FMU
CENTRO UNIVERSITÁRIO

Matemática

Aula 6

FUNÇÃO: CRESCENTE E DECRESCENTE

Profa. Me. Alessandra Azzolini

ESQUENTANDO O CÉREBRO

A empresa "Boradormir", famosa vendedora de colchões, definiu uma função para cálculo do lucro de um novo tipo de colchão. Esse lucro é calculado pela função f(P)= 5.P - 3500. O departamento financeiro, a partir de estudos de marketing, definiu que os preços poderão variar no intervalo R$ 500,00 até R$ 900,00.

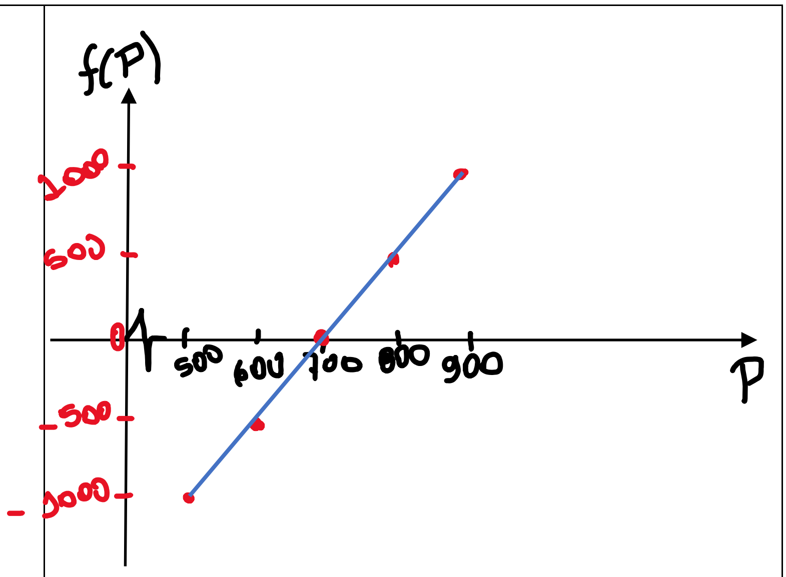
Pede-se:

- *Elabore um gráfico que reflita a situação acima para preços práticos de R$ 100,00 em R$ 100,00 no intervalo [500, 900]*

f(P)= 5.P – 3500

f(500)= 5.(500) – 3500 = -1000

P	f(P)
500	-1000
600	-500
700	0
800	500
900	1000



- *Para quais valores a empresa terá lucro?*

  ]700, 900] *ou* $\{P \in R \mid 700 < P \leq 900\}$

- *Para quais valores a empresa terá prejuízo?*

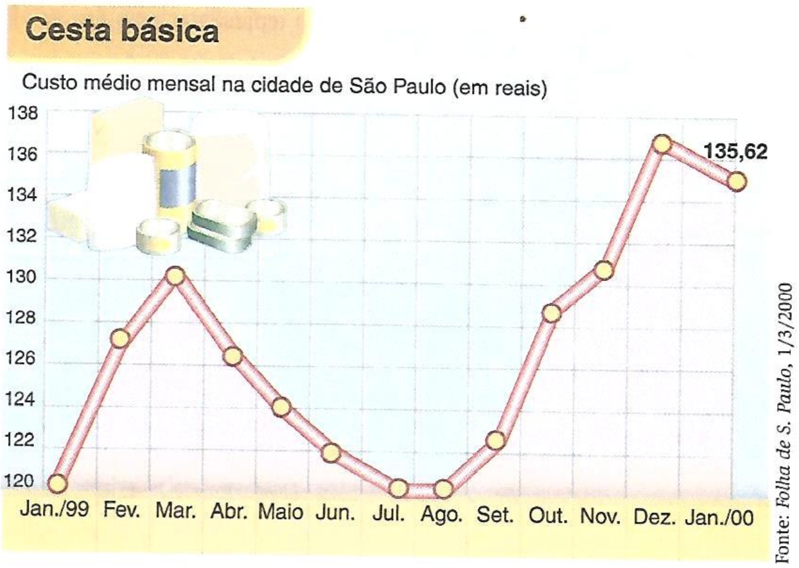
  [500, 700[*ou* $\{P \in R \mid 500 \leq P < 700\}$

- *Em qual intervalo a Função será classificada como crescente?*

  [500, 900]

- *Em qual intervalo a Função será classificada como decrescente?*

  nenhum



Todos os dias encontramos nos diários ou semanários notícias deste tipo, com o preço da cesta básica, ora em alta, ora em baixa ou mantendo-se fixo. Esta variação pode depender do excesso de chuvas ou seca; de algum tipo de doença que afetou os frangos, bois ou mesmo os produtos agrícolas; problemas de armazenamento de grãos; preço dos combustíveis, aumento do dólar etc.

Vamos analisar o gráfico acima verificando a variação em intervalos de tempo.

De janeiro até meados de março de 1999, observamos uma alta de R$ 120,00 para R$ 130,00 no custo médio da cesta básica em São Paulo. Não vamos levar em conta os fatores que, na época, levaram a este aumento. Continuando a examinar o nosso gráfico, podemos observar uma queda nos preços em meados de março até julho, o que levou a uma variação de R$ 130,00 para R$ 120,00. Observamos também que nos meses de julho e agosto houve uma estabilização nos preços, que voltaram a subir depois ininterruptamente até o mês de dezembro, sofrendo uma nova queda em janeiro. Sabemos que a "linha" descrita pelo gráfico representa uma função (tempo, preço) na qual os meses (tempo) constituem a variável independente e os preços, a variável dependente.

Resumindo:

- De janeiro a meados de março os preços vão aumentando. Logo, está havendo um *crescimento*.
- De meados de março a julho os preços estão em queda (*decrescendo*).
- Durante julho e agosto podemos verificar uma estabilização, ou seja, os preços permanecem *constantes*.

Com as funções acontece algo parecido. Para analisar a variação de uma função, atribuímos os valores do domínio em ordem crescente à variável independente e observamos o que acontece com os valores da imagem.

- Se, aumentando os valores da variável independente, os valores da imagem também aumentam, temos uma *função crescente*.
- Se, aumentando os valores da variável independente, os valores da imagem diminuem, temos uma *função decrescente*.
- Se, aumentando os valores da variável independente, os valores da imagem permanecem inalterados, temos uma *função constante*.

Muitas vezes recorremos à representação gráfica de uma função para analisarmos o seu crescimento ou decrescimento.

Intervalos

É um conjunto que pertence aos reais que é representado por dois pontos indicados em uma reta. A reta pode ser infinita, representada pelo símbolo ∞ e também pode ser finita indicando seu começo e seu término.
"Bolinha" fechada ou aberta: quando a "bolinha" está fechada indica que o ponto pertence a reta e quando a "bolinha" está aberta indique que o ponto não pertence a reta, aí a reta fica semi-aberta.

Notações

1. Dizemos que um intervalo é *aberto* quando seus extremos não estão incluídos.

$$]a,b[=\{x \in R : a < x < b\}$$

Geometricamente representamos por uma bolinha branca indicando o elemento não incluído:

O intervalo também é aberto quando indicamos apenas um dos extremos e o outro pode ser uma infinidade de elementos à direita $(+\infty)$ ou à esquerda $(-\infty)$. Ou seja:

$$]a,+\infty[=\{x \in R : x > a\}$$

$$]-\infty,12[=\{x \in R : x < 12\}$$

2. Um intervalo *fechado* é aquele em que seus extremos são incluídos:

$$[a,b]=\{x \in R : a \leq x \leq b\}$$

Na reta, o elemento incluído será uma bolinha preta:

3. Dizemos que um intervalo é *semiaberto* ou *semifechado* quando um de seus extremos são incluídos, ou seja:

$$[a,b[=\{x \in R : a \leq x < b\}$$

$]a,b]=\{x \in R : a < x \leq b\}$

E também com extremos ao infinito:

$[a,+\infty[=\{x \in R : x \geq 18\}$

$]-\infty,a]=\{x \in R : x \leq a\}$

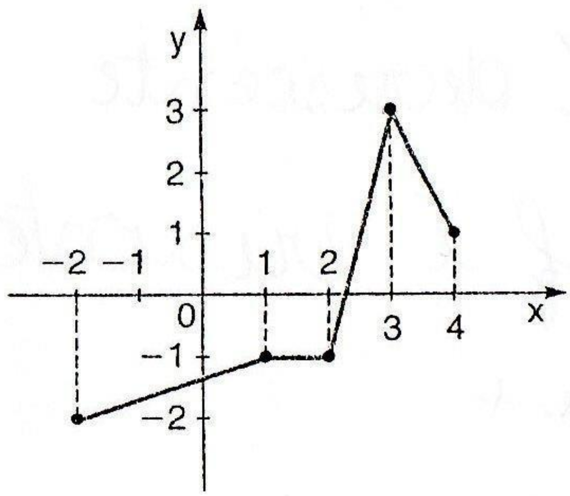
Ex.: Determine o intervalo entre A e B, sendo que A é -2 aberto e B é 5 fechado,]-2, 5]:

Intervalo semi-aberto, finito, $\{x \in R \mid -2 < x \leq 5\}$.

Determine o intervalo entre A e B, sendo que B é 2 fechado, **(**-∞, 2]:

Intervalo semi-fechado, infinito, $\{x \in R \mid x \leq 2\}$.

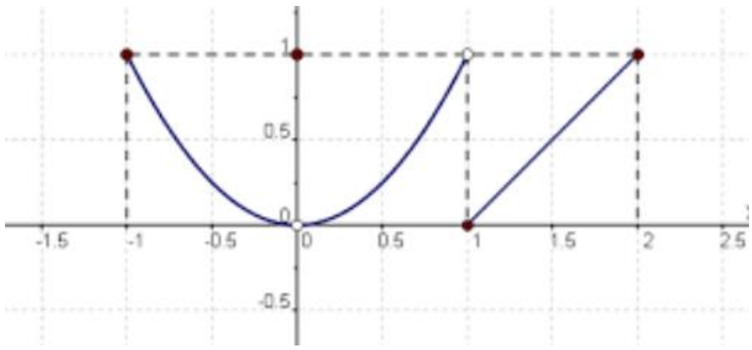
Observe o gráfico e responda as perguntas abaixo:



a) Determine os intervalos em que a função é:
- crescente: [-2,1] ou [2,3]
- decrescente: [3,4]

b) O que ocorre com a função no intervalo [1, 2]?
Função constante

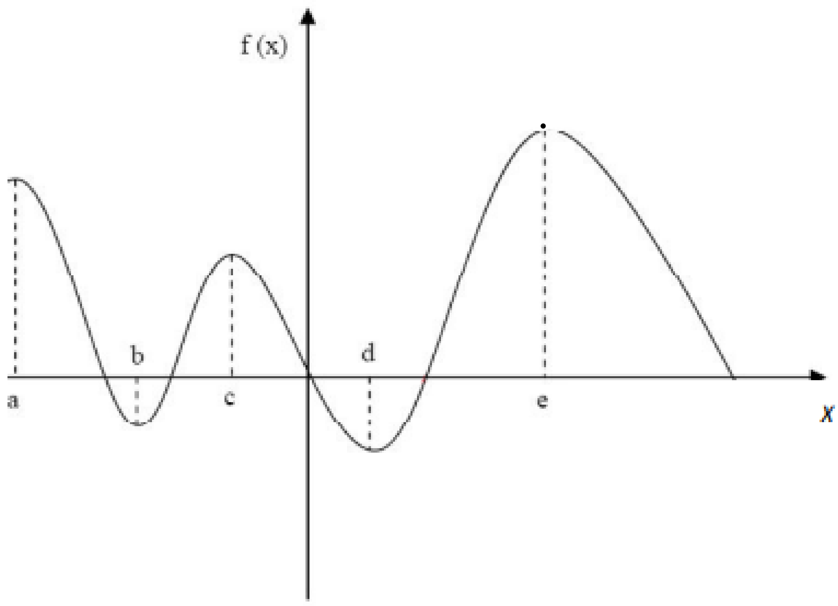
FMU
CENTRO UNIVERSITÁRIO



Determine os intervalos em que a função é:

- Crescente:]0,2]

- Decrescente: [-1,0[



1) A função é decrescente no intervalo de]a,b[;
2) A função é crescente no intervalo de]b,c[;
3) A função é decrescente no intervalo de]c,d[;
4) A função é crescente no intervalo de]d,e[;

Uma função f e crescente num intervalo A do seu domínio D se, e somente se, para quaisquer valores de x_1 e x_2, pertencentes a A, com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) < f(x_2)$.

Uma função f e decrescente num intervalo A do seu domínio D se, e somente se, para quaisquer valores de x_1 e x_2, pertencentes a A, com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) > f(x_2)$.

Crescimento e Decrescimento de uma função polinomial do 1º grau

Já estudamos crescimento e decrescimento de uma função qualquer. Ao analisarmos uma função polinomial do 1º grau, podemos determinar se ela é crescente ou decrescente simplesmente pelo sinal do *coeficiente **a*** da variável ***x.***

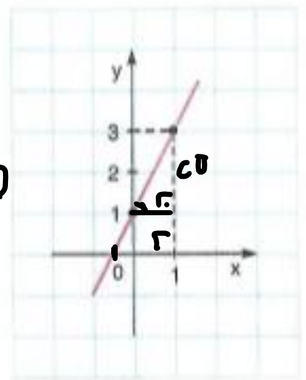
Para melhor compreensão, observe os gráficos abaixo

$f(x) = 2x + 1$ $(a > 0)$

Se $x = 0$, então $f(0) = 1$.

Se $x = 1$, então $f(1) = 3$.

$a = \frac{2}{1} = 2$



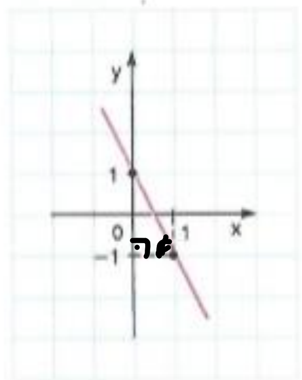
$y = 2x + 1$

Aumentando os valores atribuídos a x, aumentam também os valores correspondentes da imagem $f(x)$.

$f(x) = -2x + 1$ $(a < 0)$

Se $x = 0$, então $f(0) = 1$.

Se $x = 1$, então $f(1) = -1$.



$y = -2x + 1$

Aumentando os valores atribuídos a x, diminuem os valores correspondentes da imagem $f(x)$.

y = ax + b

a = coeficiente angular

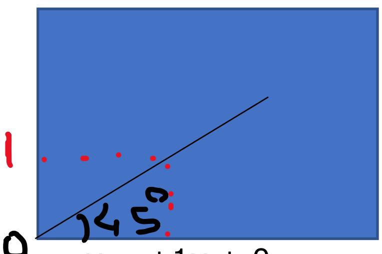
b = coeficiente linear

y = ax + b

y =

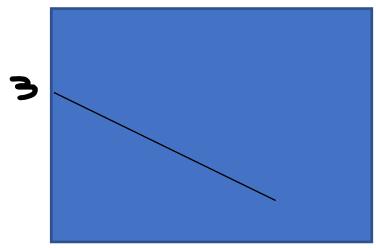
$$a = tg\theta = \frac{cat.oposto}{cat.adjacente}$$

$$a = tg\theta = \frac{cat.oposto}{cat.adjacente}$$



y = +1x + 0

y = x



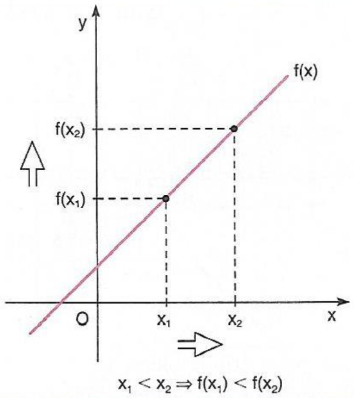
y = -1x + 3

y = -x +3

De maneira geral, para uma função polinomial do 1º grau $f(x) = ax + b$ podemos estabelecer as seguintes relações entre o sinal do coeficiente a e o crescimento e decrescimento dessa função:

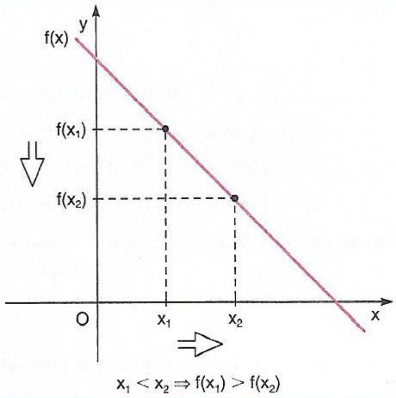
$$a > 0 \Rightarrow f(x) = ax + b \text{ é crescente}$$
$$a < 0 \Rightarrow f(x) = ax + b \text{ é decrescente}$$

$a > 0$



f(x) é crescente

$a < 0$



f(x) é decrescente

Exemplos

1. Seja a função real dada por $\boldsymbol{f(x) = 2x + 1}$. Para analisar se essa função é crescente ou decrescente, vamos representá-la graficamente.

*Inicialmente, devemos atribuir a **x** alguns valores reais, substituindo-os na fórmula dada, obtendo suas respectivas imagens.*

$$\boldsymbol{f(x) = 2x + 1.}$$

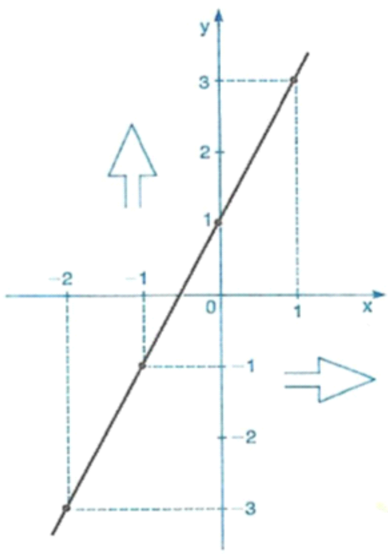
$$\boldsymbol{f(1) = 2(1) + 1.}$$

$$x = -2 \longrightarrow f(-2) = -3$$
$$x = -1 \longrightarrow f(-1) = -1$$
$$x = 0 \longrightarrow f(0) = 1$$
$$x = 1 \longrightarrow f(1) = 3$$

x	f(x)
-2	-3
-1	-1
0	1
1	3

*Observe que, ao aumentar os valores atribuídos a **x**, os valores das imagens correspondentes também aumentam. Nesse caso, dizemos que a função **f** é crescente em*

Gráfico de f



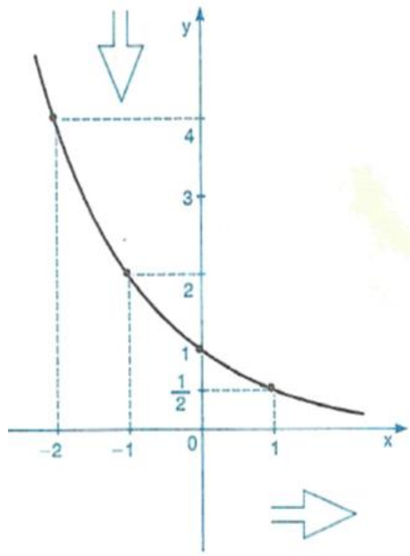
2. Vamos estudar o comportamento da função $\boldsymbol{g(x) = 2^{-x}}$, com domínio $\mathbb{R}$, quanto ao crescimento ou decrescimento.

*Iniciaremos atribuindo alguns valores para **x**, obtendo:*

$$x = -2 \longrightarrow g(-2) = 2^{-(-2)} = 2^2 = 4$$
$$x = -1 \longrightarrow g(-1) = 2^{-(-1)} = 2^1 = 2$$
$$x = 0 \longrightarrow g(0) = 2^0 = 1$$
$$x = 1 \longrightarrow g(1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$
$$x = 2 \longrightarrow g(-2) = 2^{-(2)} = \frac{2^{-2}}{1} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

x	f(x)
-2	4
-1	2
0	1
1	½
2	¼

*Podemos notar que, ao aumentarmos os valores de **x**, os valores das imagens diminuem. Nesse caso, a função é decrescente.*

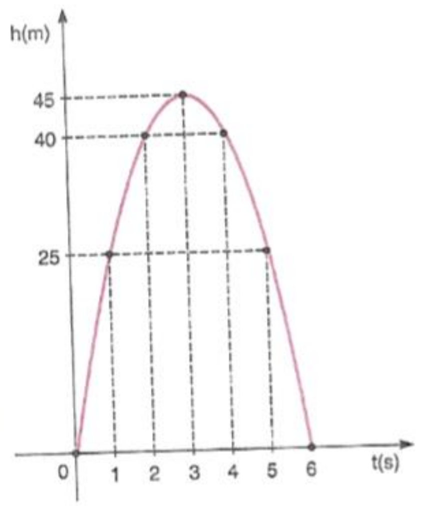


3. Por vezes, temos que recorrer à recursos gráficos para melhor compreensão do comportamento de uma função, pois as vezes as funções não apresentam características estritamente crescentes ou decrescentes em todo seu domínio. Este exemplo trata situações desse tipo, conforme texto a seguir:

Uma bola é lançada verticalmente para cima e sua altura *h*, em metros, relativamente ao solo, *t* segundos após o lançamento, é dada pela função $\boldsymbol{h(t) = -5t^2 + 30t}$. Analise o seu comportamento para **t** $\in [\mathbf{0}, \mathbf{6}]$.

*Iniciaremos atribuindo alguns valores de **t** no intervalo solicitado.* Transferindo os valores obtidos para uma representação gráfica obtemos:

t	$h(t) = -5t^2 + 30t$
0	$h(0) = 0$
1	$h(1) = 25$
2	$h(2) = 40$
3	$h(3) = 45$
4	$h(4) = 40$
5	$h(5) = 25$
6	$h(6) = -5.(6)^2 + 30.(6)$ $h(6) = -5.36 + 30.(6)$ $h(6) = -180 + 180 = 0$

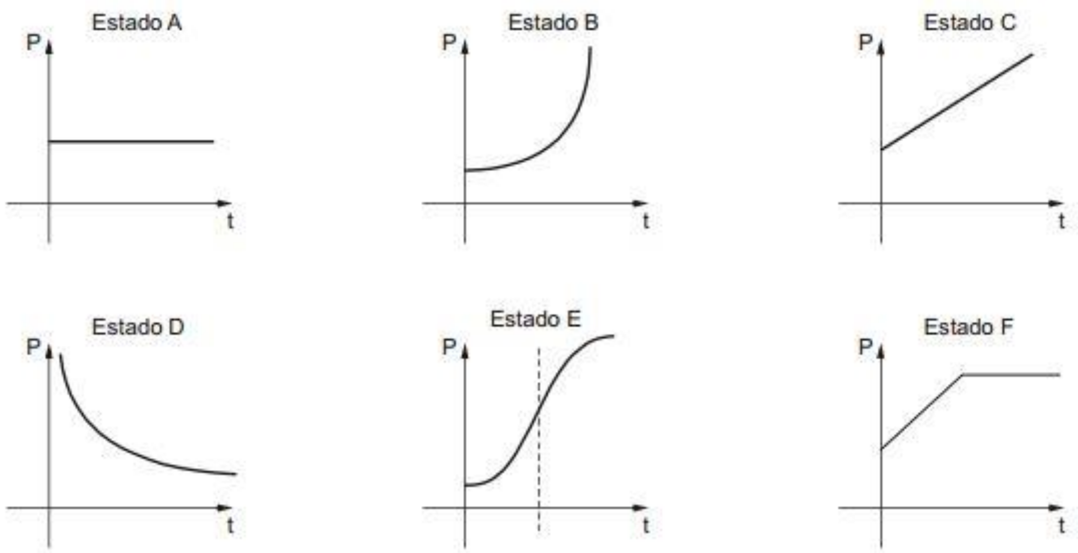


$$h(0) = -5.0^2 + 30.0 = -5.0 + 0 = 0 + 0 = 0$$

Observe que, no intervalo *[0,3]* a função é crescente, e no intervalo *[3,6]* a função é decrescente.

EXERCÍCIOS

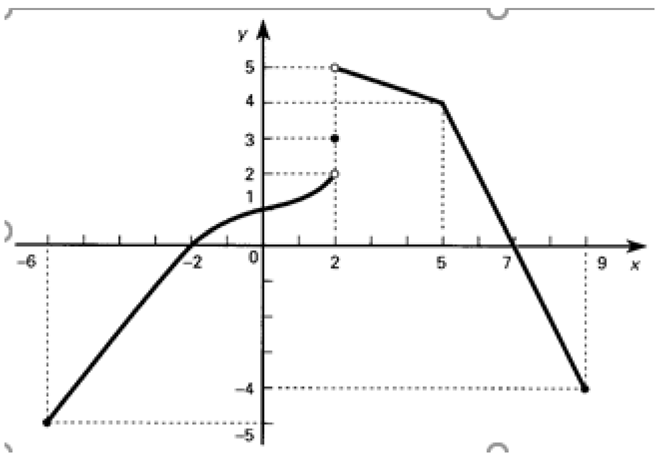
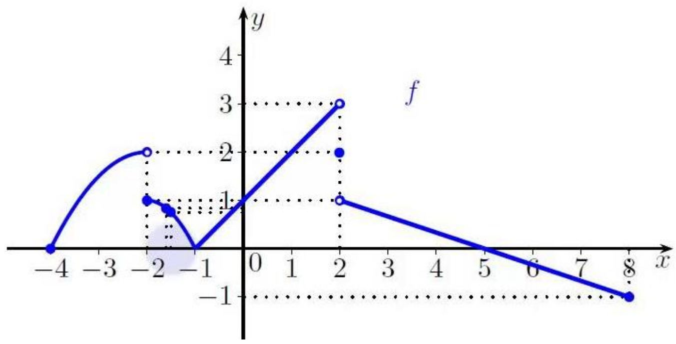
1. Os gráficos a seguir representam o preço médio P dos analgésicos de mesma composição química, em diferentes estados, em função do tempo t, ao longo de determinado ano.



Em quais estados os preços cresceram a taxa constante, a taxa crescente e a taxa decrescente, respectivamente?

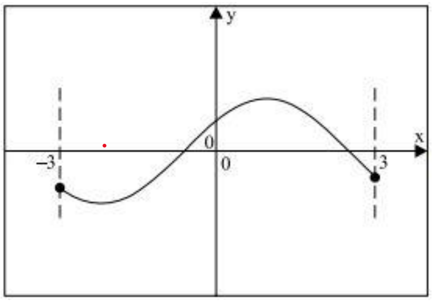
(A) C, B e D
(B) B, C e D
(C) A, B e C
(D) B, C e E
(E) C, D e F

2. Observe o gráfico e responda as perguntas abaixo:

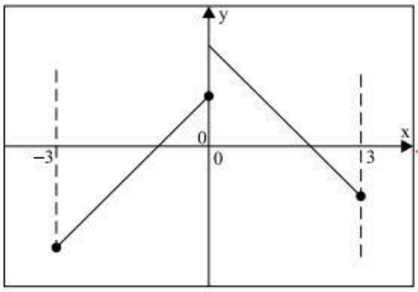
	Determine os intervalos em que a função é: - crescente: $\{x \in \mathbb{R} \mid -6 \leq x < 2\}$ [-6,2[- decrescente: $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 9\}$]2,9]
	Determine os intervalos em que a função é: - crescente: [-4,-2[, [-1, 2[- decrescente: [-2,-1],]2,8]

3. Considerando [– 3,3] um intervalo no conjunto dos números reais, a representação gráfica de uma função f : [– 3,3] → R, com duas raízes reais diferentes, crescente quando x < 0 e decrescente quando x > 0, pode ser representado pela figura do item.

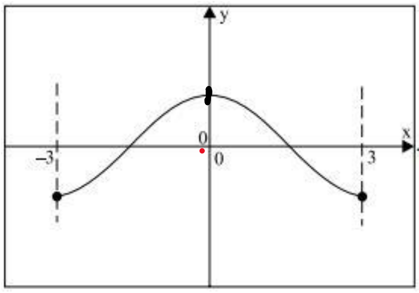
a)



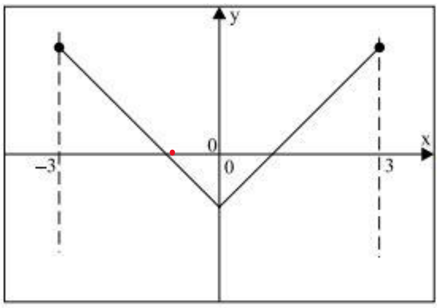
b)



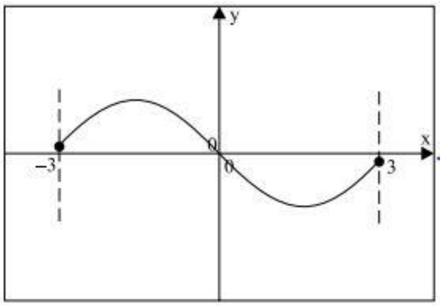
c)



d)



e)



4. Indique se a função é crescente ou decrescente:

$$y = ax + b$$

$a)\ y = x$ Função crescente

$b)\ y = x - 1$ Função crescente

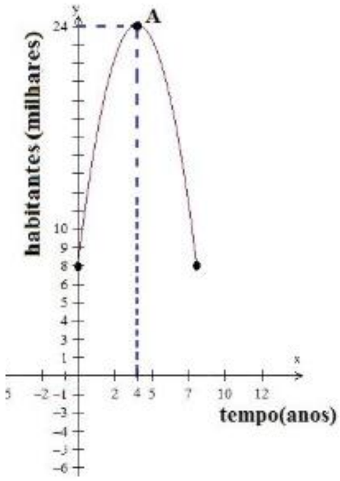
$c)\ y = -x$ Função decrescente

$d)\ y = -\frac{x}{5} + 1$ Função decrescente

$e)\ y = 2^x$ Função crescente

$f)\ y = x^3$ Função crescente

5. O gráfico abaixo representa uma projeção do crescimento populacional de uma pequena cidade para os próximos anos tendo como referência a população atual de 8 mil habitantes:



Marque a alternativa correta sobre a leitura do gráfico acima:

a) A população atingirá o número mínimo de 4 mil habitantes, no período de 24 anos.
b) O ponto A indica o momento em que a população atingirá seu número máximo de 24 mil habitantes, nos próximos 4 anos.
c) O número máximo de pessoas dessa cidade será de 8 mil habitantes, não importa o tempo que passar.
d) Em quatro anos a população atingirá o número de 8 mil habitantes.