FUNDAMENTOS PARA COMPUTAÇÃO

CAPÍTULO 3 - QUAL A RELAÇÃO ENTRE LÓGICA E COMPUTAÇÃO?

Arthur Francisco Lorenzon

INICIAR

Introdução

Neste capítulo, você estudará os conceitos básicos que norteiam a lógica matemática e a sua utilização nos sistemas computacionais. Conforme veremos, a lógica matemática é de fundamental importância para o desenvolvimento de linguagens de programação, programas de computadores e na avaliação de problemas de raciocínio lógico. Assim, abordaremos assuntos relacionados a maneira com que a lógica é utilizada nos computadores atuais e como ela contribui para as operações computacionais. Além disso, serão abordadas as ferramentas de lógica matemática que auxiliam na solução de expressões lógicas. Por fim, serão analisadas as expressões relacionadas à lógica proposicional e os principais métodos utilizados para solucionar problemas lógicos.

Para começar este estudo, você fará algumas reflexões importantes para que possa integrar as tecnologias em sala de aula de maneira crítica e reflexiva. O que é lógica matemática? Qual a sua relação com o contexto e desenvolvimento de linguagens de programação e softwares? Qual a importância da resolução de expressões lógicas para a execução de programas? Adicionalmente, como podemos usar a lógica matemática para resolver problemas de raciocínio lógico?

A partir dessas reflexões, você estudará conceitos preliminares e as operações básicas (conectivos) de lógica matemática, as ferramentas de lógica matemática utilizadas na resolução de problemas lógicos, as implicações lógicas e os conceitos básicos de lógica proposicional através dos métodos dedutivos.

3.1 Introdução à Lógica Matemática

Neste tópico, são apresentados os principais conceitos básicos de lógica matemática, isto é, o que é e onde ela está situada na área computacional. Adicionalmente, serão apresentadas as operações básicas (também chamadas de conectivos lógicos) utilizadas na validação de argumentos lógicos. Assim, ao final deste tópico, você será capaz de realizar as seguintes reflexões: de que maneira o pensamento lógico é transformado em proposições matemáticas? Como podemos fazer uso da lógica matemática para resolver problemas do cotidiano? E, qual a importância dos diferentes conectivos lógicos na representação de operações da lógica matemática e no dia a dia?

3.1.1 Conceitos Iniciais

A lógica matemática exerce um papel extremamente importante nos sistemas computacionais, sendo fundamental no desenvolvimento de linguagens de programação e na construção de *softwares* (programas de computadores, aplicações etc.) (MENEZES, 2013). Basicamente, a lógica pode ser considerada como um método e princípio utilizado para distinguir o que é correto do que é incorreto.

VOCÊ SABIA?

Que a lógica tradicional pode ser classificada em quatro grandes áreas? Então, podemos encontrar o seu uso em: **lógica informal**, que estuda a argumentação em uma língua natural; **lógica formal**, que estuda a inferência lógica e inferência com conteúdos puramente formais (matemáticos); **lógica**

simbólica, que estuda as abstrações simbólicas e é dividida em lógica proposicional e de predicados; e, por fim, **lógica matemática**, que é considerada a extensão da lógica simbólica para outras áreas.

Também conhecida como lógica proposicional ou simbólica clássica, a lógica matemática objetiva a construção de critérios que possibilitam a análise da corretude e legitimidade de argumentos usados em afirmações. Dessa maneira, pode-se utilizar afirmações já estabelecidas para determinar novas afirmações através da aplicação de técnicas e ferramentas para solução de problemas lógicos. Para entendermos um pouco mais sobre o conceito de raciocínio lógico, vamos analisar o seguinte exemplo:

Aurora sempre leva o guarda-chuva ao trabalho nos dias de chuva.

Hoje está chovendo.

Aurora está com seu guarda-chuva.

O exemplo acima nos mostra três situações: o primeiro argumento nos apresenta uma situação corriqueira na vida de Aurora, enquanto que o segundo induz nosso pensamento lógico a interpretar a situação e assumir como verdadeira a terceira situação.

Ainda considerando o exemplo acima, duas premissas são usadas para chegarmos a conclusão de que Aurora está com seu guarda-chuva. Nesse ponto, podemos analisar da seguinte maneira: se as premissas são boas provas para a conclusão e a afirmação da verdade das premissas garante que a conclusão também seja verdadeira, afirmamos que o raciocínio é correto.

Por outro lado, se isso não acontecer, o raciocínio é incorreto. É nesse ponto que a lógica matemática trabalha: na distinção entre o raciocínio correto e incorreto. (MENEZES, 2013)

Antes de entrarmos a fundo no funcionamento e operações da lógica matemática, vamos conhecer alguns conceitos essenciais para o bom entendimento do restante do capítulo.

Inferência: definida como um dos processos pelo qual é possível chegar a uma conclusão lógica. Diversos recursos são utilizados para o desenvolvimento do pensamento que levará à conclusão, como, por exemplo, associação de ideias e imaginação. A inferência é validada através do caminho que ela seguiu para chegar a uma conclusão (BERTOLINI, 2017). Isto é, a associação de ideias está correta? Ela faz sentido lógico?

Proposições: considerado o conceito mais básico da lógica matemática, significa propor ou submeter uma ideia/sentença para apreciação. Ela é uma declaração afirmativa que pode ser verdadeira ou falsa. Isso é, sentenças interrogativas, imperativas e exclamativas **não** podem ser consideradas proposições, pois não trabalham com respostas de valor lógico (verdadeiro ou falso). Adicionalmente, a proposição é a base para construção de argumentos (BERTOLINI, 2017). Alguns exemplos de proposição são apresentados a seguir.

O Brasil é um País situado na América do Sul.
Peixes são animais aquáticos.
Todos os animais que possuem asa, voam.
Todo gaúcho gosta de churrasco.
Todos os mamíferos possuem quatro patas/pernas.

Por outro lado, as seguintes sentenças não são consideradas proposições, pois não geram uma conclusão do tipo verdadeiro ou falso.

Qual é o mês do carnaval?
As férias escolares ocorrem em qual mês?
Júlio, venha terminar tuas tarefas!
Jussara, amanhã você precisa acordar cedo para não se atrasar para o trabalho.

Ou seja, não existe a possibilidade de uma proposição assumir mais de um valor: ou ela é verdadeira ou é falsa. Para isso, conforme Bertolini (2017), algumas propriedades devem ser obedecidas:

- **Princípio da identidade**: todas as proposições são iguais (idênticas a si próprias), isto é, a proposição P é igual a P $(P = P)$.
- **Princípio da não contradição**: diz que uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo. Ou seja, proposições não podem assumir

propriedades opostas ao mesmo tempo e em relação ao mesmo aspecto.

- **Princípio do terceiro excluído**: uma proposição não pode assumir uma terceira possibilidade: ou ela é verdadeira ou falsa.

VOCÊ QUER LER?

A computação utiliza a lógica em todas as suas áreas de concentração, que variam desde o desenvolvimento de circuitos lógicos até a utilização de lógica na escrita de programas e linguagens de programação. Inclusive, a linguagem de programação Prolog é amplamente utilizada no desenvolvimento de programas e aplicações que são baseados em lógica e raciocínio lógico. Quer saber mais sobre Prolog? Acesse: <http://www.swi-prolog.org/ (http://www.swi-prolog.org/)>

Argumento: uma sequência de proposições é definida pelo termo “argumento”. Um argumento é formado por diferentes proposições: as premissas, que formam as provas e evidências; e uma conclusão, que é baseada nas premissas. Os argumentos podem ser classificados em duas grandes classes: argumentos dedutivos ou indutivos. Na primeira classe, considera-se que a conclusão deve ser obtida (inferida) com base nas premissas. Isto é, deve existir uma ligação lógica entre as premissas e a conclusão. Além disso, não se conclui nada além do que está definido nas premissas. Por outro lado, no argumento indutivo, a conclusão não é necessariamente inferida das premissas. Ou seja, baseado em dados únicos e enumerados, consegue-se inferir uma verdade universal (BERTOLINI, 2017). Análise os exemplos a seguir.

Dedutivo

Todos os mamíferos possuem pernas

O cachorro é um mamífero

Portanto, o cachorro possui pernas.

Indutivo

Todos os cachorros que foram observados até hoje tinham pernas

Logo, todos os cachorros possuem pernas.

Todo argumento dedutivo pode ser considerado válido ou inválido (BARBIERI FILHO, 2012). Isto é, ele é válido quando as premissas, se verdadeiras, fornecem base convincente e concreta para a conclusão. Caso contrário, o argumento é considerado inválido. A seguir, veremos dois argumentos, um válido (a) e um inválido (b):

a) Todos os gatos são mamíferos.

Todos os felinos são mamíferos.

Logo, todos os gatos são felinos.

b) Todos os gaúchos gostam de churrasco.

Ora, eu gosto de churrasco.

Portanto, eu sou gaúcho.

Chamamos um argumento dedutivo de válido ou inválido, porém, não o chamamos de verdadeiro ou falso. Um argumento só pode levar a característica de ser válido ou inválido. Da mesma maneira, as premissas das proposições só podem ser consideradas verdadeiras ou falsas. Dessa forma, podemos encontrar proposições que são falsas, mas com argumento dedutivo válido; e proposições que são verdadeiras, porém com argumento inválido. Por fim, a conclusão de um argumento nada tem a ver com o conteúdo das proposições ou dos enunciados que nele ocorrem. Muito pelo contrário, a conclusão depende exclusivamente da forma como o argumento está organizado.

3.1.2 Operações básicas

De acordo com Menezes (2013), as proposições podem ser classificadas em duas classes: simples, quando existe uma única sentença sobre o assunto e desacompanhada de outras proposições; e composta, que consiste da combinação de duas proposições. Por exemplo, as proposições: “a bicicleta é amarela” e “Thiago é ciclista” são duas proposições simples. No entanto, a combinação delas forma uma proposição composta: “a bicicleta é amarela e Thiago é ciclista”. Esse pensamento lógico que acabamos de realizar é chamado de cálculo proposicional e é similar ao cálculo realizado sobre números.

A seguir, são abordadas as operações que podem ser realizadas sobre proposições: negação, conjunção, disjunção, disjunção exclusiva, condicional e bicondicional.

Negação: considere uma proposição "*p*", a negação dela é representada por "*não p*" ou simplesmente *~p*, no qual obedece a seguinte regra: valor lógico da operação *~p* é verdadeiro quando *p* é falso e falso quando *p* é verdadeiro (BERTOLINI, 2017). Assim, podemos considerar os seguintes exemplos:

~V = F → a negação de uma proposição verdadeira terá resultado lógico falso.

~F = V → a negação de uma proposição falsa terá resultado lógico verdadeiro.

P = João tem um carro.

~P = João **não** tem um carro.

Uma outra característica da negação é que ela é a única operação que podemos usar quando uma única proposição é avaliada. Todas as demais que veremos no decorrer do capítulo necessitam duas ou mais proposições.

Conjunção: considerando duas proposições "*p*" e "*q*", a conjunção das proposições (representado pelo símbolo ^) significa a "união" de duas proposições. A regra para a conjunção de preposições é a que segue: "*p ^ q*" (lê-se *p e q*) é verdadeiro se as duas proposições são verdadeiras (BERTOLINI, 2017). Caso contrário, o valor lógico será falso, conforme representado pelo exemplo a seguir.

V ^ V = Verdadeiro

V ^ F = Falso

F ^ V = Falso

F ^ F = Falso

Vamos considerar este exemplo para melhor entender a conjunção entre duas proposições:

p = O sol é amarelo *r = Brasília é a capital do Brasil*

q = 4 + 3 = 7 *s = Pelé é americano*

p ^ q = Verdadeiro   *r ^ s = Falso*

Disjunção: ao contrário da conjunção, a disjunção possui o operador lógico "*OU*", representado pelo símbolo "v". A seguinte regra é aplicada quando a disjunção de duas proposições é calculada: "*p* v *q*" é verdade se ao menos uma das proposições for verdade. Do contrário, se as duas proposições forem falsas, o resultado lógico é falso (BERTOLINI, 2017). Vejamos esta representação:

V v *V* = Verdadeiro

V v *F* = Verdadeiro

F v *V* = Verdadeiro

F v *F* = Falso

Representando as disjunções em situações do cotidiano, temos alguns exemplos:

p = a terra é retangular   *r* = Pelé é brasileiro

q = 7 + 5 = 11   *s* = Maradona é argentino

p v *q* = Falso   *r* v *s* = Verdadeiro

Disjunção exclusiva: dada duas proposições "*p*" e "*q*", a disjunção exclusiva é representada pelo símbolo "⊕" e considera o operador lógico "*ou exclusivo*" (representado por "⊕"). A seguinte regra é aplicada quando a disjunção exclusiva é aplicada entre duas proposições: se as duas proposições tiverem o mesmo valor lógico, isto é, ambas forem falsa ou verdadeiras, o resultado lógico da operação é falso. Caso contrário se uma proposição for verdadeira e a outra falsa, o resultado lógico é verdadeiro (BERTOLINI, 2017). Vejamos esta representação:

V ⊕ *V* = Falso

V ⊕ *F* = Verdadeiro

F ⊕ *V* = Verdadeiro

F ⊕ *F* = Falso

Representando as disjunções exclusivas em exemplos, temos que:

p = RS é um estado do Brasil *r* = A água é transparente

q = 7 + 1 = 9 *s* = O céu é azul

p ⊕ *q* = Verdadeiro *r* ⊕ *s* = Falso

Condicional: considerando duas proposições, a operação condicional é representada pelo operador "*se*" (representado por -->) e "*p* --> *q*" (lê-se "se *p* então *q*"). A seguinte regra é utilizada para computar o valor condicional de duas proposições: se *p* possuir um valor verdadeiro e *q* um valor falso, o valor lógico da operação será falso. Por outro lado, em todos os outros casos o resultado será verdadeiro (BERTOLINI, 2017). Vejamos esta representação:

V --> *V* = Verdadeiro

V --> *F* = Falso

F --> *V* = Verdadeiro

F --> *F* = Verdadeiro

Representando as operações condicionais em exemplos, temos que:

***p* = Brasília é a capital do Brasil** ***r* = O sol aparece durante o dia**
***q* = 9 - 2 = 7** ***s* = O céu é verde**
***p* --> *q* = Verdadeiro** ***r* --> *s* = Falso**

Bicondicional: dada duas proposições, a operação bicondicional é representada pelo operador "se e somente se" (representada por <-->). A seguinte regra é aplicada para computar o valor bicondicional de duas proposições: "*p* <-->" é verdadeira se as duas proposições forem falsas ou verdadeiras. Caso contrário, se as duas proposições tiverem valores lógicos diferentes, o valor lógico será falso (BERTOLINI, 2017). Vejamos esta representação:

V <--> *V* = Verdadeiro

V <--> *F* = Falso

F <--> *V* = Falso

F <--> *F* = Verdadeiro

Representando as operações condicionais em exemplos, temos que:

p = Brasília é a capital do Brasil *r* = O sol aparece durante o dia

q = 9 - 2 = 7 *s* = O céu é verde

p --> *q* = Verdadeiro *r* --> *s* = Falso

Como é possível encontrar mais de uma operação entre as proposições em uma sentença, devemos seguir uma ordem de precedência para resolver a operação lógica. Nas operações básicas, a seguinte ordem de precedência é seguida: negação, conjunção, disjunção e condicional. Isto é, a operação de negação de uma proposição será sempre realizada antes de uma conjunção entre as duas proposições em questão.

3.2 Ferramentas de Lógica Matemática

Neste tópico, são apresentados os principais conceitos relacionados às ferramentas utilizadas para solucionar expressões lógicas. Veremos que existe um método matemático, chamado de tabela verdade, amplamente usado para facilmente resolver a validação de argumentos lógicos. Adicionalmente, os argumentos podem produzir afirmações lógicas, as quais são validadas com o uso de tabelas verdades. Tais afirmações são fundamentais na avaliação de problemas lógicos. Assim, ao final deste tópico, você será capaz de realizar as seguintes reflexões: de que maneira podemos representar e resolver um problema lógico? Quais estruturas podem ser utilizadas para auxiliar na resolução de operações lógicas? E como devemos avaliar se um raciocínio lógico está correto?

3.2.1 Tabela Verdade

Tabela verdade é considerada uma tabela matemática que é amplamente utilizada em lógica computacional e matemática com a finalidade de auxiliar e determinar se uma fórmula ou conclusão de um argumento é válido ou inválido (BARBIERI FILHO, 2012). Você já sabe que o resultado das operações básicas quando utilizadas uma ou duas proposições são obtidos através do uso de tabelas verdades simples. A seguir, abordaremos exemplos com diferentes proposições e operações básicas.

Antes de colocarmos a mão na massa, uma tabela verdade é construída através do uso de proposições simples e da combinação das operações lógicas. Temos que uma proposição composta são várias proposições simples unidas por uma ou mais operações lógicas. Adicionalmente, conforme destacado, o resultado de uma operação lógica sobre proposições será sempre verdadeiro (V) ou falso (F), não havendo uma terceira opção. (MENEZES, 2013).

VOCÊ SABIA?

Que a lógica matemática passou a ter maior importância e utilização na computação após o ano de 1956? Foi nessa data que a Inteligência Artificial teve surgimento e, com isso, o desenvolvimento de teorias e práticas de construção de máquinas que possam simular o comportamento humano e inteligente. Dessa maneira, a lógica matemática passou a ser utilizada para auxiliar na descoberta do conhecimento e na representação de proposições e argumentos em um sistema computacional.

Podemos construir/montar uma tabela verdade com diferentes proposições e operações de diferentes maneiras, pois a sua organização irá depender da forma como a decomposição da proposição composta é realizada. Por exemplo, vamos considerar a montagem da seguinte proposição composta $\sim(p \wedge \sim q)$, ilustrada na tabela a seguir.

p	q	~q	p ^ ~q	~(p ^ ~q)
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

Tabela 1 - Decomposição da proposição composta ~(p ^ ~q) em uma tabela verdade. Cada coluna representa o valor lógico da operação realizada sobre a proposição simples ou composta. Fonte: BERTOLINI, 2017, p. 26.

Na tabela verdade, cada coluna corresponde a uma proposição, que pode ser simples ou composta. Dessa forma, a primeira linha representa a identificação da proposição e as demais linhas abaixo o valor lógico de tal proposição. As duas primeiras colunas da Tabela 1 representam o valor lógico das proposições simples p e q. Já na terceira coluna, uma operação lógica de negação é aplicada sobre a proposição q. Assim, os valores lógicos de q são negados, isto é, são "invertidos". Por outro lado, a quarta coluna representa a operação de conjunção (e) entre a primeira e terceira coluna. Por fim, a quinta coluna apresenta o resultado da proposição composta, ao adicionar o sinal de negação à proposição da quarta coluna.

Agora que já montamos nossa primeira tabela verdade, vamos interpretá-la. O resultado final da proposição composta está apresentado na última coluna, e os dados de entrada da proposição composta são os valores lógicos de p e q da primeira e segunda coluna, respectivamente. Portanto, o único resultado falso da operação lógica será quando a proposição p for verdadeira e q for falsa. Do contrário, o resultado será sempre verdadeiro.

Como uma maneira de treinar o desenvolvimento das operações de uma tabela verdade, vamos praticar a construção da seguinte proposição composta: $\sim p \vee q$. Após montá-la, análise e compare o resultado com a Tabela 1. O que você descobriu?

Observe que, na decomposição da proposição composta $\sim p \vee q$ em uma tabela verdade, cada coluna representa o valor lógico da operação realizada sobre a proposição simples ou composta, veja:

p	q	~p	~p V q
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

Tabela 2 - Decomposição da proposição composta ~p ∨ q em uma tabela verdade. Fonte: Elaborada pelo autor, 2018.

Ao conferir a resposta nessa nova tabela, percebemos que diferentes operações sobre os mesmos dados podem produzir os mesmos resultados lógicos.

CASO

Para entendermos melhor como a validação ou invalidação de um argumento utilizando tabelas verdades é realizada, uma “receita de bolo” pode ser usada. Ela consiste de quatro passos que devem ser seguidos, de maneira sequencial e respeitando suas propriedades:

- o primeiro passo é identificar e separar as premissas da conclusão do argumento. Lembre-se de que as premissas são utilizadas para alcançarmos uma conclusão do argumento, isto é, o valor lógico do argumento.
- após, devemos construir a tabela verdade separando (agrupando) as colunas que são proposições simples, premissas e conclusão.
- após montar a tabela verdade, devemos identificar as linhas onde todas as premissas são verdadeiras. Essas linhas são chamadas de linhas críticas e são de extrema importância para a formalização de um argumento válido ou inválido.
- a etapa final consiste em analisar cada linha crítica identificada anteriormente: se todas as linhas críticas possuírem conclusão do argumento o valor lógico verdade, então, afirmamos que o argumento é válido; por outro lado, se existir ao menos uma linha crítica onde a conclusão é falsa, dizemos que o argumento é inválido.

Agora, vamos visualizar um exemplo mais complexo na tabela a seguir, onde o número de proposições é 3:

- $R(p, q, t) = p \vee \sim t \dashrightarrow q \wedge \sim t$

p	*q*	*t*	*~t*	*p ∨~t*	*q ^ ~t*	*p ∨ ~t --> q ^ ~t*
V	V	V	F	V	F	F
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	F	F	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	F	F	V
F	F	F	V	V	F	F

Tabela 3 - Decomposição da proposição composta (p ∨ ~t --> q ^ ~t) em uma tabela verdade. Cada coluna representa o valor lógico da operação realizada sobre a proposição simples ou composta. Fonte: BERTOLINI, 2017, p. 26.

Como você já deve ter notado na construção das tabelas verdades, o tamanho de cada uma (ou seja, o número de linhas) depende do número de proposições simples. Por exemplo, com apenas uma proposição simples podemos representar a tabela com apenas dois valores: verdadeiro ou falso. No entanto, com duas proposições simples, as possibilidades de valores lógicos aumentam para quatro. Já para uma operação com três proposições simples, esse valor chega a oito possibilidades. Dessa maneira, podemos assumir a seguinte propriedade matemática: o número de linhas de uma tabela verdade é dependente do número de proposições simples, sendo representado pela expressão 2^n, onde n é o número de proposições simples. (MENEZES, 2013).

3.2.2 Tipos de Afirmações

Antes de começarmos a avaliar as implicações e equivalências lógicas, algumas afirmações e definições são consideradas, como veremos a seguir.

Tautologia: toda proposição composta é considerada uma tautologia se, e somente se, a última coluna da tabela verdade é sempre verdadeira, conforme demonstrada no exemplo da tabela a seguir, na qual demonstramos que a proposição $p \vee \sim p$ é uma tautologia (BARBIERI FILHO, 2012).

p	~p	p v ~p
V	F	V
F	V	V

Tabela 4 - Representação de uma tautologia, onde a última coluna da tabela verdade é inteiramente representada pelo valor lógico verdade. Fonte: BERTOLINI, 2017, p. 33.

Contradição: ao contrário da tautologia, que a proposição é sempre verdadeira independente das afirmações presentes nas proposições, a contradição considera que uma proposição é sempre falsa, independente das afirmações e valores lógicos da proposição. (BARBIERI FILHO, 2012).

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
V	F	F
F	V	F

Tabela 5 - Representação de uma Contradição, onde a última coluna da tabela verdade é inteiramente representada pelo valor lógico falso. Fonte: Elaborada pelo autor, 2018.

Proposição Composta: uma proposição composta é aquela composta de várias proposições simples (BARBIERI FILHO, 2012). Representamos uma proposição composta da seguinte maneira:

$P(p, q, r)$, onde P é definida como a proposição composta das proposições simples p, q e r.

Basicamente, a operação lógica pode nos fornecer três tipos de fórmulas (afirmações) (BERTOLINI, 2017):

- **válida**: também chamada de tautológica, considera toda a interpretação da tabela verdade verdadeira;
- **satisfatível**: também chamada de contingente, considera que o resultado de uma tabela verdade possui valores verdadeiros em, no mínimo, uma interpretação e, no máximo, $n-1$, onde n é o número de interpretações possíveis;
- **insatisfatível**: conhecida como contraditória, considera que nenhuma interpretação é verdadeira, ou seja, o resultado de uma tabela verdade é totalmente falso.

Quantificador universal: podemos defini-lo como a formalização de que algumas coisas são verdadeiras para todas as coisas (BERTOLINI, 2017). Isto é, "para toda" proposição, algo é verdadeiro. Esse quantificador é representado pelo símbolo "∀". Vejamos o seguinte exemplo:

Consideramos 2 operações:

a) $x = 3 \times n$;

b) *y = 2 x n;*

∀*(n), x > y*

Através do quantificador universal, podemos chegar a seguinte conclusão: para todo o valor de *n*, o resultado da operação **a** será sempre maior que o resultado da operação **b**.

Quantificador existencial: diferentemente do quantificador universal, o existencial nos diz que para qualquer relação entre proposições existe um elemento na relação que é verdadeiro (BERTOLINI, 2017). Esse quantificador é representado pelo operador lógico "∃". Vejamos exemplo a seguir.

Vamos considerar que queremos mostrar a existência de, no mínimo, um número que, multiplicado por ele mesmo, resultará em 49. Expressamos essa fórmula da seguinte maneira:

∃*n. P(n, n, 49)* → Essa operação lógica nos diz que existe, no mínimo, um número (∃*n*) que vezes ele mesmo resultará em 49 (*P*(*n,n,49*)).

3.3 Implicações Lógicas

Quando estamos trabalhando com argumentos lógicos, um conceito amplamente usado na solução de pensamentos e raciocínios são as implicações e equivalências lógicas. Por meio delas, podemos validar um argumento e analisar a implicação de um argumento em outro. Também usamos a equivalência para definir se duas proposições ou argumentos possuem mesmo valor lógico, isto é, se eles são equivalentes. Assim, ao final deste tópico, você será capaz de realizar as seguintes reflexões: qual a diferença entre implicação e equivalência lógica? Qual a maneira mais apropriada para representar que duas proposições compostas são logicamente equivalentes? E, também, como reconhecer a operação de implicação no pensamento lógico do dia a dia?

3.3.1 Conceitos Iniciais

Vamos relembrar a operação lógica condicional *p --> q*, que significa se *p* então *q*. Essa operação lógica ocorre entre duas proposições e só admite valor falso se a implicação de uma verdade implicar em uma proposição falsa. Caso contrário, o valor da operação será sempre verdadeiro.

Com o objetivo de relacionar a implicação lógica com o nosso dia a dia, vamos considerar as seguintes proposições, onde a proposição *q* depende da proposição *p*:

p: **Se fizer sol no fim de semana**

q: **Vamos viajar para a praia**

Nesse sentido, considerando que são duas proposições, temos quatro possibilidades (através da construção da tabela verdade) (BARBIERI FILHO, 2012):

- *p e q* possuem valor lógico verdade: significa que irá fazer sol e vamos para a praia. Assim, o valor lógico da operação é verdade;
- *p* possui valor lógico verdade e *q* tem valor falso: significa que fez sol, porém não vamos para a praia, indicando que a implicação não aconteceu. Assim, o resultado lógico da implicação é falso;
- *p* não ocorreu (falso) e *q* ocorreu (verdadeiro): nesse sentido, viajamos para a praia mesmo com chuva, o que produz um resultado da implicância em verdade, pois o objetivo final que era ir para a praia foi alcançado;
- *p e q* não ocorreram (falso): significa que não fez sol nem viajamos para a praia, assim o resultado da operação é valor verdadeiro.

A operação de implicação lógica é amplamente utilizada na construção de teoremas matemáticos. Tais teoremas são importantes para o desenvolvimento de competências de observação, percepção e, principalmente, ao desenvolvimento de argumentação convincente.

Temos ainda um caso especial de implicação, na qual as duas proposições precisam estar mutuamente satisfeitas para a operação ser considerada verdadeira. Já vimos que esse caso especial é formado pela expressão: "**se e somente se**".

3.3.2 Equivalências Lógicas

Conceitualmente, podemos definir a equivalência lógica de duas proposições compostas analisando o resultado lógico das tabelas verdades. Duas proposições são consideradas equivalentes logicamente se e somente se os valores lógicos obtidos da tabela verdade forem idênticos para cada combinação possível das variáveis que formam as proposições (MENEZES, 2013). Como um exemplo, vamos considerar os seguintes casos: ***a)*** *p ^ q* e *q ^ p;* **b)** *p -->q* e *~p --> q*.

VOCÊ QUER VER?

A história da lógica matemática e sua relação com a computação é bem mais antiga do que imaginamos. Ela começou há séculos com o grande filósofo Aristóteles, quando propôs os métodos dedutivos. Depois disso, foi cada vez mais ficando atuante em nosso dia a dia. Buscando demonstrar de que maneira a lógica está presente nas tarefas diárias, o professor de informativa e engenharia da Universidade de Bristol, Dave Cliff, desenvolveu um documentário chamado *A Alegria da Lógica*. Assista: <http://www.bbc.co.uk/programmes/b03k6ypz (http://www.bbc.co.uk/programmes/b03k6ypz)>.

As tabelas a seguir nos mostram a tabela verdade de cada uma das proposições conjuntas **a** e **b**, respectivamente. Conforme podemos observar, as proposições do exemplo **a** (Tabela 6) possuem equivalência lógica, uma vez que os valores lógicos obtidos são idênticos para cada combinação possível. Por outro lado, as proposições do exemplo **b** (Tabela 7) não são consideradas equivalentes logicamente, pelo fato de que não produzem resultados idênticos para cada combinação possível.

p	q	p ^ q	q ^ p
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	F	F

Tabela 6 - Representação de duas operações lógicas que são equivalentes logicamente: as colunas da conclusão de cada proposição possuem os mesmos valores lógicos. Fonte: Elaborada pelo autor, 2018.

Uma maneira simples de verificar se duas proposições conjuntas p e q são equivalentes logicamente é utilizar o seguinte algoritmo:

- construir a tabela verdade para a proposição p;
- construir a tabela verdade para a proposição q com os mesmos valores lógicos para as afirmações/negações que formam tal proposição;
- verificar se as tabelas verdades de p e q são idênticas para cada combinação de valores lógicos (cada linha);
- as proposições serão consideradas equivalentes se as combinações de valores lógicos são idênticas. Caso contrário, será considerada não equivalente.

p	q	~p	p → q	~p → q
V	V	F	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	F	V	V	F

Tabela 7 - Representação de duas operações lógicas que não são equivalentes logicamente: as colunas da conclusão de cada proposição não possuem os mesmos valores lógicos. Fonte: Elaborada pelo autor, 2018.

Conforme Barbieri Filho (2012) e Menezes (2013), existem diversos axiomas que podem ser utilizados na definição de equivalência lógica entre diferentes proposições. Basicamente, uma proposição composta p é equivalente a uma outra proposição q **se e somente se** elas implicarem uma na outra. Tal operação de equivalência é representada pelo símbolo "⇔".

3.4 Conceitos de Lógica Proposicional

Uma subárea importante da lógica matemática é a lógica proposicional, também conhecida como álgebra proposicional. Ela nos fornece um conjunto de operações lógicas para serem computadas entre as proposições, com o objetivo de atingir uma conclusão do argumento, seja ela verdadeira ou falsa. Assim, neste tópico veremos os principais conceitos relacionados à álgebra proposicional e método dedutivo.

Com o objetivo de contextualizar com situações do cotidiano, diversos exemplos são utilizados para auxiliar no entendimento de tais operações. Desta forma, ao final deste tópico, você será capaz de realizar as seguintes reflexões: de que maneira a álgebra proposicional está presente no nosso dia a dia? Como ela nos ajuda a resolver simples problemas de raciocínio lógico? E, por qual razão os métodos dedutivos são mais eficientes que o uso de tabelas verdades?

3.4.1 Álgebra Proposicional

A álgebra proposicional consiste do conjunto de operações lógicas que podem ser realizadas entre uma ou mais proposições. As operações básicas com o uso de conectivos de conjunção, disjunção, negação, implicação e bicondicional já foram abordadas. No entanto, as propriedades da álgebra proposicional serão abordadas a seguir de acordo com o tipo de operação lógica que ela envolve.

Comutatividade: propriedade de operações que nos diz que a ordem dos operandos não altera o resultado final (MENEZES, 2013).

- Conjunção: $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$

Exemplo: p: **Brasília é capital do Brasil**.

q: **Pelé é brasileiro**.

Através da propriedade da comutatividade de proposições, temos:

Brasília é a capital do Brasil e Pelé é brasileiro.

O que é equivalente à

Pelé é brasileiro e Brasília é a capital do Brasil.

- Disjunção: $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

Exemplo: *p:* **Brasília é capital do Brasil**.

q: **Maradona é brasileiro**.

Através da propriedade da comutatividade de proposições, temos:

Brasília é a capital do Brasil ou Maradona é brasileiro.

O que é equivalente à

Maradona é brasileiro ou Brasília é a capital do Brasil.

Idempotente: propriedade em que as operações podem ser aplicadas diversas vezes sem a alteração do resultado final (BARBIERI FILHO, 2012).

- Conjunção: $p \wedge p \Leftrightarrow p$

Exemplo: *p:* **conjunto dos números reais**

A conjunção do conjunto dos números reais com o conjunto dos números reais não irá alterar o resultado final.

- Disjunção: $p \vee p \Leftrightarrow p$

Exemplo: *p: 3+2 = 5*

A disjunção da operação acima não irá alterar o resultado final.

Associatividade: propriedade que permite a escrita de expressões sem ambiguidade (BERTOLINI, 2017).

- Conjunção: $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$

Exemplo: *p:* **Brasília é capital do Brasil**

q: **Pelé é brasileiro.**

r: **Maradona é argentino.**

A associatividade nos diz que a conjunção:

(Brasília é capital do Brasil E Pelé é brasileiro) E Maradona é argentino

Possui equivalência com:

Brasília é capital do Brasil E (Pelé é brasileiro E Maradona é argentino).

- Disjunção: $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$

Exemplo: *p:* **Brasília é capital da Espanha**.

q: **Pelé é brasileiro.**

r: **O peixe é uma ave.**

A associatividade nos diz que a disjunção:

(Brasília é capital da Espanha OU Pelé é brasileiro) OU o peixe é uma ave

Possui equivalência com:

Brasília é capital da Espanha OU (Pelé é brasileiro OU o peixe é uma ave).

Identidade: conhecido como o princípio da não-contradição, todo objeto é considerado idêntico a si mesmo (MENEZES, 2013).

- Conjunção: p ^ **verdade** $\Leftrightarrow p$ e p ^ **falso** $\Leftrightarrow$ **falso**

Exemplo: *p:* **Brasília é capital do Brasil.**

q: **Maradona é brasileiro.**

A identidade nos diz que a conjunção **Brasília é capital do Brasil** com **verdade** possui valor lógico equivalente com **Brasília é capital do Brasil**. Por outro lado, se considerarmos que uma proposição é falsa, seu resultado será valor lógico falso.

- Disjunção: $p \vee$ **verdade** $\Leftrightarrow p$ e $p \vee$ **falso** $\Leftrightarrow p$

Exemplo: p: **Brasília é capital do Brasil**.

q: **O peixe é uma ave**.

A identidade nos diz que a disjunção de **Brasília é capital do Brasil** com **verdade** possui valor lógico equivalente com **Brasília é capital do Brasil**. Do mesmo modo, se considerarmos que uma proposição tem disjunção com valor lógico falso, o valor final será da proposição.

Distributividade: considera que a ordem em que duas operações (conjunção e disjunção) são realizadas pode ser alterada sem influenciar no resultado final (BARBIERI FILHO, 2012).

$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ → A conjunção é considerada distributiva em relação à disjunção;

$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ → A disjunção é considerada distributiva em relação à conjunção.

Exemplo:

João dirige e **Mário joga bola** ou **voleibol** é equivalente à **João estuda** e **Mário joga bola** ou **João Estuda** e **Mário joga voleibol**.

Absorção: também é considerada uma identidade entre duas operações lógicas (BARBIERI FILHO, 2012). Na conjunção, considera que a soma (união) de uma preposição por ela ou outro membro é equivalente a esse membro. Do mesmo modo, a disjunção de uma proposição por ela ou outro membro é equivalente a essa proposição.

Conjunção: $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

Disjunção: $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$

VOCÊ QUER LER?

O uso de questões de lógica matemática está cada vez mais comum em provas de concursos das mais diversas áreas. Tais questões exigem um raciocínio lógico rápido, para que seja respondida o quanto antes. No entanto, a resolução de um problema lógico nem sempre é simples e exige conhecimento de propriedades e operações de lógica proposicional. Dessa forma, o *site* do professor Valdir Aguilera traz algumas dicas para a resolução de problemas lógicos. Acesse: <http://www.valdiraguilera.net/problema-de-logica-esquema.html (http://www.valdiraguilera.net/problema-de-logica-esquema.html)>.

Lei de Morgan: utilizada para fazer substituições e simplificações (BARBIERI FILHO, 2012). Basicamente, as Leis de Morgan se baseiam nas seguintes premissas a seguir.

Primeira Lei de Morgan: a negação da conjunção entre duas proposições é equivalente à disjunção da negação de cada proposição.

Exemplo: $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$

p: **João não é gaúcho.**

q: **João não é catarinense.**

Dessa maneira, substituindo os símbolos pelas proposições, temos:

não

(João não é gaúcho E João não é catarinense)

O que é equivalente logicamente à:

João é gaúcho OU catarinense.

Segunda Lei de Morgan: a negação da disjunção de duas proposições é equivalente à conjunção da negação das duas proposições.

Exemplo: $\sim(p \lor q) \Leftrightarrow \sim p \land \sim q$

p: **vou trabalhar.**

q: **vou para a festa.**

Assim, substituindo os símbolos pelas proposições, temos:

não

(vou trabalhar OU vou para a festa)

O que é equivalente logicamente à:

Não vou trabalhar E não vou para a festa.

Negação: representa a operação sobre uma ou mais proposições, que altera o valor lógico da estrutura (BERTOLINI, 2017).

Conjunção: a conjunção de uma proposição com sua negação irá produzir um valor falso.

Exemplo: $p \land \sim p \Leftrightarrow$ **falso**

p: **Pelé é brasileiro**

Nesse caso, Pelé não pode ser brasileiro e não ser brasileiro ao mesmo tempo. Portanto, o valor da expressão é falso.

Disjunção: a disjunção de uma proposição com sua negação irá produzir um valor lógico verdade.

Exemplo: $p \lor \sim p \Leftrightarrow$ **verdade**

p: **Pelé é brasileiro**.

Já no caso acima, Pelé pode ser OU não ser brasileiro, o que produz um valor lógico verdade para a expressão.

Dupla negação: consiste do teorema de que se uma proposição é verdadeira, não será o caso de que a proposição não é verdadeira (BARBIERI FILHO, 2012). Duas regras podem ser aplicadas:

- **introdução da dupla negação**: uma proposição que é verdadeira tem sua estrutura modificada para suportar uma dupla negação;

Exemplo: $p \Leftrightarrow \sim(\sim p)$

- **eliminação da dupla negação**: uma proposição que possui uma dupla negação tem sua estrutura alterada para apenas verdade.

Exemplo: $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$

Limite universal: nos diz que uma proposição que está realizando operação de disjunção com uma verdade será equivalente com a verdade. Por outro lado, uma operação de conjunção entre uma proposição e o valor lógico falso produzirá sempre um resultado lógico falso (MENEZES, 2013), conforme observado no exemplo a seguir:

$p \vee$ verdade $\Leftrightarrow$ verdade

$p \wedge$ falso $\Leftrightarrow$ falso

3.4.2 Métodos Dedutivos

As implicações e equivalências lógicas mostradas até o momento são formadas através do método das tabelas verdade. No entanto, um outro método também pode ser utilizado de maneira mais eficaz, chamado de método dedutivo. Esse método, introduzido pelo filósofo Aristóteles, nos diz que uma conclusão é obtida e baseada na concordância lógica de premissas que são consideradas verdades. Todo método dedutivo utiliza uma abordagem *top-down*, na qual se obtém uma conclusão específica baseada em uma premissa ou sentença geral. (BERTOLINI, 2017)

O exemplo mais comum do método dedutivo foi primeiramente apresentado por Aristóteles e consiste do seguinte argumento:

Todos os homens são mortais.

Sócrates é um homem.

Logo, Sócrates é mortal.

A conclusão de que **Sócrates é mortal** é atingida com base na verdade e combinação das duas premissas/sentenças anteriores. Aplicando o método dedutivo, chegamos ao raciocínio que **Sócrates é mortal pois pertence ao grupo de homens mortais**. Isto é, se existe uma afirmação que é verdadeira na sentença (seja ela afirmação ou negação), o método dedutivo argumenta para justificar porque todos devem aceitar a conclusão como verdade. Por outro lado, para a conclusão ser considerada falsa, uma das premissas deve ser falsa: ou nem todos os homens são mortais OU Sócrates não é homem. (BERTOLINI, 2017)

VOCÊ O CONHECE?

Você já ouviu falar de Aristóteles, Gottfried Leibniz, George Boole e Augustus de Morgan? Eles são considerados os principais percursores da lógica matemática e do raciocínio lógico. Aristóteles escreveu uma coleção de regras para raciocínio dedutivo; Leibniz propôs o uso de símbolos para representar o raciocínio dedutivo; e Boole e Morgan são responsáveis por propor bases da lógica simbólica moderna, baseado nas ideias de Leibniz.

Diferentes formas de argumentos dedutivos podem ser utilizadas, no entanto, as duas principais são: *modus ponens* e *modus tollens* (BARBIERI FILHO, 2012). Veremos a seguir as principais características e exemplos de cada uma.

***Modus Ponens*:** também conhecido como afirmação do antecedente, o argumento é organizado da seguinte maneira:

Se p, então q;

Ora, p;

Então, q.

Essa organização nos diz que a primeira premissa é uma condicional para a segunda premissa acontecer. Da mesma maneira, a conclusão é consequente da primeira premissa. Vejamos o seguinte exemplo da aplicação da afirmação do antecedente:

Se Paulo tirar entre 3 e 5 na prova, fará exame.

Paulo tirou nota 4.5.

Paulo irá realizar o exame.

Se alguém fechar a janela, a luz do sol não entrará na sala.

Eu fechei a janela.

A luz do sol não está mais entrando na sala.

Nos exemplos acima, a segunda premissa acontece com base na condição da primeira premissa. E a conclusão é obtida pela primeira premissa através da ação tomada na segunda premissa.

***Modus Tollens*:** também conhecido como a negação do consequente, o argumento é organizado da seguinte maneira:

Se *p*, então *q*;

Ora, não-*q*;

Então, não-*p*.

Essa organização nos diz que a primeira premissa é uma condicional (assim como no *modus ponens*), no entanto, a segunda é uma negação do primeiro consequente. Vejamos os seguintes exemplos:

Se Paulo passar no exame, então estudou para a prova.

Paulo não estudou para realizar a prova.

Logo, Paulo não foi aprovado no exame.

Se alguém fechar a janela, a luz do sol não entrará na sala.

A luz do sol continua entrando na sala.

Eu não fechei a janela.

Nos exemplos, na segunda premissa é afirmado que a consequência da primeira é falsa. Assim, pode-se concluir que o antecedente também é falso.

Temos, ainda, duas características importantes que expandem as duas afirmações vistas anteriormente: falácia de afirmação do consequente e falácia de negação do consequente. A falácia é considerada uma forma inválida de argumentação que leva a conclusão de um argumento ser caracterizado como inválido.

Vejamos os seguintes exemplos:

Se alguém fechar a janela, a luz do sol não entrará na sala.

A luz do sol não está entrando na sala.

Eu fechei a janela.

Se alguém fechar a janela, a luz do sol não entrará na sala.

Eu não fechei a janela.

A luz do sol continua entrando na sala.

Nesses dois exemplos, temos uma conclusão inválida do argumento. No primeiro argumento não estamos considerando que a janela possa ter sido fechada por outra pessoa que está na sala. Do mesmo modo, estamos desconsiderando que outra pessoa possa ter fechado a janela no segundo argumento O ponto principal dessas duas falácias é que a segunda premissa e a conclusão estão em ordens trocadas. Se alterarmos a ordem da segunda premissa com a conclusão, os argumentos tornam-se válidos.

Síntese

Concluímos este capítulo de lógica matemática e a sua relação com a computação. Agora, você já conhece as principais operações lógicas utilizadas para a construção de um argumento, as principais ferramentas matemáticas utilizadas para validar/invalidar um argumento, e os precursores do pensamento lógico.

Neste capítulo, você teve a oportunidade de:

- acompanhar a construção e evolução de um pensamento lógico utilizando símbolos matemáticos e lógicos;
- aprender os conceitos básicos da lógica matemática e seus principais operadores lógicos;
- identificar a utilização de tabelas verdades para validar ou invalidar um argumento;
- relacionar as proposições utilizando implicações e/ou equivalências lógicas;
- identificar os principais métodos utilizados na construção de um argumento;
- aprender o sistema dedutivo, amplamente utilizado na solução de problemas lógicos da atualidade.

Referências bibliográficas

AGUILERA, V. **Esquema para resolver problemas de lógica**. 2008. Disponível em: <http://www.valdiraguilera.net/problema-de-logica-esquema.html (http://www.valdiraguilera.net/problema-de-logica-esquema.html)>. Acesso em: 15/03/2018.

BARBIERI FILHO, P., HETEM Jr., A. **Fundamentos de Informática**: Lógica para Computação. São Paulo: LTC, 2012. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/books/978-85-216-2198-0/pageid/0 (https://integrada.minhabiblioteca.com.br/books/978-85-216-2198-0/pageid/0)>. Acesso em: 15/03/2018.

BERTOLINI, C.; CUNHA, G. B. da; FORTES, P. R. **Lógica Matemática**. Santa Maria: UAB/NTE/UFSM, 2017.

CLIFF, D. The joy of logic [documentário]. Diretora e produtora Catherine Gale. Produtor executivo Archie Baron. BBB Four, [s/d]. 1 h. Disponível em: <http://www.bbc.co.uk/programmes/b03k6ypz (http://www.bbc.co.uk/programmes/b03k6ypz)>. Acesso em: 15/03/2018.

MENEZES, P. B. Matemática Discreta para Computação e Informática. Vol.16. 4. ed. Porto Alegre: Bookman, 2013. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/books/9788582600252/pageid/0 (https://integrada.minhabiblioteca.com.br/books/9788582600252/pageid/0)>. Acesso em: 15/03/2018.

PROLOG. Disponível em: < (http://www.swi-prolog.org/)http://www.swi-prolog.org/ (http://www.swi-prolog.org/)>. Acesso em: 11/03/2018.