FMU
CENTRO UNIVERSITÁRIO

Matemática

Aula 8

FUNÇÃO QUADRÁTICA

Profa. Me. Alessandra Azzolini

FMU CENTRO UNIVERSITÁRIO

ESQUENTANDO O CÉREBRO

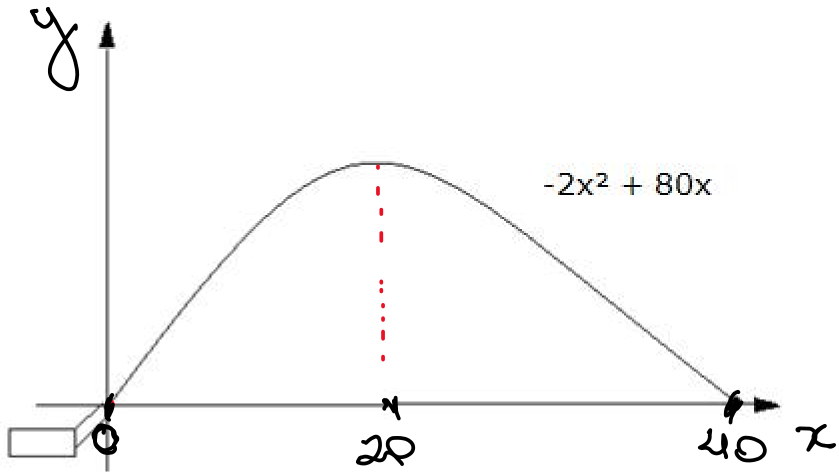
Uma bala é atirada de um canhão e descreve uma parábola de equação $y = -2x^2 + 80x$ onde x é a distância e y é a altura atingida pela bala do canhão. Determine:

a) a altura máxima atingida pela bala;

   800 m

b) o alcance do disparo.

   40 m



$y = -2x^2 + 80x$ $-2x^2 + 80x = 0$ $x.(-2x + 80) = 0$ $x = 0$ e $-2x + 80 = 0$ $-2x = -80$ $X = -80/-2$ $x = 40$ m	$y = -2x^2 + 80x$ $y = -2(20)^2 + 80.(20)$ $y = -2.400 + 80.(20)$ $y = -800 + 1600$ $y = 800$ m

Função quadrática

Definição.

Chama-se **função quadrática**, ou **função** polinomial do 2º grau, qualquer **função** f de IR em IR dada por uma lei da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são números reais e $a \neq 0$.

Vejamos alguns exemplos de **funções quadráticas**:

a)$f(x) = - x^2 - 4x + 6$, onde a =-1 , b = -4 e c = 6
b) $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$, onde a = 2, b = 3 e c = 5
c) $f(x) = -x^2 + 8x$, onde a =-1, b = 8 e c =0
d) $f(x) = 7x^2$, onde a =7, b =0 e c = 0
e) $f(x) = x^2$ a = 1, b =0 e c = 0

Gráfico da Função Quadrática

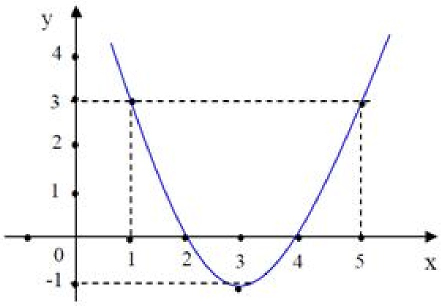
O gráfico de uma função quadrática é uma parábola.

Observe a tabela abaixo:

Gráfico:

Exemplo 1: $f(x) = x^2 - 6x + 8$

X	Y
1	3
2	0
3	-1
4	0
5	3



Exemplo 2: $f(x) = - x^2 - 2x$

x	Y
0	0
1	-3
-2	0
-1	1

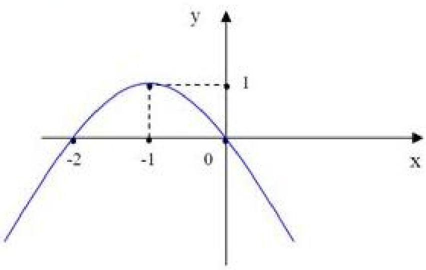
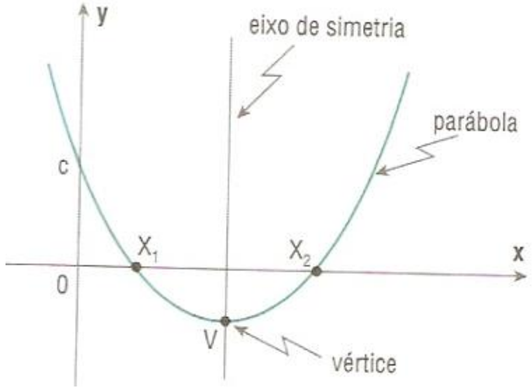
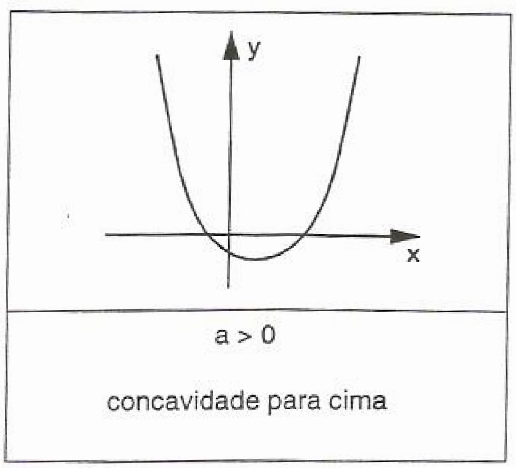


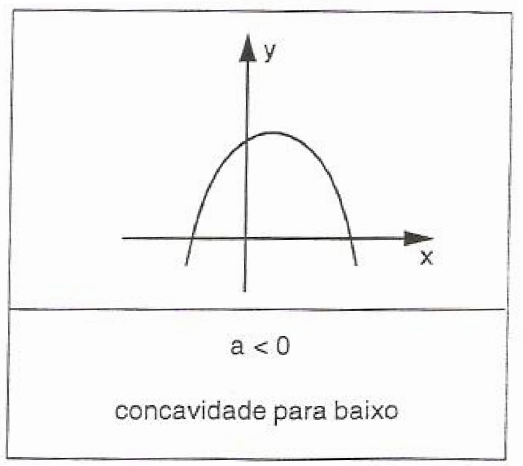
Gráfico da função definida por f(x) = ax² + bx + c

Vamos estudar o efeito dos parâmetros a, b e c na parábola que representa a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$.

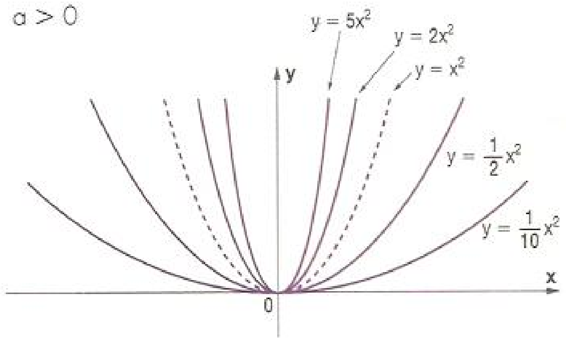


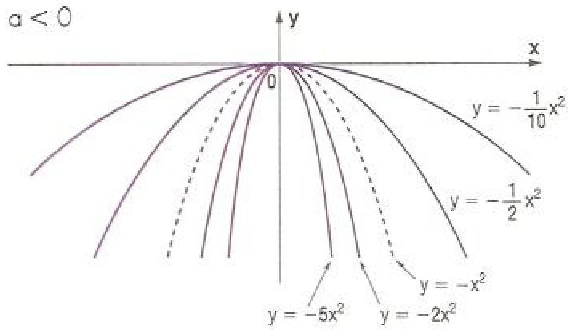
Parâmetro a: Responsável pela concavidade e abertura da parábola.





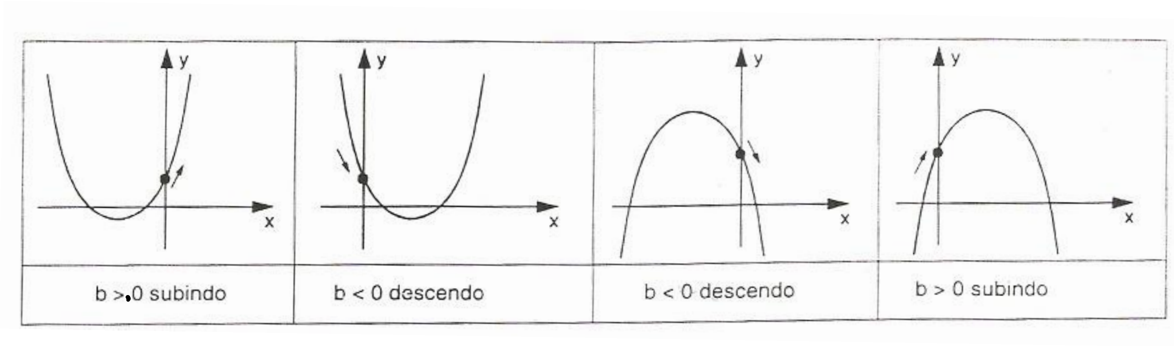
Além disso, quanto maior o valor absoluto de a, menor será a abertura da parábola (parábola mais "fechada"), independentemente da concavidade.



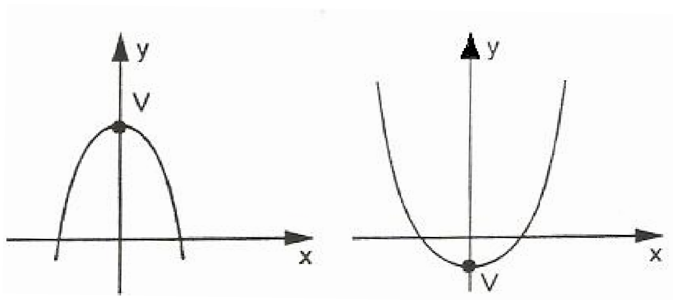


Parâmetro b:

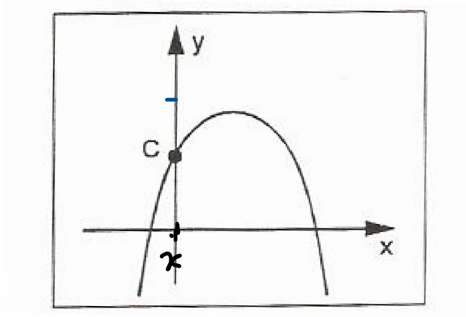
Um ponto ao percorrer a parábola, da esquerda para a direita, ao cruzar o eixo das ordenadas poderá estar subindo ou descendo.



Se b = 0 o vértice a parábola cruza o eixo y no vértice V, isto é, o vértice V da parábola está no eixo das ordenadas.

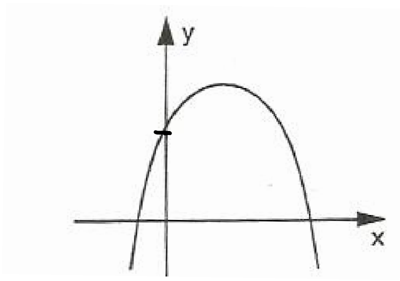


Parâmetro c: Indica o ponto onde a parábola cruza o eixo y.



A parábola cruza o eixo y no ponto (0, c).

Exemplo: Na função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ da figura abaixo, $a < 0$, $b > 0$, $c > 0$.



Zeros da Função Quadrática

Os zeros de $f(x) = ax^2 + bx + c$ são os números $x \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = 0$, ou seja, os zeros da f são os pontos do eixo das abscissas onde a parábola o intercepta.

Determinação dos Zeros da Função Quadrática

A fórmula que fornece os zeros da função e, portanto, às raízes da equação do 2º grau

$ax^2 + bx + c = 0$ é a fórmula de **Bháskara**:

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$ com $\Delta = b^2 - 4.a.c$ (discriminante).

Exemplo

f(x) = x² - 6x – 7

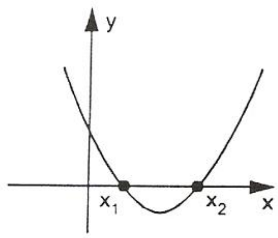
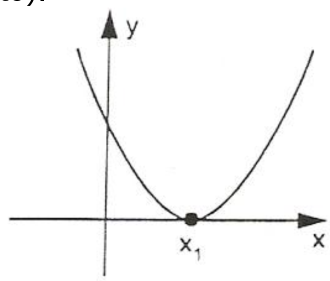
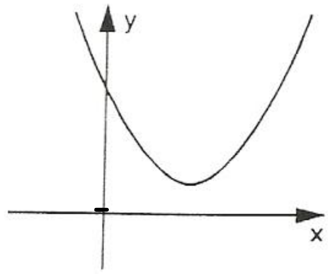
a = 1 b = -6 c = -7

$$\Delta = b^2 - 4.a.c.$$
$$\Delta = (-6)^2 - 4.1.(-7)$$
$$\Delta = 36 + 28$$
$$\Delta = 64$$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{64}}{2.1} \Rightarrow \quad x = \frac{6 \pm 8}{2}$$

$$x' = \frac{6+8}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

$$x'' = \frac{6-8}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Quando $\Delta > 0$, a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ tem dois zeros reais diferentes (a parábola intersecta o eixo x em dois pontos distintos).  $\Delta > 0$ duas raízes reais e distintas	Quando $\Delta = 0$, a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ tem um zero real duplo (a parábola intersecta o eixo x em um só ponto).  $\Delta = 0$ duas raízes reais e iguais	Quando $\Delta < 0$, a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ não tem zeros reais (a parábola não intersecta o eixo x).  $\Delta < 0$ nenhuma raiz real

FMU
CENTRO UNIVERSITÁRIO

1. Calcule os zeros das seguintes funções:

a) $y = -x^2 + x + 6$ => x′ = e x″ =

a= -1 b = 1 c = 6

$$x = \frac{-(1) \pm \sqrt{1^2 - 4(-1).6}}{2.(-1)} = \qquad x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{-2} \qquad x' = \frac{-1+5}{-2} = \frac{4}{-2} = -2$$

$$x'' = \frac{-1-5}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3$$

b) $y = x^2 + 10x + 25$ => x′ = x″ = -5

c) $y = 2x^2 - 5x + 3$ => x′ =$\frac{3}{2}$ e x″ =1

x = $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$ com Δ = b² - 4.a.c (discriminante).

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(2).3}}{2.(2)} = \qquad x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{4} \qquad x' = \frac{5+1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$x'' = \frac{5-1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

d) $f(x) = x^2 + 4x + 5$ =>não pertence ao Reais

$$x = \frac{-(1) \pm \sqrt{(4)^2 - 4(1).5}}{2.1} = \qquad x = \frac{-1 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

SOMA E PRODUTO

Existindo zeros reais tal que:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2.a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2.a}, \text{ obtemos:}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2.a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2.a} = \frac{-2b+\sqrt{\Delta}-\sqrt{\Delta}}{2.a} = \frac{-b}{a}$$

$$x_1 \,.\, x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2.a} \,.\, \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2.a} = \frac{b^2-(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

$$\text{Logo, } \begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} \\ x_1 \,.\, x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Com a utilização dessas expressões podemos determinar as raízes de uma equação do 2º grau sem aplicar a resolução de Bháskara, respeitando a formação dessa equação com base na soma e no produto das raízes: ***$x^2 - Sx + P = 0$.***

Exemplo

Seja a equação **$x^2 - 5x + 6 = 0$**, encontre as raízes que resolvem a equação.
Veja o passo-a-passo sobre como fazer:

Passo 1: anotar os valores dos coeficientes da equação:
a = 1 b =-5 c = 6

Passo 2: aplicar as fórmulas que definimos acima:
Soma:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{(-5)}{1} = 5$$

Produto:

$$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = \frac{6}{1} = 6$$

Passo 3: encontrar valores em que a soma (**S**) seja igual a **5** e o produto (**P**), seja igual a **6**.

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2+3=5 \\ 2\,.\,3=6 \end{cases}$$

Portanto, as raízes que formam o conjunto solução da equação:
$x^2 - 5x + 6 = 0$ são **2** e **3**.

Logo, **S = {2, 3}**.

2. Determine os zeros das funções quadráticas por meio da fórmula de soma e produto.

$a)\ f(x) = x^2 - 6x + 8$

$a = 1 \quad b = -6 \quad c = 8$

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{-(-6)}{1} = 6$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{8}{1} = 8$$

$x_1 = 2 \quad e\ x_2 = 4$

$b)\ f(x) = x^2 + 7x + 10$

$a = 1 \quad b = 7 \quad c = 10$

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{-(7)}{1} = -7$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{10}{1} = 10$$

$x_1 = -2 \quad e\ x_2 = -5$

$c)\ f(x) = -x^2 + 2x + 3$

$a = -1 \quad b = 2 \quad c = 3$

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{-(2)}{-1} = 2$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{3}{-1} = -3$$

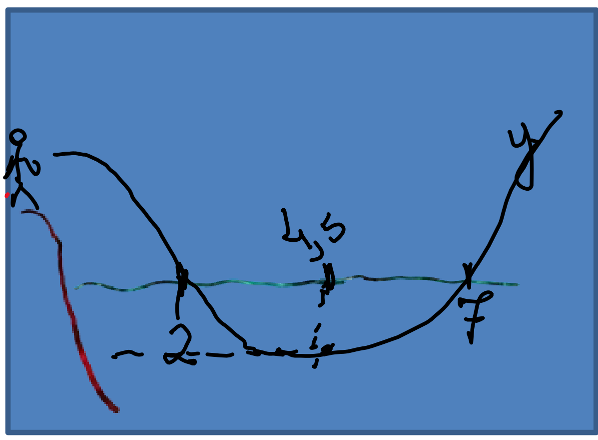
$x_1 = -1 \quad e\ x_2 = 3$

$$\begin{cases} (-1).3 \Rightarrow -1+3=2 \\ 1.(-3) \Rightarrow 1-3=-2 \end{cases}$$

$d)\ f(x) = -x^2 + 13x - 40$

$a = -1 \quad b = 13 \quad c = -40$

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{-(13)}{-1} = 13$$



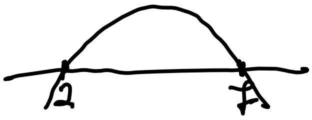
$P = \frac{c}{a} = \frac{-40}{-1} = 40$

$x_1 = 5 \quad e\, x_2 = 8$

<table>
<tr>
<td>

$y = x^2 - 9x + 14 \, . \, (-1)$

$y = -x^2 + 9x - 14$



</td>
<td>

$y = (x - a) \, . \, (x - b)$
$y = (x - 2) \, . \, (x - 7)$
$y = x^2 - 7x - 2x + 14$
$y = x^2 - 9x + 14$

$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}$

$V_x = \frac{2+7}{2} = 4{,}5$

$y = (4{,}5)^2 - 9(4{,}5) + 14$

$y = 20{,}25 - 40{,}5 + 14$

$y = -6{,}25$ m

</td>
</tr>
</table>

Equações do 2º Grau Incompletas
A forma geral da equação do 2º grau é $ax^2 + bx + c = 0$, onde a, b e c são números reais e $a \neq 0$. Dessa forma, os coeficientes b e c podem assumir valor igual a zero, tornando a equação do 2º grau incompleta.

Toda equação do segundo grau, seja ela incompleta ou completa, pode ser resolvida utilizando a equação de Bháskara.

As equações incompletas do 2º grau podem ser resolvidas de outro modo. Veja:

<table>
<tr>
<th>Coeficiente b = 0</th>
<th>Coeficiente c = 0</th>
<th>Coeficiente b = 0 e c = 0</th>
</tr>
<tr>
<td>

$4y^2 - 100 = 0$

$y^2 = \frac{100}{4} = 25$

$y = \mp \sqrt{25}$
$y' = -5$

$y' = 5$

</td>
<td>

$3x^2 - x = 0$

$x(3x - 1) = 0$

<table>
<tr>
<td>$x = 0$</td>
<td>$3x - 1 = 0$
$3x = 1$
$x = \frac{1}{3}$</td>
</tr>
</table>

</td>
<td>

$4x^2 = 0 \rightarrow$ isolando o x

$x^2 = \frac{0}{4}$

$x^2 = 0$

$x = \mp \sqrt{0}$

$x = 0$

</td>
</tr>
</table>

3. Determine os zeros das funções:

$a)\; f(x) = x^2 + 10x$

$x^2 + 10x = 0$

$x(x+10) = 0$

$x + 10 = 0$

$x = -10$

$x_1 = 0 \quad e\, x_2 = -10$

$b)\ f(x) = x^2 - 9$

$x^2 - 9 = 0$

$x^2 = 9$

$x = \mp\sqrt{9}$

$x = \mp 3$
$x_1 = -3 \quad e\, x_2 = 3$

$c)\ f(x) = x^2$

$x^2 = 0$

$x = \mp\sqrt{0}$

$x_1 = x_2 = 0$

$d)\ f(x) = 2x^2 - 8$

$2x^2 - 8 = 0$

$2x^2 = 8$

$x^2 = \frac{8}{2}$

$x^2 = 4$

$x = \mp\sqrt{4}$

$x_1 = -2 \quad e\, x_2 = 2$

Imagem da Função Quadrática

A determinação do vértice da parábola ajuda na elaboração do gráfico e permite determinar a imagem da função, bem como seu valor máximo ou mínimo.

As coordenadas do vértice $V(x_v, y_v)$ da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ podem ser calculadas de duas maneiras:

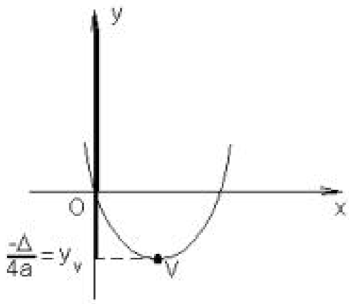
1ª Maneira: Utilizando as seguintes fórmulas:

$$x_v = \frac{-b}{2a} \qquad \text{e} \qquad y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

2ª Maneira:

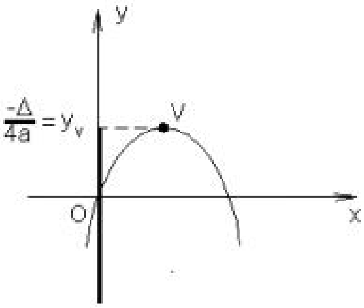
* Para calcular o x_v, obtemos as raízes x_1 e x_2 da equação do 2º grau e calculamos o ponto médio das mesmas. Assim: $x_v = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$

* Substituímos o valor do x_v na função quadrática para que possamos obter a coordenada y_v.



$a > 0 \Rightarrow Im(f) = \{ y \in \Re \mid y \geq y_v \} = [y_v, +\infty[$

V é ponto MÍNIMO



$a < 0 \Rightarrow Im(f) = \{y \in \Re \mid y \leq -\frac{\Delta}{4a}\} =]-\infty, y_v]$

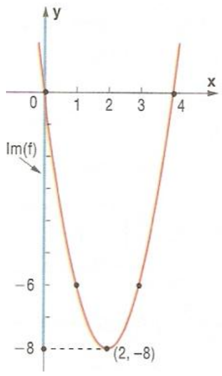
V é ponto MÁXIMO

Exemplo

f(x) = 2x² - 8x

Obtendo as raízes, teremos $x_1 = 0$ e $x_2 = 4$. Portanto, $x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0+4}{2} = 2$

Substituindo $x_v = 2$ na função, obtemos a ordenada do vértice:



$$y_v = f(x_v) = 2\,(x_v)^2 - 8(x_v)$$
$$y_v = f(2) = 2 \,.\, 2^2 - 8 \,.\, 2 = -8$$

* O vértice é o ponto (2,- 8).

* A função assume valor mínimo -8 quando x = 2

* Im(f) = {y ∈ ℝ | y ≥ -8} ou [-8, +∞ [

$$x_v = \frac{-b}{2a} \quad \text{e} \quad y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

4. (ANGLO) O vértice da parábola $y = 2x^2 - 4x + 5$ é o ponto

a) (2, 5) b) $\left(-1, \sqrt{11}\right)$ c) (-1, 11) d) $\left(1, \sqrt{3}\right)$ e) (1, 3)

$$x_v = \frac{-b}{2a} \quad \text{e} \quad y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

$$x_v = \frac{-(-4)}{2.2} = \frac{4}{4} = 1 \qquad y = 2(1)^2 - 4(1) + 5 = 3$$

5. Verifique se as seguintes funções admitem valor máximo ou valor mínimo e calcule esse valor:

$a)\ f(x) = -x^2 + 2x$

$$x_v = \frac{-(2)}{2.(-1)} = \frac{-2}{-2} = 1 \qquad f(1) = -(1)^2 + 2(1) = -1 + 2 = 1$$

Máximo => $x_v = 1$ e $y_v = 1$

$b)\ f(x) = x^2 - 10x + 9$

$x_v = \frac{-(-10)}{2.(1)} = \frac{10}{2} = 5 \qquad f(5) = (5)^2 - 10(5) + 9 = -16$

Mínimo => $x_v = 5$ e $y_v =$

$c)\ f(x) = -4x^2 + 4x - 1$

$x_v = \frac{-4}{2.(-4)} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2} \qquad y_v = \frac{b^2 - 4a.c}{4.a} = \frac{4^2 - 4(-4).(-1)}{4.(-4)} = \frac{16 - 16}{-16} = \frac{0}{-16} = 0$

Máximo => $x_v = \frac{1}{2}$ e $y_v = 0$

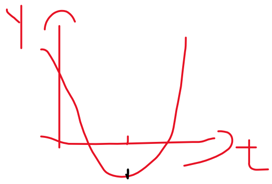
6. Sendo f : R → R uma função definida por **f(x) = x² −2**, calcule:

a) f (-2) = (-2)² - 2 = 4 – 2 = 2

b) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 = \frac{1}{4} - 2 = \frac{-7}{4}$

7. (PUCCAMP) Considere a função dada por y = 3t² - 6t + 24, na qual y representa a altura, em metros, de um móvel, no instante t, em segundos. O valor mínimo dessa função ocorre para t igual a

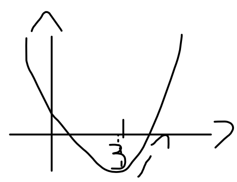
a) -2 b) -1 c) 0 d) 1 e) 2



$x_v = \frac{-(-6)}{2.(3)} = \frac{6}{6} = 1$

8. **(UFMG-04)** O intervalo no qual a função f(x) = x² - 6x + 5 é crescente é:

a) x < 5 b) 1 < x < 5 c) x > 1 d) x > 3



$x_v = \frac{-(-6)}{2.(1)} = \frac{6}{2} = 3$

9. Uma bola é lançada ao ar. Suponha que sua altura **h**, em metros, **t** segundos após o lançamento, seja **h(t) = - t² + 8t +10**. Calcule a altura máxima atingida pela bola e em que instante ela alcança esta altura.

$t_v = \frac{-(8)}{2.(-1)} = \frac{-8}{-2} = 4\ s \qquad \mathbf{h(4) = -(4)^2 + 8.4 + 10}$

$\boldsymbol{h(4) = -16 + 32 + 10}$

$$h(4) = 26\ m$$

Resp: A altura máxima atingida pela bola será de 26 m em 4 segundos.

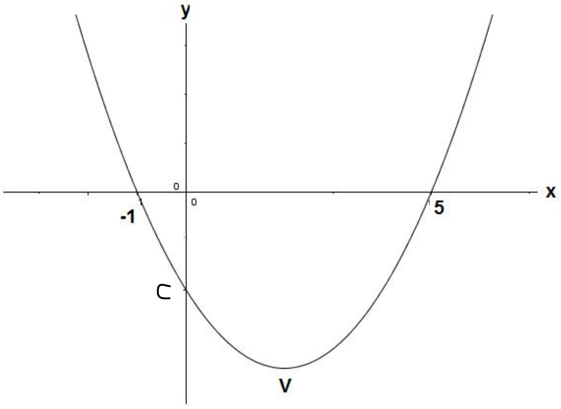
10. O lucro de uma empresa é dado por **L = F - C**, onde **L** é o lucro, **F** o faturamento e **C** o custo. Sabe-se que, para produzir **x** unidades, o faturamento e o custo variam de acordo com as equações: **F(x) = 1500x - x^2** e **C(x) = x^2 - 500x**. Nessas condições, qual será o lucro máximo dessa empresa e quantas peças deverá produzir?

$$L = F - C$$
$$L = 1500x - x^2 - (x^2 - 500x)$$
$$L = 1500x - x^2 - x^2 + 500x$$
$$L = -2x^2 + 2000x$$
$$x_v = \frac{-(2000)}{2.(-2)} = \frac{-2000}{-4} = 500\ peças$$

$$L = -2(500)^2 + 2000(500)$$
$$L = -2.(250.000) + 1.000.000$$
$$L = -500.000 + 1.000.000$$
$$L = 500.000$$

Resp: O lucro máximo dessa empresa será R$ 500.000,00 e deverá produzir 500 peças.

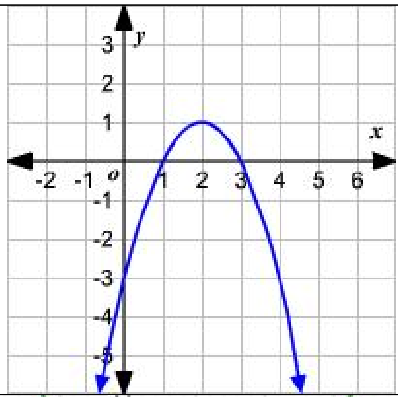
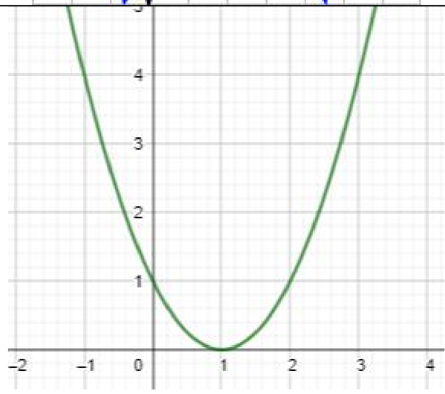
11. O gráfico da função y = a.x² + bx + c está representado abaixo:



Classifique as afirmações abaixo como verdadeiras (V) ou falsas (F).

a) (V) O número real c é negativo.
b) (V) O número real a é positivo.
c) (F) O número real b é positivo.
d) (F) A abscissa do vértice V é negativa.
e) (F) A ordenada do vértice V é positiva.
f) (F) O discriminante (∆) da equação f(x) = 0 é nulo.

12. Observe o gráfico, destacando:

a) os zeros da função (as raízes): x’ = 1 ou x” = 3 b) as coordenadas do vértice: V (2,1)	
a) os zeros da função (as raízes): x’ = x” = 1 b) as coordenadas do vértice: V = (1,0)	

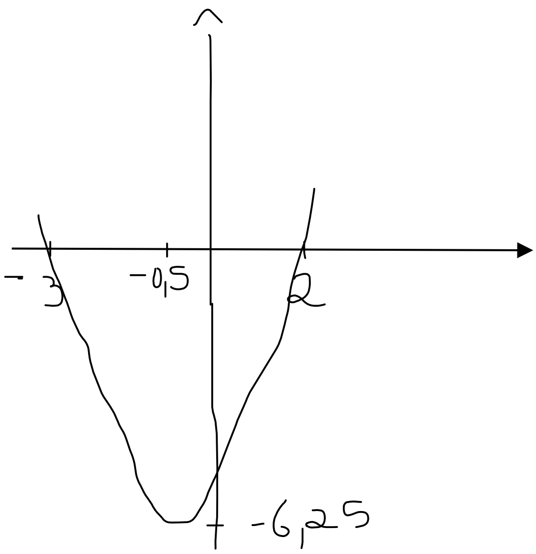
12. Para a função real f(x) = x² + x – 6. Construa a função no gráfico abaixo:

a) os zeros da função (as raízes):
$x^2 + x - 6 = 0$

S = -b/a = -1/1 = -1

P = c/a = -6/1 = -6

x’ = -3 x” = 2



b) as coordenadas do vértice:

$$\mathbf{x}_v = \frac{-(1)}{2.(1)} = -\frac{1}{2}$$

$f(-\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2})^2 + (-\frac{1}{2}) - 6$

$f(-\frac{1}{2}) = -6{,}25$

V(-0,5; -6,25)