Proyecto Final de Álgebra Matricial: Modelo de Lotka-Volterra Depredador-Presa

Gabriel Alejandro Aguilar Farrera *

CIMAT Unidad Monterrey

gabriel.farrera@cimat.mx

28 de noviembre de 2022

Contenido

Resumen

El modelo de Lotka-Volterra describe la interacción entre dos especies que comparten un espacio en común. Una especie como presa (e.g. conejos) y otra especie como depredador (e.g. linces). En el presente trabajo se estudiará el modelo de Lotka-Voletrra clásico considerando 3 panoramas distintos: Escenario libre de presas, escenario libre de depresadores y el escenario con la presencia de ambas especies (el más interesante y realista). De igual forma se hará uso de los datos suministrados por *Hudson Bay Company* para obtener los parámetros de nuestros modelos y poder ver qué tan apropiado es el modelo propuesto para modelar esta situación. Para finalizar este trabajo se estudiarán los puntos de equilibrio haciendo uso de conceptos como la *matriz jacobiana*, *traza de una matriz* y *eigenvalores*.

*Estudiante de Maestría en Cómputo Estadístico

I. Introducción

La **ecología** es la ciencia que estudia las relaciones de los organismos entre sí y su medio ambiente. El término medio ambiente incluye todos los factores inorgánicos (abióticos) y orgánicos (bióticos), de los cuales depende el desarrollo de un ser vivo. Los factores abióticos pueden ser materiales (suelo, agua) o energéticos (radiación solar). Los factores bióticos son otros organismos. Los ecólogos son científicos que estudian la distribución y abundancia de las especies y sus relaciones con el ambiente. Las relaciones que se pueden dar entre organismos son muchas y muy variadas, algunas de las cuales se presentan a continuación:

- **Mutualismo:** Es una interacción entre individuos de diferentes especies, en donde ambas se benefician. Este tipo de interacción entre miembros de la misma especie se llaman cooperación.
- **Comensalismo:** Interacción biológica en la que una de las especies se beneficia mientras que la otra no se benefinicia ni se perjudica.
- **Parasitismo:** Es una relación entre dos organismos en la que uno de los organismos (el parasito) consigue la mayor parte del beneficio de una relación estrecha con otro, el hospedero.
- **Depredación:** Consiste en la caza y muerte que sufren algunas especies (presas), por parte de otras que las comen (depredadores o predadores).
- **Competencia:** Dos especies de animales ocupan el mismo ecosistema, no como depredador y presa sino como competidores por los mismos recursos (como alimento y espacio vital) en el sistema.

El tipo de relación en la que nos vamos a enfocar en este trabajo es en la *depredación* en la cual los individuos de una especie (depredadora) cazan a individuos de la otra especie (presa) para subsistir, y siempre tiene un efecto negativo sobre el individuo. Sin embargo, a nivel de población, a menudo tiene un efecto mutualista.

II. Modelo de Lotka-Volterra

Las ecuaciones de Lotka-Volterra (depredador-presa), son un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden, acopladas, autónomas y no lineales, que se usan para describir dinámicas de sistemas biológicos en el que dos especies interactúan, una como presa y otra como depredador. Este modelo matemático asume ciertas condiciones, las cuales se enlistan a continuación:

- **Reproducción de conejos:** Los conejos tienen una cantidad ilimitada de comida, y por lo tanto, en ausencia de zorros, la población de conejos crecerá exponencialmente y de manera ilimitada.
- **Depredación de conejos:** En presencia de zorros, la población de conejos decrece debido al consumo de los zorros a una tasa proporcional de la interacción entre ambas poblaciones.
- **Extinción de zorros:** En ausencia de conejos (su único alimento), la población de los zorros decrecerá exponencialmente e inevitablemente llegarán a la extinción.

- **Reproducción de zorros:** En presencia de conejos, la población de zorros crecerá a una tasa proporcional de la interacción entre ambas poblaciones.

i. Construcción del Modelo Matemático

Las **variables** que intervienen son

- **C(t):** Población de conejos en el tiempo.
- **Z(t):** Población de zorros en el tiempo.
- $\frac{dC(t)}{dt}$**:** Razón de cambio de la población de conejos respecto al tiempo.
- $\frac{dZ(t)}{dt}$**:** Razón de cambio de la población de zorros respecto al tiempo.

Los **parámetros** (tasas) que intervienen son

- **+** r_1**:** Tasa de reproducción de los conejos por unidad de tiempo.
- **-** r_2**:** Tasa de mortalidad de los zorros por unidad de tiempo.
- **-** b_1**:** Tasa de depredación de los conejos por parte de los zorros por unidad de tiempo.
- **+** b_2**:** Tasa de beneficio de los zorros ante la depredación por unidad de tiempo.

Luego,

- **+** r_1 **C(t): Reproducción** de la población de conejos (forma exponencial) en el tiempo.
- **-** r_2 **Z(t): Decrecimiento** de la población de zorros (forma exponencial) en el tiempo.
- **-** b_1 **C(t) Z(t):** Interacción de cacería por parte de los zorros hacia los conejos causando **decrecimiento** en la población de conejos en el tiempo.
- **+** b_2 **C(t) Z(t): Crecimiento** de la población de zorros debido a la cacería de conejos en el tiempo.

Ahora bien, el modelo matemático de Lotka-Volterra tiene la sig. forma

$$\frac{dC(t)}{dt} = r_1C(t) - b_1C(t)Z(t) \qquad C(0) = C_0 \geq 0 \tag{1}$$
$$\frac{dZ(t)}{dt} = b_2C(t)Z(t) - r_2Z(t) \qquad Z(0) = Z_0 \geq 0 \tag{2}$$

A continuación vamos a estudiar los diferentes escenarios antes propuestos.

III. Escenario libre de depredadores

Recordemos que los conejos tienen una cantidad ilimitada de comida, y por lo tanto, en ausencia de zorros, la población de conejos crecerá exponencialmente y de manera ilimitada. Para el *equilibrio ecológico* este escenario NO es bueno debido a la **sobrepoblación de conejos.** La ausencia de zorros se represeta con Z(t) = Z_0 = 0 y las ecuaciones (1) y (2) quedan simplificadas de la siguiente forma:

$$\frac{dC(t)}{dt} = r_1 C(t) \qquad C(0) = C_0 \geq 0 \tag{3}$$

$$\frac{dZ(t)}{dt} = 0 \qquad Z(0) = Z_0 = 0 \tag{4}$$

Resolviendo las ecuaciones (3) y (4) y aplicando las condiciones iniciales, tenemos la siguiente solución:

$$C(t) = C_0 e^{r_1 t} \tag{5}$$

$$Z(t) = 0 \tag{6}$$

Luego, si tomamos el límite cuando el tiempo t tiende al infinito para ambas poblaciones tenemos que,

$$lim_{t\to+\infty} C(t) = lim_{t\to+\infty} C_0 e^{r_1 \infty} = +\infty \tag{7}$$

$$lim_{t\to+\infty} Z(t) = 0 \tag{8}$$

es decir, la población de conejos crece sin límite (con C_0 >0) y la de zorros siempre es cero. Algunos ejemplos de esto se muestran a continuación

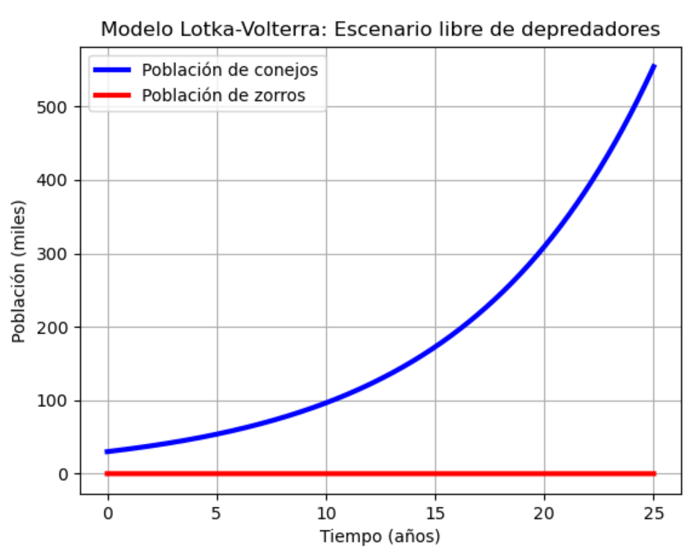

Figura 1: r_1 = 0.1, C_0 = 30 y Z_0 = 0. La población de conejos crece exponencialmente y entre más grande sea la tasa de reproducción de conejos su crecimiento será más acelerado. En este escenario no hay población de zorros.

Incrementando r_1 tenemos

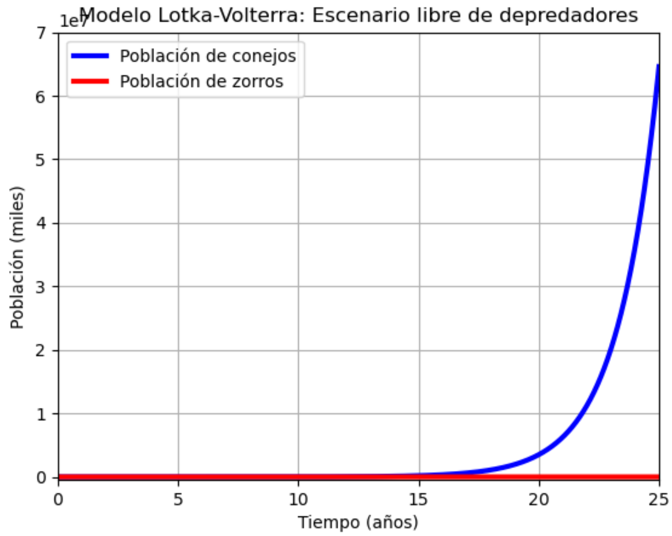

Figura 2: r_1 = 0.5, C_0 = 30 y Z_0 = 0.

IV. Escenario libre de presas

Recordemos que en ausencia de conejos (su único alimento), la población de los zorros decrecerá exponencialmente e inevitablemente llegarán a la extinción. Para el *equilibrio ecológico* este escenario TAMPOCO es bueno ya que implica la **extinción de una especie (zorros)**. La ausencia de conejos se representa con C(t) = C_0 = 0 y las ecuaciones (1) y (2) quedan simplificadas de la siguiente forma:

$$\frac{dC(t)}{dt} = 0 \qquad C(0) = C_0 = 0 \tag{9}$$

$$\frac{dZ(t)}{dt} = -r_2 Z(t) \qquad Z(0) = Z_0 \geq 0 \tag{10}$$

Resolviendo las ecuaciones (9) y (10) y aplicando las condiciones iniciales, tenemos la siguiente solución:

$$C(t) = 0 \tag{11}$$

$$Z(t) = Z_0 e^{-r_2 t} \tag{12}$$

Luego, si tomamos el límite cuando el tiempo t tiende al infinito para ambas poblaciones tenemos que,

$$lim_{t\to+\infty} C(t) = 0 \tag{13}$$

$$lim_{t\to+\infty} Z(t) = lim_{t\to+\infty} Z_0 e^{-r_2 t} = 0 \tag{14}$$

es decir, la población de zorros se extingue ya que no tienen alimento disponible.Un ejemplo de esto se muestran a continuación

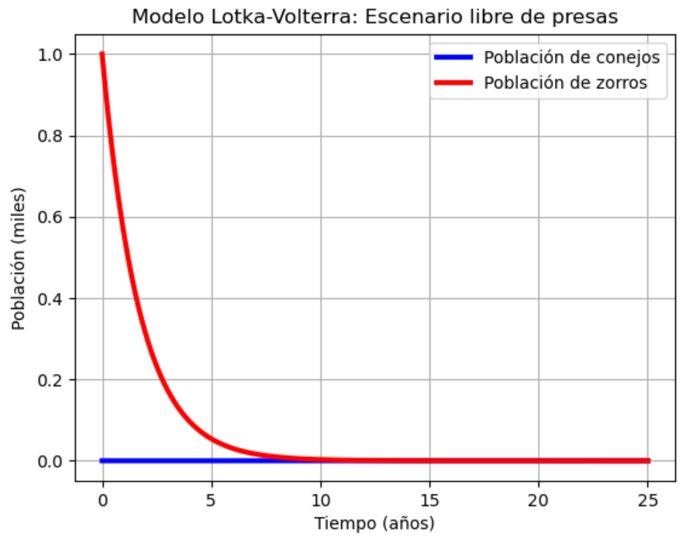

Figura 3: r_2 = 0.5, C_0 = 0 y Z_0 = 1. Vemos que, los zorros, al no tener alimento, se extinguen a una tasa marcada por r_2. Entre más grande sea el valor de la tasa de extinción de mortalidad de los zorros más rápido llegan a su extinción.

V. Escenario con la presencia de ambas especies

Este escenario NO tiene una solución analítica para las ecuaciones (1) y (2). Se utilizará un método de Runge Kutta de cuarto orden para poder resolver numéricamente las ecuaciones (1) y (2).

i. Análisis cualitativo del sistema

Un **Punto de equilibrio o estacionario** ocurre cuando Z(t) y C(t) son constantes, es decir, cuando sus respectivas drivadas son nulas $\frac{dC(t)}{dt} = 0$ y $\frac{dZ(t)}{dt} = 0$. En un punto de equilibrio el sistema no cambia en el tiempo. Observemos que el sistema tiene dos puntos de equilibrio:

$$r_1 C(t) - b_1 C(t) Z(t) = 0 \tag{15}$$
$$b_2 C(t) Z(t) - r_2 Z(t) = 0 \tag{16}$$

De (15) y (16) obtenemos las siguientes coordenadas:

$$Z(t) = 0 \qquad\qquad C(t) = 0 \tag{17}$$
$$Z(t) = \frac{r_1}{b_1} \qquad\qquad C(t) = \frac{r_2}{b_2} \tag{18}$$

Ahora bien, necesitamos clasificar estos puntos de equilibrio en sus diferentes categorias: Punto estable, punto inestable, asintóticamente estable, etc. Es aquí cuando el **álgebra lineal** juega un papel importante, tal como se muestra en la sig. sección.

ii. Aplicaciones del Álgebra Lineal: Análisis de Estabilidad Asociada al Sistema

A continuación vamos a definir algunos conceptos que nos van a ayudar a hacer el análisis de estabilidad.

Matriz Jacobiana

$$J(c*, z*) = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dC}(c*, z*) & \frac{df_1}{dZ}(c*, z*) \\ \frac{df_2}{dC}(c*, z*) & \frac{df_2}{dZ}(c*, z*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 - b_1 Z(t) & -b_1 C(t) \\ b_2 Z(t) & b_2 C(t) - r_2 \end{pmatrix} \tag{19}$$

Donde (c*,z*) son los puntos de equilibrio, en nuestro caso tenemos dos, los cuales se presentan a continuación

$$(c_1*, z_1*) = (0, 0)$$
$$(c_2*, z_2*) = (\frac{r_2}{b_2}, \frac{r_1}{b_1})$$

Entonces bien, la ec. (19) es la matriz Jacobiana evaluada en los puntos de equilibrio. Es claro que al evaluar la ec. (19) en los puntos de equilibrio esto producirá un valor numérico, ¿Qué representa este valor? ¿Cómo se interpreta?. Para responder esta pregunta vamos a dar lugar a conceptos como la **traza** de una matriz y al de **eigenvalores** asociados a una matriz. Esto se presenta a continuación

- La **traza** τ de una matriz cuadrada A es la suma de los elementos de la diagonal principal.
- Δ denota al determinante de una matriz.
- Los eigenvalores (valores propios) se calculan con la siguiente fórmula:

$$\lambda = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2} \tag{20}$$

Para clasificar los eigenvalores resultantes tenemos los sig. casos:

- Si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ ($\tau < 0$ y $\Delta > 0$), entonces (c*, z*) es un *nodo asintóticamente estable* (**punto atractor**).
- Si $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ ($\tau > 0$ y $\Delta > 0$), entonces (c*, z*) es un *nodo inestable* (**punto repulsor**).
- Si $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$ ($\Delta < 0$), entonces (c*, z*) es un **punto silla inestable**.
- Si tenemos eigenvalores imaginarios puros y $\Delta > 0$ y $\tau = 0$, entonces (c*, z*) es un **centro estable**.

Análisis del punto de equilibrio en (c_1*, z_1*):

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & -r_2 \end{pmatrix} \tag{21}$$

- Observamos que el determinante es: - r_1 r_2 <0.

- $\lambda_1 = r_1$ y $\lambda_2 = - r_2$.
- Por lo que podemos concluir que (0,0) es un punto silla inestable.

Análisis del punto de equilibrio en (c_2*, z_2*):

$$J(\frac{r_2}{b_2}, \frac{r_1}{b_1}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-r_2 b_1}{b_2} \\ \frac{r_1 b_2}{b_1} & 0 \end{pmatrix} \tag{22}$$

- Observamos que el determinante es: r_1 r_2 >0.
- La traza es: 0.
- $\lambda_1 = i\sqrt{r_1 r_2}$ y $\lambda_2 = -i\sqrt{r_1 r_2}$.
- Por lo que podemos concluir que $(\frac{r_2}{b_2}, \frac{r_1}{b_1})$ es un centro estable.

iii. Estimando Datos Reales con ayuda del Modelo de Lotka-Volterra

En la literatura podemos encontrar la sig. base de datos por parte de la compañia Hudson Bay, la cual vamos a utilizar para poder estimar los parámetros del modelo.

Año	Conejos	Linces	Año	Conejos	Linces
1900	30	4	1911	40.3	8
1901	47.2	6.1	1912	57	12.3
1902	70.2	9.8	1913	76.6	19.5
1903	77.4	35.2	1914	52.3	45.7
1904	36.3	59.4	1915	19.5	51.1
1905	20.6	41.7	1916	11.2	29.7
1906	18.1	19	1917	7.6	15.8
1907	21.4	13	1918	14.6	9.7
1908	22	8.3	1920	16.2	10.1
1909	25.4	9.1	1921	24.7	8.6
1910	27.1	7.4	1922	-	-

Figura 4: Tabla que muestra el índice de capturas de linces y conejos elaborada por la compañía Hudson Bay entre los años 1900 y 1921.

Para poder aplicar el modelo depredador - presa a los datos de la Tabla anterior, es necesario conocer los valores de r_1, r_2, b_1 y b_2. Empezamos tomando como valores iniciales C(0) = 30 y L(0) = 4. Para encontrar el resto de los parámetros debemos tener en cuenta los valores medios.

Si elegimos los datos comprendidos entre dos valores máximos (o mínimos) y hacemos su media, podemos estimar $C(\bar{t})$ y $L(\bar{t})$. Por ejemplo, en el caso de los conejos consideraremos la población comprendida entre los años 1903 y 1913:

$$\bar{C} = \frac{77{,}4 + 36{,}3 + 20{,}6 + 18{,}1 + 21{,}4 + 22 + 25{,}4 + 27{,}1 + 40{,}3 + 57 + 76{,}6}{11}$$
$$\bar{C} = 38{,}381$$

Y para los linces los años comprendidos entre 1904 y 1915:

$$\bar{L} = \frac{59{,}4 + 41{,}7 + 19 + 13 + 8{,}3 + 9{,}1 + 7{,}4 + 8 + 12{,}3 + 19{,}5 + 45{,}7 + 51{,}1}{12}$$
$$\bar{L} = 24{,}541$$

De esta manera, tenemos lo siguiente:

$$\bar{C} = \frac{r_2}{b_2} = 38{,}381$$
$$\bar{L} = \frac{r_1}{b_1} = 24{,}541$$

Todavía necesitamos otras dos ecuaciones para poder estimar todos los coeficientes. Para ello razonamos de la siguiente manera: cuando la población de depredadores sea muy baja, es de esperar que las presas estén creciendo de manera exponencial. A partir de esta hipótesis calcularemos r_1. En efecto, en la tabla observamos que hay una población baja de linces, y al mismo tiempo un crecimiento rápido de los conejos en el año 1910.

Para estos años, los datos se pueden expresar como C(t) = 27.1 en el año 1910 y C(t + 1) = 40.3 en el año 1911. Si definimos C(0) = 27.1 y C(1) = 40.3 y sustituimos en la ecuación (5) (**crecimiento exponencial de los conejos**):

$$C(1) = C(0)e^{r_1 t}$$
$$\Rightarrow 40{,}3 = 27{,}1e^{r_1(1)}$$
$$\Rightarrow r_1 = ln(\frac{40{,}3}{27{,}1}) = 0{,}396$$

En el otro caso, una población muy baja de conejos implíca un ritmo elevado en el descenso de la población de linces, esto se del año 1905 al 1906. sean L(0) = 41.7 y L(1) = 19. Sustituyendo estos valores en la ecuación (12) (**decrecimiento expenencial de la población de zorros**):

$$L(1) = L(0)e^{-r_2 t}$$
$$\Rightarrow 19 = 41{,}7e^{-r_2(1)}$$
$$\Rightarrow r_2 = -ln(\frac{19}{41{,}7}) = 0{,}786$$

Con esto, ya hemos estimado todos los parámetros utilizados en el modelo. A continuación se enlistan

$$r_1 = 0{,}396 \tag{23}$$
$$r_2 = 0{,}786 \tag{24}$$
$$b_1 = 0{,}016 \tag{25}$$
$$b_2 = 0{,}020 \tag{26}$$
$$C(0) = 30\,,\, L(0) = 4 \tag{27}$$

Al sustituir estos parámetros en las ecs. (1) y (2) nos queda

$$\frac{dC(t)}{dt} = 0{,}396C(t) - 0{,}016C(t)L(t) \qquad C(0) = 30 \tag{28}$$
$$\frac{dL(t)}{dt} = 0{,}020C(t)L(t) - 0{,}786L(t) \qquad L(0) = 4 \tag{29}$$

A continuación vamos a resolver numéricamente las ecs. (28) y (29).

iv. Soluciones Numéricas

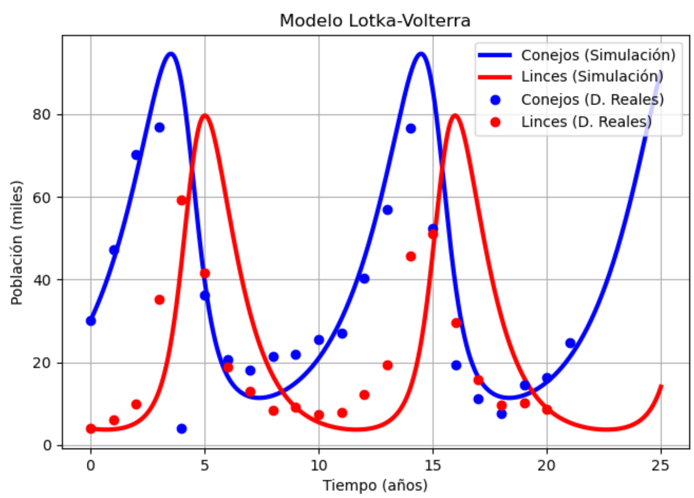

Figura 5: Simulacion de las ecuaciones (28) y (29) con h = 0.001 (tamaño de paso). Sobreponiendo los datos de Hudson Baley vs la solución numérica podemos afirmar que este es un modelo apropiado para estudiar este sistema. Se aprecia la dinámica oscilatoria-desfasada de linces y conejos y esta corresponde a los datos reales.

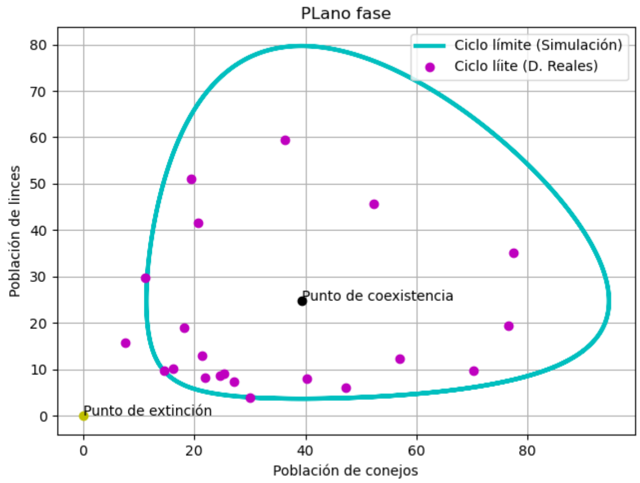

Figura 6: Simulacion de las ecuaciones (28) y (29) con h = 0.001. Plano fase (Conejos vs Linces). El punto de extinción es el punto silla inestable y el punto de coexistencia es un centro estable. Observamos que conforme la población de conejos aumenta también aumenta la de linces y conforme aumenta la de linces la de conejos decrece y este ciclo se repite.

VI. Conclusión

El modelo de Lotka-Volterra es un modelo que estudia la dinámica de dos poblaciones que comparten un espacio en común y en la cual una especie actúa como presa y la otra especie como depredador. Es un modelo que se puede aplicar a una gran variedad de escenarios del mundo animal y es muy útil para predecir el comportamiento poblacional si se tienen suficientes datos para *alimentar* al modelo. Este sistema (cuando ambas especies coexisten) no tiene solución analítica pero si solución numérica y para ello disponemos de una gran variedad de métodos, sin embargo, antes de darle solución al sistema se pueden utilizar herramientas del álgebra lineal para hacer un análisis cualitativo del sistema y así intuir o darnos una primera idea de qué direccion tomará el sistema, es por eso que el álgebra lineal juega un papel muy importante en este tipo de modelos y en general en el estudio de sistemas de ecuaciones diferenciales.