Matemática

Aula 5

FUNÇÃO: FERRAMENTA PARA TODAS AS ÁREAS

Profa. Ms. Alessandra Azzolini

Talita presta serviços de consultoria na área de T.I. Pelos seus serviços cobra uma taxa de R$ 350,00 fixos pela visita à empresa, mais R$ 100,00 por hora trabalhada. Pergunta-se:

a) Se uma empresa contratar Talita por um serviço que demandará 40 horas de trabalho, qual o valor que a empresa pagará pela consultoria?

R$ 4.350,00

b) Se chamarmos de **h** o total de horas trabalhadas por Talita, e de **v** o valor a ser pago pelo serviço, escreva uma expressão matemática que permite determinar o valor a ser pago em qualquer serviço prestado por Talita em função da quantidade de horas a ser trabalhada na consultoria.

v = 350,00 + 100,00h

c) Se Talita receber, em um determinado serviço de consultoria prestado, R$ 1.850,00 pelo trabalho, quantas horas ela terá trabalhado?

1850,00 = 350,00 + 100,00h

1850,00 – 350,00 = 100,00h

1500,00= 100,00h

h = 1500,00/100,00

h = 15 horas

d) A expressão determinada no item **b** apresenta duas variáveis. Uma dependente e uma independente. Qual delas é a dependente e qual a independente?

h - Variável independente
v – Variável dependente

e) Para cada valor de **h** haverá um único valor ou infinitos valores para **v**?

O valor de **h** haverá um único valor de v.

Breve explicação Histórica

A noção de Função não é muito antiga, sendo que seu surgimento como conceito claramente individualizado e como objeto de estudo em matemática data dos finais do século XVII. Observa-se ao longo da história que Newton (1642-1727) aproxima-se bastante do sentido atual de função com a utilização do termo "*relatia quantas*" para designar variável dependente e "*genita*" para designar uma quantidade obtida a partir de outras.

Mas foi com Leibniz (1646-1716) que surgiu o termo função, em 1673, no manuscrito latino "*Methodus tangentium inversa*" quando usa o termo para designar, em termos gerais, a dependência de uma curva de quantidades geométricas de alguma variável por meio de uma expressão analítica, tendo sido essa palavra adotada em correspondências trocadas entre 1694 e 1698 por Leibniz e Bernoulli (1667-1748).

Finalmente Euller (1707-1783) aprimorou o conceito de função, vindo a introduzir a notação *f(x)*.

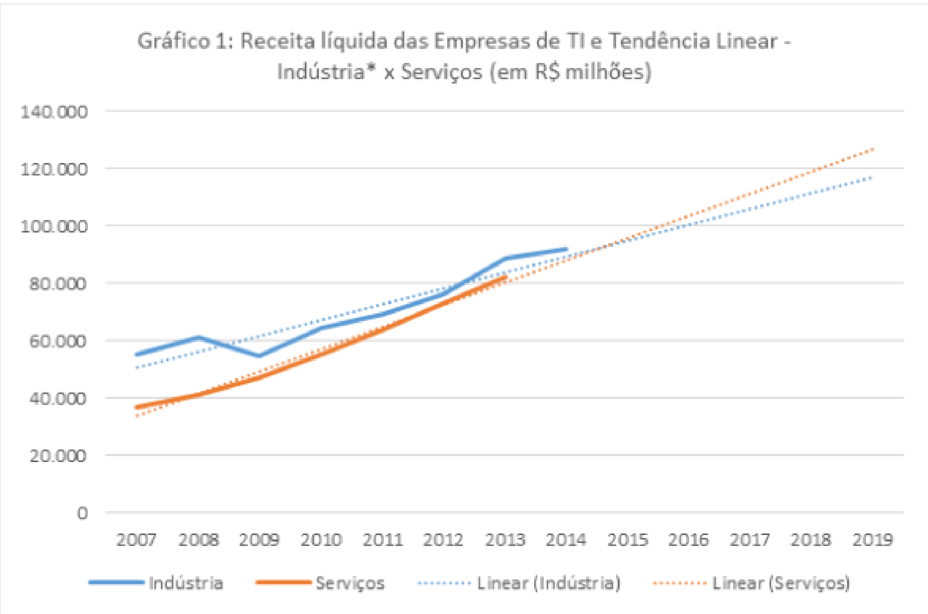
Entendendo uma função

Há, em ambos os casos, uma **relação de dependência**, onde um elemento **domina** a relação e outro elemento é uma **imagem** da ação de quem domina. Quando falamos em **função matemática**, também falamos em uma **relação de dependência**, onde sempre haverá um **domínio (x)** e uma **imagem (y)**.

Podemos então dizer, matematicamente, que função é uma **Relação entre duas Grandezas**. Mas, o que seriam grandezas?

Grandeza é tudo aquilo que pode ser contado ou quantificado.

Observe os exemplos a seguir:



Disponível em:https://economiadeservicos.com/2016/07/05/o-avanco-da-tecnologia-da-informacao-como-servico/ acesso em 01/10/2020

➤ O gráfico abaixo mostra a variação da taxa de desemprego mensal na cidade de São Paulo, no período de maio de 1998 a maio de 1999.

Observe que o gráfico nos fornece diversas informações: o mês em que houve maior número de desempregados, a época em que houve menos desemprego, a porcentagem de aumento e diminuição entre dois meses qualquer, entre outras.

Nessa relação, o **mês** é a **variável independente** e a **taxa de desemprego** é a **variável dependente.**

Tomemos outro **exemplo:** A fórmula **$A = L^2$** representa a **área A** de um quadrado de lado **L.** Assim, se o **lado** do quadrado mede 4 cm, sua **área** será de **16 cm^2.**

Agora vamos observar algumas conclusões importantes dos três exemplos:

As três relações têm duas características em comum:

- Para todo e qualquer valor da **variável independente** estão associados valores da **variável dependente**.

- Para um dado valor da **variável independente** está associado um único valor da **variável dependente**.

Toda relação com essas duas características é chamada de **função**. Podemos observar que:

- A tarifa postal é dada **em função** da carta.

- A taxa de desemprego é dada **em função** do mês.

- A área do quadrado é dada **em função** do seu lado.

Essa análise nos leva a dois conceitos importantes em uma função: **Domínio** e **Imagem**.

Domínio da função é o conjunto de todos os valores dados para a **variável independente**.

Imagem da função é o conjunto de dados de todos os valores correspondentes da **variável dependente.**

Podemos também concluir que:

- Todo elemento de A deve estar associado **a um único elemento** de B.

- A um dado elemento de A deve estar associado **um único elemento** de B.

Exemplos:

1. Um parque pratica os seguintes preços para aluguel de bicicletas:

Horas	**Preço (em reais)**
1	4,00
2	7,00
3	10,00
4	12,00
5 ou mais	2,50 por hora

Pergunta-se:

a) Qual o valor a ser pago no aluguel de 6 horas?
6 . R$ 2,50 = R$ 15,00

b) Qual será o preço de cada hora no aluguel de 4 horas?
R$ 12,00 / 4 = R$ 3,00

c) Qual a variável dependente e qual a independente?

Horas: variável independente

Preço: variável dependente

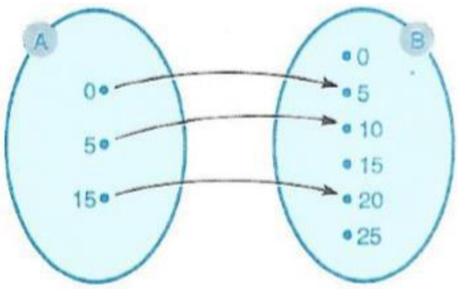
d) Quem é o domínio e que é a imagem dessa função:

Domínio: horas

Imagem: preço

2. Dados os conjuntos **A = {0, 5, 15}** e **B = {0, 5, 10, 15, 20, 25}**, seja a relação de **A** em **B** expressa pela fórmula (**Lei de formação**) **y = x + 5**, com $X \in A$ e $y \in B$, verifique se essa relação é uma função.

Toda relação pode ser expressa na forma de um diagrama, onde o Conjunto **A** representa a variável **X** e o conjunto **B** a variável **Y.**



x	y
0	5
5	10
15	20

Domínio = A = **{0, 5, 15}**
Contra domínio = B = **{0, 5, 10, 15, 20, 25}**
Imagem = {5, 10, 20}

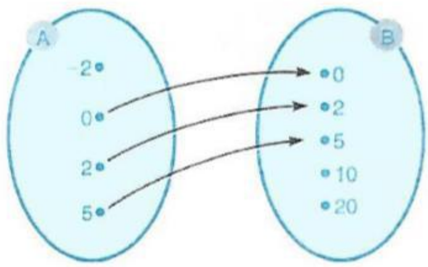
Podemos observar que:

- Todos os elementos de **A** estão associados a elementos de **B**.
- Para cada elemento de **A** está associado um único elemento de **B**.

Ou seja, a relação é uma função de **A em B**

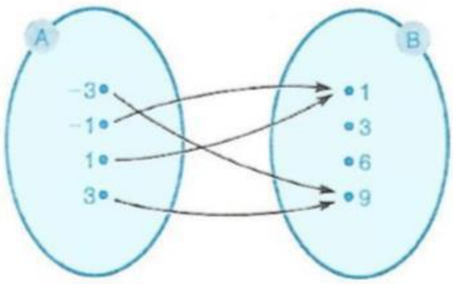
3. Dados os conjuntos **A = {-2, 0, 2, 5}** e **B = {0, 2, 5, 10, 20}** seja a relação **A em B** expressa pela lei de formação **y = x** com $X \in A$ e $y \in B$, verifique se essa relação é uma função.

Sendo **y = x**, para cada valor de **x** teremos o mesmo valor de **y.**



Observe que esse exemplo não representa uma função, pois o elemento **-2** de **A não** tem correspondente em **B.**

4. Dados os conjuntos **A = {-3, -1, 1, 3}** e **B = {1, 3, 6, 9}** seja a relação **A em B** expressa pela lei de formação **y = x²** com $X \in A$ e $y \in B$, verifique se essa relação é uma função. Temos o seguinte diagrama:



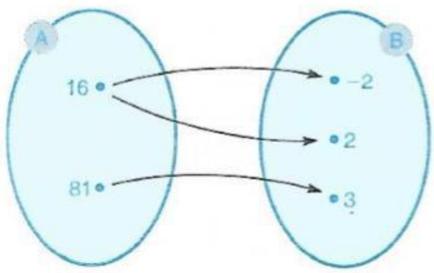
Domínio = A = **{-3, -1, 1, 3}**
Contra domínio = B = **{1, 3, 6, 9}**
Imagem = {1, 9}

Podemos observar que:

- Todos os elementos de **A** estão associados a elementos de **B**.
- Para cada elemento de **A** está associado um único elemento de **B**.

Ou seja, a relação é uma função de **A em B.**

5. Dados os conjuntos **A = {16, 81}** e **B = {-2, 2, 3}** seja a relação **A em B** expressa pela lei de formação **y4 = x** com $X \in A$ e $y \in B$, verifique se essa relação é uma função. Temos o seguinte diagrama:

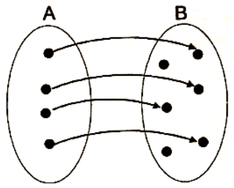
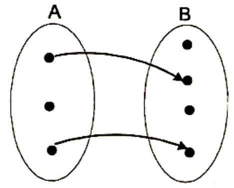
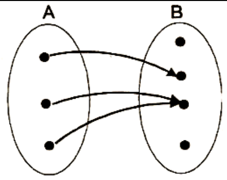
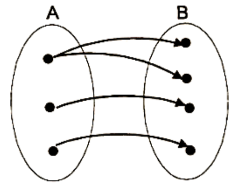


Observe que esse exemplo não representa uma função, pois o elemento **16** de **A** está associado a **dois** elementos em **B (-2, 2)**

FUNÇÕES

DEFINIÇÃO

Dados dois conjuntos A e B, diz-se que uma relação f de A em B é função, se e somente se, para todo elemento x $\in$ A existir um e somente um elemento y $\in$ B.

	
É função	Não é função
	
É função	Não é função

NOMENCLATURA:

DOMÍNIO – É o conjunto de partida da função. Graficamente, o domínio da função f é a projeção do gráfico de f sobre o eixo das abscissas.

CONTRADOMÍNIO – É o conjunto de chegada da função.

IMAGEM – É o conjunto dos elementos "flechados" (subconjunto de contradomínio). Graficamente, o conjunto imagem da função f é a projeção do gráfico de f sobre o eixo das ordenadas.

ATENÇÃO

PROBLEMAS DE DOMÍNIO:

$$f(x) = \frac{a(x)}{b(x)} \Rightarrow b(x) \neq 0$$

$$f(x) = \sqrt[par]{c(x)} \Rightarrow c(x) \geq 0$$

$$f(x) = \frac{d(x)}{\sqrt[par]{e(x)}} \Rightarrow e(x) > 0$$

$$f(x) = \frac{4}{x}, x$$

$$f(x) = \sqrt{x}, x$$

$$f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}}, x$$

VALOR NUMÉRICO

O valor numérico f(α) de uma função f(x) é o resultado obtido na expressão quando substitui-se o x por α.

1) Dada a função f(x) = 3x – 10, calcule:

a) f (1) = 3.1 – 10 = 3 -10 = -7

b) f (0) = -10

f(0) = 3.0 – 10

f(0) = 0 – 10 = -10

c) f (-5) =−15 −10 = −25

2) Seja f a função real, definida por f (x) = x^2 – 9. Calcule o valor numérico de f(5).

f (5) = 5^2 – 9 = 25 – 9 = 16

f (0) = -9

f (-1) = $(-1)^2$ – 9 = 1 – 9 = -8

ZERO DA FUNÇÃO (raiz da função)

O zero de uma função é o número α do domínio que anula a função, ou seja, tem-se f(α) = 0.

Determine o zero da função f(x) = 2x + 8.

f(x) = 2x + 8

f(-4) = 2(-4) + 8 = -8 +8 =0

2x + 8 = 0

2x = -8

$$x = \frac{-8}{2} = -4$$

$$2x + 8 = 0$$

$$2x + \underbrace{8 - 8} = \underbrace{0 - 8}$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{-8}{2}$$

$$x = -4$$

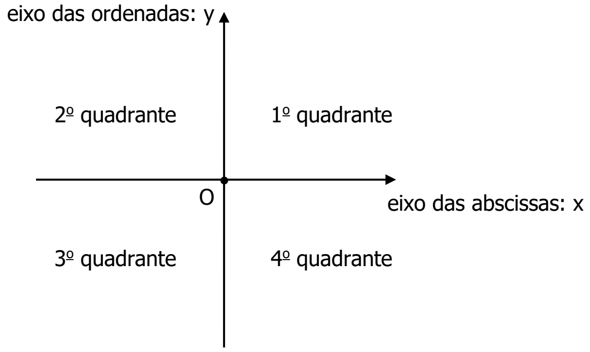
FMU
CENTRO UNIVERSITÁRIO

GRÁFICO

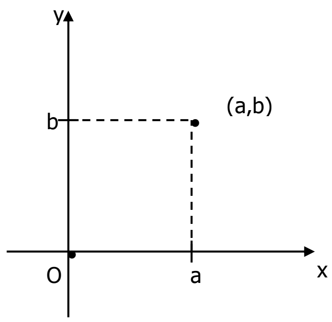
O gráfico é um recurso que expressa a relação entre duas grandezas.

SISTEMA CARTESIANO ORTOGONAL (PLANO CARTESIANO)

O plano cartesiano é constituído de duas retas orientadas e perpendiculares, chamadas de eixos. Os eixos ortogonais dividem o plano em quatro regiões, chamadas quadrantes, e são chamados de EIXO DAS ABSCISSAS (x) e EIXO DAS ORDENADAS (y).



O ponto de abscissa **a** e ordenada **b**, chamada de COORDENADAS CARTESIANAS, é representado pelo par ordenado (a,b).



CONSTRUÇÃO DE GRÁFICOS DE FUNÇÕES

O gráfico de uma função é dado pelo conjunto de todos os pontos (x,y), coordenadas cartesianas, do plano cartesiano, com $x \in D(f)$ e $y \in Im(f)$.

OBS: Para identificar se um gráfico representa ou não uma função, traçam-se retas paralelas ao eixo y. Para ser função, cada reta vertical deve interceptar o gráfico num único.

Exercícios

1. Identifique nas situações abaixo quais são as variáveis dependentes e quais as independentes.

a. O número de barras de chocolate que alguém compra e a quantia paga por elas.

número de barras de chocolate – variável independente

quantia paga – variável dependente

b. A duração de uma chamada de celular e o custo da chamada

A duração de uma chamada de celular – variável independente

custo da chamada – variável dependente

c. O andar do apartamento em que uma pessoa mora e o tempo necessário para o elevador, a partir do térreo e sem nenhuma parada, chegar até o apartamento.

O andar do apartamento – variável independente

Tempo – variável dependente

2. A temperatura é medida, no Brasil, em graus Celsius (ºC). Mas, em alguns países de língua inglesa, a temperatura é medida em outra unidade, chamada de Fahrenheit. Para converter medidas em uma escala para outra, pode-se utilizar a fórmula $C = \frac{5(F-32)}{9}$, onde **C** é a temperatura em graus Celsius e **F** em Fahrenheit. Pede-se:

a. Em certo dia, o jornal noticiou que a temperatura em Miami era de 62ºF. Qual a temperatura equivalente em graus Celsius?

$$C = \frac{5(62-32)}{9}$$

$$C = \frac{5(30)}{9}$$

$$C = 16{,}7°C$$

b. A que temperatura, em graus Fahrenheit, equivale a temperatura de 38ºC?

$$C = \frac{5(F-32)}{9}$$

$$38 = \frac{5(F-32)}{9}$$

$$38 * 9 = 5(F-32)$$

$$\frac{342}{5} = F - 32$$

$$68{,}4 = F - 32$$

$$68{,}4 + 32 = F$$

$$F = 68{,}4 + 32$$

$$F = 100{,}4°F$$

3. (Unicamp-SP) O preço a ser pago por uma corrida de táxi inclui uma parcela fixa, denominada bandeirada, e uma parcela que depende da distância percorrida. Se a bandeirada custa R$ 3,44 e cada quilometro rodado custa R$ 0,86, calcule:

a. O preço de uma corrida de 11km.

$P = 3{,}44 + 0{,}86.11$

$P = 12{,}90$

R$ 12,90

b. A distância percorrida por um passageiro que pagou R$ 21,50 pela corrida.

$P = 3{,}44 + 0{,}86x$

$21{,}50 = 3{,}44 + 0{,}86x$

$21{,}50 - 3{,}44 = 0{,}86x$

$0{,}86x = 18{,}06$

$$x = \frac{18{,}06}{0{,}86}$$

$x = 21\ km$

4. A tabela abaixo mostra como deveria ser calculado o imposto de renda (pessoa física) na Declaração de Ajuste Anual do exercício de 2019, ano-calendário de 2020.

Valor	Alíquota (%)	Parcela a deduzir do IRPF (R$)
Até R$ 22.847,76	Isento	R$ 0,00
De R$ 22.847,77 até R$ 33.919,80	7,5%	R$ 1.713,58
De R$ 33.919,81 até R$ 45.012,60	15%	R$ 4.257,57
De R$ 45.012,61 até R$55.976,16	22,5%	R$ 7.633,51
Acima de R$ 55.976,16	27,5%	R$ 10.432,32

Para calcular o imposto devido, basta aplicar a alíquota sobre o total de rendimentos e subtrair o valor da dedução correspondente. Qual seria o imposto devido de uma pessoa que teve, durante o ano, um rendimento de

a) R$ 25.800,00

25.800,00 * 0,075 = 1.935,00 – 1.713,58 = R$ 221,42

b) R$ 18.350,00

Isento

c) R$ 62.400,00

62.400,00 * 0,275 – 10.432,32 = R$ 6.727,68

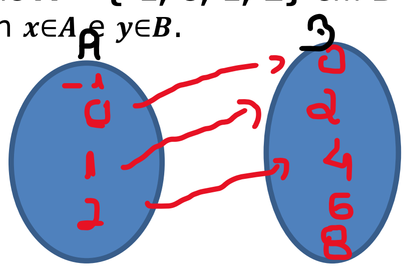
R$ 6.727,68

d) R$ 51.600,00

51.600,00 * 0,225 – 7.633,51 = R$ 3.976,49

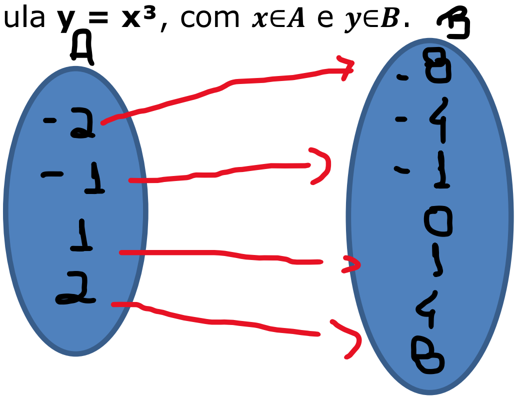
5. Nas duas relações dadas a seguir, faça o diagrama e verifique se elas são ou não funções, justificando sua resposta.

a) f é uma relação de **A = {-1, 0, 1, 2}** em **B = {0, 2, 4, 6, 8}** expressa pela fórmula **y = 2x**, com $x \in A$ e $y \in B$.



Resp: Não é função.

b) **g** é uma relação de **A = {-2, -1, 1, 2}** em **B = {-8, -4, -1, 0, 1, 4, 8}** expressa pela fórmula **y = x³**, com $x \in A$ e $y \in B$.



Resp: É função.

6. Seja **h** uma relação de **A = {0, 1, 3}** em **B = {0, 1, 2, 3, 4, 5}** expressa por **h(x) = x² - 4x +3**. Verifique se **h** é uma função de **A em B**. Em caso afirmativo, escreva o conjunto imagem.

h(0) = 0² – 4.0 +3= 3

h(1) = 1² – 4.1 +3 = 1 - 4 +3 =0

h(3) = 0

Resp: É função. Im = {0,3}

7. Na função $f: R \to R$, com **f(x) = x² – 4x + 3**, determine:

a. f(-2)= **(-2)² – 4.(-2) + 3 = 4 + 8 + 3 = 15**

b. f(x) = **x² – 4x + 3**

f(√2) = √2² **– 4.** √2 **+ 3**

f(√2) = **2 – 4**√2 + 3

f(√2) =5 - 4√2

8. Dado o conjunto **A = {-2, -1, 0, 1}**, determine o conjunto imagem da função $f: A \to R$ quando **f** for definida por:

a. $f(x) = x^3$

$f(-2) = (-2)^3 = -8$

$f(-1) = (-1)^3 = -1$

$f(0) = (0)^3 = 0$

$f(1) = (1)^3 = 1$

Im ={-8, -1, 0, 1}

b. $f(x) = -x + 3$

$f(-2) = -(-2) + 3$ = +2+3 = 5

$f(-1) = -(-1) + 3$ =1 + 3 = 4

$f(0) = -0 + 3$ = 3

$f(1) = -1 + 3$ =2

Im ={2,3,4,5}