FMU
CENTRO UNIVERSITÁRIO

Matemática

Aula 9

FUNÇÃO EXPONENCIAL

Profa. Me. Alessandra Azzolini

FMU CENTRO UNIVERSITÁRIO

(ENEM-2009) Considere que uma pessoa decida investir uma determinada quantia e que lhe sejam apresentadas três possibilidades de investimento, com rentabilidades líquidas garantidas pelo período de um ano, conforme descritas:

Investimento A: 3% ao mês

Investimento B: 36% ao ano

Investimento C: 18% ao semestre

As rentabilidades, para esses investimentos, incidem sobre o valor do período anterior. O quadro fornece algumas aproximações para a análise das rentabilidades:

n	$1{,}03^n$
3	1,093
6	1,194
9	1,305
12	1,426

Para escolher o investimento com a maior rentabilidade anual, essa pessoa deverá

(a) escolher qualquer um dos investimentos A, B ou C, pois as suas rentabilidades anuais são iguais a 36%.

(b) escolher os investimentos A ou C, pois suas rentabilidades anuais são iguais a 39%.

(c) escolher o investimento A, pois a sua rentabilidade anual é maior que as rentabilidades anuais dos investimentos B e C.

(d) escolher o investimento B, pois sua rentabilidade de 36% é maior que as rentabilidades de 3% do investimento A e de 18% do investimento C.

(e) escolher o investimento C, pois sua rentabilidade de 39% ao ano é maior que a rentabilidade de 36% ao ano dos investimentos A e B.

Potência com expoente natural

A operação de potenciação com expoente natural pode ser interpretada como uma multiplicação com fatores iguais. Então seja um número real a e um número natural n, tal que n diferente de 0, a potência a^n é a multiplicação de a por si mesmo n vezes.

expoente

$$a^n = \underbrace{a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \,.\, \ldots \,.\, a}_{n \text{ fatores}}$$

Base

Potência com expoente negativo

Seja **a** um número real diferente de zero, e **n** um número natural, chamamos de potência de base **a** e expoente **-n** o número $\mathbf{a^{-n}}$, que é o número inverso de $\mathbf{a^{n}}$.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

1 – Calcule as potências com expoente inteiro em $\mathbb{R}$.

a) $3^4 = 3.3.3.3 = 81$

b) $(-2)^3 = -8$

c) $0^5 = 0$

d) $(\sqrt{7})^2 = \sqrt{7^2} = \sqrt{49} = 7$

e) $6^{-2} = \frac{1}{36}$

f) $(-2)^{-4} = \left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$

g) $\left(-\frac{3}{2}\right)^{-1} = -\frac{2}{3}$

h) $\left(-\frac{3}{2}\right)^{-2} = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

2 – Calcule o valor de $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + [3^{-1} - (-3)^{-1}]^{-2}$

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + [3^{-1} - (-3)^{-1}]^{-2} =$$

$$= \left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \left[\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)^1\right]^{-2} =$$

$$= \left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \left[\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)\right]^{-2} =$$

$$= \left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right]^{-2} =$$

$$= \left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \left[\frac{2}{3}\right]^{-2} =$$

$$= \left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \left[\frac{3}{2}\right]^{2} =$$

$$= \left(\frac{-1}{27}\right) + \left[\frac{9}{4}\right] =$$

$$= \frac{-4 + 243}{108} = \frac{239}{108}$$

3 – Calcule:

a) $10^6 = 1.000.000$

b) 10^{-4}=0,0001

c) $10^{-6}. 10^4$ =$10^{-6+4} = 10^{-2} = 0{,}01$

4 – Escreva como potência de base 10:

a) 10 000 = 10^4

b) 0,001 =10^{-3}=

c) 0,000001 =10^{-6}

Potência com expoente racional

Seja “a” um número real positivo e p/q uma fração, onde p é um número inteiro e q é um número natural diferente de 0 (zero). Temos que:

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

EXEMPLOS
Vamos verificar essa definição em alguns exemplos para um melhor entendimento:

$2^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{2^3}$

$3^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{3^2}$

$4^{\frac{-1}{3}} = \sqrt[3]{4^{-1}}$

$(\frac{2}{3})^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{(\frac{2}{3})^5}$

5- Calcule as potências em $\mathbb{R}$, quando definidas:

$a)\ 5^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{5^2}$

$c)\ \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{\left(\frac{1}{4}\right)^1} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

$b)\ (-2)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{(-2)^3}$

$d)\ 36^{\frac{1}{2}} = 6$

Propriedades da Potenciação

P1.	$a^m . a^n = a^{m+n}$	**P5.**	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
P2.	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	**P6.**	$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0)$
P3.	$(a^m)^n = a^{m.n}$	**P7.**	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$
P4.	$(a.b)^n = a^n . b^n$	**P8.**	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Função Exponencial

Função Exponencial é aquela que a variável está no expoente e cuja base é sempre maior que zero e diferente de um.

Essas restrições são necessárias, pois 1 elevado a qualquer número resulta em 1. Assim, em vez de exponencial, estaríamos diante de uma função constante.

Além disso, a base não pode ser negativa, nem igual a zero, pois para alguns expoentes a função não estaria definida.

Por exemplo, a base igual a - 3 e o expoente igual a 1/2. Como no conjunto dos números reais não existe raiz quadrada de número negativo, não existiria imagem da função para esse valor.

Exemplos:

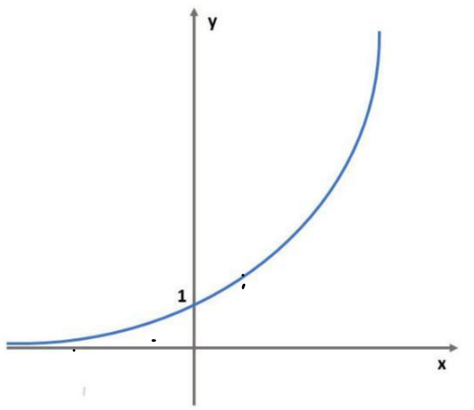
$f(x) = 4^x$
$f(x) = (0,1)^x$
$f(x) = (⅔)^x$

Nos exemplos acima **4**, **0,1** e **⅔** são as bases, enquanto x é o expoente.

Gráfico da função exponencial

O gráfico desta função passa pelo ponto (0,1), pois todo número elevado a zero é igual a 1. Além disso, a curva exponencial não toca no eixo x.

Na função exponencial a base é sempre maior que zero, portanto a função terá sempre imagem positiva. Assim sendo, não apresenta pontos nos quadrantes III e IV (imagem negativa).



Função Crescente ou Decrescente

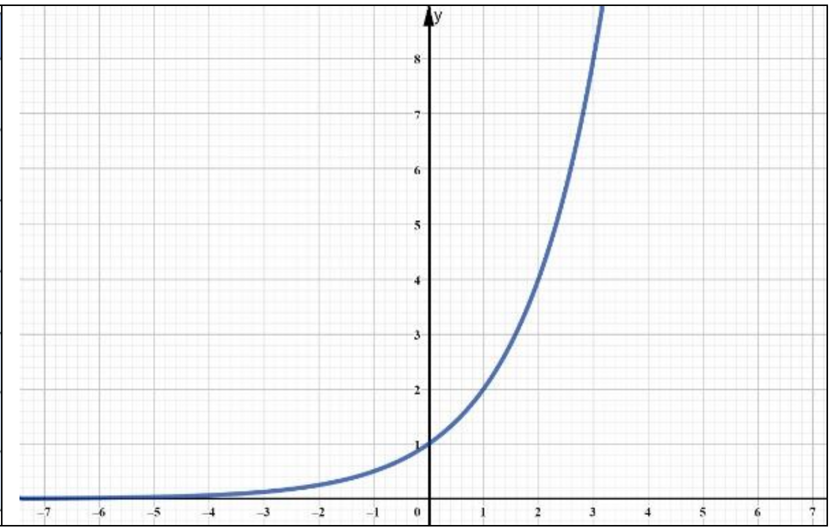
A função exponencial pode ser crescente ou decrescente.

Será crescente quando a base for maior que 1. Por exemplo, a função $y = 2^x$ é uma função crescente.

Para constatar que essa função é crescente, atribuímos valores para x no expoente da função e encontramos a sua imagem. Os valores encontrados estão na tabela abaixo.

Observando a tabela, notamos que quando aumentamos o valor de x, a sua imagem também aumenta. Abaixo, representamos o gráfico desta função.

x	$y = 2^x$
-3	$y = 2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$
-2	$y = 2^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$
-1	$y = 2^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$
0	$y = 2^0 = 1$
1	$y = 2^1 = 2$
2	$y = 2^2 = 4$
3	$y = 2^3 = 8$



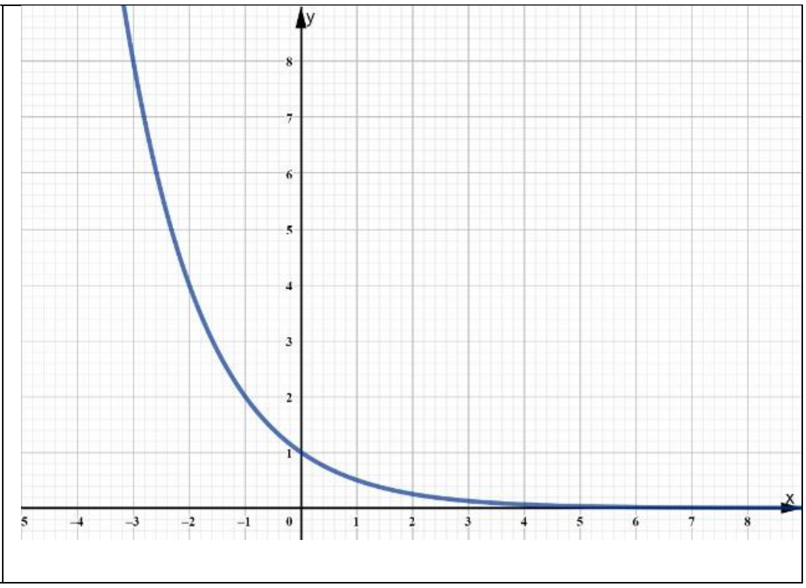
Por sua vez, as funções cujas bases são valores maiores que zero e menores que 1, são decrescentes. Por exemplo, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ é uma função decrescente.

Calculamos a imagem de alguns valores de x e o resultado encontra-se na tabela abaixo.

Notamos que para esta função, enquanto os valores de x aumentam, os valores das respectivas imagens diminuem. Desta forma, constatamos que a função $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ é uma função decrescente.

Com os valores encontrados na tabela, traçamos o gráfico dessa função. Note que quanto maior o x, mais perto do zero a curva exponencial fica.

x	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
-3	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 = 8$
-2	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2^2 = 4$
-1	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2^1 = 2$
0	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$
1	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \left(\frac{1}{2}\right)$
2	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)$
3	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{8}\right)$



FMU
CENTRO UNIVERSITÁRIO

Equações Exponenciais

DEFINIÇÃO

Equações exponenciais são aquelas em que a incógnita aparece nos expoentes. Uma das maneiras de resolver equações como essas, é transformando-as em uma **igualdade de potências de mesma base.**

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

Vejam só pessoal, que temos no quadro acima uma igualdade de duas potências, sendo elas a^{x_1} e a^{x_2}. Reparem que ambas possuem a **mesma base**, que é *a,* mas possuem **expoentes diferentes**, as incógnitas x_1 e x_2 . Podemos cancelar as bases e igualar os expoentes, como vocês veem acima também, de tal forma que $x_1 = x_2$.
Uma informação bastante importante que precisamos considerar, é que a base das nossas potências não pode ser qualquer número, ela deve ser necessariamente **maior que zero** e **diferente de 1**, de acordo com a definição das funções exponenciais.

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$\boxed{a > 0 \ e \ a \neq 1}$$

Exemplo 1

$$3^{x+1} = 81$$

Então, ao observarmos equações como essa, nosso objetivo sempre será igualar as bases das potências. Reparem que temos as bases 3 e 81. Não conseguimos reduzir o 3 a base 81, porque claro, o 3 é menor que 81, mas podemos reduzir o 81 a base 3, fazendo a sua fatoração:

$$\begin{array}{r|l} 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad 81 = 3^4$$

Dessa forma, nós podemos voltar a nossa equação exponencial deixando o lado esquerdo como está, e substituindo o 81 por 3^4. Nesse momento, nós conseguimos igualar as bases dessas duas potências, então podemos cortá-las, e trabalhar apenas com os expoentes, vejam só:

$$3^{x+1} = 3^4$$

$$x + 1 = 4$$

$$x = 4 - 1$$

$$x = 3$$

Encontramos a solução para o nosso primeiro exemplo que é 3! Em forma de conjunto solução podemos dizer que: S = {3}.

Exemplo 2

$$25^{x-1} = \frac{1}{125}$$

Primeiramente, prestem atenção nos números 25 e 125. Esses dois números são potências de 5. Isso significa que podemos reduzi-los a base 5, já que 25 = 5^2, e 125 = 5^3. Substituindo esses valores na expressão, ficamos com:

$$(5^2)^{x-1} = \frac{1}{5^3}$$

Chegou o momento em que necessariamente faremos uso das propriedades da potenciação para continuar. No lado esquerdo da equação, nós podemos aplicar a propriedade 3, afinal temos uma **potência de potência**. Já no lado direito da equação podemos aplicar a propriedade 6, e passar o 5^3 para o numerador. Olhem só como fica:

$$5^{2x-2} = 5^{-3}$$

Finalmente encontramos uma igualdade de potências de mesma base. Resta-nos então, igualar os expoentes e trabalhar apenas com eles:

$$2x - 2 = -3$$

$$2x = -3 + 2$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

Em forma de conjunto solução, temos que: $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

Exemplo 3

$$3 \cdot 4^{x-1} = 96$$

Observem a equação acima. Seria uma equação semelhante àquelas que acabamos de resolver, não fosse um pequeno detalhe: o número 3 que está multiplicando o termo exponencial a esquerda da igualdade.

$$4^{x-1} = \frac{96}{3}$$

$$4^{x-1} = 32$$

$$(2^2)^{x-1} = 2^5$$

$$2^{2x-2} = 2^5$$

$$2x - 2 = 5$$

$$2x = 5 + 2$$

$$x = \frac{7}{2}$$

Dessa forma, o conjunto solução da equação é dado por: $S = \left\{\frac{7}{2}\right\}$.

1 - Exercícios de Equações Exponenciais

$\boldsymbol{a})\ 3^{x-2} = 9$ $3^{x-2} = 3^2$ $x - 2 = 2$ $x = 2 + 2$ $x = 4$ $S = \{4\}$	$\boldsymbol{b})\ 5^{x^2-2x} = 125$ $5^{x^2-2x} = 5^3$ $x^2 - 2x = 3$ $x^2 - 2x - 3 = 0$ $x' = -1\ ou\ x'' = 3$ $S = \{-1{,}3\}$	$\boldsymbol{c})\ 10^{1-x} = \frac{1}{10}$ $10^{1-x} = 10^{-1}$ $1 - x = -1$ $-x = -1 - 1$ $-x = -2\ *(-1)$ $x = 2$ $S = \{2\}$
$\boldsymbol{d})\ \left(\sqrt{2}\right)^x = 4$ $\left(\sqrt{2^x}\right) = 4$ $2^{\frac{x}{2}} = 2^2$ $\frac{x}{2} = 2$ $x = 4$ $S = \{4\}$	$\boldsymbol{e})\ (0{,}5)^{2x} = 2^{1-3x}$ $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} = 2^{1-3x}$ $(2^{-1})^{2x} = 2^{1-3x}$ $2^{-2x} = 2^{1-3x}$ $-2x = 1 - 3x$ $-2x + 3x = 1$ $x = 1$ $S = \{1\}$	$\boldsymbol{f})\ (10^x)^{1-x} = 0{,}000001$ $(10^x)^{1-x} = 10^{-6}$ $10^{x-x^2} = 10^{-6}$ $x - x^2 = -6$ $-x^2 + x + 6 = 0$ $x' = -2\ ou\ x" = 3$ $S = \{-2, 3\}$
$g)\ 3^{2-x} = \frac{1}{27}$ $3^{2-x} = \frac{1}{3^3}$ $3^{2-x} = 3^{-3}$ $2 - x = -3$ $-x = -3 - 2$ $-x = -5\,.(-1)$ $x = 5$ $S = \{5\}$	$h)\ \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4} = 8^{x+2}$ $(2^{-1})^{x^2-4} = (2^3)^{x+2}$ $2^{-x^2+4} = 2^{3x+6}$ $-x^2 + 4 = 3x + 6$ $-x^2 - 3x + 4 - 6 = 0$ $-x^2 - 3x - 2 = 0$ $x' = -2\ ou\ x" = -1$ $S = \{-2, -1\}$	$\boldsymbol{i})\ 2.3^{x-2} = 162$ $3^{x-2} = \frac{162}{2}$ $3^{x-2} = 81$ $3^{x-2} = 3^4$ $x - 2 = 4$ $x = 6$ $S = \{6\}$
$j)\ 5.2^{x^2-4} = 160$ $2^{x^2-4} = \frac{160}{5}$ $2^{x^2-4} = 32$ $2^{x^2-4} = 2^5$ $x^2 - 4 = 5$ $x^2 = 9$ $x^2 = \mp\sqrt{9}$ $x = \mp 3$ $S = \{-3, 3\}$		

FMU
CENTRO UNIVERSITÁRIO

2) (PUC-RS) A soma das raízes da equação $9 \cdot 5^{x^2-2x+1} = 5625$ é:

(A) -4
(B) -2
(C) -1
(D) 2
(E) 4

3) Considerando que **$f(x) = 49^x$**, determine os valores de:

a) **$f(0{,}5) = 49^{0{,}5} = 49^{1/2}$** $= \sqrt{49} = 7$

b) **$f(1{,}5) = 49^{1{,}5} = 49^{3/2}$** $= \sqrt{49^3} = \sqrt{(7^2)^3} = 7^3 = 343$

4) (Unit-SE) Uma determinada máquina industrial se deprecia de tal forma que seu valor, t anos após a sua compra, é dado por $v(t) = v_0 \cdot 2^{-0{,}2t}$, em que v_0 é uma constante real. Se, após 10 anos, a máquina estiver valendo R$ 12.000,00, qual foi o valor em que ela foi comprada?

$v(t) = v_0 \cdot 2^{-0{,}2t}$
$v(10) = v_0 \cdot 2^{-0{,}2 \cdot 10}$
$12.000{,}00 = v_0 \cdot 2^{-2}$
$12.000{,}00 = v_0 \cdot \frac{1}{2^2}$
$12.000{,}00 = v_0 \cdot \frac{1}{4}$
$v_0 = 4 \cdot 12.000{,}00$
$v_0 = 48.000{,}00$

5) (UFCE) Se $f(x) = 16^{\left(1+\frac{1}{x}\right)}$, então f (-1) + f (-2) + f (-4) é igual a :
a. 11
b. 13
c. 15
d. 17
e. nda

$$f(-1) = 16^{\left(1+\frac{1}{-1}\right)} = 16^{(1+(-1))} = 16^{(1-1)} = 16^0 = 1$$
$$f(-2) = 16^{\left(1+\frac{1}{-2}\right)} = 16^{\left(1+\frac{1}{-2}\right)} = 16^{\left(1-\frac{1}{2}\right)} = 16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$$
$$f(-4) = 16^{\left(1+\frac{1}{-4}\right)} = 16^{\left(1-\frac{1}{4}\right)} = 16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = \sqrt[4]{(2^4)^3} = 2^3 = 8$$

f (-1) + f (-2) + f (-4) = = 1 + 4 + 8 = 13