = 0$.

Punto crítico: $a_0 = (0, 0, 0)$.

Paso 2: Matriz Hessiana ($n = 3$)

$$Hf(x, y, z) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Paso 3: Clasificación General ($n = 3$) Usamos el Teorema general [cite: 1006-1008]. Debemos determinar si la matriz es definida positiva, negativa o indefinida. Analizamos la función cuadrática asociada $T(u)$ para $u = (u_1, u_2, u_3) \neq 0$:

$$\begin{aligned} T(u) = uHfu^T &= 2u_1^2 + 2u_2^2 + 2u_3^2 + 2u_1u_2 \\ &= (u_1^2 + 2u_1u_2 + u_2^2) + u_1^2 + u_2^2 + 2u_3^2 \\ &= (u_1 + u_2)^2 + u_1^2 + u_2^2 + 2u_3^2 \end{aligned}$$

Observamos que $T(u)$ es suma de cuadrados. Si $u \neq 0$, entonces $T(u) > 0$. Por la definición, $Hf(0, 0, 0)$ es **definida positiva**.

Por el Teorema[cite: 1008], $a_0 = (0, 0, 0)$ es un **Mínimo Local**.

4. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto ax^n + by^n$, donde $n \in \mathbb{N}$ con $2 < n$ y $ab \neq 0$.

Paso 1: Puntos Críticos

$$\begin{aligned} f_x &= anx^{n-1} = 0 \implies x = 0 \quad (\text{pues } a \neq 0, n \neq 0) \\ f_y &= bny^{n-1} = 0 \implies y = 0 \quad (\text{pues } b \neq 0, n \neq 0) \end{aligned}$$

Punto crítico: $(0, 0)$.

Paso 2: Matriz Hessiana Calculamos las segundas derivadas:

$$f_{xx} = an(n-1)x^{n-2}, \quad f_{yy} = bn(n-1)y^{n-2}, \quad f_{xy} = 0$$

Dado que $n > 2$, tenemos que $n - 2 \geq 1$. Al evaluar en $(0, 0)$:

$$f_{xx}(0, 0) = 0, \quad f_{yy}(0, 0) = 0$$

La matriz Hessiana es:

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El Hessiano (determinante) es 0.

Paso 3: Clasificación El Hessiano es 0. Según la definición de punto crítico no degenerado, este es un **punto crítico degenerado**. El criterio de la segunda derivada no decide directamente.

- **Si n es par:**
  - $a > 0$ y $b > 0$: **Mínimo local**
  - $a < 0$ y $b < 0$: **Máximo local**
  - $a \cdot b < 0$: **Punto silla**
- **Si n es impar:** Siempre **Punto silla**

Podemos concluir formalmente que es un punto crítico con Hessiano nulo.

2.9.4. Curvas de nivel

Sean $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^1 y $c \in \mathbb{R}$, ¿qué podemos decir de los puntos críticos de $f|_{\mathbf{g}^{-1}(c)}$? ¿existen? Si es así, ¿cómo los encontramos?, ¿tienen alguna relación con los puntos críticos de g restringidos a su curva de nivel dada por c?

Teorema 2.12: (Multiplicadores de Lagrange)

Sean $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^1, $c \in \mathbb{R}$ y $a_0 \in A$, tales que $g(a_0) = c$ y $\nabla g(a_0) \neq 0$. Si $f|_{g^{-1}(c)}$ tiene un mínimo local o máximo local en a_0, entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla f(a_0) = \lambda \nabla g(a_0).$$

Demostración.Si $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ es un camino tal que $\alpha(I) \subset S := g^{-1}(c)$ y $\alpha(0) = a_0$ (considerando que $0 \in I$), entonces $\alpha'(0)$ es un **vector tangente a** S **en** a_0, más aún:

$$\frac{d}{dt} g(\alpha(t)) = \frac{d}{dt} c = 0.$$

Por otro lado tenemos que

$$\frac{d}{dt} g(\alpha(0)) = \nabla g(a_0) \cdot \alpha'(0).$$

Así

$$\nabla g(a_0) \cdot \alpha'(0) = 0,$$

lo que indica que $\alpha'(0)$ es **ortogonal a** $\nabla g(a_0)$.
Si $f|_S$ tiene un máximo en a_0, entonces $f \circ \alpha$ tiene un máximo en 0. Por la **regla de la cadena** obtenemos que

$$0 = \frac{d}{dt} f(\alpha(0)) = \nabla f(a_0) \cdot \alpha'(0).$$

Así $\nabla f(a_0) \cdot \alpha'(0) = 0$. Esto significa que $\nabla f(a_0)$ también es **ortogonal a todos los vectores tangentes** $\alpha'(0)$ de los caminos que pasan por a_0.
Como $\nabla f(a_0)$ y $\nabla g(a_0)$ son ambos ortogonales al espacio tangente de S en a_0, y este espacio tangente tiene codimensión 1 (ya que S es una curva de nivel de g), $\nabla f(a_0)$ y $\nabla g(a_0)$ deben ser **paralelos**. Como $\nabla g(a_0) \neq 0$, se tiene que uno es múltiplo escalar del otro, es decir, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla f(a_0) = \lambda \nabla g(a_0).$$

■

2.9.5. Versión geométrica

Teorema 2.13: Teorema de los multiplicadores de Lagrange (forma geométrica)

Si $f|_S$, con S una superficie contenida en $\text{Dom} f$, tiene un máximo o mínimo en $a_0 \in S$ entonces

$$\nabla f(a_0)$$

es **perpendicular a S en a_0**.

2.10. Funciones

Recordando, si teníamos que f es derivable y existe f^{-1}, podemos encontrar la derivada de f^{-1}, usando el siguiente recurso

$$f \circ f^{-1} = \text{Id}$$

Derivando (usando la regla de la cadena):

$$f'(f^{-1}) \cdot (f^{-1})' = 1$$

Despejando:

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f'(f^{-1})}$$

en términos más coloquiales

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

Teorema 2.14: de la función implícita (I)

Sea $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ de clase C^1. Denotemos un punto $w \in \mathbb{R}^{n+1}$ como (u, z) donde $u \in \mathbb{R}^n$ y $z \in \mathbb{R}$, si f satisface

$$F(u_0, z_0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial z}(u_0, z_0) \neq 0,$$

para algún punto $(u_0, z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Entonces existen $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+$ tales que existe una **única función**

$$g : B_{r_1}(u_0) \to B_{r_2}(z_0), \quad u \mapsto g(u) =: z$$

la cual satisface $F(u, g(u)) = 0$. Más aún, si $u \in B_{r_1}(u_0)$ y $z \in B_{r_2}(z_0)$ si $F(u, z) = 0$, entonces $z = g(u)$. Finalmente, g es de clase C^1, con

$$Dg(u) = -\frac{1}{\frac{\partial F(u,z)}{\partial z}} D_u F(u, g(u)).$$

Donde $D_u F = (F_{x_1}, \ldots, F_{x_n})$.

Nota:

La igualdad

$$Dg(u) = -\frac{1}{\frac{\partial F(u,z)}{\partial z}} D_u F(u, g(u)),$$

la podemos entender como

$$g_{x_i} = -\frac{F_{x_i}}{F_z}$$

para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Ejemplo 2.26: Con Teorema I

Considerando la ecuación

$$x^2 + z^2 - 1 = 0 \quad (1)$$

podemos tomar $F(x,z) = x^2 + z^2 - 1$, con $n = 1$. Aquí $F_z(x,z) = 2z$, el Teorema anterior aplica en un punto (x_0, z_0) que satisface la ecuación (1) con $z_0 \neq 0$. Así, para puntos cercanos a z_0, z es una **función única de** x. Esta función es $z = \sqrt{1-x^2}$ si $z_0 > 0$ y $z = -\sqrt{1-x^2}$ si $z_0 < 0$.

Teorema 2.15: de la función implícita (II)

Dadas funciones $F_1, \ldots, F_m : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$, denotando un punto de $\mathbb{R}^{n+m}$ como (u,z) con $u \in \mathbb{R}^n$ y $z \in \mathbb{R}^m$, definiendo

$$\Delta(u,z) = \begin{vmatrix} F_{1z_1}(u,z) & \cdots & F_{1z_m}(u,z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{mz_1}(u,z) & \cdots & F_{mz_m}(u,z) \end{vmatrix}$$

Si (u_0, z_0) cumplen

$$F_i(u_0, z_0) = 0 \quad (I)$$

para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$ y $\Delta(u_0, z_0) \neq 0$ en una vecindad de u_0 y una vecindad de z_0 las ecuaciones (I) definen funciones únicas

$$z_i = g_i(u) \quad \text{para cada } i \in \{1, \ldots, m\}.$$

Sus derivadas pueden calcularse por derivadas implícitas.

Ejemplo 2.27: Con Teorema II

Muestra que cerca del punto $(x,y,u,v) = (1,1,1,1)$ se puede resolver

$$xu + yvu^2 = 2$$

$$xu^3 + y^2v^4 = 2,$$

de manera única para u y v en funciones de x y y. Calcular $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ en el punto $(1,1)$.

Solución: Para verificar la solución, tenemos las ecuaciones

$$F_1(x,y,u,v) = xu + yvu^2 - 2$$

$$F_2(x,y,u,v) = xu^3 + y^2v^4 - 2.$$

Calculamos las derivadas parciales respecto a u y v y las evaluamos en $(1,1,1,1)$:

$$\begin{aligned}
F_{1u} &= x + 2yvu & \qquad F_{1u}(1,1,1,1) &= 1 + 2(1)(1)(1) = 3\\
F_{1v} &= yu^2 & F_{1v}(1,1,1,1) &= 1(1)^2 = 1\\
F_{2u} &= 3xu^2 & F_{2u}(1,1,1,1) &= 3(1)(1)^2 = 3\\
F_{2v} &= 4y^2v^3 & F_{2v}(1,1,1,1) &= 4(1)^2(1)^3 = 4
\end{aligned}$$

$$\Delta(1,1,1,1) = \begin{vmatrix} F_{1u}(1,1,1,1) & F_{1v}(1,1,1,1) \\ F_{2u}(1,1,1,1) & F_{2v}(1,1,1,1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 3(4) - 1(3) = 12 - 3 = 9$$

Como $\Delta(1,1,1,1) \neq 0$, la solución única se tiene garantizada por el teorema anterior. Para encontrar $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, derivamos implícitamente las ecuaciones originales ($F_1 = 0$ y $F_2 = 0$) usando la regla de la cadena con respecto a x:

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + u + y\frac{\partial v}{\partial x}u^2 + 2yvu\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$3xu^2\frac{\partial u}{\partial x} + u^3 + 4y^2v\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Y evaluando en el punto $(1,1,1,1)$ se sigue:

$$3\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = -1,$$

$$3\frac{\partial u}{\partial x} + 4\frac{\partial v}{\partial x} = -1.$$

Resolviendo para $\frac{\partial u}{\partial x}$, se obtenemos que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{3}$$

2.10.1. Función inversa

Recordando que una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una función **invertible**, si existe $f^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id} = f^{-1} \circ f$.

¿Cómo podremos encontrar su inversa?

2.10.2. Jacobiano

Sabemos que para una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, la matriz $Df(u)$ es la denominada **matriz Jacobiana** y el determinante su **Jacobiano**. Este lo denotamos como

$$J(f)(u) = |Df(u)|.$$

Teorema 2.16: De la Función Inversa

Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $f : A \to \mathbb{R}^n$ una función vectorial cuyas componentes tienen derivadas parciales continuas. Si el sistema de ecuaciones

$$f_i(u) = w_i \quad \text{con } i \in \{1, \ldots, n\}$$

tiene solución al rededor de u_0 y w_0, y además $J(f)(u_0) \neq 0$, entonces dicha solución es única en términos de $u = g(w)$ para puntos u cercanos a u_0 y puntos cercanos a w_0. Más aún la función g es continua y sus componentes tienen derivadas parciales continuas.

Ejemplo 2.28: Despeje u y v

Considerar las ecuaciones

$$u = \frac{x^4 + y^4}{x}, \quad v = \sin(x) + \cos(y).$$

¿Cerca de qué puntos (x_0, y_0) puede resolverse para x, y en términos de u y v?
Solución: Sean las funciones

$$u = f_1(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{x}$$

y

$$v = f_2(x, y) = \sin(x) + \cos(y).$$

Queremos saber cerca de qué puntos se puede resolver para x, y en términos de funciones de u, v.
Por el **teorema de la función inversa**, primero debemos calcular el Jacobiano de f, con $f = (f_1, f_2)$, el cual es

$$Jf(x, y) = \begin{vmatrix} \dfrac{3x^4 - y^4}{x^2} & \dfrac{4y^3}{x} \\ \cos(x) & -\sin(y) \end{vmatrix} = \frac{\sin(y)}{x^2}(y^4 - 3x^4) - \frac{4y^3}{x}\cos(x).$$

Podremos resolver de manera única cuando $x \neq 0$ y

$$\sin(y)\left(y^4 - 3x^4\right) \neq 4xy^3\cos(x)$$

Estas condiciones no se pueden resolver explícitamente en general. Para

$$a_0 = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

podemos resolver (x, y) cerca de a_0 puesto $Jf(x, y) \neq 0$.

Ejercicio 2.5: Busqueda valor de u y v

1. ¿Las ecuaciones
$$y + x + uv = 0 \quad \text{y} \quad uxy + v = 0$$
se pueden resolver en términos de x y y para u y v al rededor del $\vec{0}$?

Definimos las funciones implícitas con variables independientes (x, y) y dependientes (u, v):

$$\begin{aligned} F_1(x, y, u, v) &= x + y + uv \\ F_2(x, y, u, v) &= uxy + v \end{aligned}$$

Paso 1: Verificar el punto. En $\vec{0} = (0, 0, 0, 0)$:

$$F_1(\vec{0}) = 0, \quad F_2(\vec{0}) = 0.$$

Se cumple la condición inicial.

Paso 2: Calcular el determinante respecto a las variables dependientes (u, v). Calculamos las derivadas parciales:

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial F_1}{\partial u} = v & \frac{\partial F_1}{\partial v} = u \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} = xy & \frac{\partial F_2}{\partial v} = 1 \end{array}$$

El determinante Δ es:

$$\Delta(x, y, u, v) = \begin{vmatrix} v & u \\ xy & 1 \end{vmatrix} = v(1) - u(xy) = v - uxy$$

Paso 3: Evaluar en $\vec{0}$.

$$\Delta(0, 0, 0, 0) = 0 - 0(0)(0) = 0$$

Conclusión: Como $\Delta(0, 0, 0, 0) = 0$, el Teorema de la función implícita **no garantiza** que se pueda resolver el sistema para u y v de manera única y diferenciable alrededor del origen.

2. Indica cuándo el siguiente sistema tiene solución o no para x, y, z en términos de u, v, w cerca del $\vec{0}$:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= x + xyz, \\ v(x, y, z) &= y + xy, \\ w(x, y, z) &= z + 2x + 3z^2. \end{aligned}$$

Aplicamos el **Teorema de la función inversa**. Buscamos si $J(f)(\vec{0}) \neq 0$.

Paso 1: Calcular la Matriz Jacobiana $Df(x, y, z)$.

$$Df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + yz & xz & xy \\ y & 1 + x & 0 \\ 2 & 0 & 1 + 6z \end{pmatrix}$$

Paso 2: Evaluar en $\vec{0} = (0, 0, 0)$.

$$Df(\vec{0}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Paso 3: Calcular el Jacobiano (Determinante).

$$J(f)(\vec{0}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot (1 \cdot 1 - 0) = 1$$

Conclusión: Como $J(f)(\vec{0}) = 1 \neq 0$, por el Teorema de la función inversa, el sistema **sí tiene solución** única para x, y, z en términos de u, v, w cerca del $\vec{0}$.

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto \left(\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \dfrac{xy}{x^2 + y^2} \right)$, ¿esta función tienen una inversa local $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ cerca del punto $(0, 1)$?

Sea $u(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ y $v(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$. Evaluamos el Jacobiano en el punto $P = (0, 1)$.

Paso 1: Calcular derivadas parciales en $(0, 1)$**.** Para simplificar, notamos que en $P(0, 1)$, el denominador $D = x^2 + y^2 = 1$.

Derivadas de u:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x(x^2 + y^2) - (x^2 - y^2)2x}{(x^2 + y^2)^2}$$

Evaluada en $(0, 1)$: $x = 0 \implies \frac{\partial u}{\partial x}(0, 1) = 0$.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-2y(x^2 + y^2) - (x^2 - y^2)2y}{(x^2 + y^2)^2}$$

Evaluada en $(0, 1)$: $\frac{-2(1)(1) - (-1)(2)}{1} = -2 + 2 = 0$.

Derivadas de v:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{y(x^2 + y^2) - xy(2x)}{(x^2 + y^2)^2}$$

Evaluada en $(0, 1)$: $\frac{1(1) - 0}{1} = 1$.

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x(x^2 + y^2) - xy(2y)}{(x^2 + y^2)^2}$$

Evaluada en $(0, 1)$: $x = 0 \implies \frac{\partial v}{\partial y}(0, 1) = 0$.

Paso 2: Formar la Matriz Jacobiana.

$$Df(0, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 3: Calcular el Determinante.

$$J(f)(0, 1) = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Conclusión: Como el Jacobiano es 0, el Teorema de la función inversa **no asegura** la existencia de una inversa local (y en general, esto indica que la función no es localmente invertible con inversa diferenciable en ese punto).

Definiciones, teoremas y propiedades utilizadas:

- **Teorema de la función implícita (II):** Dadas funciones $F_i : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$, si $F_i(u_0, z_0) = 0$ y el determinante $\Delta(u_0, z_0) \neq 0$ (donde Δ es el determinante de la matriz de derivadas parciales respecto a las variables dependientes z), entonces las ecuaciones definen funciones únicas $z_i = g_i(u)$ en una vecindad .

- **Teorema de la función inversa:** Sea $f : A \to \mathbb{R}^n$ con derivadas parciales continuas. Si el Jacobiano $J(f)(u_0) \neq 0$, entonces la solución es única en términos de $u = g(w)$ para puntos cercanos.Es decir, existe una inversa local [cite: 1182-1186].

2.10.3. Divergencia

Definición 2.25: Divergencia

Si $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una función cuyas componentes son clase C^1. Entonces definimos la **divergencia** de F como

$$\nabla \cdot F = \operatorname{div} F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$$

Nota:

Si entendemos a $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$, entonces

$$\nabla \cdot F = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \cdot (F_1, \ldots, F_n).$$

Ejemplo 2.29: Caso cuando n

- $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (x, y, z)$

  Su divergencia es

  $$\nabla \cdot F(x, y, z) = 1 + 1 + 1 = 3.$$

- $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (x^2y, z, xyz).$

  Su divergencia es

  $$\operatorname{div} F(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y) + \frac{\partial}{\partial y}(z) + \frac{\partial}{\partial z}(xyz) = 2xy + 0 + xy = 3xy.$$

2.10.4. Rotacional

Rotacional

Definición 2.26: Rotacional

Si $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, con componentes de clase C^1. Entonces definimos el **rotacional** de F como

$$\operatorname{rot} F = \nabla \times F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{e}_3$$

Nota:

Si entendemos a $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$, entonces

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

Ejemplo 2.30: Rotacional

- $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (x, xy, 1)$

  Tendremos que su **rotacional** es

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & xy & 1 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(1)}{\partial y} - \frac{\partial(xy)}{\partial z}\right)\mathbf{e}_1 - \left(\frac{\partial(1)}{\partial x} - \frac{\partial(x)}{\partial z}\right)\mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial(xy)}{\partial x} - \frac{\partial(x)}{\partial y}\right)\mathbf{e}_3 = (0, 0, y).$$

- $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, u \mapsto (u_1u_2, \sin(u_3), 1)$

  Como sabemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial u_2} &= u_1, & \frac{\partial F_1}{\partial u_3} &= 0, \\ \frac{\partial F_2}{\partial u_1} &= 0, & \frac{\partial F_2}{\partial u_3} &= \cos(u_3), \\ \frac{\partial F_3}{\partial u_1} &= 0, & \frac{\partial F_3}{\partial u_2} &= 0. \end{aligned}$$

  Así, obtenemos que

$$\begin{aligned} \nabla \times F &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial u_2} - \frac{\partial F_2}{\partial u_3}\right)\mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial u_3} - \frac{\partial F_3}{\partial u_1}\right)\mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial u_1} - \frac{\partial F_1}{\partial u_2}\right)\mathbf{e}_3 \\ &= (0 - \cos(u_3))\mathbf{e}_1 + (0 - 0)\mathbf{e}_2 + (0 - u_1)\mathbf{e}_3 \\ &= -\cos(u_3)\mathbf{e}_1 - u_1\mathbf{e}_3 = (-\cos(u_3), 0, -u_1). \end{aligned}$$

Teorema 2.17: Identidad del rotacional del gradiente

Para cualquier función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clase C^2, tenemos que

$$\nabla \times (\nabla f) = 0.$$

Demostración.Como $\nabla f = (f_x, f_y, f_z)$, entonces

$$\nabla \times (\nabla f) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} = (f_{yz} - f_{zy})\mathbf{e}_1 - (f_{xz} - f_{zx})\mathbf{e}_2 + (f_{xy} - f_{yx})\mathbf{e}_3,$$

pero sabemos que las **derivadas parciales cruzadas son iguales** (Teorema de Clairaut), de donde se sigue

$$\nabla \times (\nabla f) = 0.$$

■

Ejercicio 2.6: Campo gradiente

Si $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto y\mathbf{e}_1 - x\mathbf{e}_2$. Demuestra que g **no es un campo gradiente**, es decir que no existe $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla f = g$.
Solución: Si g fuera un campo vectorial gradiente, entonces por el Teorema anterior (Rotacional del Gradiente) se sigue que

$$0 = \nabla \times g.$$

Pero

$$\nabla \times g = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(0)}{\partial y} - \frac{\partial(-x)}{\partial z} \right) \mathbf{e}_1 - \left(\frac{\partial(0)}{\partial x} - \frac{\partial(y)}{\partial z} \right) \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial(-x)}{\partial x} - \frac{\partial(y)}{\partial y} \right) \mathbf{e}_3 = -2\mathbf{e}_3 \neq 0.$$

Por lo tanto g **no puede ser un campo vectorial gradiente**.

Teorema 2.18: Divergencia del rotacional

Para cualquier campo vectorial F en $\mathbb{R}^3$ se tiene

$$\nabla \cdot (\nabla \times F) = 0,$$

es decir la **divergencia del rotacional es 0**.

Demostración.Sabemos que

$$\nabla \times F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathbf{e}_3$$

y así

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\nabla\times F) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\\ &+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\\ &=\frac{\partial^2 F_3}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 F_2}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 F_1}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 F_3}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 F_2}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 F_1}{\partial z\partial y}\\ &=0.\end{aligned}$$

■

Ejemplo 2.31: Campo vectorial

Muestra que el campo vectorial con regla de correspondencia $F(x,y,z)=x\mathbf{e}_1+y\mathbf{e}_2+z\mathbf{e}_3$ **no es el rotacional** de un campo vectorial G, es decir **no existe** G campo vectorial tal que $F=\operatorname{rot} G$.

Solución: Si F fuera el rotacional de un campo vectorial G ($F=\nabla\times G$), entonces por el Teorema anterior se tendría $\operatorname{div} F=0$, pero

$$\operatorname{div} F=\nabla\cdot F=\frac{\partial(x)}{\partial x}+\frac{\partial(y)}{\partial y}+\frac{\partial(z)}{\partial z}=1+1+1=3.$$

Como $\operatorname{div} F=3\neq 0$, por lo que F **no puede ser un rotacional** de un campo vectorial.

Laplaciano (operador de Laplace)

Definición 2.27: Laplaciano

Si f es un **campo escalar**, definimos su **laplaciano** como

$$\nabla^2 f=\nabla\cdot(\nabla f).$$

Nota:

Mediante cálculos podemos ver que

$$\nabla^2 f=\sum_{i=1}^{n} f_{x_i x_i}.$$

Ejemplo 2.32: n

Si f es el campo escalar con $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ para $(x,y,z) \neq 0$, entonces el laplaciano de f es

$$\nabla^2 f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = \frac{3}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Es decir $\nabla^2 f = 0$.

Propiedades 2.3: Identidades

1. $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$.
2. $\nabla(cf) = c\nabla f$.
3. $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$.
4. $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$ en puntos donde g no se anula.
5. $\nabla \cdot (F+G) = \nabla \cdot F + \nabla \cdot G$.
6. $\nabla \times (F+G) = \nabla \times F + \nabla \times G$.
7. $\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = f\nabla \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla f$.
8. $\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot \nabla \times \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \nabla \times \mathbf{G}$.
9. $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{F}) = 0$.
10. $\operatorname{rot}(f\mathbf{F}) = f\operatorname{rot}\mathbf{F} + \nabla f \times \mathbf{F}$.
11. $\nabla^2(fg) = f\nabla^2 g + g\nabla^2 f + 2(\nabla f \cdot \nabla g)$.
12. $\operatorname{div}(\nabla f \times \nabla g) = 0$.
13. $\operatorname{div}(f\nabla g - g\nabla f) = f\nabla^2 g - g\nabla^2 f$.

Ejercicio 2.7: Divergencia

Encontrar la **divergencia** de los campos vectoriales con reglas de correspondencia:

1. $\mathbf{F}(x,y,z) = e^{yz}\mathbf{e}_1 + e^{xz}\mathbf{e}_2 + e^{xy}\mathbf{e}_3$.
   Identificamos las componentes: $F_1 = e^{yz}$, $F_2 = e^{xz}$, $F_3 = e^{xy}$. Aplicamos la definición:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_1}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(e^{yz}) = 0 \quad \text{(no depende de } x\text{)} \\
\frac{\partial F_2}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(e^{xz}) = 0 \quad \text{(no depende de } y\text{)} \\
\frac{\partial F_3}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}(e^{xy}) = 0 \quad \text{(no depende de } z\text{)}
\end{aligned}$$

Sumando las parciales:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 0 + 0 + 0 = 0$$

2. $\mathbf{G}(x,y,z) = yz\mathbf{e}_1 + xz\mathbf{e}_2 + xy\mathbf{e}_3$.

   Componentes: $G_1 = yz$, $G_2 = xz$, $G_3 = xy$.

$$\frac{\partial}{\partial x}(yz) = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial y}(xz) = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial z}(xy) = 0$$
$$\nabla \cdot \mathbf{G} = 0$$

3. $\mathbf{H}(x,y,z) = x\mathbf{e}_1 + (y + \cos(x))\mathbf{e}_2 + (z + e^y)\mathbf{e}_3$.

   Calculamos las derivadas parciales de cada componente respecto a su variable correspondiente:

$$\frac{\partial}{\partial x}(x) = 1$$
$$\frac{\partial}{\partial y}(y + \cos(x)) = 1 + 0 = 1$$
$$\frac{\partial}{\partial z}(z + e^y) = 1 + 0 = 1$$

   Sumamos:

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 1 + 1 + 1 = 3$$

4. $\mathbf{K}(x,y,z) = x^2\mathbf{e}_1 + (x+y)^2\mathbf{e}_2 + (x+y+z)^2\mathbf{e}_3$.

   Aplicamos la regla de la cadena para las derivadas:

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2) = 2x$$
$$\frac{\partial}{\partial y}((x+y)^2) = 2(x+y)(1) = 2x + 2y$$
$$\frac{\partial}{\partial z}((x+y+z)^2) = 2(x+y+z)(1) = 2x + 2y + 2z$$

   Sumamos los resultados:

$$\nabla \cdot \mathbf{K} = 2x + (2x + 2y) + (2x + 2y + 2z) = 6x + 4y + 2z$$

5. $\mathbf{F}(x,y,z) = (x, y, z^2)$.

   Esta es la notación compacta de vectores.

$$\frac{\partial}{\partial x}(x) = 1$$
$$\frac{\partial}{\partial y}(y) = 1$$
$$\frac{\partial}{\partial z}(z^2) = 2z$$
$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 1 + 1 + 2z = 2 + 2z$$

6. $\mathbf{G}(x, y, z) = (yz, xz, xy)$.

   Este ejercicio es idéntico al ejercicio 2, solo cambia la notación (de base canónica a tupla).

$$\nabla \cdot \mathbf{G} = \frac{\partial}{\partial x}(yz) + \frac{\partial}{\partial y}(xz) + \frac{\partial}{\partial z}(xy) = 0$$

7. $\mathbf{H}(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)(3, 4, 5)$.

   Podemos distribuir el escalar o usar la identidad 7 de la página 48[cite: 1306]. Haremos el cálculo directo distribuyendo:

$$\mathbf{H} = (3(x^2 + y^2 + z^2), 4(x^2 + y^2 + z^2), 5(x^2 + y^2 + z^2))$$

   Calculamos las parciales:

$$\frac{\partial H_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + 3y^2 + 3z^2) = 6x$$
$$\frac{\partial H_2}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(4x^2 + 4y^2 + 4z^2) = 8y$$
$$\frac{\partial H_3}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(5x^2 + 5y^2 + 5z^2) = 10z$$
$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 6x + 8y + 10z$$

8. $\mathbf{K}(x, y, z) = \frac{1}{\|(x,y,z)\|^2}(yz, xz, xy)$.

   Sabemos por el Ejercicio 6 que $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$. Utilizando la identidad 7: $\nabla \cdot (f\mathbf{V}) = f(\nabla \cdot \mathbf{V}) + \mathbf{V} \cdot \nabla f$. Como $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$, el resultado es $\mathbf{V} \cdot \nabla f$.

   Calculamos ∇f:

$$f = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = -1(x^2 + y^2 + z^2)^{-2}(2x) = \frac{-2x}{\|u\|^4}$$

   Simétricamente para y, z:

$$\nabla f = \left(\frac{-2x}{\|u\|^4}, \frac{-2y}{\|u\|^4}, \frac{-2z}{\|u\|^4}\right)$$

   Calculamos el producto punto $\mathbf{V} \cdot \nabla f$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K} \cdot \nabla f &= (yz)\left(\frac{-2x}{\|u\|^4}\right) + (xz)\left(\frac{-2y}{\|u\|^4}\right) + (xy)\left(\frac{-2z}{\|u\|^4}\right) \\
&= \frac{-2xyz}{\|u\|^4} - \frac{2xyz}{\|u\|^4} - \frac{2xyz}{\|u\|^4} \\
&= \frac{-6xyz}{\|u\|^4} = \frac{-6xyz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}
\end{aligned}$$

Definiciones, teoremas y propiedades utilizadas:

- **Definición de Divergencia:** Si $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una función con componentes de clase C^1, la divergencia se define como:

$$\nabla \cdot F = \text{div } F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$$

Para el caso $n = 3$, si $F = (F_1, F_2, F_3)$, entonces $\nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$.

- **Identidad Vectorial (Producto por escalar):**

$$\nabla \cdot (fF) = f\nabla \cdot F + F \cdot \nabla f$$

Donde f es un campo escalar y F un campo vectorial.

Ejercicio 2.8: Rotacional

Verifica que $\nabla \times (\nabla f) = 0$ para las funciones con reglas de correspondencia:

1. $f(x, y, z) = \|(x, y, z)\|$.

Paso 1: Calcular el Gradiente ∇f

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

Usando la regla de la cadena ($\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{u} = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$):

$$f_x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{\|u\|}, \quad f_y = \frac{y}{\|u\|}, \quad f_z = \frac{z}{\|u\|}$$

$$\nabla f = \left(\frac{x}{\|u\|}, \frac{y}{\|u\|}, \frac{z}{\|u\|}\right)$$

Paso 2: Calcular el Rotacional $\nabla \times (\nabla f)$

$$\nabla \times (\nabla f) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x}{\|u\|} & \frac{y}{\|u\|} & \frac{z}{\|u\|} \end{vmatrix}$$

Analicemos la primera componente (para $\mathbf{e}_1$):

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{\|u\|}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y}{\|u\|}\right)$$

$$= z\left(-\frac{1}{\|u\|^2} \cdot \frac{y}{\|u\|}\right) - y\left(-\frac{1}{\|u\|^2} \cdot \frac{z}{\|u\|}\right) = -\frac{zy}{\|u\|^3} + \frac{yz}{\|u\|^3} = 0$$

Por simetría, las otras componentes también son cero.

$$\therefore \nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$$

2. $f(x,y,z) = xy + xz + yz$.

Paso 1: Calcular el Gradiente ∇f

$$f_x = y + z, \quad f_y = x + z, \quad f_z = x + y$$

$$\nabla f = (y + z, x + z, x + y)$$

Paso 2: Calcular el Rotacional

$$\nabla \times (\nabla f) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+z & x+z & x+y \end{vmatrix}$$

- Comp. $\mathbf{e}_1$: $\frac{\partial}{\partial y}(x+y) - \frac{\partial}{\partial z}(x+z) = 1 - 1 = 0$
- Comp. $\mathbf{e}_2$: $-[\frac{\partial}{\partial x}(x+y) - \frac{\partial}{\partial z}(y+z)] = -[1-1] = 0$
- Comp. $\mathbf{e}_3$: $\frac{\partial}{\partial x}(x+z) - \frac{\partial}{\partial y}(y+z) = 1 - 1 = 0$

$$\therefore \nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$$

3. $f(x,y,z) = \frac{1}{\|(x,y,z)\|}$.

Paso 1: Calcular el Gradiente

$$f_x = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}(2x) = -x(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} = -\frac{x}{\|u\|^3}$$

Por simetría:

$$\nabla f = \left(-\frac{x}{\|u\|^3}, -\frac{y}{\|u\|^3}, -\frac{z}{\|u\|^3}\right)$$

Paso 2: Calcular el Rotacional Analicemos la componente $\mathbf{e}_1$:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{z}{\|u\|^3}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{y}{\|u\|^3}\right)$$

$$= -z\frac{\partial}{\partial y}(\|u\|^{-3}) - (-y)\frac{\partial}{\partial z}(\|u\|^{-3})$$

$$= -z\left(-3\|u\|^{-4}\frac{y}{\|u\|}\right) + y\left(-3\|u\|^{-4}\frac{z}{\|u\|}\right)$$

$$= \frac{3zy}{\|u\|^5} - \frac{3yz}{\|u\|^5} = 0$$

El mismo resultado se obtiene para las demás componentes.

$$\therefore \nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$$

4. $f(x,y,z) = x^2y^2 + z^2y^2$.

   Paso 1: Calcular el Gradiente

$$f_x = 2xy^2, \quad f_y = 2x^2y + 2z^2y, \quad f_z = 2zy^2$$

$$\nabla f = (2xy^2,\, 2y(x^2+z^2),\, 2zy^2)$$

   Paso 2: Calcular el Rotacional

$$\nabla \times (\nabla f) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy^2 & 2x^2y + 2z^2y & 2zy^2 \end{vmatrix}$$

   - Comp. $\mathbf{e}_1$: $\frac{\partial}{\partial y}(2zy^2) - \frac{\partial}{\partial z}(2x^2y + 2z^2y) = 4zy - 4zy = 0$
   - Comp. $\mathbf{e}_2$: $-[\frac{\partial}{\partial x}(2zy^2) - \frac{\partial}{\partial z}(2xy^2)] = -[0-0] = 0$
   - Comp. $\mathbf{e}_3$: $\frac{\partial}{\partial x}(2x^2y + 2z^2y) - \frac{\partial}{\partial y}(2xy^2) = 4xy - 4xy = 0$

$$\therefore \nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$$

Definiciones, teoremas y propiedades utilizadas:

- **Teorema:** Para cualquier función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 tenemos que $\nabla \times (\nabla f) = 0$.
- **Demostración del Teorema:**

$$\nabla \times (\nabla f) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} = (f_{yz} - f_{zy})\mathbf{e}_1 - (f_{xz} - f_{zx})\mathbf{e}_2 + (f_{xy} - f_{yx})\mathbf{e}_3$$

  Como las derivadas parciales cruzadas son iguales (Teorema de Clairaut), el resultado es el vector cero.

Divergencia, F(x,y)=(x,y)

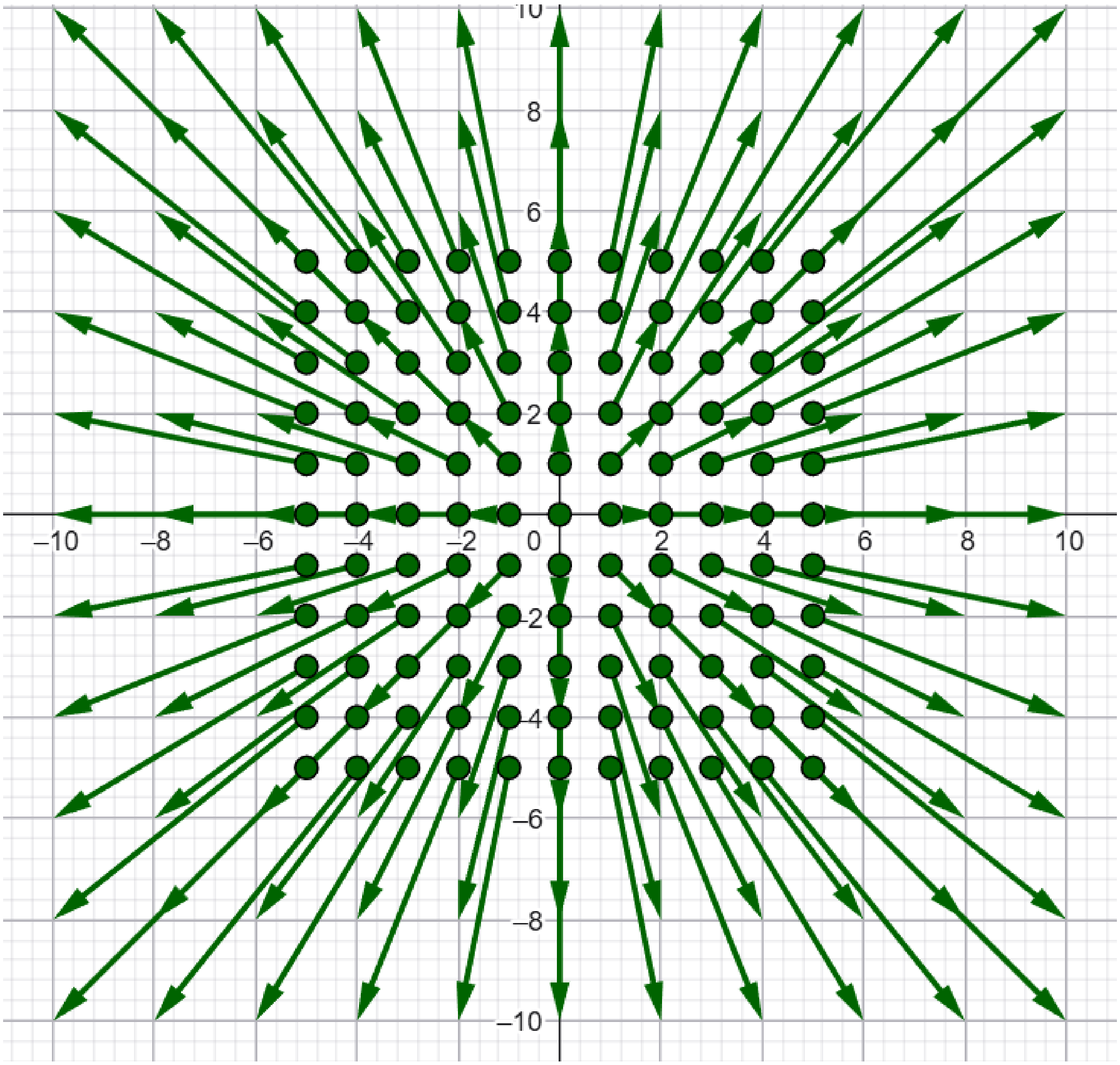


Figura 5: Campo vectorial F, a cada punto en rojo le asocia el vector en azul

Divergencia, F(x,y)=(x,y)
Divergencia, F(x,y)=(-y,x)

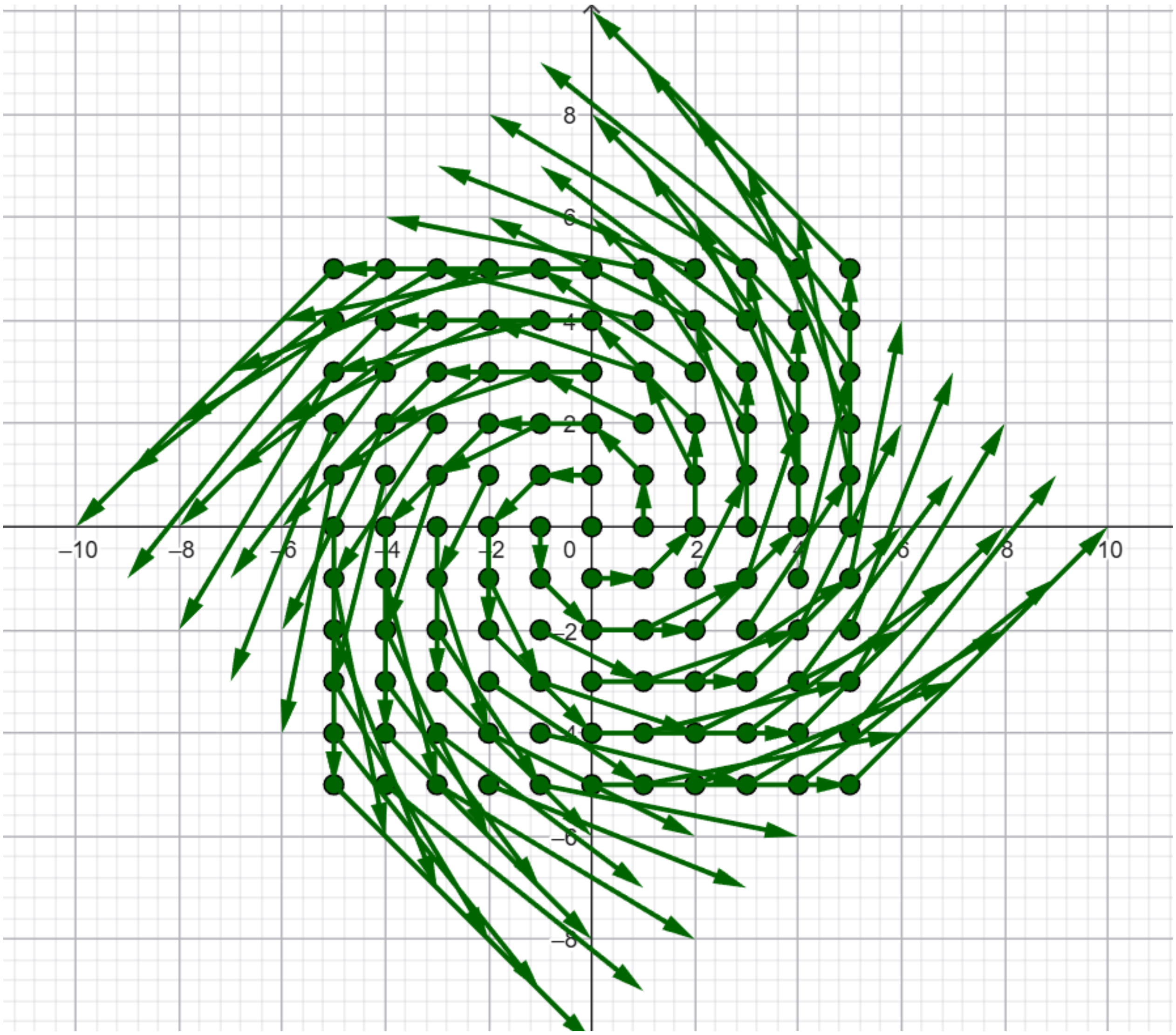


Figura 6: Campo vectorial F

Divergencia, F(x,y)=(-y,x)
Divergencia, $\nabla \cdot F < 0$

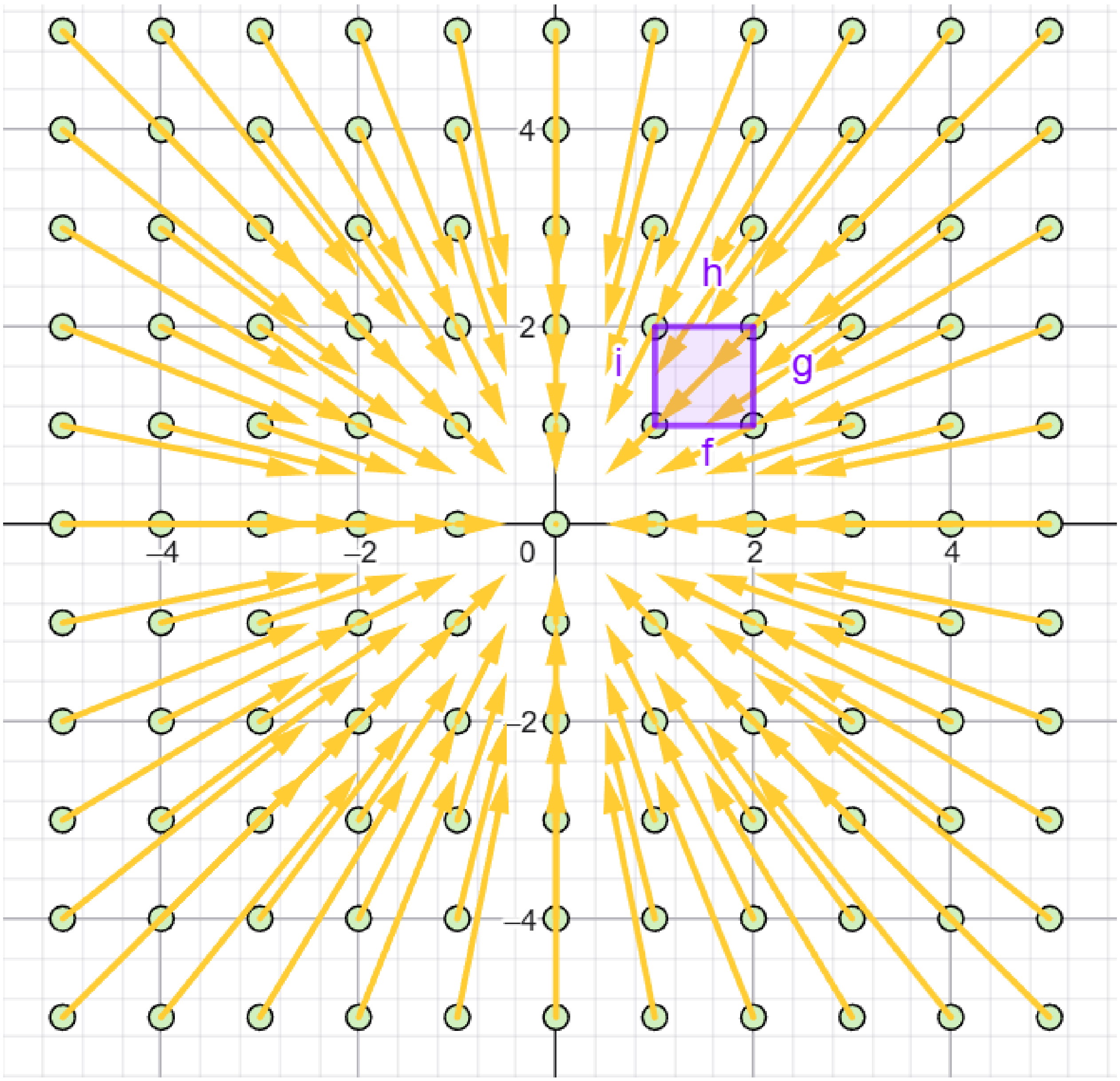


Figura 7: F comprime, $\nabla \cdot F = -2$

Divergencia, $\nabla \cdot F < 0$
Divergencia, $\nabla \cdot F = 0$

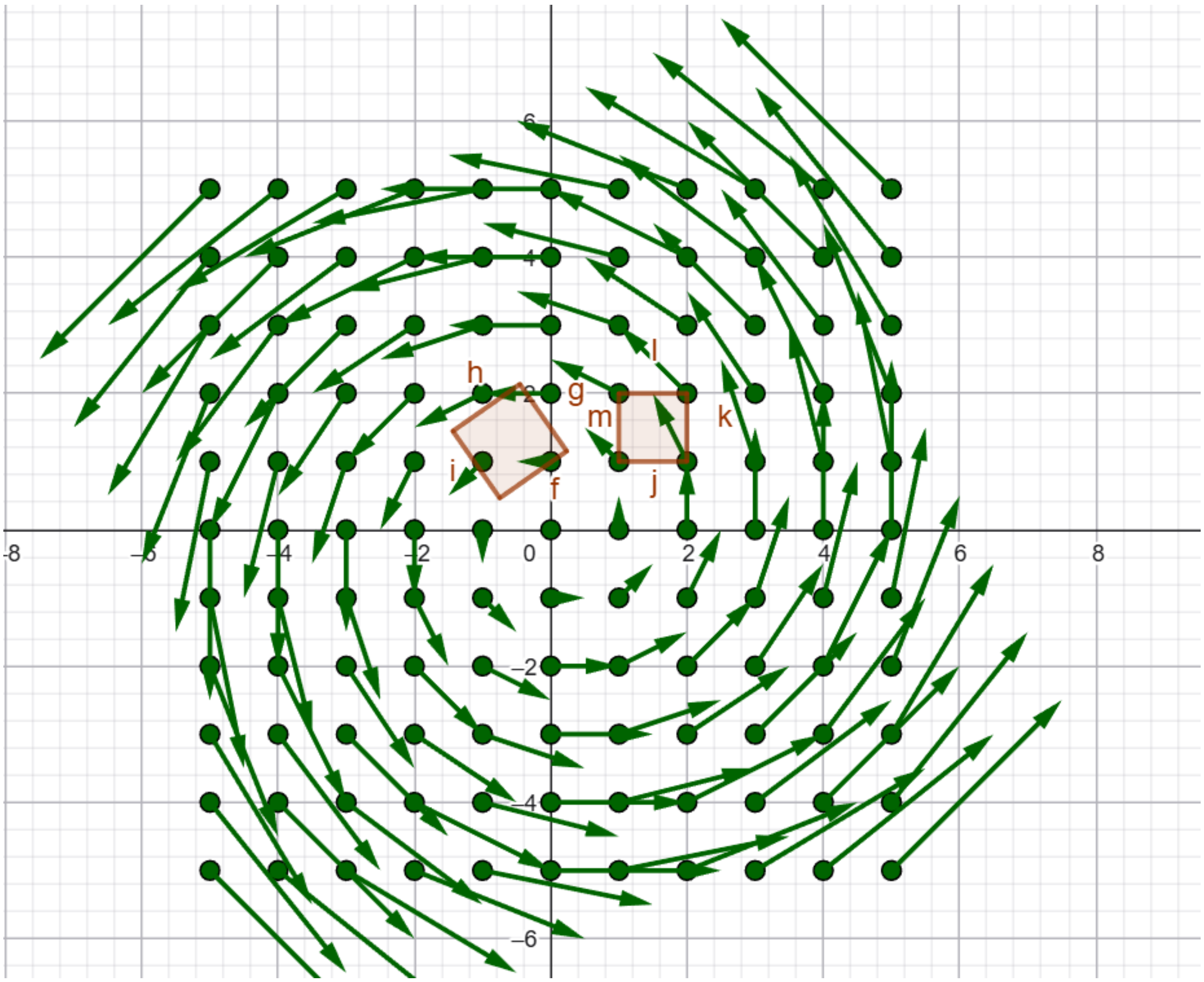


Figura 8: F no comprime ni expande

Divergencia, $\nabla \cdot F = 0$
Rotacional

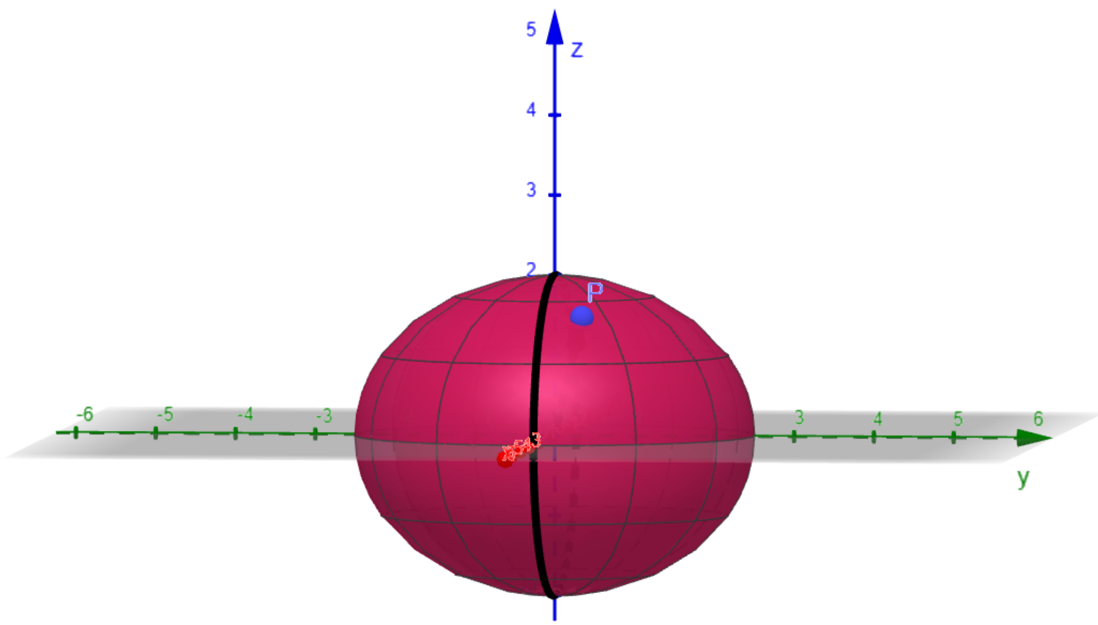


Figura 9: Rotar el cuerpo a lo largo del eje z. La velocidad angular w guarda la relación F =w x r

Rotacional

Tendremos que $\|\mathbf{F}\| = \|\mathbf{w}\|\|\mathbf{r}\| \operatorname{sen}(\theta)$. Si $\mathbf{w}(x,y,z) = (0,0,z) = \|\mathbf{w}\|\mathbf{e}_3$ y $\mathbf{r} = (x,y,z)$. Tenemos que

$$\mathbf{F} = \mathbf{w} \times \mathbf{r} = (-\|\mathbf{w}\|y, \|\mathbf{w}\|x, 0)$$

y

$$\nabla \times \mathbf{F} = 2\|\mathbf{w}\|\mathbf{e}_3 = 2\mathbf{w}.$$

2.11. Adicional

2.11.1. Matrices Jacobianas

Definición 2.28: Matriz Jacobiana

La matriz jacobiana J_f de una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se define como la matriz de todas las derivadas parciales de primer orden:

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.33: Cálculo de Jacobiana en $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Sea $f(x,y) = (e^{x+y} + y, y^2x)$.
1. Componentes:

$$f_1(x,y) = e^{x+y} + y, \quad f_2(x,y) = y^2x$$

2. Derivadas parciales de f_1:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = e^{x+y}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = e^{x+y} + 1$$

3. Derivadas parciales de f_2:

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = y^2, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = 2xy$$

4. Matriz Jacobiana:

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x+y} & e^{x+y} + 1 \\ y^2 & 2xy \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.34: Función Trigonométrica y Exponencial

Sea $f(x,y) = (x^2 + \cos(y), ye^x)$.
1. Componentes:

$$f_1(x,y) = x^2 + \cos(y), \quad f_2(x,y) = ye^x$$

2. Derivadas parciales:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\sin(y)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = ye^x, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = e^x$$

3. Matriz Jacobiana:

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -\sin(y) \\ ye^x & e^x \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.35: Matriz no cuadrada ($\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$)

Sea $f(x,y,z) = (ze^x, -ye^z)$.
1. Componentes:

$$f_1(x,y,z) = ze^x, \quad f_2(x,y,z) = -ye^z$$

2. Derivadas Parciales:

- Para f_1: $\partial_x = ze^x, \quad \partial_y = 0, \quad \partial_z = e^x$
- Para f_2: $\partial_x = 0, \quad \partial_y = -e^z, \quad \partial_z = -ye^z$

3. Matriz Jacobiana (2×3):

$$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} ze^x & 0 & e^x \\ 0 & -e^z & -ye^z \end{pmatrix}$$

2.11.2. Funciones Continuas pero No Diferenciables

Ejemplo 2.36: Función Valor Absoluto en el Origen

$f(x) = |x|$. Analizamos en $x = 0$.
Continuidad:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0) \implies \text{Continua.}$$

No Diferenciabilidad: El límite del cociente diferencial:

$$\lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

- Por la derecha ($h \to 0^+$): 1.
- Por la izquierda ($h \to 0^-$): -1.

Como los límites laterales difieren, $f'(0)$ no existe.

Ejemplo 2.37: Función Oscilante $x\sin(1/x)$

$$g(x) = \begin{cases} x\sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Continuidad: Por Teorema del Sándwich (Squeeze): $-|x| \leq x\sin(1/x) \leq |x|$. Como los extremos van a 0, el límite es 0. Continua.
No Diferenciabilidad:

$$g'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{h\sin(1/h) - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \sin(1/h)$$

Este límite no existe (oscila indefinidamente).

Ejemplo 2.38: Función de Weierstrass

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$$

Continua en todo $\mathbb{R}$ (convergencia uniforme) pero no diferenciable en ningún punto (fractal).

2.11.3. Funciones continuas no derivables

Definición 2.29: Función de Cantor (Escalera del Diablo)

Sea $\varphi_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi_n(0) = 0, \varphi_n(1) = 1$, $\varphi_n(x) = k/2^n$ en intervalos centrales y lineal en los cerrados. La función de Cantor se define como el límite:

$$\varphi_C(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$$

Definición 2.30: Función de Takagi

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\phi(2^k x)}{2^k}$$

Donde $\phi(x)$ es la distancia al entero más cercano.

Definición 2.31: Función de Bolzano

Límite de la sucesión recursiva:

$$B_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}B_n(4x), & 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}B_n(4x-1), & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \dots & \dots \end{cases}$$

Definición 2.32: Función de Knopp

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lfloor 2^n x \rfloor \text{ mód } 2}{2^n}$$

2.11.4. Ejercicios de Diferenciabilidad y Jacobianos

Ejercicio 2.9: Trayectoria no C^2

Sea $\alpha : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (t, y(t))$ con:

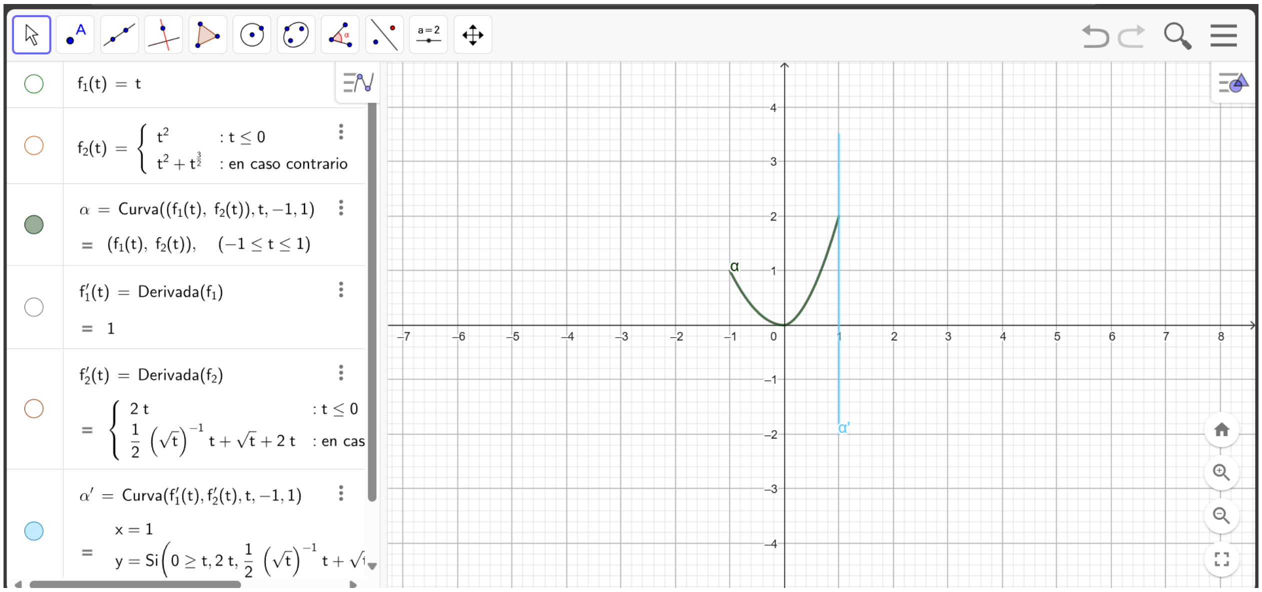
$$y(t) = \begin{cases} t^2, & t \leq 0 \\ t^2 + t^{3/2}, & t > 0 \end{cases}$$

Compute α' y grafique. Demuestre que $\alpha \notin C^2$.

Solucion Cálculo de $\alpha'(t)$:

- Si $t < 0$: $\alpha'(t) = (1, 2t)$.
- Si $t > 0$: $\alpha'(t) = (1, 2t + \frac{3}{2}t^{1/2})$.
- En $t = 0$: Ambos límites laterales coinciden en $(1, 0)$.

Análisis de la segunda derivada: Para $t > 0$, la segunda componente de la derivada es $2 + \frac{3}{4}t^{-1/2}$. Cuando $t \to 0^+$, el término $t^{-1/2} \to \infty$. La derivada segunda no está acotada en el origen, por lo tanto $\alpha \notin C^2$.



Grafica en Geo

Ejercicio 2.10: Cálculo de $Df(u)$ para $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$

Sea $f(u) = \left(\dfrac{u_1^2 u_2}{u_1^2 + u_2^3}, u_1^2 u_3, \cos(u_1 u_3), u_3^3 - 1 \right)$.

Solución:Calculamos las parciales componente a componente:

1. $\partial_{u_1} f_1$: Regla del cociente $\implies \frac{2u_1 u_2^4}{(u_1^2+u_2^3)^2}$.
2. $\partial_{u_2} f_1$: Regla del cociente $\implies \frac{u_1^4 - 2u_1^2 u_2^3}{(u_1^2+u_2^3)^2}$.

La matriz Jacobiana resultante es:

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{2u_1 u_2^4}{(u_1^2+u_2^3)^2} & \frac{u_1^4 - 2u_1^2 u_2^3}{(u_1^2+u_2^3)^2} & 0 \\ 2u_1 u_3 & 0 & u_1^2 \\ -u_3 \sin(u_1 u_3) & 0 & -u_1 \sin(u_1 u_3) \\ 0 & 0 & 3u_3^2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.11: Cálculo de $Dh(u)$ para $h : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^4$

Sea $h(u) = (u_1, u_2^3, u_3^6 u_2 - 2u_3^2, u_6^2 - 1)$.

Solución:Calculamos las derivadas no nulas:

- h_1: Solo depende de u_1.
- h_2: Solo depende de u_2.

- h_3: Depende de u_2 y u_3.
- h_4: Solo depende de u_6.

Matriz Jacobiana (4×6):

$$J_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3u_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_3^6 & 6u_3^5 u_2 - 4u_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2u_6 \end{pmatrix}$$

2.11.5. Reglas Básicas de Derivación

Propiedades 2.4: Constante y Potencia

- **Constante:** $\frac{d}{dx}(c) = 0$
- **Potencia:** $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

Ejemplo 2.39: Ejercicios 1-15

1. $\frac{d}{dx}(c) = 0$
2. $\frac{d}{dx}(5) = 0$
3. $\frac{d}{dx}(-3) = 0$
4. $\frac{d}{dx}(\pi) = 0$
5. $\frac{d}{dx}(\sqrt{2}) = 0$
6. $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$
7. $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$
8. $\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$
9. $\frac{d}{dx}(x^4) = 4x^3$
10. $\frac{d}{dx}(x^5) = 5x^4$
11. $\frac{d}{dx}(x^{-1}) = -x^{-2}$
12. $\frac{d}{dx}(x^{-2}) = -2x^{-3}$
13. $\frac{d}{dx}(x^{1/2}) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$
14. $\frac{d}{dx}(x^{3/2}) = \frac{3}{2}x^{1/2}$
15. $\frac{d}{dx}(x^{-1/2}) = -\frac{1}{2}x^{-3/2}$

Propiedades 2.5: Linealidad (Múltiplo y Suma)

- **Múltiplo Constante:** $\frac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x)$
- **Suma/Resta:** $\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$

Ejemplo 2.40: Ejercicios Múltiplo y Suma

1. $\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}f(x)$
2. $\frac{d}{dx}(3x^2) = 6x$
3. $\frac{d}{dx}(-2x^3) = -6x^2$
4. $\frac{d}{dx}(5x^4) = 20x^3$
5. $\frac{d}{dx}(\frac{1}{2}x^2) = x$
6. $\frac{d}{dx}(4\sqrt{x}) = 2x^{-1/2}$
7. $\frac{d}{dx}(-3x^{-2}) = 6x^{-3}$
8. $\frac{d}{dx}[f \pm g] = f' \pm g'$
9. $\frac{d}{dx}(x^2 + x^3) = 2x + 3x^2$
10. $\frac{d}{dx}(3x^2 - 2x) = 6x - 2$
11. $\frac{d}{dx}(x^4 - x^2 + x) = 4x^3 - 2x + 1$
12. $\frac{d}{dx}(2x^3 + 5x^2 - 3x + 1) = \ldots$
13. $\frac{d}{dx}(\sqrt{x} + x^{-1}) = \frac{1}{2}x^{-1/2} - x^{-2}$

Propiedades 2.6: Exponenciales y Logarítmicas

- $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$ | $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$
- $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$ | $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}$

Ejemplo 2.41: Ejercicios Exponenciales y Logarítmicas

1. $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
2. $\frac{d}{dx}(e^{2x}) = 2e^{2x}$
3. $\frac{d}{dx}(e^{-x}) = -e^{-x}$
4. $\frac{d}{dx}(e^{3x}) = 3e^{3x}$
5. $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$

6. $\frac{d}{dx}(2^x) = 2^x \ln 2$
7. $\frac{d}{dx}(10^x) = 10^x \ln 10$
8. $\frac{d}{dx}(3^x) = 3^x \ln 3$
9. $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$
10. $\frac{d}{dx}(\ln 2x) = \frac{1}{x}$
11. $\frac{d}{dx}(\ln x^2) = \frac{2}{x}$
12. $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}$
13. $\frac{d}{dx}(\log_2 x) = \frac{1}{x \ln 2}$
14. $\frac{d}{dx}(\log_{10} x) = \frac{1}{x \ln 10}$

Propiedades 2.7: Trigonométricas

- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\tan x)' = \sec^2 x$
- $(\cot x)' = -\csc^2 x$
- $(\sec x)' = \sec x \tan x$
- $(\csc x)' = -\csc x \cot x$

Ejemplo 2.42: Ejercicios Trigonométricas

1. $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$
2. $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$
3. $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$
4. $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$
5. $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$
6. $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$
7. $\frac{d}{dx}(\sin 2x) = 2\cos 2x$
8. $\frac{d}{dx}(\cos 3x) = -3\sin 3x$
9. $\frac{d}{dx}(\tan 4x) = 4\sec^2 4x$

Propiedades 2.8: Cadena

- **Producto:** $\frac{d}{dx}[fg] = f'g + fg'$
- **Cociente:** $\frac{d}{dx}\left[\frac{f}{g}\right] = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
- **Cadena:** $\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Ejemplo 2.43: Ejercicios Cadena

1. $\frac{d}{dx}[fg] = f'g + fg'$
2. $\frac{d}{dx}(x^2e^x) = e^x(x^2 + 2x)$
3. $\frac{d}{dx}(x \ln x) = \ln x + 1$
4. $\frac{d}{dx}(\sin x \cos x) = \cos 2x$
5. $\frac{d}{dx}(x^3e^{2x}) = x^2e^{2x}(3 + 2x)$
6. $\frac{d}{dx}(\sqrt{x} \ln x) = \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}$
7. $\frac{d}{dx}[\frac{f}{g}] = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
8. $\frac{d}{dx}(\frac{x}{x+1}) = \frac{1}{(x+1)^2}$
9. $\frac{d}{dx}(\frac{x^2}{x+1}) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$
10. $\frac{d}{dx}(\frac{\sin x}{x}) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$
11. $\frac{d}{dx}(\frac{e^x}{x^2}) = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$
12. $\frac{d}{dx}(\frac{\ln x}{x}) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$
13. $\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x)$
14. $\frac{d}{dx}[(2x+1)^3] = 6(2x+1)^2$
15. $\frac{d}{dx}[\sin(x^2)] = 2x \cos(x^2)$
16. $\frac{d}{dx}[e^{x^2}] = 2xe^{x^2}$
17. $\frac{d}{dx}[\ln(x^2+1)] = \frac{2x}{x^2+1}$
18. $\frac{d}{dx}[\sqrt{x^3+1}] = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}$
19. $\frac{d}{dx}[\cos(3x)] = -3\sin(3x)$

2.11.6. Ejercicios de derivación

Ejemplo 2.44: Combinaciones

1. $\frac{d}{dx}(3x^4 - \dots) = 12x^3 - 6x^2 + 5$
2. $\frac{d}{dx}(2e^x + 3\ln x) = 2e^x + \frac{3}{x}$
3. $\frac{d}{dx}(x^2 \sin x) = 2x\sin x + x^2 \cos x$
4. $\frac{d}{dx}(\frac{x^2+1}{x-1}) = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$
5. $\frac{d}{dx}[(x^2+1)^4] = 8x(x^2+1)^3$
6. $\frac{d}{dx}(e^{2x}\cos x) = e^{2x}(2\cos x - \sin x)$
7. $\frac{d}{dx}(\ln(x^3)) = \frac{3}{x}$
8. $\frac{d}{dx}(\sqrt[3]{x^2}) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$
9. $\frac{d}{dx}(5\sin(2x)) = 10\cos(2x)$
10. $\frac{d}{dx}(x\ln(2x)) = \ln(2x) + 1$
11. $\frac{d}{dx}(4x^3 \dots) = 12x^2 - 6x + 2$
12. $\frac{d}{dx}(e^{-x}) = -e^{-x}$
13. $\frac{d}{dx}(\ln(5x)) = \frac{1}{x}$
14. $\frac{d}{dx}(\sin^2 x) = \sin(2x)$
15. $\frac{d}{dx}(\cos^3 x) = -3\cos^2 x \sin x$
16. $\frac{d}{dx}(\tan(2x)) = 2\sec^2(2x)$
17. $\frac{d}{dx}(\cot(3x)) = -3\csc^2(3x)$
18. $\frac{d}{dx}(\sec(4x)) = 4\sec(4x)\tan(4x)$
19. $\frac{d}{dx}(\csc(5x)) = -5\csc(5x)\cot(5x)$
20. $\frac{d}{dx}(x^2e^{3x}) = xe^{3x}(2+3x)$
21. $\frac{d}{dx}(\frac{\sin x}{\cos x}) = \sec^2 x$
22. $\frac{d}{dx}(\ln(\sin x)) = \cot x$
23. $\frac{d}{dx}(e^{\ln x}) = 1$
24. $\frac{d}{dx}(\sqrt{1+x^2}) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
25. $\frac{d}{dx}(\ln(x^2+3x)) = \frac{2x+3}{x^2+3x}$

26. $\frac{d}{dx}(\sin(x\cos x)) = \ldots$
27. $\frac{d}{dx}(e^{x^2+1}) = 2xe^{x^2+1}$
28. $\frac{d}{dx}(\ln(\ln x)) = \frac{1}{x\ln x}$
29. $\frac{d}{dx}(\sqrt{\sin x}) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$
30. $\frac{d}{dx}(x\sin x + \cos x) = x\cos x$
31. $\frac{d}{dx}(3x^{-2} + \ldots) = -6x^{-3} - 6x^{-4}$
32. $\frac{d}{dx}(\frac{e^x}{1+e^x}) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$
33. $\frac{d}{dx}(\ln\sqrt{x}) = \frac{1}{2x}$
34. $\frac{d}{dx}(\sin(2x)\cos(3x)) = \ldots$
35. $\frac{d}{dx}(x^2\ln(x^2)) = 2x(\ln(x^2) + 1)$
36. $\frac{d}{dx}(\frac{1}{\sqrt{x}}) = -\frac{1}{2}x^{-3/2}$
37. $\frac{d}{dx}(e^{2x}\sin(3x)) = \ldots$
38. $\frac{d}{dx}(\ln(\cos x)) = -\tan x$
39. $\frac{d}{dx}(\sqrt[4]{x^3}) = \frac{3}{4}x^{-1/4}$
40. $\frac{d}{dx}(\frac{x}{\ln x}) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$
41. $\frac{d}{dx}(2^{3x}) = 3 \cdot 2^{3x}\ln 2$
42. $\frac{d}{dx}(\ln(\tan x)) = \frac{2}{\sin 2x}$
43. $\frac{d}{dx}(x\sqrt{1-x^2}) = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$
44. $\frac{d}{dx}(\frac{\ln x}{x^2}) = \frac{1-2\ln x}{x^3}$
45. $\frac{d}{dx}(\sin(\ln x)) = \frac{\cos(\ln x)}{x}$
46. $\frac{d}{dx}(e^{\sin x}) = e^{\sin x}\cos x$
47. $\frac{d}{dx}(\ln(\sec x)) = \tan x$
48. $\frac{d}{dx}(\frac{1}{x^2+1}) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$
49. $\frac{d}{dx}(\sqrt{x+\sqrt{x}}) = \ldots$
50. $\frac{d}{dx}(x^2e^{-x}) = xe^{-x}(2-x)$
51. $\frac{d}{dx}(\cos(e^x)) = -e^x\sin(e^x)$

52. $\frac{d}{dx}(\ln(x + \sqrt{\ldots})) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
53. $\frac{d}{dx}(\frac{\sin x}{1+\cos x}) = \frac{1}{1+\cos x}$
54. $\frac{d}{dx}(x^3 \ln(2x)) = x^2(3\ln(2x) + 1)$
55. $\frac{d}{dx}(\sqrt{\ln x}) = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$
56. $\frac{d}{dx}(e^{x \ln x}) = x^x(\ln x + 1)$
57. $\frac{d}{dx}(\frac{e^x - e^{-x}}{2}) = \cosh x$
58. $\frac{d}{dx}(\ln|\sec x + \tan x|) = \sec x$
59. $\frac{d}{dx}(x \sin(\frac{1}{x})) = \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$
60. $\frac{d}{dx}(\frac{1}{\ln x}) = -\frac{1}{x(\ln x)^2}$
61. $\frac{d}{dx}(\sqrt{e^x}) = \frac{1}{2}e^{x/2}$
62. $\frac{d}{dx}(\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}) = \frac{1}{1-x^2}$
63. $\frac{d}{dx}(x^2\cos(2x)) = \ldots$
64. $\frac{d}{dx}(\frac{\sqrt{x}}{x+1}) = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$
65. $\frac{d}{dx}(\ln(x^2e^x)) = \frac{2}{x} + 1$
66. $\frac{d}{dx}(\sin^3(2x)) = 6\sin^2(2x)\cos(2x)$
67. $\frac{d}{dx}(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}) = (1-x^2)^{-3/2}$
68. $\frac{d}{dx}(e^{\cos x}\ln x) = \ldots$
69. $\frac{d}{dx}(\tan^{-1}\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$
70. $\frac{d}{dx}(\frac{\sin^2 x}{x}) = \ldots$
71. $\frac{d}{dx}(\ln|\csc x - \cot x|) = \csc x$
72. $\frac{d}{dx}(x^x) = x^x(\ln x + 1)$
73. $\frac{d}{dx}(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}) = \frac{1}{1+\cos x}$
74. $\frac{d}{dx}(e^{x^2}\ln(3x)) = \ldots$
75. $\frac{d}{dx}(\frac{\cos x}{1+\sin x}) = \frac{-1}{1+\sin x}$
76. $\frac{d}{dx}(\ln\sqrt{x^2+1}) = \frac{x}{x^2+1}$

77. $\frac{d}{dx}(\sin x \cos^2 x) = \ldots$

78. $\frac{d}{dx}(\frac{e^{2x}}{x^3}) = \frac{e^{2x}(2x-3)}{x^4}$

79. $\frac{d}{dx}(\sqrt[3]{\ln x}) = \frac{1}{3x(\ln x)^{2/3}}$

80. $\frac{d}{dx}(x \sin x \cos x) = \ldots$

2.11.7. Derivadas Parciales por Definición

Ejercicio 2.12: Derivadas Parciales por Definición

Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Verificar que si $(x,y) \neq (0,0)$:

$$f_x(x,y) = \frac{y^3 - x^2y}{(x^2+y^2)^2}, \quad f_y(x,y) = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Y comprobar que en el origen: $f_x(0,0) = 0$ y $f_y(0,0) = 0$.

Solucion:

1. Cálculo de $f_x(x,y)$ para $(x,y) \neq (0,0)$: Usamos la definición del límite:

$$f_x(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

Sustituyendo $f(x+h,y) = \frac{(x+h)y}{(x+h)^2+y^2}$:

$$f_x(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{(x+h)y}{(x+h)^2+y^2} - \frac{xy}{x^2+y^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{y[(x+h)(x^2+y^2) - x((x+h)^2+y^2)]}{h[(x+h)^2+y^2](x^2+y^2)}$$

Simplificamos el numerador:

$$(x+h)(x^2+y^2) - x(x^2+2xh+h^2+y^2) = x^3 + xy^2 + h(x^2+y^2) - (x^3 + 2x^2h + xh^2 + xy^2)$$

$$= h(x^2+y^2) - 2x^2h - xh^2 = h(y^2-x^2) - xh^2$$

Regresando al límite:

$$f_x(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{y[h(y^2-x^2) - xh^2]}{h[(x+h)^2+y^2](x^2+y^2)} = \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^3 - x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$

2. Cálculo de $f_y(x,y)$ para $(x,y) \neq (0,0)$: De forma análoga, para la derivada respecto a y:

$$f_y(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x(y+h)}{x^2+(y+h)^2} - \frac{xy}{x^2+y^2}}{h}$$

El álgebra es simétrica, resultando en:

$$f_y(x,y) = \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

3. En el origen $(0,0)$**:**

$$f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h \cdot 0}{h^2 + 0} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$$

El cálculo es idéntico para $f_y(0,0) = 0$.

Ejercicio 2.13: Derivadas Direccionales y Diferenciabilidad

Probar que si $v = (c,0)$ y $w = (0,d)$ con $c,d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, entonces $D_v f(0,0) = D_w f(0,0) = 0$, pero no existe $D_{v+w} f(0,0)$.

Solucion:

Usamos la definición de derivada direccional $D_u f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tu) - f(a)}{t}$.
1. Dirección $v = (c,0)$**:**

$$D_v f(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(tc,0) - f(0,0)}{t}$$

Como $f(tc,0) = \frac{(tc)(0)}{(tc)^2} = 0$, el límite es:

$$\lim_{t \to 0} \frac{0 - 0}{t} = 0 \implies D_v f(0,0) = 0$$

2. Dirección $w = (0,d)$**:** Análogamente, $f(0,td) = 0$, por lo que $D_w f(0,0) = 0$.
3. Dirección $v + w = (c,d)$**:** Evaluamos $f(t(c,d)) = f(tc,td)$:

$$f(tc,td) = \frac{(tc)(td)}{(tc)^2 + (td)^2} = \frac{t^2 cd}{t^2(c^2 + d^2)} = \frac{cd}{c^2 + d^2}$$

El límite para la derivada direccional es:

$$D_{v+w} f(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{cd}{c^2 + d^2} - 0}{t} = \frac{cd}{c^2 + d^2} \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}$$

Este límite **no existe** (tiende a $\pm\infty$). Esto demuestra que aunque existen las derivadas parciales, la función no es diferenciable en el origen.

2.11.8. Ejecicios con Gradiente, Hessiana y Determinante

Ejercicio 2.14: Computa

Computa ∇f , Hf y $|Hf|$

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $u \mapsto (\cos u_1) e^{u_2} + u_3$

$$f(u) = (\cos u_1) e^{u_2} + u_3, \quad u = (u_1, u_2, u_3)$$

A. Gradiente (∇f)

El gradiente es el vector de las primeras derivadas parciales:

$$\nabla f(u) = \left(\frac{\partial f}{\partial u_1}, \frac{\partial f}{\partial u_2}, \frac{\partial f}{\partial u_3}\right)$$

Calculamos cada componente:

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} = \frac{\partial}{\partial u_1}\big((\cos u_1)e^{u_2} + u_3\big) = -(\sin u_1)e^{u_2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u_2} = \frac{\partial}{\partial u_2}\big((\cos u_1)e^{u_2} + u_3\big) = (\cos u_1)e^{u_2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u_3} = \frac{\partial}{\partial u_3}\big((\cos u_1)e^{u_2} + u_3\big) = 1$$

Por lo tanto, el gradiente es:

$$\nabla f(u) = \big(-(\sin u_1)e^{u_2}, (\cos u_1)e^{u_2}, 1\big)$$

B. Matriz Hessiana (Hf)

La matriz Hessiana es la matriz 3×3 de segundas derivadas parciales:

$$Hf(u) = \begin{pmatrix} f_{u_1u_1} & f_{u_1u_2} & f_{u_1u_3} \\ f_{u_2u_1} & f_{u_2u_2} & f_{u_2u_3} \\ f_{u_3u_1} & f_{u_3u_2} & f_{u_3u_3} \end{pmatrix}$$

Cálculo de las segundas derivadas:

$$f_{u_1u_1} = \frac{\partial}{\partial u_1}\big(-(\sin u_1)e^{u_2}\big) = -(\cos u_1)e^{u_2}$$

$$f_{u_1u_2} = \frac{\partial}{\partial u_2}\big(-(\sin u_1)e^{u_2}\big) = -(\sin u_1)e^{u_2}$$

$$f_{u_1u_3} = \frac{\partial}{\partial u_3}\big(-(\sin u_1)e^{u_2}\big) = 0$$

$$f_{u_2u_2} = \frac{\partial}{\partial u_2}\big((\cos u_1)e^{u_2}\big) = (\cos u_1)e^{u_2}$$

$$f_{u_2u_3} = \frac{\partial}{\partial u_3}\big((\cos u_1)e^{u_2}\big) = 0$$

$$f_{u_3u_3} = \frac{\partial}{\partial u_3}(1) = 0$$

Como f es de clase C^2, las derivadas cruzadas son iguales:

$$f_{u_2u_1} = f_{u_1u_2} = -(\sin u_1)e^{u_2}, \quad f_{u_3u_1} = f_{u_1u_3} = 0, \quad f_{u_3u_2} = f_{u_2u_3} = 0$$

Por lo tanto, la matriz Hessiana es:

$$Hf(u) = \begin{pmatrix} -(\cos u_1)e^{u_2} & -(\sin u_1)e^{u_2} & 0 \\ -(\sin u_1)e^{u_2} & (\cos u_1)e^{u_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

C. Determinante de la Matriz Hessiana ($|Hf|$)

Se calcula el determinante de la matriz 3×3. Dado que la última fila es $\mathbf{0}$, el determinante es cero:

$$|Hf(u)| = 0$$

2. Función $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$

$$f(u) = e^{\|u\|^2} - \|u\|^2, \quad u = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$$

La norma al cuadrado es:

$$\|u\|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2$$

Podemos escribir la función como:

$$f(u) = e^{\sum_{k=1}^{5} u_k^2} - \sum_{k=1}^{5} u_k^2$$

A. Gradiente (∇f)

El gradiente es:

$$\nabla f(u) = \left(\frac{\partial f}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial u_5} \right)$$

Para la i-ésima componente ($i = 1, \dots, 5$):

$$\frac{\partial f}{\partial u_i} = \frac{\partial}{\partial u_i} \left(e^{\|u\|^2} - \|u\|^2 \right) = 2u_i e^{\|u\|^2} - 2u_i = 2u_i(e^{\|u\|^2} - 1)$$

Por lo tanto, el gradiente es:

$$\nabla f(u) = 2(e^{\|u\|^2} - 1) \cdot u$$

Es decir:

$$\nabla f(u) = \left(2u_1(e^{\|u\|^2} - 1), 2u_2(e^{\|u\|^2} - 1), \dots, 2u_5(e^{\|u\|^2} - 1) \right)$$

B. Matriz Hessiana (Hf)

La matriz Hessiana $Hf(u)$ es de 5×5 y su elemento (i,j) es $\frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}$.

Caso 1: Componentes cruzadas ($i \neq j$)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u_j \partial u_i} = \frac{\partial}{\partial u_j}\left[2u_i(e^{\|u\|^2} - 1)\right] = 2u_i \cdot (2u_j e^{\|u\|^2}) = 4u_i u_j e^{\|u\|^2}$$

Caso 2: Componentes diagonales ($i = j$)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u_i^2} = \frac{\partial}{\partial u_i}\left[2u_i(e^{\|u\|^2} - 1)\right] = 2(e^{\|u\|^2} - 1) + 4u_i^2 e^{\|u\|^2}$$

Por lo tanto, la matriz Hessiana se puede escribir como:

$$Hf(u) = 2(e^{\|u\|^2} - 1)I + 4e^{\|u\|^2}\, uu^T$$

C. Determinante de la Matriz Hessiana ($|Hf|$)

Para una matriz de la forma $A = aI + buu^T$, se cumple:

$$\det(aI + buu^T) = a^{n-1}(a + b\|u\|^2)$$

En nuestro caso:

$$n = 5, \quad a = 2(e^{\|u\|^2} - 1), \quad b = 4e^{\|u\|^2}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
|Hf(u)| &= \left[2(e^{\|u\|^2} - 1)\right]^{5-1}\left(2(e^{\|u\|^2} - 1) + 4e^{\|u\|^2}\|u\|^2\right) \\
&= 2^4(e^{\|u\|^2} - 1)^4\left(2e^{\|u\|^2} - 2 + 4\|u\|^2 e^{\|u\|^2}\right) \\
&= 16(e^{\|u\|^2} - 1)^4 \cdot 2\left(e^{\|u\|^2} - 1 + 2\|u\|^2 e^{\|u\|^2}\right) \\
&= 32(e^{\|u\|^2} - 1)^4\left(e^{\|u\|^2}(1 + 2\|u\|^2) - 1\right)
\end{aligned}$$

$$|Hf(u)| = 32(e^{\|u\|^2} - 1)^4\left(e^{\|u\|^2}(1 + 2\|u\|^2) - 1\right)$$

2.11.9. Preimagen y gradiente

Ejercicio 2.15: Compute f^{-1}(c) y ∇f para:

1. Función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $u \mapsto \|u\|^2$, con $c = \sqrt{2}$

   Aquí,

   $$u = (u_1, u_2, u_3), \quad \text{y} \quad \|u\|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2.$$

   A. Preimagen ($f^{-1}(c)$)

La preimagen es el conjunto de nivel de la función f:

$$f^{-1}(c) = \{u \in \mathbb{R}^3 : f(u) = c\}.$$

Sustituyendo la función y el valor de c:

$$f^{-1}(\sqrt{2}) = \{(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 : \|u\|^2 = \sqrt{2}\}$$

$$f^{-1}(\sqrt{2}) = \{(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 : u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = \sqrt{2}\}.$$

Bosquejo de $f^{-1}(c)$:
El conjunto de nivel $f^{-1}(\sqrt{2})$ es la ecuación de una esfera en $\mathbb{R}^3$.

- **Centro:** el origen $(0, 0, 0)$.
- **Radio:** r, donde $r^2 = \sqrt{2}$. Por lo tanto, $r = \sqrt[4]{2}$.

B. Gradiente (∇f)

El gradiente es el vector de las primeras derivadas parciales:

$$\nabla f(u) = \left(\frac{\partial f}{\partial u_1}, \frac{\partial f}{\partial u_2}, \frac{\partial f}{\partial u_3} \right).$$

Dada la función

$$f(u) = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2,$$

tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} = 2u_1, \quad \frac{\partial f}{\partial u_2} = 2u_2, \quad \frac{\partial f}{\partial u_3} = 2u_3.$$

Por lo tanto,

$$\nabla f(u) = (2u_1, 2u_2, 2u_3) = 2u.$$

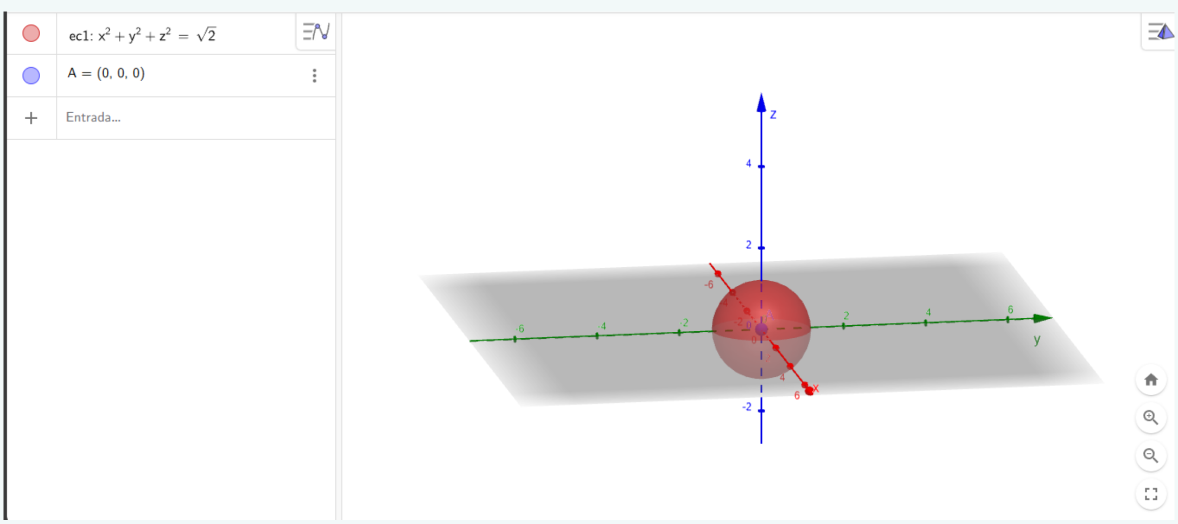


Figura 10: Boquejo

Bosquejo1

2. Función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $u \mapsto \|u\|^2 - 2u_1^2$, con $c = -1$

   Aquí,
   $$u = (u_1, u_2, u_3),$$
   y
   $$f(u) = (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) - 2u_1^2 = u_2^2 + u_3^2 - u_1^2.$$

   A. Preimagen ($f^{-1}(c)$)

   Calculamos el conjunto de nivel $f^{-1}(-1)$:
   $$f^{-1}(-1) = \{u \in \mathbb{R}^3 : f(u) = -1\}.$$

   Sustituyendo la función:
   $$f^{-1}(-1) = \{(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 : u_2^2 + u_3^2 - u_1^2 = -1\}.$$

   Reordenando la ecuación:
   $$u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 = 1.$$

   Bosquejo de $f^{-1}(c)$:

   La ecuación
   $$u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 = 1 \quad (\text{o } x^2 - y^2 - z^2 = 1)$$
   corresponde a un **hiperboloide de dos hojas**.

   - **Eje de simetría:** el eje u_1 (eje x), ya que u_1 es el término positivo.
   - **Intersección con el eje u_1:** si $u_2 = 0$ y $u_3 = 0$, entonces $u_1^2 = 1$, lo que da $u_1 = \pm 1$. Las hojas comienzan en $(-1, 0, 0)$ y $(1, 0, 0)$.
   - **Curvas de nivel (secciones):** si fijamos $u_1 = k$ (una constante con $|k| > 1$), obtenemos $u_2^2 + u_3^2 = k^2 - 1$, que son círculos.

   B. Gradiente (∇f)

   Calculamos el gradiente de
   $$f(u) = u_2^2 + u_3^2 - u_1^2 :$$
   $$\nabla f(u) = \left(\frac{\partial f}{\partial u_1}, \frac{\partial f}{\partial u_2}, \frac{\partial f}{\partial u_3} \right).$$

   Derivadas parciales:
   $$\frac{\partial f}{\partial u_1} = -2u_1, \quad \frac{\partial f}{\partial u_2} = 2u_2, \quad \frac{\partial f}{\partial u_3} = 2u_3.$$

   Por lo tanto,
   $$\nabla f(u) = (-2u_1, 2u_2, 2u_3).$$

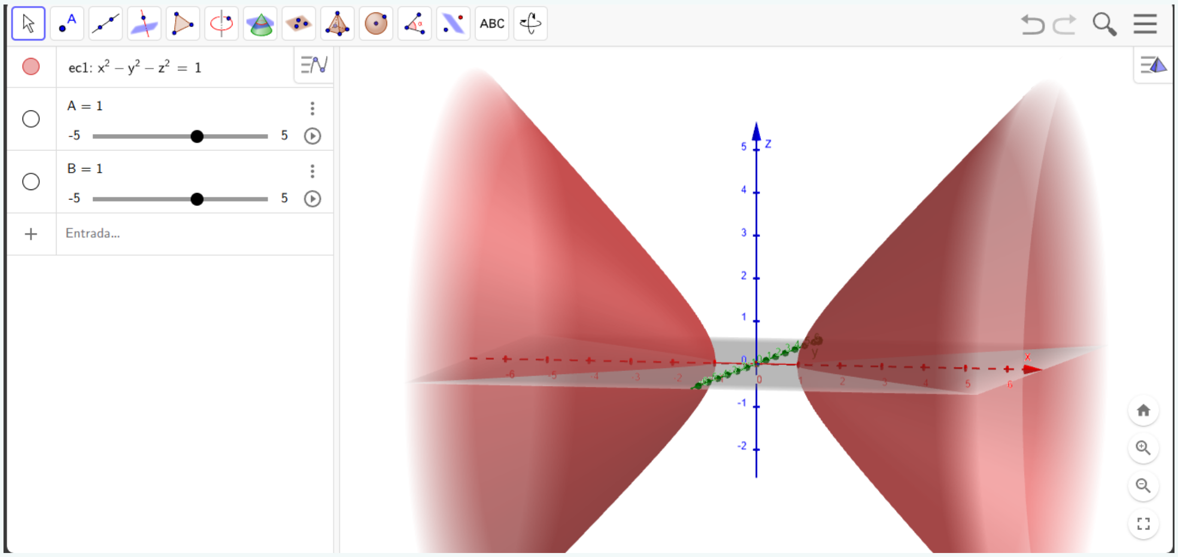


Figura 11: Bosquejo

Bosquejo2

2.11.10. Curvas de Nivel

Definición 2.33: Curva de peano

Una **curva que rellena el espacio** es una aplicación

$$\mathbf{f} : [0,1] \to \mathbb{R}^n$$

donde $\mathbf{f}$ es una función **continua** y **sobreyectiva** sobre un subconjunto compacto y conexo de $\mathbb{R}^n$ con interior no vacío.

Ejemplo 2.45: Ejemplos Canónicos y sus Construcciones Funcionales

Las funciones de estas curvas se construyen típicamente en el límite como $\mathbf{f}(t) = \lim_{k\to\infty} \mathbf{f}_k(t)$, utilizando expansiones en bases numéricas.

1. Curva de Peano (Giuseppe Peano, 1890)

   Peano fue el primero en demostrar la existencia de tal curva, utilizando la expansión **ternaria** (base 3) del parámetro t.

   - **Parámetro** t**:** Se expresa como $t = 0.t_1t_2t_3\cdots = \sum_{k=1}^{\infty} t_k 3^{-k}$, con $t_k \in \{0,1,2\}$.
   - **Función:** $\mathbf{f}(t) = (x(t), y(t))$, donde $x(t)$ y $y(t)$ también son expansiones ternarias:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k 3^{-k}, \quad y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k 3^{-k}$$

- **Dígitos x_k e y_k:** Se definen mediante una transformación recursiva τ que depende de la paridad de la suma de los dígitos previos de t:

$$\tau(t_k, \epsilon_k) = \begin{cases} t_k & \text{si } \epsilon_k \text{ es par} \\ 2 - t_k & \text{si } \epsilon_k \text{ es impar} \end{cases}$$

  donde $\epsilon_k = \sum_{i=1}^{k-1} t_i \pmod 2$. La definición para x_k e y_k involucra τ y el operador $\operatorname{swap}(a, b)$, que conmuta a y b si ϵ_k es impar.

2. Curva de Hilbert (David Hilbert, 1891)

   La construcción de Hilbert es más intuitiva, utilizando la expansión **binaria** (base 2) para las coordenadas y la base 4 para t.

   - **Parámetro t:** t se expresa en base 4: $t = 0.t_1t_2t_3\cdots = \sum_{k=1}^{\infty} t_k 4^{-k}$, con $t_k \in \{0, 1, 2, 3\}$.
   - **Función:** $\mathbf{f}(t) = (x(t), y(t))$ se define a partir de las expansiones binarias de las coordenadas:

$$x(t) = 0.x_1x_2x_3 \ldots (base2), \quad y(t) = 0.y_1y_2y_3 \ldots (base2)$$

   - **Dígitos x_k e y_k:** Se obtienen de t_k mediante una tabla de mapeo que incluye rotaciones y reflexiones, dependientes del dígito t_k y del estado δ_k del cuadrante anterior.

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = M_{\delta_{k-1}} \cdot T(t_k),$$

     donde $M_{\delta_{k-1}}$ es una matriz de transformación (rotación/reflexión) y $T(t_k)$ es el vector de coordenadas base del cuadrante t_k.

3. Curva de Sierpinski (Wacław Sierpiński, 1912)

   La curva de Sierpinski es otro ejemplo importante que, en una de sus variantes, también rellena el cuadrado unidad.

   - **Construcción:** Se obtiene mediante un proceso iterativo de subdivisión del cuadrado en cuatro partes (como Hilbert), pero con reglas de conexión distintas, lo que resulta en una curva con una forma más .^{en}roscada".
   - **Propiedad Clave:** A menudo, se presenta la versión que rellena el **triángulo de Sierpinski** (una de sus imágenes más comunes) o, en la familia Peano, la versión **cerrada** (donde $\mathbf{f}(0) = \mathbf{f}(1)$) que rellena el cuadrado.
   - **Definición L-System:** Su construcción se describe de manera eficiente mediante un Sistema de Lindenmayer (L-System), que especifica las reglas de reemplazo para generar las iteraciones $\mathbf{f}_k$.

2.11.11. Calculos Divergencia y Rotacional

Ejercicio 2.16: Divergencia y Rot

Cálculo de la divergencia $\nabla \cdot f$

1) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$**,** $f(u) = e^{\|u\|^2} e_2 + \cos(\|u\|) e_1$

En componentes:

$$f(x, y, z) = \big(\cos r,\, e^{r^2},\, 0\big),$$

donde $r = \|u\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

La divergencia es:

$$\nabla \cdot f = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}.$$

- $f_1 = \cos r$,

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = -\sin r \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = -\sin r \cdot \frac{x}{r}.$$

- $f_2 = e^{r^2}$,

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = e^{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(r^2) = e^{r^2} \cdot 2y.$$

- $f_3 = 0$,

$$= \frac{\partial f_3}{\partial z} = 0.$$

Sumando:

$$\nabla \cdot f = -\frac{x}{r} \sin r + 2ye^{r^2}.$$

$$-\frac{x}{r} \sin r + 2ye^{r^2}$$

2) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(w) = (w_1, w_3^2, -w_2)$

En coordenadas (x, y, z):

$$f(x, y, z) = (x, z^2, -y).$$

$$\nabla \cdot f = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(z^2) + \frac{\partial}{\partial z}(-y) = 1 + 0 + 0 = 1.$$

$$= 1$$

Cálculo del rotacional $\nabla \times f$

1) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(u) = e^{\|u\|^2} e_1 + \cos(\|u\|) e_3$

En componentes:

$$f(x, y, z) = \big(e^{r^2},\, 0,\, \cos r\big).$$

El rotacional es:

$$\nabla \times f = \begin{pmatrix} \partial_y f_3 - \partial_z f_2 \\ \partial_z f_1 - \partial_x f_3 \\ \partial_x f_2 - \partial_y f_1 \end{pmatrix}.$$

- Primera componente:

$$\partial_y f_3 = \partial_y(\cos r) = -\sin r \cdot \frac{y}{r}, \quad \partial_z f_2 = 0.$$

$$\Rightarrow \text{comp. } 1 = -\frac{y}{r}\sin r.$$

- Segunda componente:

$$\partial_z f_1 = \partial_z(e^{r^2}) = e^{r^2} \cdot 2z, \quad \partial_x f_3 = \partial_x(\cos r) = -\sin r \cdot \frac{x}{r}.$$

$$\Rightarrow \text{comp. } 2 = 2ze^{r^2} + \frac{x}{r}\sin r.$$

- Tercera componente:

$$\partial_x f_2 = 0, \quad \partial_y f_1 = \partial_y(e^{r^2}) = e^{r^2} \cdot 2y.$$

$$\Rightarrow \text{comp. } 3 = 0 - 2ye^{r^2} = -2ye^{r^2}.$$

Resultado:

$$\nabla \times f = \left(-\frac{y}{r}\sin r,\ 2ze^{r^2} + \frac{x}{r}\sin r,\ -2ye^{r^2}\right).$$

$$= \left(-\frac{y}{r}\sin r,\ 2ze^{r^2} + \frac{x}{r}\sin r,\ -2ye^{r^2}\right)$$

2) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $g(a) = (a_1, a_1a_2, a_1a_2a_3)$
En coordenadas (x, y, z):

$$g(x, y, z) = (x, xy, xyz).$$

$$\nabla \times g = \begin{pmatrix} \partial_y(xyz) - \partial_z(xy) \\ \partial_z(x) - \partial_x(xyz) \\ \partial_x(xy) - \partial_y(x) \end{pmatrix}.$$

- Primera componente:

$$\partial_y(xyz) = xz, \quad \partial_z(xy) = 0 \ \Rightarrow \ xz.$$

- Segunda componente:

$$\partial_z(x) = 0, \quad \partial_x(xyz) = yz \ \Rightarrow \ 0 - yz = -yz.$$

- Tercera componente:

$$\partial_x(xy) = y, \quad \partial_y(x) = 0 \ \Rightarrow \ y.$$

Resultado:

$$\nabla \times g = (xz, -yz, y).$$

$$= (xz, -yz, y)$$

3. INTEGRALES MÚTIPLES

3.1. Definición y evaluación de integrales dobles. Cambio de orden de integración

3.1.1. Integrales dobles y triples

Si $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo (no vacío y de más de un punto), sabemos que una **partición** $P \subset [a, b]$ es una colección de puntos a saber $P = \{t_0, \ldots, t_p\}$ tal que $t_0 = a, t_p = b$ y $t_i < t_{i+1}$ para cada $i \in \{0, \ldots, p-1\}$.

3.1.2. Partición

Definición 3.1: Partición del rectangulo

Diremos que W es una **partición del rectángulo** $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$ si existen particiones P, Q de $[a_1, b_1]$ y $[a_2, b_2]$ respectivamente tales que $W = P \times Q$.

Definición 3.2: Partición del cubo

Diremos que W es una **partición del cubo** $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \subset \mathbb{R}^3$ si existen particiones P, Q, S de $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$ y $[a_3, b_3]$ respectivamente tales que $W = P \times Q \times S$.

Ejemplo 3.1: Partición

Si $P \times Q$ es una partición del rectángulo R, definimos

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \quad \text{y} \quad A_{ij} = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

para cada $i \in \{1, \ldots, p\}, j \in \{1, \ldots, q\}$, tomando a $P = \{x_0, \ldots, x_p\}$ y $Q = \{y_0, \ldots, y_q\}$. Además definimos la **norma de la partición** $P \times Q$ como:

$$\|P \times Q\| = \text{máx}\{A_{ij} : i \in \{1, \ldots, p\}, j \in \{1, \ldots, q\}\}.$$

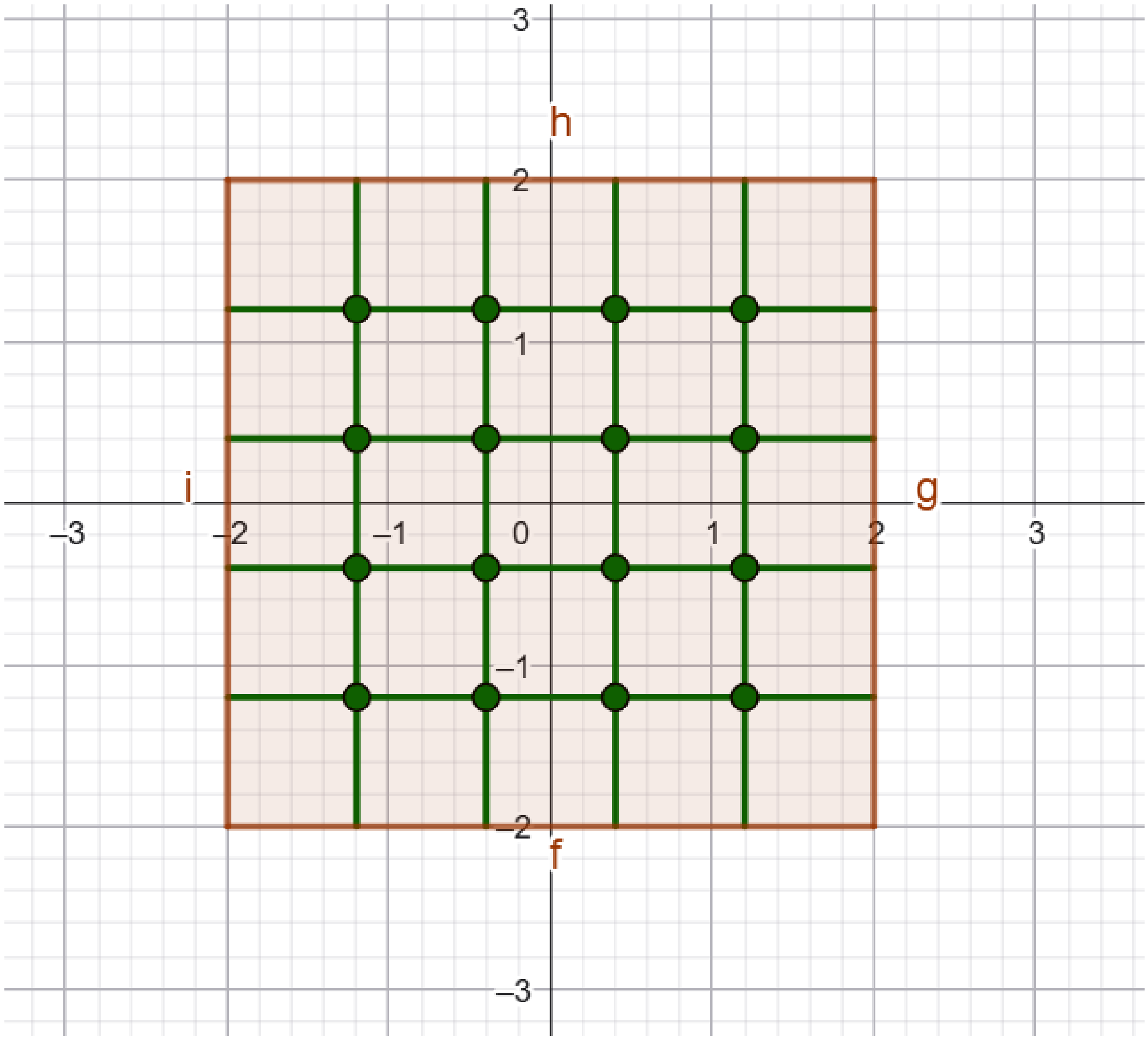


Figura 12: Partición W.

Partición

Si R es un rectángulo, W una partición de R y una función $f : R \to \mathbb{R}$ acotada, es decir existen $m, M \in \mathbb{R}$ tales que

$$m \leq f(\mathbf{u}) \leq M$$

para cada $\mathbf{u} \in R$. Denotaremos por

$$\begin{aligned} M &= \sup\{f(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in R\}, & m &= \text{ínf}\{f(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in R\}, \\ M_{ij} &= \sup\{f(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in R_{ij}\} \quad \text{y} & m_{ij} &= \text{ínf}\{f(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in R_{ij}\} \end{aligned}$$

donde R_{ij} es un subrectángulo de la partición W.

3.1.3. Suma superior y suma inferior

Definición 3.3: Suma superior y inferior

Sea R un rectángulo en $\mathbb{R}^2$, W una partición de R y $f : R \to \mathbb{R}$ una función acotada. Se define:

- La **suma superior** (de f, R y W), como
$$\overline{S}_W(f,R) = \overline{S}_W = \sum_W M_{ij}A_{ij}.$$
- La **suma inferior** (de f, R y W), como
$$\underline{S}_W(f,R) = \underline{S}_W = \sum_W m_{ij}A_{ij}.$$

Nota:

Aquí entenderemos por $\sum_W = \sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{p}$.

Lema 3.1: Sumas inferior y superior

$$\underline{S}_W \leq \overline{S}_W.$$

Demostración.Esto se tiene gracias a que $m_{ij} \leq M_{ij}$. ∎

Definición 3.4: Refinamiento

Para un rectángulo R en $\mathbb{R}$, diremos que la partición W' de R es **refinamiento** de la partición W si y solo si $W \subset W'$.

Nota:

Si W' es refinamiento de W, se tiene que $|W| \leq |W'|$.

Lema 3.2: Refinamiento

Si W' es refinamiento de W se tiene que
$$\overline{S}_{W'} \leq \overline{S}_W$$
y
$$\underline{S}_W \leq \underline{S}_{W'}.$$

Demostración.Lema
Definiciones, teoremas y propiedades a utilizar:

- **Partición y Área:** Una partición W divide un rectángulo R en subrectángulos R_{ij} con área A_{ij}.
- **Supremos e Ínfimos:** Para una función acotada f, definimos sobre cada subrectángulo:
$$M_{ij} = \sup\{f(u) : u \in R_{ij}\} \quad \text{y} \quad m_{ij} = \inf\{f(u) : u \in R_{ij}\}$$
.
- **Sumas de Riemann (Darboux):**
$$\overline{S}_W = \sum_W M_{ij} A_{ij} \quad \text{y} \quad \underline{S}_W = \sum_W m_{ij} A_{ij}$$
.
- **Refinamiento:** W' es refinamiento de W si $W \subset W'$. Esto implica que los rectángulos de W' son subconjuntos de los rectángulos de W.

Inicio de la Demostracion:
Consideremos el caso donde W' se obtiene agregando un punto de división adicional a W. Por inducción, esto se generaliza a cualquier refinamiento.
Supongamos que un rectángulo específico R_{ij} de la partición original W se divide en dos subrectángulos R_1 y R_2 en la partición refinada W' (el resto de los rectángulos permanecen iguales).
1. Relación de Áreas Por la propiedad aditiva del área en rectángulos:
$$A_{ij} = A(R_1) + A(R_2)$$

2. Análisis para la Suma Superior ($\overline{S}$) Definimos los supremos en los nuevos rectángulos:
$$M_1 = \sup\{f(u) : u \in R_1\} \quad \text{y} \quad M_2 = \sup\{f(u) : u \in R_2\}$$

Como $R_1 \subset R_{ij}$ y $R_2 \subset R_{ij}$, el supremo en el conjunto más pequeño debe ser menor o igual al supremo del conjunto más grande:
$$M_1 \leq M_{ij} \quad \text{y} \quad M_2 \leq M_{ij}$$

Analizamos la contribución de este rectángulo a la suma total:
$$\begin{aligned} \text{Contribución en } W &= M_{ij} A_{ij} \\ &= M_{ij}(A(R_1) + A(R_2)) \\ &= M_{ij} A(R_1) + M_{ij} A(R_2) \end{aligned}$$

Comparamos con la contribución en el refinamiento W':
$$\text{Contribución en } W' = M_1 A(R_1) + M_2 A(R_2)$$

Dado que $M_1 \leq M_{ij}$ y $M_2 \leq M_{ij}$, y las áreas son positivas:
$$M_1 A(R_1) + M_2 A(R_2) \leq M_{ij} A(R_1) + M_{ij} A(R_2) = M_{ij} A_{ij}$$

Sumando el resto de los rectángulos que no cambiaron, concluimos:

$$\overline{S}_{W'} \leq \overline{S}_W$$

3. Análisis para la Suma Inferior ($\underline{S}$) Definimos los ínfimos en los nuevos rectángulos:

$$m_1 = \text{ínf}\{f(u) : u \in R_1\} \quad \text{y} \quad m_2 = \text{ínf}\{f(u) : u \in R_2\}$$

Como $R_1 \subset R_{ij}$ y $R_2 \subset R_{ij}$, el ínfimo en el subconjunto es mayor o igual al ínfimo del conjunto total (al reducir el conjunto, tenemos menos valores "bajos"posibles):

$$m_1 \geq m_{ij} \quad \text{y} \quad m_2 \geq m_{ij}$$

Analizamos la contribución:

$$\text{Contribución en } W = m_{ij}A_{ij} = m_{ij}A(R_1) + m_{ij}A(R_2)$$
$$\text{Contribución en } W' = m_1A(R_1) + m_2A(R_2)$$

Dado que $m_1 \geq m_{ij}$ y $m_2 \geq m_{ij}$:

$$m_{ij}A(R_1) + m_{ij}A(R_2) \leq m_1A(R_1) + m_2A(R_2)$$

Por lo tanto, al sumar sobre toda la partición:

$$\underline{S}_W \leq \underline{S}_{W'}$$

■

Lema 3.3: Particiones

Si W_1, W_2 son particiones de R, entonces

$$\underline{S}_{W_2} \leq \overline{S}_{W_1}.$$

Demostración.
Definiciones, teoremas y propiedades a utilizar:

- **Definición de Refinamiento:** Diremos que la partición W' de R es refinamiento de la partición W si y solo si $W \subset W'$.
- **Lema 1 :** Para una misma partición W, se cumple que $\underline{S}_W \leq \overline{S}_W$.
- **Lema 2 :** Si W' es refinamiento de W se tiene que:

$$\overline{S}_{W'} \leq \overline{S}_W \quad \text{y} \quad \underline{S}_W \leq \underline{S}_{W'}$$

.

Inicio de la Demostración:
Sean W_1 y W_2 dos particiones cualesquiera del rectángulo R.

Paso 1: Construcción de un Refinamiento Común
Sea $W' = W_1 \cup W_2$. Como la unión de conjuntos contiene a los conjuntos originales, tenemos que:

$$W_1 \subset W' \quad \text{y} \quad W_2 \subset W'$$

Por la definición de refinamiento[cite: 1507], W' es un refinamiento tanto de W_1 como de W_2.
Paso 2: Relación con la Suma Inferior
Como W' es refinamiento de W_2, aplicamos el **Lema 2** para las sumas inferiores:

$$\underline{S}_{W_2} \leq \underline{S}_{W'} \tag{2}$$

Paso 3: Relación dentro del Refinamiento Común
Considerando la partición W', aplicamos el **Lema 1**, que establece que la suma inferior nunca supera a la suma superior para una misma partición:

$$\underline{S}_{W'} \leq \overline{S}_{W'} \tag{3}$$

Paso 4: Relación con la Suma Superior
Como W' es refinamiento de W_1, aplicamos el **Lema 2** para las sumas superiores:

$$\overline{S}_{W'} \leq \overline{S}_{W_1} \tag{4}$$

Paso 5: Conclusión
Uniendo las desigualdades (2), (3) y (4) por transitividad:

$$\underline{S}_{W_2} \leq \underline{S}_{W'} \leq \overline{S}_{W'} \leq \overline{S}_{W_1}$$

Por lo tanto:

$$\underline{S}_{W_2} \leq \overline{S}_{W_1}$$

■

De estos lemas, obtenemos que el conjunto

$$\{\overline{S}_W : W \text{ es partición de } R\}$$

cualquier suma inferior es **cota inferior**, es decir es acotado inferiormente y

$$\{\underline{S}_W : W \text{ es partición de } R\}$$

cualquier suma superior es **cota superior**, es decir es un conjunto acotado superiormente.

3.1.4. Integrales de Darboux

Definición 3.5: Integrales de Darboux

Sean R un rectángulo en $\mathbb{R}^2$ y $f : R \to \mathbb{R}$ una función acotada. Se define como:

- La **integral superior de f a**

$$\inf\{\overline{S}_W : W \text{ es partición de } R\} = \overline{\iint_R} f(\mathbf{u})dA.$$

- La **integral inferior de f a**

$$\sup\{\underline{S}_W : W \text{ es partición de } R\} = \underline{\iint_R} f(\mathbf{u})dA.$$

Lema 3.4: Lema de las sumas inferior y superior (Darboux) para integrales dobles

$$\underline{\iint_R} f(\mathbf{u})dA \leq \overline{\iint_R} f(\mathbf{u})dA$$

Demostración. Lema

Definiciones, teoremas y propiedades a utilizar:

- **Definición de Integral Superior:**

$$\overline{\iint_R} f(u)dA = \inf\{\overline{S}_W : W \text{ es partición de } R\}$$

.

- **Definición de Integral Inferior:**

$$\underline{\iint_R} f(u)dA = \sup\{\underline{S}_W : W \text{ es partición de } R\}$$

.

- **Lema de Comparación de Sumas:** Si W_1 y W_2 son particiones cualesquiera de R, entonces:

$$\underline{S}_{W_2} \leq \overline{S}_{W_1}$$

.

Inicio de la Demostración:

La demostración se basa en las propiedades del supremo y el ínfimo aplicadas a los conjuntos de sumas superiores e inferiores.

Paso 1: Fijar una partición superior. Sea W_1 una partición fija (arbitraria) de R. Por el **Lema de Comparación de Sumas**, sabemos que para *cualquier* partición W se cumple:

$$\underline{S}_W \leq \overline{S}_{W_1}$$

Paso 2: Aplicar el Supremo. La desigualdad anterior nos dice que el valor $\overline{S}_{W_1}$ es una **cota superior** para el conjunto de todas las sumas inferiores $\{\underline{S}_W\}$. Por definición, la Integral Inferior es el *supremo* (la menor de las cotas superiores) de este conjunto. Por lo tanto:

$$\underline{\iint_R} f(\mathbf{u})dA \leq \overline{S}_{W_1}$$

Paso 3: Variar la partición superior. La desigualdad $\underline{\iint}_R f(\mathbf{u})dA \leq \overline{S}_{W_1}$ es válida para **toda** partición W_1. Esto implica que el valor $\underline{\iint}_R f(\mathbf{u})dA$ es una **cota inferior** para el conjunto de todas las sumas superiores $\{\overline{S}_{W_1}\}$.
Paso 4: Aplicar el Ínfimo. Por definición, la Integral Superior es el *ínfimo* (la mayor de las cotas inferiores) del conjunto de sumas superiores. Como la integral inferior es una cota inferior de dicho conjunto, el ínfimo debe ser mayor o igual a esa cota:

$$\underline{\iint}_R f(\mathbf{u})dA \leq \text{ínf}\{\overline{S}_W\}$$

Sustituyendo la definición de la integral superior:

$$\underline{\iint}_R f(\mathbf{u})dA \leq \overline{\iint}_R f(\mathbf{u})dA$$

■

Definición 3.6: Darboux integrable en R

Sea R un rectángulo en $\mathbb{R}^2$ y $f : R \to \mathbb{R}$ una función acotada. Si

$$\underline{\iint}_R f(\mathbf{u})dA = \overline{\iint}_R f(\mathbf{u})dA = \iint_R f(\mathbf{u})dA,$$

diremos que f es **Darboux integrable en** R y su integral es

$$\iint_R f(\mathbf{u})dA$$

Teorema 3.1: Darboux integrable

Sea R un rectángulo en $\mathbb{R}^2$ y $f : R \to \mathbb{R}$ función acotada. f es **Darboux integrable** si y solo si para todo $\epsilon \in \mathbb{R}_+$, existe una partición W de R tal que

$$\overline{S}_W - \underline{S}_W < \epsilon.$$

Demostración.Teorema
Definiciones, teoremas y propiedades a utilizar:

- **Integral Superior:** $\overline{\iint}_R f(u)dA = \text{ínf}\{\overline{S}_W : W \text{ es partición de } R\}$.
- **Integral Inferior:** $\underline{\iint}_R f(u)dA = \sup\{\underline{S}_W : W \text{ es partición de } R\}$.
- **Darboux Integrable:** f es integrable si $\underline{\iint}_R f(u)dA = \overline{\iint}_R f(u)dA$.
- **Desigualdad Fundamental:** Para cualquier partición W, $\underline{S}_W \leq \underline{\iint} f \leq \overline{\iint} f \leq \overline{S}_W$ (Deducido de definiciones de ínfimo/supremo).

Inicio de la Demostración:
Parte 1: (⇐) Suficiencia Supongamos que para todo $\epsilon > 0$ existe una partición W tal que $\overline{S}_W - \underline{S}_W < \epsilon$.
Sabemos por definición de supremo e ínfimo que para cualquier partición W:

$$\underline{S}_W \leq \underline{\iint_R} f \leq \overline{\iint_R} f \leq \overline{S}_W$$

Restando las desigualdades extremas:

$$0 \leq \overline{\iint_R} f - \underline{\iint_R} f \leq \overline{S}_W - \underline{S}_W$$

Por hipótesis, $\overline{S}_W - \underline{S}_W < \epsilon$. Entonces:

$$0 \leq \overline{\iint_R} f - \underline{\iint_R} f < \epsilon$$

Como esto es cierto para todo $\epsilon > 0$, la diferencia no negativa debe ser cero:

$$\overline{\iint_R} f - \underline{\iint_R} f = 0 \implies \overline{\iint_R} f = \underline{\iint_R} f$$

Por la definición de integrabilidad, f es integrable.
Parte 2: (⇒) Necesidad Supongamos que f es integrable. Sea $L = \iint_R f dA$. Por definición, L es el ínfimo de las sumas superiores y el supremo de las inferiores.
Dado $\epsilon > 0$, entonces $\epsilon/2 > 0$.
1. Por ser L el **ínfimo** de las sumas superiores, existe una partición W_1 tal que:

$$\overline{S}_{W_1} < L + \frac{\epsilon}{2}$$

2. Por ser L el **supremo** de las sumas inferiores, existe una partición W_2 tal que:

$$L - \frac{\epsilon}{2} < \underline{S}_{W_2} \implies L < \underline{S}_{W_2} + \frac{\epsilon}{2}$$

Sea $W = W_1 \cup W_2$ un refinamiento común. Por las propiedades de refinamiento [cite: 1511-1512]:

$$\overline{S}_W \leq \overline{S}_{W_1} < L + \frac{\epsilon}{2}$$

$$\underline{S}_{W_2} \leq \underline{S}_W \implies L - \frac{\epsilon}{2} < \underline{S}_W \implies -\underline{S}_W < -L + \frac{\epsilon}{2}$$

Sumando ambas desigualdades:

$$\overline{S}_W - \underline{S}_W < (L + \frac{\epsilon}{2}) + (-L + \frac{\epsilon}{2}) = \epsilon$$

Por lo tanto, existe una partición W tal que $\overline{S}_W - \underline{S}_W < \epsilon$.

■

3.1.5. Selección

Definición 3.7: Selección

Si W es una partición de R, definimos una **selección de** W como $\mathcal{P} \subset R$ tal que

$$\mathcal{P} = \{P_{ij} \in R_{ij} : i \in \{1, \ldots, p\}, j \in \{1, \ldots, q\}\}.$$

Un punto en cada rectángulo R_{ij}.

3.1.6. Riemann

Definición 3.8: Suma de Riemann

Sea R un rectángulo de $\mathbb{R}^2$, W una partición de R y $\mathbb{P}$ una selección de W y $f : R \to \mathbb{R}$. Se define la **suma de Riemann** de $f, W, \mathbb{P}$ como

$$S_W(f, W, \mathbb{P}) = S_W(\mathbb{P}) = \sum_W f(\mathbb{P}_{ij}) A_{ij}.$$

Definición 3.9: Sumas de Riemann

Diremos que las **sumas de Riemann convergen a** $J \in \mathbb{R}$, si para cada $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ existe $\delta \in \mathbb{R}_+$ tal que para cada partición W de R con $\|W\| < \delta$ implica que $|S_W(\mathbb{P}) - J| < \epsilon$. Este hecho lo denotamos por

$$\lim_{\|W\| \to 0} S_W(\mathbb{P}) = J.$$

Definición 3.10: Riemann Integrable

Sea R un rectángulo en $\mathbb{R}^2$ y $f : R \to \mathbb{R}$ una **función acotada**. Diremos que f es **Riemann integrable** si existe $\lim_{\|W\| \to 0} S_W(\mathbb{P})$. Y su integral es

$$\lim_{\|W\| \to 0} S_W(\mathbb{P}) = \iint_R f(\mathbf{u}) d\mathbf{A}.$$

Teorema 3.2: Riemann–Darboux.

f es **Riemann integrable** si y solo si f es **Darboux integrable**.

Nota:

Como es equivalente la integral de Riemann a la integral de Darboux, diremos simplemente que una función es **integrable**.

Teorema 3.3: Doble integral

Sean $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ y $f : R \to \mathbb{R}$ integrable. Si $c_1 \in (a_1, b_1)$ y $c_2 \in (a_2, b_2)$, tomando a

$$R_1 = [a_1, c_1] \times [a_2, b_2], \quad R_2 = [c_1, b_1] \times [a_2, b_2],$$

$$R_3 = [a_1, b_1] \times [a_2, c_2], \quad R_4 = [a_1, b_1] \times [c_2, b_2],$$

entonces

$$\iint_{R_1} f(\mathbf{u})d\mathbf{a} + \iint_{R_2} f(\mathbf{u})d\mathbf{a} = \iint_{R} f(\mathbf{u})d\mathbf{a}$$

$$y$$

$$\iint_{R_3} f(\mathbf{u})d\mathbf{a} + \iint_{R_4} f(\mathbf{u})d\mathbf{a} = \iint_{R} f(\mathbf{u})d\mathbf{a}$$

Nota:

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definimos dos funciones $f^+, f^- : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como

$$f^+(\mathbf{u}) = \begin{cases} f(\mathbf{u}) & \text{si } 0 \leq f(\mathbf{u}) \\ 0 & \text{si } f(\mathbf{u}) < 0 \end{cases}$$

$$f^-(\mathbf{u}) = \begin{cases} -f(\mathbf{u}) & \text{si } f(\mathbf{u}) \leq 0 \\ 0 & \text{si } f(\mathbf{u}) > 0 \end{cases}$$

La función f^+ se denomina la **parte positiva** de f y f^- la **parte negativa** de f. Estas funciones nos ayudan a ver

$$|f| = f^+ + f^-, \quad f = f^+ - f^-.$$

3.1.7. Propiedades de las integrales

Teorema 3.4: Teorema de las propiedades de la integral

Si $f, g : R \to \mathbb{R}$ son funciones integrables entonces:

1. $f \pm g, fg$ son integrables.
2. Si $g \leq f$, entonces
$$\iint_R g(\mathbf{u})d\mathbf{A} \leq \iint_R f(\mathbf{u})d\mathbf{A}.$$
3. Si existe $c \in \mathbb{R}_+$ tal que $c \leq g(\mathbf{u})$ para cada $\mathbf{u} \in R$, entonces $\frac{f}{g}$ es integrable.
4. f^+ y f^- son integrables.

Pregunta

Si f, g son integrables, ¿cuál es la integral $\iint_R f(\mathbf{u})g(\mathbf{u})d\mathbf{A}$ y $\iint_R \frac{f}{g}(\mathbf{u})d\mathbf{A}$?

Teorema 3.5: Teorema de la integrabilidad

Si $f : R \to \mathbb{R}$ es **continua**, entonces f es **integrable**.

Demostración.Teorema
Definiciones, teoremas y propiedades a utilizar:

1. **Criterio de Integrabilidad:** f es integrable si y solo si para todo $\epsilon > 0$, existe una partición W tal que $\overline{S}_W - \underline{S}_W < \epsilon$.

2. **Continuidad Uniforme:** f es uniformemente continua en D si $\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0$ tal que $||u - v|| < \delta \implies |f(u) - f(v)| < \epsilon$.

3. **Teorema de Heine-Cantor (en el PDF):** Si f es continua y su dominio R es cerrado y acotado (como un rectángulo), entonces f es uniformemente continua.

4. **Definiciones de Sumas:**

$$\overline{S}_W - \underline{S}_W = \sum_W (M_{ij} - m_{ij})A_{ij}$$

Donde M_{ij} y m_{ij} son el supremo e ínfimo de f en el subrectángulo R_{ij}.

Inicio de Demostración:
Paso 1: Establecer la Continuidad Uniforme
El dominio R es un rectángulo cerrado y acotado. Como f es continua en R, por la *Proposición* del final del documento, f es **uniformemente continua** en R[cite: 1732].
Paso 2: Preparar el ϵ
Sea $\epsilon > 0$ un número real arbitrario. Queremos demostrar que existe una partición W tal que la diferencia de sumas sea menor a este ϵ. Sea $V(R)$ el área (o volumen) total del rectángulo R. Definimos un ϵ' auxiliar:

$$\epsilon' = \frac{\epsilon}{V(R)} > 0$$

Paso 3: Aplicar la Continuidad Uniforme
Por la definición de continuidad uniforme aplicada a ϵ', existe un $\delta > 0$ tal que para cualesquiera $u, v \in R$:

$$||u - v|| < \delta \implies |f(u) - f(v)| < \epsilon' = \frac{\epsilon}{V(R)} \tag{5}$$

Paso 4: Elegir la Partición
Elegimos una partición W tal que la norma de la partición sea menor que δ ($||W|| < \delta$). Esto significa que para cualquier subrectángulo R_{ij}, la distancia máxima entre dos puntos cualesquiera dentro de él es menor que δ[cite: 1469].
Paso 5: Acotar la oscilación en cada subrectángulo
En cada subrectángulo R_{ij} (que es cerrado y acotado), la función continua f alcanza su máximo y su mínimo. Sean u_{max} y u_{min} puntos en R_{ij} tales que:

$$f(u_{max}) = M_{ij} \quad \text{y} \quad f(u_{min}) = m_{ij}$$

Como $u_{max}, u_{min} \in R_{ij}$ y la norma de la partición es $< \delta$, entonces $||u_{max} - u_{min}|| < \delta$. Aplicando (5):

$$M_{ij} - m_{ij} = f(u_{max}) - f(u_{min}) < \frac{\epsilon}{V(R)}$$

Paso 6: Sumar sobre la partición
Evaluamos la diferencia de las sumas de Darboux:

$$\begin{aligned}\overline{S}_W - \underline{S}_W &= \sum_W M_{ij}A_{ij} - \sum_W m_{ij}A_{ij}\\ &= \sum_W (M_{ij} - m_{ij})A_{ij}\end{aligned}$$

Sustituyendo la cota encontrada en el Paso 5:

$$\sum_W (M_{ij} - m_{ij})A_{ij} < \sum_W \left(\frac{\epsilon}{V(R)}\right) A_{ij}$$

Como $\frac{\epsilon}{V(R)}$ es constante, lo sacamos de la sumatoria:

$$= \frac{\epsilon}{V(R)} \sum_W A_{ij}$$

Sabemos que la suma de las áreas de los subrectángulos es el área total de R, es decir, $\sum_W A_{ij} = V(R)$.

$$= \frac{\epsilon}{V(R)} \cdot V(R) = \epsilon$$

Conclusión:
Hemos encontrado una partición W tal que $\overline{S}_W - \underline{S}_W < \epsilon$. Por el criterio de integrabilidad[cite: 1544], f es integrable.

■

Teorema 3.6: Teorema del valor medio para integrales dobles

Si $f, g : R \to \mathbb{R}$ son **integrables** y $0 \leq g(\mathbf{u})$ para cada $\mathbf{u} \in R$, entonces existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $m \leq \mu \leq M$ y

$$\iint_R f(\mathbf{u})g(\mathbf{u})d\mathbf{A} = \mu \iint_R g(\mathbf{u})d\mathbf{A}.$$

Y si f es continua existe $\mathbf{u}_0 \in R$ tal que $\mu = f(\mathbf{u}_0)$.

Demostración.Teorema
Definiciones, teoremas y propiedades a utilizar:

- **Acotación:** Si f es integrable en R, es acotada.Definimos $m = \inf\{f(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in R\}$ y $M = \sup\{f(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in R\}$.
- **Monotonía de la Integral:** Si $g \leq h$ en R, entonces $\iint_R g dA \leq \iint_R h dA$[cite: 1589].
- **Teorema de Extremos Globales:** Si f es continua en un conjunto cerrado y acotado R, entonces alcanza sus valores máximo y mínimo en R .
- **Conexidad:** Un rectángulo es un conjunto convexo y por tanto conexo.

Incio de Demostración:

Parte 1: Existencia de μ

Paso 1: Acotación

Como f es integrable en el rectángulo R, es acotada. Por definición de ínfimo (m) y supremo (M):

$$m \leq f(\mathbf{u}) \leq M \quad \forall \mathbf{u} \in R$$

Paso 2: Introducción de la función ponderada g

Por hipótesis, $g(\mathbf{u}) \geq 0$ para todo $\mathbf{u} \in R$. Multiplicando la desigualdad anterior por $g(\mathbf{u})$, el sentido de la desigualdad se mantiene:

$$mg(\mathbf{u}) \leq f(\mathbf{u})g(\mathbf{u}) \leq Mg(\mathbf{u})$$

Paso 3: Integración

Como f y g son integrables, su producto fg también lo es. Aplicamos la propiedad de **monotonía de la integral** [cite: 1589] a la desigualdad:

$$\iint_R mg(\mathbf{u})d\mathbf{A} \leq \iint_R f(\mathbf{u})g(\mathbf{u})d\mathbf{A} \leq \iint_R Mg(\mathbf{u})d\mathbf{A}$$

Por la linealidad de la integral (las constantes salen fuera):

$$m\iint_R g(\mathbf{u})d\mathbf{A} \leq \iint_R f(\mathbf{u})g(\mathbf{u})d\mathbf{A} \leq M\iint_R g(\mathbf{u})d\mathbf{A}$$

Paso 4: Definición de μ

Caso A: Si $\iint_R g(\mathbf{u})d\mathbf{A} = 0$, entonces la desigualdad implica que $\iint_R f(\mathbf{u})g(\mathbf{u})d\mathbf{A} = 0$. La ecuación del teorema se cumple trivialmente para cualquier μ (por ejemplo, $\mu = m$).

Caso B: Si $\iint_R g(\mathbf{u})d\mathbf{A} > 0$, podemos dividir toda la desigualdad por este valor:

$$m \leq \frac{\iint_R f(\mathbf{u})g(\mathbf{u})d\mathbf{A}}{\iint_R g(\mathbf{u})d\mathbf{A}} \leq M$$

Definimos μ como este cociente. Claramente $m \leq \mu \leq M$, y despejando obtenemos la igualdad deseada:

$$\iint_R f(\mathbf{u})g(\mathbf{u})d\mathbf{A} = \mu\iint_R g(\mathbf{u})d\mathbf{A}$$

Parte 2: Caso f Continua

Si f es continua en R:

1. El rectángulo R es un conjunto **cerrado y acotado** (compacto).
2. Por el **Teorema de Extremos Globales**, f alcanza su mínimo m y su máximo M en R. Es decir, existen $\mathbf{u}_{min}, \mathbf{u}_{max} \in R$ tales que $f(\mathbf{u}_{min}) = m$ y $f(\mathbf{u}_{max}) = M$.
3. El rectángulo R es un conjunto **convexo**, y por lo tanto es conexo[cite: 693].
4. La imagen continua de un conjunto conexo es conexa. Por tanto, la imagen $f(R)$ es el intervalo $[m, M]$.
5. Como hemos demostrado que $m \leq \mu \leq M$, entonces μ pertenece a la imagen de f.

Por lo tanto, existe al menos un $\mathbf{u}_0 \in R$ tal que $f(\mathbf{u}_0) = \mu$.

$\blacksquare$

Proposición 3.1:

Sea $f : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] = R \to \mathbb{R}, \mathbf{u} \mapsto u_1$, ¿es integrable? Para $W = \{a_1 = x_0, \ldots, x_p = b_1\} \times \{a_2 = y_0, \ldots, y_q = b_2\}$ una partición de R, tenemos que

$$M_{ij} = x_i, \quad m_{ij} = x_{i-1}, \quad A_{ij} = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}).$$

De esta manera obtenemos que

$$\overline{S}_W = \sum_W M_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^{q} \sum_{i=1}^{p} x_i (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) =$$

$$\sum_{j=1}^{q} (y_j - y_{j-1}) \sum_{i=1}^{p} x_i (x_i - x_{i-1}) = [b_2 - a_2] \sum_{i=1}^{p} x_i (x_i - x_{i-1}) =$$

$$[b_2 - a_2] \sum_{i=1}^{p} (x_i^2 - x_i x_{i-1}) = [b_2 - a_2] \left(\sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{i=1}^{p} x_i x_{i-1} \right)$$

$$[b_2 - a_2] \left(\sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{i=1}^{p} x_i x_{i-1} \right) =$$

$$[b_2 - a_2] \left(\sum_{i=1}^{p} \frac{x_i^2}{2} + \sum_{i=1}^{p} \frac{x_i^2}{2} - \sum_{i=1}^{p} \frac{2x_i x_{i-1}}{2} \right) =$$

$$[b_2 - a_2] \left(\frac{x_p^2 - x_0^2}{2} + \sum_{i=1}^{p} \frac{x_{i-1}^2}{2} + \sum_{i=1}^{p} \frac{x_i^2}{2} - \sum_{i=1}^{p} \frac{2x_i x_{i-1}}{2} \right) =$$

$$[b_2 - a_2] \left(\frac{x_p^2 - x_0^2}{2} + \sum_{i=1}^{p} \frac{x_i^2 + x_{i-1}^2 - 2x_i x_{i-1}}{2} \right) =$$

$$[b_2 - a_2] \left(\frac{b_1^2 - a_1^2}{2} + \sum_{i=1}^{p} \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2} \right) =$$

$$[b_2 - a_2] \left(\frac{b_1^2 - a_1^2}{2} \right) + [b_2 - a_2] \sum_{i=1}^{p} \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2}$$

Así

$$\overline{S}_W = [b_2 - a_2] \left(\frac{b_1^2 - a_1^2}{2} \right) + [b_2 - a_2] \sum_{i=1}^{p} \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2}$$

y de manera análoga se deduce que

$$\underline{S}_W = [b_2 - a_2] \left(\frac{b_1^2 - a_1^2}{2} \right) - [b_2 - a_2] \sum_{i=1}^{p} \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2}$$

Tomando $E_W = [b_2 - a_2] \sum_{i=1}^{p} \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2}$ vemos que

$$\overline{S}_W = [b_2 - a_2] \left(\frac{b_1^2 - a_1^2}{2} \right) + E_W \quad y$$

$$\underline{S}_W = [b_2 - a_2]\left(\frac{b_1^2 - a_1^2}{2}\right) - E_W.$$

De lo anterior tenemos que

$$\overline{\iint_R} f(\mathbf{u})d\mathbf{A} = [b_2 - a_2]\left(\frac{b_1^2 - a_1^2}{2}\right).$$

$$\underline{\iint_R} f(\mathbf{u})d\mathbf{A} = [b_1 - a_1]\left(\frac{b_1^2 - a_1^2}{2}\right).$$

Por lo que podemos afirmar que Darboux integrable y su integral es

$$\iint_R f(\mathbf{u})d\mathbf{A} = [b_2 - a_2]\left(\frac{b_1^2 - a_1^2}{2}\right).$$

Proposición 3.2: Integrable

Sean $f : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] = R \to \mathbb{R}, \mathbf{u} \mapsto u_1 + u_2$, ¿es integrable? Como f es una **función continua**, es integrable. Por lo que existe

$$\lim_{\|W\| \to 0} S_W(\mathcal{C})$$

Por lo que podemos escoger unas particiones y selecciones muy particulares, pues ya sabemos que el límite existe. Ahora para $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$\mathcal{P} = \left\{ x_k = \frac{kb_1 + (n-k)a_1}{n} : k \in \{0, \ldots, n\} \right\}$$

$$\mathcal{Q} = \left\{ y_k = \frac{kb_2 + (n-k)a_2}{n} : k \in \{0, \ldots, n\} \right\}$$

tenemos que $W = \mathcal{P} \times \mathcal{Q}$ es una partición de R y si $\mathcal{C} = \{\mathcal{C}_{ij} = (x_i, y_j) : i \in \{1, \ldots, p\}, j \in \{1, \ldots, q\}\}$ una selección de W, tenemos que

$$f(\mathcal{C}_{ij}) = x_i + y_j, \quad A_{ij} = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = \frac{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)}{n^2}.$$

De lo anterior se sigue

$$S_W(\mathcal{C}) = \sum_W f(\mathcal{C}_{ij})A_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_j)\frac{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)}{n^2} =$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)}{n^2} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{y_j(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)}{n^2} =$$

$$(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n^2} + (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\sum_{j=1}^{n} y_j \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^2} =$$

$$(b_1-a_1)(b_2-a_2)\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{j=1}^{n}y_j\right)$$

Luego entonces

$$S_W(e)=(b_1-a_1)(b_2-a_2)\left(\left(\frac{b_1}{2}\left[\frac{n+1}{n}\right]+\frac{a_1}{2}\left[\frac{n-1}{n}\right]\right)+\left(\frac{b_2}{2}\left[\frac{n+1}{n}\right]+\frac{a_2}{2}\left[\frac{n-1}{n}\right]\right)\right)$$

$$=(b_1-a_1)(b_2-a_2)\left[\frac{b_1+a_1}{2}+\frac{b_2+a_2}{2}+\frac{b_1+b_2-a_1-a_2}{2n}\right]$$

por lo cual tenemos

$$\lim_{\|\mathbb{W}\|\to 0}S_W(\mathcal{C})=$$

$$\lim_{n\to\infty}(b_1-a_1)(b_2-a_2)\left[\frac{b_1+a_1}{2}+\frac{b_2+a_2}{2}+\frac{b_1+b_2-a_1-a_2}{2n}\right]=$$

$$=(b_1-a_1)(b_2-a_2)\left[\frac{b_1+a_1}{2}+\frac{b_2+a_2}{2}\right]=$$

$$=\frac{(b_1^2-a_1^2)(b_2-a_2)}{2}+\frac{(b_1-a_1)(b_2^2-a_2^2)}{2}.$$

Por lo tanto

$$\iint_R f(\mathbf{u})d\mathbf{A}=\frac{(b_1^2-a_1^2)(b_2-a_2)}{2}+\frac{(b_1-a_1)(b_2^2-a_2^2)}{2}.$$

3.1.8. Integrales iteradas

Definición 3.11: Interal Iterada

Si f es una función definida en un rectángulo $R=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$, si para cada x fija la función de y es integrable, entonces se define una función g en $[a_1,b_1]$ como:

$$g(x)=\int_{a_2}^{b_2}f(x,y)dy.$$

Ahora, si g resulta ser integrable, entonces tenemos

$$\int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_2}^{b_2}f(x,y)dy\right)dx$$

es denominada la **integral iterada** y la denotaremos por

$$\int_{a_1}^{b_1}dx\int_{a_2}^{b_2}f(x,y)dy$$

De manera análoga para

$$\int_{a_2}^{b_2}dy\int_{a_1}^{b_1}f(x,y)dx$$

Una suma de Riemann $S_R(E)$ en este caso
la podemos ver como

$$S_w((\mathcal{C})) = \sum_w f(x_i, y_j)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{p}(x_i - x_{i-1}) \sum_{j=1}^{p} f(x_i, y_j)(y_j - y_{j-1})$$

Así podemos esperar que

$$\iint_R f(\mathbf{U})dA = \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_1}^{b_2} f(x, y)$$

Demostración.
Queremos demostrar que:

$$\overline{\iint}_R f(\mathbf{u})dA = \underline{\iint}_R f(\mathbf{u})dA = [b_2 - a_2]\left(\frac{b_1^2 - a_1^2}{2}\right)$$

Paso 1: Análisis del término E_W Sea $||W||$ la norma de la partición W, definida como la longitud máxima de los lados de los subrectángulos. Para la partición del intervalo $[a_1, b_1]$, tenemos que $x_i - x_{i-1} \leq ||W||$ para todo i.
Analicemos la sumatoria en E_W:

$$\sum_{i=1}^{p}(x_i - x_{i-1})^2 = \sum_{i=1}^{p}(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$$

Como $(x_i - x_{i-1}) \leq ||W||$:

$$\sum_{i=1}^{p}(x_i - x_{i-1})^2 \leq ||W|| \sum_{i=1}^{p}(x_i - x_{i-1})$$

Sabemos que la suma de las longitudes de los subintervalos es la longitud total del intervalo $[a_1, b_1]$:

$$\sum_{i=1}^{p}(x_i - x_{i-1}) = b_1 - a_1$$

Por lo tanto:

$$E_W \leq [b_2 - a_2]\frac{||W||(b_1 - a_1)}{2}$$

Esto implica que si hacemos la partición suficientemente fina ($||W|| \to 0$), el término E_W tiende a 0. Dado que E_W es una suma de cuadrados, también sabemos que $E_W \geq 0$.

$$\text{ínf}\{E_W : W \text{ es partición}\} = 0$$

Paso 2: Integral Superior Por definición:

$$\overline{\iint}_R f(\mathbf{u})dA = \text{ínf}\{\overline{S}_W\}$$

Sustituyendo:

$$\overline{\iint_R} f(\mathbf{u})dA = \inf\left\{[b_2 - a_2]\left(\frac{b_1^2 - a_1^2}{2}\right) + E_W\right\}$$

Como el primer término es constante respecto a W:

$$= [b_2 - a_2]\left(\frac{b_1^2 - a_1^2}{2}\right) + \inf\{E_W\}$$

$$= [b_2 - a_2]\left(\frac{b_1^2 - a_1^2}{2}\right) + 0$$

Paso 3: Integral Inferior Por definición:

$$\underline{\iint_R} f(\mathbf{u})dA = \sup\{\underline{S}_W\}$$

Sustituyendo :

$$\underline{\iint_R} f(\mathbf{u})dA = \sup\left\{[b_2 - a_2]\left(\frac{b_1^2 - a_1^2}{2}\right) - E_W\right\}$$

El supremo de una resta donde la variable es positiva y tiene ínfimo 0:

$$= [b_2 - a_2]\left(\frac{b_1^2 - a_1^2}{2}\right) - \inf\{E_W\}$$

$$= [b_2 - a_2]\left(\frac{b_1^2 - a_1^2}{2}\right) - 0$$

Conclusión Hemos demostrado que:

$$\overline{\iint_R} f(\mathbf{u})dA = [b_2 - a_2]\left(\frac{b_1^2 - a_1^2}{2}\right)$$

y

$$\underline{\iint_R} f(\mathbf{u})dA = [b_2 - a_2]\left(\frac{b_1^2 - a_1^2}{2}\right)$$

Como la integral superior es igual a la integral inferior, concluimos que f es Darboux integrable y su valor es:

$$\iint_R f(\mathbf{u})dA = [b_2 - a_2]\left(\frac{b_1^2 - a_1^2}{2}\right)$$

.

■

Teorema 3.7: Fubini

Sea $f : R \to \mathbb{R}$ una función *integrable en el rectángulo R. Si para cada x fijo la función de y es integrable, entonces la función $g(x)$ definida como

$$g(x) = \int_{a_2}^{b_2} f(x,y)dy$$

resulta ser una función integrable de x y se tiene que

$$\iint_R f(\mathbf{x})dA = \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} f(x,y)dy$$

Demostración.Teorema
Definiciones, teoremas y propiedades a utilizar:

- **Partición de un Rectángulo:** Si $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, una partición W es $P \times Q$, donde $P = \{x_0, \ldots, x_p\}$ y $Q = \{y_0, \ldots, y_q\}$.
- **Área del Subrectángulo:** $A_{ij} = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$.
- **Suma de Riemann:** $S_W(f) = \sum_W f(P_{ij})A_{ij}$.
- **Definición de la función** g**:** $g(x) = \int_{a_2}^{b_2} f(x,y)dy$.

Inicio demostración:
Paso 1: Planteamiento de la Suma de Riemann
Consideramos una partición W y una selección de puntos $C_{ij} = (x_i, y_j)$. La suma de Riemann para la integral doble es:

$$S_W = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} f(x_i, y_j) A_{ij}$$

Sustituyendo la definición de área A_{ij}:

$$S_W = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} f(x_i, y_j)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

Paso 2: Factorización de la Suma (Agrupamiento)
Dado que el término $(x_i - x_{i-1})$ no depende del índice j, podemos sacarlo de la sumatoria interna. Agrupamos los términos que dependen de y (índice j):

$$S_W = \sum_{i=1}^{p} (x_i - x_{i-1}) \left[\sum_{j=1}^{q} f(x_i, y_j)(y_j - y_{j-1}) \right] \tag{6}$$

Paso 3: Identificación de la Integral Interna
Observamos el término entre corchetes:

$$\sum_{j=1}^{q} f(x_i, y_j)(y_j - y_{j-1})$$

Esta expresión es una **Suma de Riemann para una función de una variable** ($y \mapsto f(x_i, y)$) sobre el intervalo $[a_2, b_2]$. Al tomar el límite cuando la norma de la partición tiende a cero, esta suma converge a la integral definida respecto a y:

$$\sum_{j=1}^{q} f(x_i, y_j)(y_j - y_{j-1}) \approx \int_{a_2}^{b_2} f(x_i, y)dy = g(x_i)$$

Paso 4: Identificación de la Integral Externa
Sustituyendo la aproximación del Paso 3 en la ecuación :

$$S_W \approx \sum_{i=1}^{p} g(x_i)(x_i - x_{i-1})$$

Esta nueva expresión es una Suma de Riemann para la función $g(x)$ sobre el intervalo $[a_1, b_1]$. Al tomar el límite, converge a:

$$\int_{a_1}^{b_1} g(x)dx$$

Conclusión
Dado que f es integrable, el límite de las sumas de Riemann S_W es la integral doble.Por la factorización anterior, este límite coincide con la integral iterada[cite: 1652]:

$$\iint_R f(\mathbf{x})dA = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x, y)dy \right) dx$$

.

■

Corolario 3.1:

Si f es integrable en un rectángulo R, además si para cada x la función resulta ser integrable de y y para cada y una función integrable de x entonces

$$\int_{a_1}^{b_1} dy \int_{a_2}^{b_2} f(x, y)dx = \int_{a_2}^{b_2} dx \int_{a_1}^{b_1} f(x, y)dy$$

Demostración.Se sigue del teorema anterior. ■

Nota:

Esto nos dice que si f es integrable en x y es integrable en $\mathcal{C}$, entonces f es integrable en en y es integrable en y

$$\iint_R f(\mathbf{u})dA = \int_{a_2}^{b_2} dy \int_{a_1}^{b_1} f(x, y)dx$$

O también

$$\iint_R f(\mathbf{u})dA = \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} f(x, y)dy$$

Cuidado: Considerar $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ 3y^2 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Tendremos

1. f no es integrable sobre R
2. La integral iterada $\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)dx$ existe
3. La integral iterada $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy$ no existe

La segunda no existe ya que fijando
$y_0 \in [0,1]$

$$f_2(x) = f(x,y_0) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ 3y^2 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Si $y_0 = 1$

$$f_{x_0}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ 3 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Con lo anterior podemos aplicar lo que sabemos de una variable para calcular las dobles integrales.

Ejercicio 3.1: Calculo de integrales

Calcula las integrales

1. $\iint_R \frac{x^2}{y}\, dA$, con $R = [-2,2] \times [1,2]$

   Aplicamos Fubini integrando primero respecto a y y luego respecto a x:

$$I_1 = \int_{-2}^{2} \left[\int_1^2 \frac{x^2}{y}\, dy \right] dx$$

Paso 1: Integral Interna (respecto a y) Consideramos x constante:

$$\int_1^2 x^2 \frac{1}{y}\, dy = x^2 [\ln|y|]_1^2 = x^2(\ln(2) - \ln(1)) = x^2 \ln(2)$$

Paso 2: Integral Externa (respecto a x)

$$I_1 = \int_{-2}^{2} x^2 \ln(2)\, dx = \ln(2) \int_{-2}^{2} x^2\, dx$$

$$= \ln(2) \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-2}^{2} = \ln(2) \left(\frac{2^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3} \right)$$

$$= \ln(2) \left(\frac{8}{3} - \left(-\frac{8}{3} \right) \right) = \ln(2) \left(\frac{16}{3} \right)$$

Resultado:

$$\iint_R \frac{x^2}{y}\, dA = \frac{16 \ln(2)}{3}$$

2. $\iint_R \frac{x}{y}\,dA$, con $R = [-1,1] \times [1,2]$

$$I_2 = \int_{-1}^{1} \left[\int_{1}^{2} \frac{x}{y}\,dy \right] dx$$

Paso 1: Integral Interna

$$\int_1^2 xy^{-1}\,dy = x[\ln|y|]_1^2 = x\ln(2)$$

Paso 2: Integral Externa

$$I_2 = \int_{-1}^{1} x\ln(2)\,dx = \ln(2)\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \ln(2)\left(\frac{1}{2} - \frac{(-1)^2}{2}\right) = \ln(2)(0) = 0$$

Resultado:

$$\iint_R \frac{x}{y}\,dA = 0$$

3. $\iint_R \cos(x+ye)\,dA$, con $R = [0,\pi] \times [0,\pi]$

$$I_3 = \int_0^{\pi} \left[\int_0^{\pi} \cos(x+ye)\,dy \right] dx$$

Paso 1: Integral Interna (respecto a y) Usamos sustitución $u = x + ye \implies du = e\,dy$:

$$\int_0^{\pi} \cos(x+ye)\,dy = \left[\frac{1}{e}\sin(x+ye)\right]_{y=0}^{y=\pi}$$

$$= \frac{1}{e}\left(\sin(x+\pi e) - \sin(x)\right)$$

Paso 2: Integral Externa (respecto a x)

$$I_3 = \frac{1}{e}\int_0^{\pi} (\sin(x+\pi e) - \sin(x))\,dx$$

$$= \frac{1}{e}\left[-\cos(x+\pi e) - (-\cos(x))\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{e}\left[\cos(x) - \cos(x+\pi e)\right]_0^{\pi}$$

Evaluando en los límites:

- En $x = \pi$: $\cos(\pi) - \cos(\pi + \pi e) = -1 - \cos(\pi(1+e))$
- En $x = 0$: $\cos(0) - \cos(0 + \pi e) = 1 - \cos(\pi e)$

Restando (Superior - Inferior):

$$I_3 = \frac{1}{e}\left((-1-\cos(\pi(1+e))) - (1-\cos(\pi e))\right)$$
$$= \frac{1}{e}\left(\cos(\pi e) - \cos(\pi + \pi e) - 2\right)$$

Recordando que $\cos(A+\pi) = -\cos(A)$, tenemos $\cos(\pi e + \pi) = -\cos(\pi e)$.

$$I_3 = \frac{1}{e}\left(\cos(\pi e) - (-\cos(\pi e)) - 2\right) = \frac{1}{e}(2\cos(\pi e) - 2)$$

Resultado:

$$\iint_R \cos(x+ye)\,dA = \frac{2(\cos(\pi e)-1)}{e}$$

4. $\iint_R (x+y)\,dA$, con $R = [-2,2]\times[1,2]$

$$I_4 = \int_{-2}^{2} dx \int_1^2 (x+y)\,dy$$

Paso 1: Integral Interna

$$\int_1^2 (x+y)\,dy = \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_1^2$$
$$= \left(2x + \frac{4}{2}\right) - \left(x + \frac{1}{2}\right) = 2x + 2 - x - 0{,}5 = x + 1{,}5$$

Paso 2: Integral Externa

$$I_4 = \int_{-2}^{2} (x+1{,}5)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + 1{,}5x\right]_{-2}^{2}$$
$$= \left(\frac{4}{2} + 1{,}5(2)\right) - \left(\frac{4}{2} + 1{,}5(-2)\right)$$
$$= (2+3) - (2-3) = 5 - (-1) = 6$$

Resultado:

$$\iint_R (x+y)\,dA = 6$$

Definiciones, teoremas y propiedades utilizadas:

- Si f es integrable en un rectángulo $R = [a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$, la integral doble se puede calcular como una integral iterada:

$$\iint_R f(\mathbf{u})dA = \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} f(x,y)dy$$

.

- También utilizaremos la **Linealidad** de la integral para separar términos cuando sea necesario ($f+g$ es integrable) .

3.2. Triples integerales

Para funciones $f : R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \to \mathbb{R}$ con R un cubo en $\mathbb{R}^3$, se pueden generalizar todas las propiedades y definiciones vistas hasta ahora y tendremos las integrales iteradas como

$$\iiint_R f(\mathbf{u})dV = \int_{a_1}^{b_1} dx \iint_{R_{yz}} f(x,y,z)dydz,$$

$$\iiint_R f(\mathbf{u})dV = \iint_{R_{yz}} dydz \int_{a_1}^{b_1} f(x,y,z)dx,$$

donde $R_{yz} = [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$. Y de manera análoga las demás integrales iteradas, usando las integrales iteradas de una doble integral.

Ejercicio 3.2: Triple integral

Escribir, sin demostrar, todo esto para la triple integral.
Con lo anterior, si f es integrable en un cubo R y se cumple con las condiciones necesarias (a redactar como Ejercicio anterior) tendremos que

$$\iiint_R f(\mathbf{u})dV = \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} dy \int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)dz.$$

Solución y Argumentación:
1. Partición del Cubo Sea $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \subset \mathbb{R}^3$ un cubo (caja rectangular). Diremos que W es una **partición del cubo** R si existen particiones P, Q, S de $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$ y $[a_3, b_3]$ respectivamente, tales que $W = P \times Q \times S$[cite: 1464].
Esto divide a R en subcubos R_{ijk} con volumen:

$$V_{ijk} = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1})$$

2. Sumas de Darboux Sea $f : R \to \mathbb{R}$ una función acotada. Definimos:

$$M_{ijk} = \sup\{f(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in R_{ijk}\} \quad \text{y} \quad m_{ijk} = \inf\{f(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in R_{ijk}\}$$

- **Suma Superior:** $\overline{S}_W = \sum_W M_{ijk}V_{ijk}$.
- **Suma Inferior:** $\underline{S}_W = \sum_W m_{ijk}V_{ijk}$.

3. Integrabilidad La función f se dice **Darboux integrable** en R si:

$$\sup\{\underline{S}_W\} = \inf\{\overline{S}_W\}$$

Denotamos este valor común como la triple integral: $\iiint_R f(\mathbf{u})dV$.
4. Teorema de Fubini (Generalización) Si $f : R \to \mathbb{R}$ es integrable en el cubo R. Si para cada x fijo, la integral doble sobre el rectángulo $R_{yz} = [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ existe, y a su vez las integrales simples iteradas existen, entonces:

$$\iiint_R f(\mathbf{u})dV = \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} dy \int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)dz.$$

Esta igualdad es válida para cualquier orden de integración (por ejemplo $dydxdz$, $dzdxdy$, etc.) siempre que f sea continua en R[cite: 1698].

Observación: Si f es una función continua en R (rectángulo o cubo) puede calcularse su integral como integrales iteradas en **cualquier orden**.

Demostración.Observación
Definiciones, teoremas y propiedades utilizadas:

1. **Teorema (Continuidad implica Integrabilidad):** Si $f : R \to \mathbb{R}$ es continua, entonces f es integrable.

2. **Teorema de Fubini:** Si f es integrable en R y para cada x fijo la función de y es integrable, entonces $\iint_R f dA = \int dx \int f dy$.

3. **Corolario (Intercambio de Orden):** Si f es integrable en R, y además las integrales parciales existen (es decir, para cada x es integrable en y, y para cada y es integrable en x), entonces:
$$\int_{a_1}^{b_1} dy \int_{a_2}^{b_2} f(x,y)dx = \int_{a_2}^{b_2} dx \int_{a_1}^{b_1} f(x,y)dy$$
.

Inicio Demostración:
Sea $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ un rectángulo en $\mathbb{R}^2$ (la demostración es análoga para $\mathbb{R}^3$).
Paso 1: Integrabilidad Global
Por hipótesis, f es continua en el rectángulo R. Aplicando el Teorema de Integrabilidad para funciones continuas, concluimos que f es integrable sobre R. Esto satisface la primera condición del Teorema de Fubini y su Corolario.
Paso 2: Integrabilidad de las Secciones (Fijando x)
Para cualquier $x_0 \in [a_1, b_1]$ fijo, definimos la función de una variable:

$$g_{x_0}(y) = f(x_0, y)$$

Como f es continua en todo R, la restricción g_{x_0} es continua en el intervalo cerrado $[a_2, b_2]$. Sabemos (por Cálculo I y por la analogía en dimensión 1 mencionada en el texto) que toda función continua en un intervalo cerrado es integrable. Por lo tanto, $\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)dy$ existe para todo x.
Paso 3: Integrabilidad de las Secciones (Fijando y)
De manera análoga, para cualquier $y_0 \in [a_2, b_2]$ fijo, la función $h_{y_0}(x) = f(x, y_0)$ es continua en $[a_1, b_1]$. Por lo tanto, es integrable respecto a x. Así, $\int_{a_1}^{b_1} f(x,y)dx$ existe para todo y.
Paso 4: Aplicación del Corolario
Hemos verificado que:

1. f es integrable en el rectángulo R (por continuidad global).

2. Para cada x, la función es integrable en y (por continuidad de la sección).

3. Para cada y, la función es integrable en x (por continuidad de la sección).

Estas son exactamente las hipótesis requeridas por el **Corolario**. En consecuencia:

$$\int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)dy \right) dx = \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x,y)dx \right) dy$$

Conclusión:
La integral doble $\iint_R f(\mathbf{u})dA$ puede calcularse mediante integrales iteradas en cualquier orden, ya que ambos órdenes producen el mismo resultado y coinciden con el valor de la integral doble. ■

Ejercicio 3.3: Calculo de Integrales

Calcular las integrales siguientes.

1. $\iiint_R \sin(x+2y+3z)\,dx\,dy\,dz$, con $R = [0,\pi]\times[0,\pi]\times[0,\pi]$.
   Planteamos la integral iterada en el orden $dz \to dy \to dx$:

$$I_1 = \int_0^\pi dx \int_0^\pi dy \int_0^\pi \sin(x+2y+3z)\,dz$$

Paso 1: Integral interna (respecto a z)

$$\int_0^\pi \sin(x+2y+3z)\,dz = \left[-\frac{1}{3}\cos(x+2y+3z)\right]_{z=0}^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\cos(x+2y+3\pi) - \cos(x+2y)\right)$$

Sabemos que $\cos(\theta+3\pi) = -\cos(\theta)$. Por tanto:

$$= -\frac{1}{3}\left(-\cos(x+2y) - \cos(x+2y)\right) = \frac{2}{3}\cos(x+2y)$$

Paso 2: Integral media (respecto a y)

$$\int_0^\pi \frac{2}{3}\cos(x+2y)\,dy = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{2}\sin(x+2y)\right]_0^\pi$$

$$= \frac{1}{3}\left(\sin(x+2\pi) - \sin(x)\right)$$

Como la función seno tiene periodo 2π, $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$:

$$= \frac{1}{3}(\sin(x) - \sin(x)) = 0$$

Paso 3: Integral externa (respecto a x)

$$I_1 = \int_0^\pi 0\,dx = 0$$

Resultado: 0.

2. $\iiint_R (x+y+z)\,dx\,dy\,dz$, con $R = [-1,1]\times[2,3]\times[0,2]$.
   Por linealidad, separamos en tres integrales:

$$I_2 = \iiint_R x dV + \iiint_R y dV + \iiint_R z dV$$

Calculamos el volumen de la caja para simplificar las constantes: $V(R) = (1-(-1)) \cdot (3-2) \cdot (2-0) = 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4$.

Parte A: Término x

$$\iiint_R x dV = \left(\int_{-1}^{1} x dx \right) \cdot \text{Long}_y \cdot \text{Long}_z$$

Como integras una función impar x en un intervalo simétrico $[-1,1]$, el resultado es 0.

Parte B: Término y

$$\iiint_R y dV = \text{Long}_x \cdot \left(\int_{2}^{3} y dy \right) \cdot \text{Long}_z$$

$$= 2 \cdot \left[\frac{y^2}{2} \right]_2^3 \cdot 2 = 4 \left(\frac{9}{2} - \frac{4}{2} \right) = 4 \left(\frac{5}{2} \right) = 10$$

Parte C: Término z

$$\iiint_R z dV = \text{Long}_x \cdot \text{Long}_y \cdot \left(\int_{0}^{2} z dz \right)$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^2 = 2 \left(\frac{4}{2} - 0 \right) = 4$$

Resultado: $0 + 10 + 4 = 14$.

3. $\iiint_R x\, dx\, dy\, dz$, con $R = [1,2] \times [0,4] \times [-10,10]$.

   Como la función solo depende de x, la integral se separa como el producto de integrales unidimensionales:

$$I_3 = \left(\int_1^2 x\, dx \right) \left(\int_0^4 dy \right) \left(\int_{-10}^{10} dz \right)$$

   Calculamos cada factor:

   a) $\int_1^2 x\, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

   b) $\int_0^4 dy = 4 - 0 = 4$.

   c) $\int_{-10}^{10} dz = 10 - (-10) = 20$.

   Cálculo final:

$$I_3 = \frac{3}{2} \cdot 4 \cdot 20 = 3 \cdot 2 \cdot 20 = 120$$

4. $\iiint_R (x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz$, con $R = [-2,2] \times [-1,1] \times [0,3]$.

   Separamos por linealidad. Las longitudes de los lados son: $L_x = 4, L_y = 2, L_z = 3$.

   Integral de x^2:

$$\int_{-2}^{2} x^2 dx \cdot L_y \cdot L_z = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-2}^{2} \cdot 2 \cdot 3 = \left(\frac{8}{3} - \frac{-8}{3} \right) \cdot 6 = \frac{16}{3} \cdot 6 = 32$$

Integral de y^2:

$$L_x \cdot \int_{-1}^{1} y^2 dy \cdot L_z = 4 \cdot \left[\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{1} \cdot 3 = 12 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{-1}{3}\right) = 12 \cdot \frac{2}{3} = 8$$

Integral de z^2:

$$L_x \cdot L_y \cdot \int_{0}^{3} z^2 dz = 4 \cdot 2 \cdot \left[\frac{z^3}{3}\right]_{0}^{3} = 8 \cdot \left(\frac{27}{3} - 0\right) = 8 \cdot 9 = 72$$

Suma Total:

$$32 + 8 + 72 = 112$$

Definiciones, teoremas y propiedades utilizadas:

- **Integrales Iteradas (Fubini):** Si f es continua en R, la integral triple se puede calcular integrando iteradamente en cualquier orden:

$$\iiint_R f(u)dV = \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} dy \int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)dz$$

.

- **Linealidad:** La integral de una suma es la suma de las integrales (generalización de propiedades previas).

3.3. Contenido cero

Definición 3.12: Contenido cero

Un conjunto $S \subset \mathbb{R}^2(\mathbb{R}^3)$ se denomina de **contenido cero** si $(S) = 0$ o bien para cada $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ existen una cantidad finita de rectángulos $R_1, \ldots, R_n$ tales que cada punto de S está en al menos uno de esos rectángulos y la suma de las áreas de los rectángulos es menor a ϵ.

Nota:

Para el caso de dimensión 1, los rectángulos se cambian por intervalos con la suma de sus longitudes menor a ϵ.

Ejemplo 3.2: Contenido cero

Sea $S = \{(t,t) : t \in [-1,1]\}$, ¿es de contenido cero?
Para $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ dado, sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{12}{n} < \epsilon$, así para $k \in \{-n, \ldots, n\}$ tomamos los rectángulos

$$R_k = \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k+1}{n}\right] \times \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k+1}{n}\right],$$

note que $S \subset \bigcup_{k=-n}^{n} R_k$, además $A(R_k) = \frac{4}{n^2}$, así

$$\sum_{k=-n}^{n} A(R_k) = (2n+1)\frac{4}{n^2} = \frac{8}{n} + \frac{4}{n^2} \leq \frac{8}{n} + \frac{4}{n} = \frac{12}{n} < \epsilon.$$

Por lo que S es de contenido cero.

Ejercicio 3.4: Verificacion contenido cero

Verifica si los siguientes conjuntos son de **contenido cero**.

1. $\mathbb{S}^1$.

   El conjunto $\mathbb{S}^1$ representa la circunferencia unitaria en el plano: $x^2 + y^2 = 1$.

   - **Análisis:** Al igual que el ejemplo del segmento de recta de la clase, $\mathbb{S}^1$ es una curva unidimensional "viviendo.$^{\text{en}}$ un espacio bidimensional.
   - **Justificación:** Podemos dividir $\mathbb{S}^1$ en cuatro arcos (semicírculos). Cada arco es la gráfica de una función continua (por ejemplo, $y = \sqrt{1-x^2}$). Al igual que en el ejemplo de clase donde la diagonal (gráfica de $y = x$) se cubre con rectángulos de área arbitrariamente pequeña, los arcos de la circunferencia pueden cubrirse de manera análoga.
   - **Conclusión:** Sí, $\mathbb{S}^1$ es de **contenido cero** (su área es 0).

2. $\mathbb{S}^2$.

   El conjunto $\mathbb{S}^2$ representa la esfera unitaria (la cáscara) en el espacio: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

   - **Análisis:** Es una superficie (dimensión 2) incrustada en $\mathbb{R}^3$.
   - **Justificación:** Extendiendo la lógica del Ejemplo, si cubrimos una superficie con çajas"(rectángulos tridimensionales) muy delgadas (con altura tendiendo a 0), el volumen total de dichas cajas será arbitrariamente pequeño. Al ser $\mathbb{S}^2$ un conjunto acotado sin volumen interior (es solo la frontera), el volumen 3D que ocupa es nulo.
   - **Conclusión:** Sí, $\mathbb{S}^2$ es de **contenido cero** en $\mathbb{R}^3$.

3. L una recta en el plano (y en el espacio).

   Aquí debemos distinguir entre una recta completa (infinita) y un segmento de recta (como el del ejemplo del PDF).

   - **Caso Recta Completa (No acotada):** La definición de contenido cero exige una cantidad **finita** de rectángulos[cite: 1709]. No es posible cubrir una recta infinita con un número finito de rectángulos de área total arbitrariamente pequeña (si los rectángulos son finitos, no cubren el infinito; si uno es infinito, el área explota). $\Longrightarrow$ Una recta infinita **NO** es de contenido cero (en el sentido de Jordan).
   - **Caso Segmento de Recta (Acotada):** Si L se refiere a un segmento (como el ejemplo $S = \{(t,t) : t \in [-1,1]\}$), entonces sí se puede cubrir.

- **Conclusión:** Basándonos en el ejemplo de clase , si L es un **segmento de recta**, Sí es de contenido cero. Si es la recta infinita, No.

4. $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \subset \mathbb{R}^3$.
   Este conjunto es un paralelepípedo rectangular sólido (una caja) en $\mathbb{R}^3$.

   - **Análisis:** Calculamos su volumen.

   $$V(C) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(b_3 - a_3)$$

   - **Caso No Degenerado:** Si $a_i < b_i$ para todo i, entonces $V(C) > 0$. La definición pide que la suma de los volúmenes de la cubierta sea menor a *cualquier* ϵ. Si elegimos $\epsilon = V(C)/2$, es imposible cubrir el conjunto C con rectángulos cuya suma de volúmenes sea menor que el propio volumen de C.
   - **Conclusión:**
     - Si el rectángulo tiene volumen positivo, **NO** es de contenido cero.
     - Solo sería de contenido cero si es "plano"(alguno de los lados tiene longitud 0), degenerando en un rectángulo 2D o un segmento.

Definiciones, teoremas y propiedades utilizadas:

- **Definición:** Un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ se denomina de contenido cero si para cada $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ existen una cantidad **finita** de rectángulos $R_1, \ldots, R_n$ tales que $S \subset \bigcup R_k$ y la suma de los volúmenes (o áreas) es menor a ϵ.

- **Ejemplo Base:** El segmento de recta $S = \{(t, t) : t \in [-1, 1]\}$ en $\mathbb{R}^2$ es de contenido cero.La demostración construye una cubierta de n cuadrados de área $4/n^2$, cuya suma tiende a 0.

Definición 3.13: Uniformemente Continua

Una función $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es **uniformemente continua** sobre D si y solo si para cada $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ existe $\delta \in \mathbb{R}_+$ tal que si $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in D$ con $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| < \delta$ implica que $\|f(\mathbf{u}) - f(\mathbf{v})\| < \epsilon$.

Nota:

Observa que una función continua es diferente a una **uniformemente continua**, ya que δ en esta última solo depende de ϵ y de D.

Proposición 3.3: Uniformemente Continua

Si $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua y D es **cerrado y acotado**, entonces f es **uniformemente continua**.

Demostración.Propocisión
Definiciones, teoremas y propiedades utilizadas:

- **Continuidad Uniforme:** Una función $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es uniformemente continua sobre D si y solo si para cada $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ existe $\delta \in \mathbb{R}_+$ tal que si $u, v \in D$ con $||u - v|| < \delta$ implica que $||f(u) - f(v)|| < \epsilon$.
- **Continuidad:** La función f es continua en $w \in D$ si y solo si para todo $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ existe $\delta \in \mathbb{R}^+$ tal que para todo $u \in D$ con $||u - w|| < \delta$ entonces $||f(u) - f(w)|| < \epsilon$.
- **Conjuntos Cerrados y Acotados:** El texto establece que en conjuntos cerrados y acotados se garantizan propiedades de límites y extremos (Compacidad).

Procedemos por **reducción al absurdo**.
Paso 1: Negación de la Continuidad Uniforme
Supongamos que f **no** es uniformemente continua en D. Negando la definición, esto significa que:

$$\exists \epsilon_0 > 0 \text{ tal que } \forall \delta > 0, \exists u, v \in D \text{ con } ||u - v|| < \delta \text{ pero } ||f(u) - f(v)|| \geq \epsilon_0$$

Paso 2: Construcción de Sucesiones
Para cada $k \in \mathbb{N}$, tomemos $\delta_k = \frac{1}{k}$. Por la suposición del Paso 1, para cada k existen puntos $u_k, v_k \in D$ tales que:

$$||u_k - v_k|| < \frac{1}{k} \tag{7}$$

y

$$||f(u_k) - f(v_k)|| \geq \epsilon_0 \tag{8}$$

Paso 3: Propiedad de Compacidad (Cerrado y Acotado)
Como D es un conjunto **cerrado y acotado** en $\mathbb{R}^n$, toda sucesión en D tiene una subsucesión convergente cuyo límite pertenece a D (Propiedad de Bolzano-Weierstrass implícita en los teoremas de existencia de extremos del texto).
Sea $\{u_{k_j}\}$ una subsucesión de $\{u_k\}$ que converge a un punto $w \in D$:

$$\lim_{j \to \infty} u_{k_j} = w$$

Paso 4: Convergencia de la segunda sucesión
Analizamos la subsucesión correspondiente $\{v_{k_j}\}$. Por la desigualdad triangular y la ecuación (7):

$$||v_{k_j} - w|| \leq ||v_{k_j} - u_{k_j}|| + ||u_{k_j} - w|| < \frac{1}{k_j} + ||u_{k_j} - w||$$

Cuando $j \to \infty$, $\frac{1}{k_j} \to 0$ y $||u_{k_j} - w|| \to 0$. Por lo tanto:

$$\lim_{j \to \infty} v_{k_j} = w$$

Ambas subsucesiones convergen al mismo punto $w \in D$.
Paso 5: Aplicación de la Continuidad
Como f es **continua** en D, es continua en w. Por la definición de continuidad, esto implica conservación de límites secuenciales:

$$\lim_{j \to \infty} f(u_{k_j}) = f(w) \quad \text{y} \quad \lim_{j \to \infty} f(v_{k_j}) = f(w)$$

En consecuencia, la diferencia de sus imágenes debe tender a cero:

$$\lim_{j\to\infty} ||f(u_{k_j}) - f(v_{k_j})|| = ||f(w) - f(w)|| = 0$$

Paso 6: Contradicción
El resultado del Paso 5 contradice la condición (8) establecida en el Paso 2, la cual afirmaba que para todo k (y por tanto para todo k_j):

$$||f(u_{k_j}) - f(v_{k_j})|| \geq \epsilon_0 > 0$$

No es posible que una sucesión tienda a 0 si todos sus términos son mayores o iguales a un número positivo ϵ_0.
Conclusión:
La suposición inicial es falsa. Por lo tanto, f debe ser **uniformemente continua** en D.

■

Definición 3.14: Uniformemente Continua

Una función $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es **uniformemente continua** sobre D si y solo si para cada $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ existe $\delta \in \mathbb{R}_+$ tal que si $u, v \in D$ con $\|u - v\| < \delta$ implica que $\|f(u) - f(v)\| < \epsilon$.

Nota:

Observa que una función continua es diferente a una uniformemente continua, ya que δ en esta última solo depende de ϵ y de D.

Proposición 3.4: S

i $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua y D es cerrado y acotado, entonces f es uniformemente continua.

Demostración: Ejercicio siguiente parcial.

Teorema 3.8: Integrable en R

Sea f una función acotada definida sobre un rectángulo R. Si el conjunto S es el conjunto donde f es discontinua y es de contenido cero, entonces f es integrable en R.

Demostración.Para cuando $m = 2$
Dado $\epsilon \in \mathbb{R}_{++}$, sabemos que existen $R_1, \ldots, R_n$ rectángulos tal que

$$S \subset \bigcup_{i=1}^{n} R_i \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{n} A_i < \epsilon_1,$$

ya que S es de contenido cero. Sean $R'_1, \ldots, R'_n$ los rectángulos centrados en el mismo centro de los $R_1, \ldots, R_n$ respectivamente y con el doble de sus dimensiones (doble de largo y ancho), así el conjunto de rectángulos $R'_1, \ldots, R'_n$ tienen área total menor a 4ϵ.

Además, denotemos por $2r$ la longitud del lado más corto del rectángulo más pequeño de

$R_1, \ldots, R_n$.
Sea

$$R' = R \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \text{int}(R_i).$$

Así R' es un conjunto cerrado, sobre el cual la función f es continua. Como f es continua en R', por la proposición 1 se tiene que es uniformemente continua, luego entonces existe $\delta \in \mathbb{R}_+$ tal que si $u, v \in R'$ se cumple que $\|f(u) - f(v)\| < \epsilon$.

Sea W una partición de R con $\|W\| < \delta$ y $\|W\| < r$.
Podemos clasificar en dos tipos los rectángulos generados por W en

1. Los rectángulos R_{ij} que tengan un punto en común con algún R_k.
2. Los que no son del tipo I.

Por lo que obtendremos

$$\sum_W (M_{ij} - m_{ij})A_{ij} = \sum_I (M_{ij} - m_{ij})A_{ij} + \sum_{II} (M_{ij} - m_{ij})A_{ij}.$$

Por otro lado, para los rectángulos del tipo I, como $\|W\| < r$, tenemos que están contenidos en los rectángulos $R'_1, \ldots, R'_n$. Por tanto el área total de esos rectángulos no cubre el área total de los rectángulos $R'_1, \ldots, R'_n$. Entonces

$$\sum_I (M_{ij} - m_{ij})A_{ij} \leq \sum_I 2MA_{ij} \leq 8M\epsilon, \quad (2)$$

donde $M = \sup\{|f(u)| : u \in R\}$.

Y para los del tipo II por continuidad uniforme $M_{ij} - m_{ij} < \epsilon$, luego entonces

$$\sum_{II} (M_{ij} - m_{ij})A_{ij} \leq \sum_{II} \epsilon A_{ij} \leq A\epsilon, \quad (3)$$

donde A es el área de R.

De (2) y (3) concluimos que

$$\overline{S}_W - \underline{S}_W \leq (8M + A)\epsilon.$$

Por lo tanto f es integrable.

■

Teorema 3.9: Curvas rectificables

Si α es una curva rectificable tiene contenido cero.

Demostración.Caso $m = 2$
Sea $s = \int_a^b |\alpha'(t)|dt$ y $n \in \mathbb{N}$. Sean $P_1, \ldots, P_n$ puntos en la curva α tales que

$$d(P_0, P_i) = \frac{is}{n}$$

para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ y donde $P_0 = \alpha(a)$, el punto inicial de α.
Si $P_i = (x_i, y_i)$ y tomando

$$R_i = \left[x_i - \frac{2s}{n}, x_i + \frac{2s}{n} \right] \times \left[y_i - \frac{2s}{n}, y_i + \frac{2s}{n} \right],$$

tenemos que

$$P_i \in R_i \quad \text{y} \quad A_i = \frac{16s^2}{n^2}$$

para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Por lo cual

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = \frac{16s^2}{n}.$$

Más aún para cada $P \in \alpha$ existe P_i tal que $d(P, P_i) \leq \frac{s}{n}$ por lo que

$$\alpha \subset \bigcup_{i=1}^{n} R_i.$$

Ahora dado $\epsilon \in \mathbb{R}_+$, sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{16s^2}{\epsilon} < n$, entonces se sigue que

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = \frac{16s^2}{n} < \epsilon.$$

Por lo tanto α tiene contenido cero.

■

Definición 3.15: Región

Un subconjunto $D \subset \mathbb{R}^m$ es una **región** si es conexo, es decir, si cada par de puntos en D puede ser conectado por una poligonal de puntos en D.

El siguiente teorema es consecuencia de los anteriores teoremas.

Teorema 3.10: Integrabilidad de funciones continuas

Sea D una región acotada de $\mathbb{R}^2$ con ∂D una unión finita de curvas rectificables. Si f es una función continua y acotada sobre D, entonces f es integrable sobre D.

Definición 3.16: Definición de función g y la integral

Sea D un conjunto acotado de $\mathbb{R}^2(\mathbb{R}^3)$ y f una función definida sobre D y acotada, sea R un rectángulo tal que $D \subset \text{int}(R)$, así definiendo g como la función sobre R que tiene regla de correspondencia

$$g(u) = \begin{cases} f(u) & \text{si } u \in D \\ 0 & \text{si } u \notin D \end{cases}$$

Si g es integrable sobre R, entonces diremos que f es integrable sobre D y que

$$\iint_D f(u)\,dA = \iint_R g(u)\,dA.$$

Si g no es integrable tampoco lo será f.

Ejemplo 3.3: L

a función $f : B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u \mapsto u_1$, ¿es integrable sobre $B_1(0)$?, en caso de ser así, ¿cuál es su integral?

Teorema 3.11: Teorema del contenido nulo del gráfico

Sea f una función continua definida sobre una región D cerrada y acotada en $\mathbb{R}^2$. La superficie S definida por la ecuación

$$z = f(x,y)$$

es un conjunto de contenido cero.

Demostración. Ya que f es continua sobre D, f es uniformemente continua, esto es para cada $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ existe $\delta \in \mathbb{R}_+$ tal que para cada $u, v \in D$ con $\|u - v\| < \delta$ implica que $\|f(u) - f(v)\| < \epsilon$. Como D es acotado, existe $R \subset \mathbb{R}^2$ rectángulo con $D \subset R$. Sea W partición de R con $\|W\| < \delta$.

Sea $\mathcal{P}$ una selección de W, tal que si $R_{ij} \cap D \neq \emptyset$ entonces $P_{ij} \in R_{ij} \cap D$. Tomando $z_{ij} = f(P_{ij})$ y $C_{ij} = R_{ij} \times [z_{ij} - \epsilon, z_{ij} + \epsilon]$ tenemos que

$$S \subset \bigcup_{C_{ij} \in \mathcal{C}} C_{ij},$$

donde $\mathcal{C} = \{C_{ij}\}$, además

$$V_{ij} = \operatorname{Vol}(C_{ij}) = 2\epsilon A_{ij}.$$

Por lo que se obtiene

$$\sum_{\mathcal{C}} V_{ij} \leq 2\epsilon A,$$

con A el área de R. Por lo tanto S es de contenido cero. ■

Teorema 3.12: Contenido nulo del gráfico

Si $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ continua con I un intervalo acotado. Entonces $C = \operatorname{graf}(\alpha)$ tiene contenido cero.

3.4. Superficies Proyectables

Definición 3.17: Proyectable en el Plano

Una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$, es proyectable en el plano XY si y solo si existe una región D en el plano XY y una función $f : D \to \mathbb{R}$ tal que

$$S = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D\}.$$

Es proyectable en el plano YZ si y solo si existe una región D en el plano YZ y una función $f : D \to \mathbb{R}$ tal que

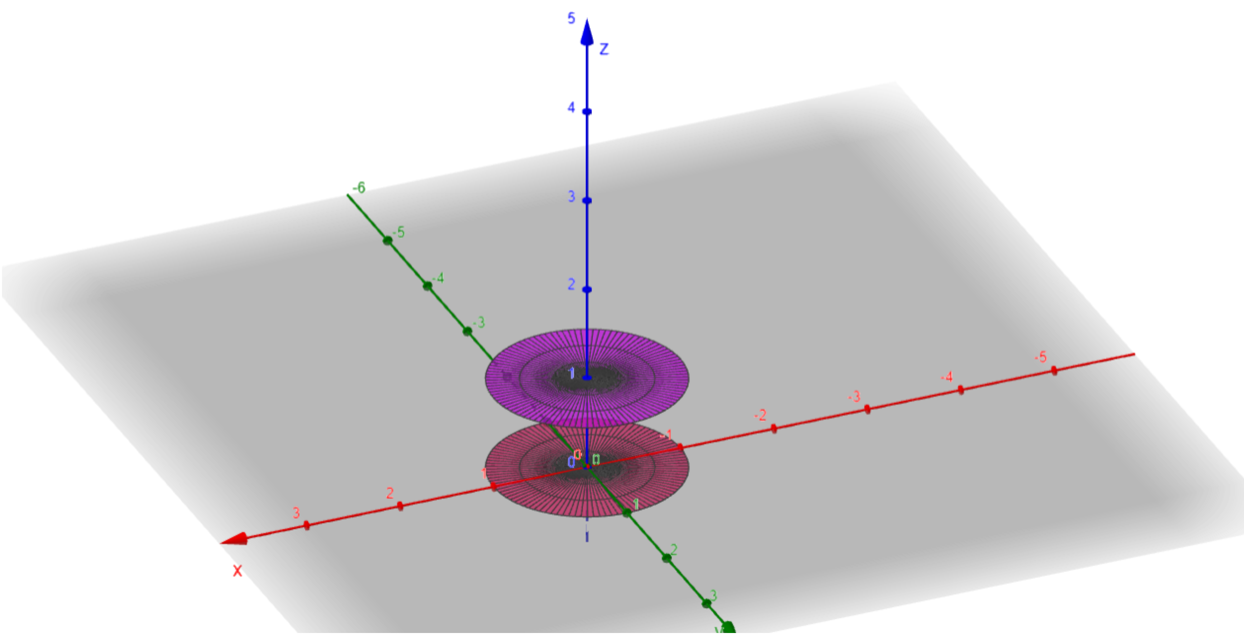
$$S = \{(f(y, z), y, z) : (y, z) \in D\}.$$

Es proyectable en el plano XZ si y solo si existe una región D en el plano XZ y una función $f : D \to \mathbb{R}$ tal que

$$S = \{(x, f(x, z), z) : (x, z) \in D\}.$$

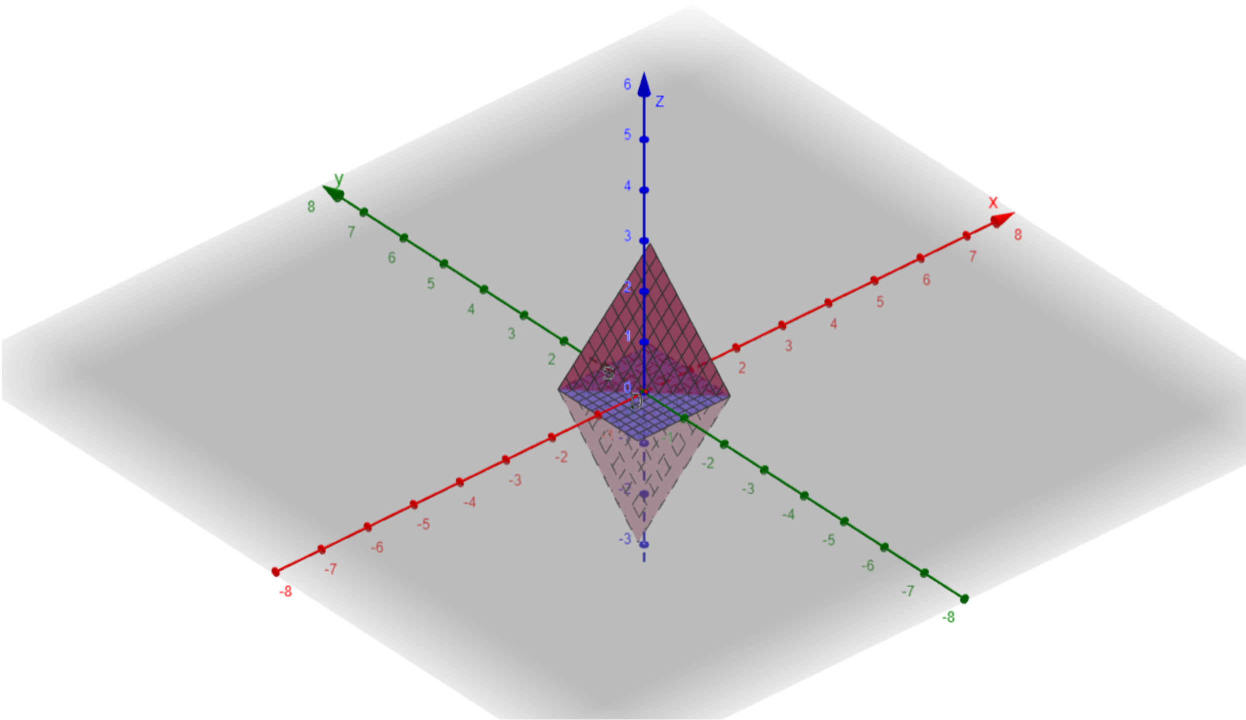
Ejemplo (XY)

S=(x,y,z) $\in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge z = 1$



SXY
Ejemplo (XY)

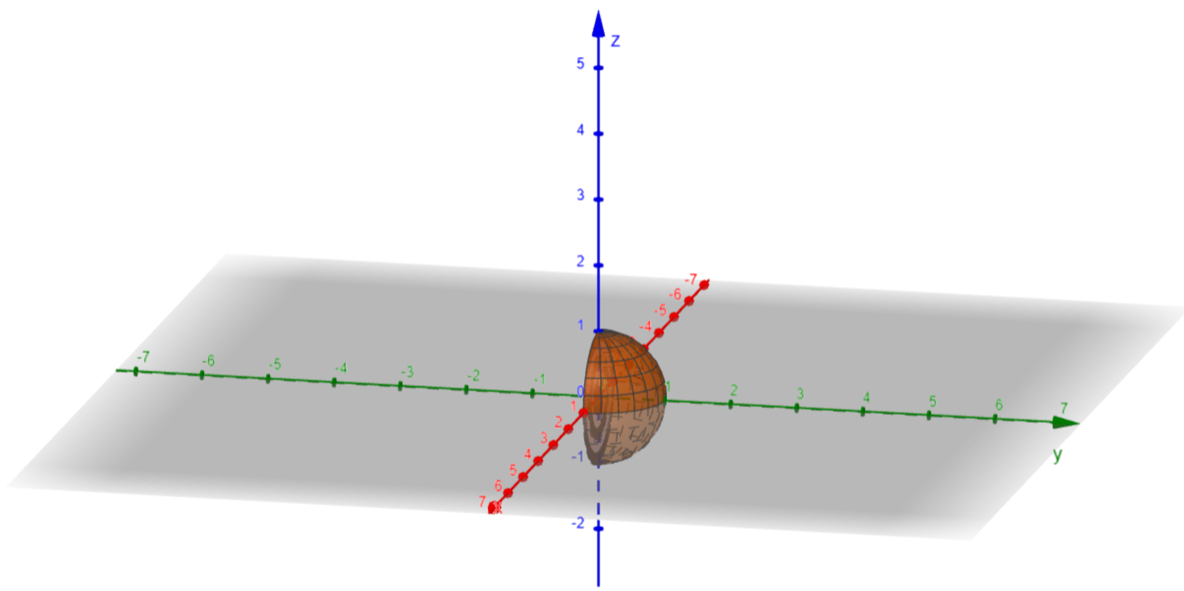
S=(x,y,z) $\in \mathbf{R}^3 : x + y \in [-1, 1] \wedge x + y - z = 0$



SXY1

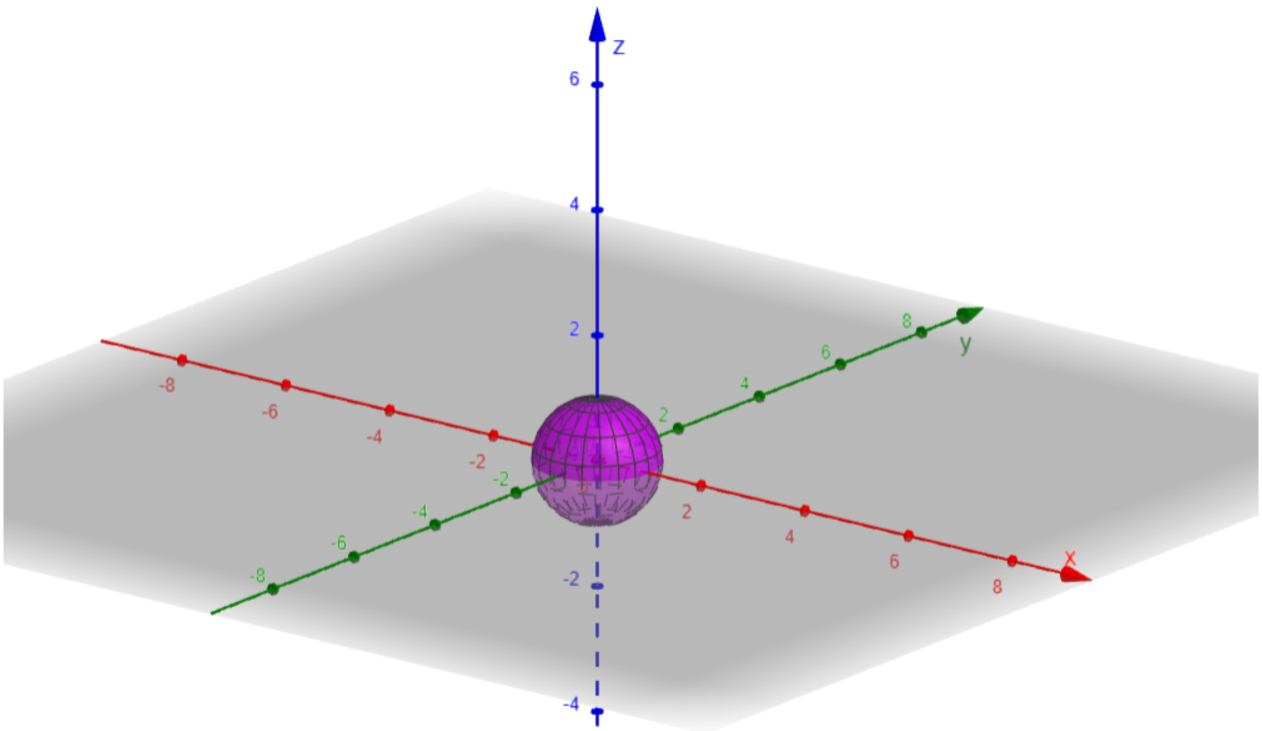
Ejemplo

S=(x,y,z) $\in \mathbf{R^3} : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \wedge 0 \leq y$



SXY1
No ejemplo

S= $\mathbf{S^2}$



SXY1

Teorema 3.13: Teorema sobre integrabilidad

Sea $D \subset \mathbb{R}^3$ una región acotada y su frontera es la unión finita de superficies proyectables (en algún plano coordenado). Si f es continua y acotada sobre D entonces f es integrable sobre D.

Teorema 3.14: Teorema de aditividad del integral sobre subdivisiones por curvas de contenido cero

Sean $D, S \subset \mathbb{R}^2$ tales que D es una región acotada con frontera de contenido cero y S una curva de contenido cero la cual divide a D en dos regiones D_1 y D_2. Si f es continua y acotada sobre D, entonces f es integrable sobre D_1 y D_2 además

$$\iint_{D_1} f(u)\,dA + \iint_{D_2} f(u)\,dA = \iint_{D} f(u)\,dA.$$

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto 1$, entonces $\text{graf}(f) = R \times \{1\}$. Así

$$A(R) = [b_2 - a_2][b_1 - a_1].$$

Como f es continua y acotada sobre R, f es integrable sobre R. Si W es una partición de R y $\mathcal{P}$ una selección de W tendremos que

$$S_W = \sum_W f(P_{ij})A_{ij} = \sum_W 1 \cdot A_{ij} = [b_2 - a_2][b_1 - a_1]$$

donde $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$. Así
$$A(R) = \iint_R 1\, dA.$$
Análogamente si $R \subset \mathbb{R}^3$, tendremos que
$$V(R) = \iiint_R 1\, dV.$$

Definición 3.18: Definición de área y volumen

Si D es (una región) acotada entonces

1. Si $D \subset \mathbb{R}^2$ y la integral $\iint_D 1\, dA$ existe, definimos el **área de** D como
$$A(D) = \iint_D 1\, dA.$$
2. Si $D \subset \mathbb{R}^3$ y la integral $\iiint_D 1\, dV$ existe, definimos el **volumen de** D como
$$V(D) = \iiint_D 1\, dV.$$

Definición 3.19: Integral de trayectoria

Sea C una curva suave a trozos, dada por la trayectoria $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ y $f : C \to \mathbb{R}$ un campo escalar continuo, la **integral de línea de** f **sobre** C (integral de trayectoria) se define como
$$\int_C f\, ds = \int_a^b f(\alpha(t))\|\alpha'(t)\|dt.$$

Observación: Si $f = 1$, tendremos que $L(\alpha) = \int_C 1\, ds$.

Observación: Si $-C$ es la curva recorrida en sentido contrario a C tendremos que
$$\int_{-C} f\, ds = \int_C f\, ds.$$

3.5. Adicional

3.5.1. Calculo de Integrales

Ejercicio 3.5: Calcula las siguientes integrales

1. $$\iint_R \frac{x^2}{y} dA, \quad \text{con } R = [-2, 2] \times [1, 2].$$
   Por def de integrales iteradas.
$$\iint_R \frac{x^2}{y} dA = \int_1^2 \left(\frac{1}{y} \int_{-2}^2 x^2 dx \right) dy = \int_1^2 \left[\frac{1}{y} \left(\frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^2 \right) \right] dy = \int_1^2 \frac{16}{3} \left(\frac{1}{y} \right) dy$$

$$= \frac{16}{3}\int_1^2 \frac{1}{y}dy = \frac{16}{3}\left(\ln(y)\Big|_1^2\right) = \frac{16}{3}(\ln(2) - \ln(1)) = \frac{16}{3}\ln(2)$$

2.
$$\iint_R \frac{x}{y}dA, \quad \text{con } R = [-1,1]\times[1,2].$$

Por def de integrales iteradas.

$$\iint_R \frac{x}{y}dA = \int_1^2\left(\int_{-1}^1 \frac{x}{y}dx\right)dy = \int_1^2\left(\frac{1}{y}\int_{-1}^1 xdx\right)dy = \int_1^2\left[\frac{1}{y}\left(\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^1\right)\right]dy$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{y}(0)dy = 0$$

3.
$$\iint_R \cos(x+y)dA, \quad \text{con } R = [0,\pi]\times[0,\pi].$$

Usando la propiedad $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ tenemos que:

$$\iint_R \cos(x+y)dA = \int_0^\pi\int_0^\pi \cos(x+y)dxdy = \int_0^\pi\left[\sin(x+y)\Big|_0^\pi\right]dy$$

$$= \int_0^\pi[\sin(\pi+y) - \sin(y)]dy = \int_0^\pi[-\sin(y) - \sin(y)]dy = -2\int_0^\pi \sin(y)dy$$

$$= -2\left[-\cos(y)\Big|_0^\pi\right] = -2[-\cos(\pi) + \cos(0)] = -2[1+1] = -4$$

4.
$$\iint_R |x+y|dA, \quad \text{con } R = [-2,2]\times[1,2].$$

Para $R = [-2,2]\times[1,2]$, la región donde $x+y \geq 0$ está determinada por $x \geq -y$. Dividimos la integral:

$$\iint_R |x+y|dA = \int_1^2\int_{-2}^2 |x+y|dxdy$$

Para $y \in [1,2]$, el punto donde $x+y=0$ es $x = -y \in [-2,-1]$. Entonces:

$$= \int_1^2\left[\int_{-2}^{-y} -(x+y)dx + \int_{-y}^2 (x+y)dx\right]dy$$

Calculamos cada integral interna:

$$\int_{-2}^{-y} -(x+y)dx = -\left[\frac{x^2}{2} + xy\right]_{-2}^{-y} = -\left[\left(\frac{y^2}{2} - y^2\right) - (2-2y)\right] = -\left[-\frac{y^2}{2} - 2 + 2y\right]$$

$$= \frac{y^2}{2} + 2 - 2y$$

$$\int_{-y}^{2} (x+y)dx = \left[\frac{x^2}{2} + xy\right]_{-y}^{2} = \left[(2+2y) - \left(\frac{y^2}{2} - y^2\right)\right] = 2 + 2y + \frac{y^2}{2}$$

Sumando:

$$\frac{y^2}{2} + 2 - 2y + 2 + 2y + \frac{y^2}{2} = y^2 + 4$$

Entonces:

$$\iint_R |x+y|dA = \int_1^2 (y^2+4)dy = \left[\frac{y^3}{3} + 4y\right]_1^2 = \left(\frac{8}{3} + 8\right) - \left(\frac{1}{3} + 4\right) = \frac{7}{3} + 4 = \frac{19}{3}$$

Ejercicio 3.6: Calcula las siguientes integrales

1.
$$\iiint_R \sin(x+2y+3z)dxdydz, \quad \text{con } R = [0,\pi] \times [0,\pi] \times [0,\pi].$$

$$\iiint_R \sin(x+2y+3z)dxdydz = \int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x+2y+3z)dxdydz$$

Integramos respecto a x primero:

$$\int_0^{\pi} \sin(x+2y+3z)dx = [-\cos(x+2y+3z)]_0^{\pi} = -\cos(\pi+2y+3z) + \cos(2y+3z)$$

$$= \cos(2y+3z) - \cos(\pi+2y+3z) = \cos(2y+3z) + \cos(2y+3z) = 2\cos(2y+3z)$$

Ahora respecto a y:

$$\int_0^{\pi} 2\cos(2y+3z)dy = 2\left[\frac{1}{2}\sin(2y+3z)\right]_0^{\pi} = \sin(2\pi+3z) - \sin(3z) = \sin(3z) - \sin(3z) = 0$$

Finalmente:

$$\iiint_R \sin(x+2y+3z)dxdydz = 0$$

2.
$$\iiint_R (x+y+z)dxdydz, \quad \text{con } R = [-1,1]\times[2,3]\times[0,2].$$

$$\iiint_R (x+y+z)dxdydz = \int_0^2 dz \int_2^3 dy \int_{-1}^1 (x+y+z)dx$$

Calculamos la integral respecto a x:

$$\int_{-1}^1 (x+y+z)dx = \int_{-1}^1 xdx + \int_{-1}^1 (y+z)dx = 0 + 2(y+z)$$

Entonces:

$$= \int_0^2 dz \int_2^3 2(y+z)dy = \int_0^2 dz \left[2\left(\frac{y^2}{2}+zy\right)_2^3\right] = \int_0^2 dz \left[2\left(\frac{9}{2}+3z-2-2z\right)\right]$$

$$= \int_0^2 dz \left[2\left(\frac{5}{2}+z\right)\right] = \int_0^2 (5+2z)dz = \left[5z+z^2\right]_0^2 = 10+4 = 14$$

3.
$$\iiint_R xdxdydz, \quad \text{con } R = [1,2]\times[0,4]\times[-10,10].$$

$$\iiint_R xdxdydz = \int_{-10}^{10} dz \int_0^4 dy \int_1^2 xdx$$

Calculamos la integral respecto a x:

$$\int_1^2 xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Entonces:

$$= \int_{-10}^{10} dz \int_0^4 \frac{3}{2}dy = \int_{-10}^{10} dz \left(\frac{3}{2}\cdot 4\right) = \int_{-10}^{10} 6dz = 6(10-(-10)) = 6\cdot 20 = 120$$

4.
$$\iiint_R (x^2+y^2+z^2)dxdydz, \quad \text{con } R = [-2,2]\times[-1,1]\times[0,3].$$

$$\iiint_R (x^2+y^2+z^2)dxdydz = \int_0^3 \int_{-1}^1 \int_{-2}^2 (x^2+y^2+z^2)dxdydz$$

Podemos separar:

$$= \int_0^3 dz \int_{-1}^1 dy \int_{-2}^2 x^2dx + \int_0^3 dz \int_{-1}^1 dy \int_{-2}^2 y^2dx + \int_0^3 dz \int_{-1}^1 dy \int_{-2}^2 z^2dx$$

Calculamos cada término:

Primer término:

$$\int_{-2}^{2} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{2} = \frac{8}{3} - \left(-\frac{8}{3}\right) = \frac{16}{3}$$

$$\int_{-1}^{1} dy = 2, \quad \int_{0}^{3} dz = 3$$

$$\text{Primer término} = \frac{16}{3} \cdot 2 \cdot 3 = 32$$

Segundo término:

$$\int_{-2}^{2} dx = 4, \quad \int_{-1}^{1} y^2 dy = \frac{y^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

$$\int_{0}^{3} dz = 3$$

$$\text{Segundo término} = 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 = 8$$

Tercer término:

$$\int_{-2}^{2} dx = 4, \quad \int_{-1}^{1} dy = 2, \quad \int_{0}^{3} z^2 dz = \frac{z^3}{3}\Big|_{0}^{3} = 9$$

$$\text{Tercer término} = 4 \cdot 2 \cdot 9 = 72$$

Sumando:

$$\iiint_R (x^2 + y^2 + z^2) dxdydz = 32 + 8 + 72 = 112$$

4. Referencias

4.1. Referencias Básicas

- Leithold, L. (1992). *El cálculo con geometría analítica*. México: Harla.
- Spivak, M. (1993). *Cálculo infinitesimal*. México: Reverté.
- Stein, S. (1995). *Cálculo y geometría analítica*. México: McGraw Hill.
- Stewart, J. (1994). *Cálculo*. México: Iberoamérica.

4.2. Referencias Complementarias

- Apostol, T. M. (1974). *Mathematical Analysis*. Second Edition. Addison Wesley.
- Boyce, D. (1994). *Cálculo*. México: CECSA.
- Fulks, W. (1969). *Advanced Calculus*. Second Edition. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Krasnov, M.L., Kiselev, A.I. & Makarenko, G.I. (1981). *Vector Analysis*. Mir Publishers.
- Larson, R. & Hostetler, R. (1995). *Cálculo y geometría analítica*. México: McGraw Hill.
- Marsden, J. E. & Tromba, A. J. (2003). *Vector Calculus*. Fifth Edition. New York: W. H. Freeman and Company.
- Piskunov, N. (1969). *Differential and Integral Calculus*. Ed. Mir.
- Stewart, J. (2015). *Multivariable Calculus*. Eighth Edition. Cengage Learning.
- Swokowski, E. (1989). *Cálculo con geometría analítica*. México: Iberoamérica.
- Zill, D. (1996). *Cálculo con geometría analítica*. México: Iberoamérica.
- Munkres, J. R. (2000). *Topology* (2nd ed.). Prentice Hall.
- Llopis, J. *Espacio de Hausdorff*. Matesfacil.
- Bourbaki, N. (1989). *General Topology: Chapters 1–4*. Springer-Verlag.
- Lehmann, C. H. (1989). *Geometría Analítica*. Editorial Limusa.
- Swokowski, E. W., & Cole, J. A. (2011). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. Cengage Learning.
- Larson, R., & Edwards, B. H. (2018). *Cálculo* (11ª ed.). Cengage Learning.