FMU
CENTRO UNIVERSITÁRIO

# Matemática

# Aula 4

# EXPRESSÕES POLINOMIAIS

Profa. Me. Alessandra Azzolini

**Breve explicação Histórica**

A história das equações polinomiais é muito antiga, tem-se conhecimento que na Babilônia, cerca de 1800 a.C., alguns métodos de resolução de equações do 2º grau já eram conhecidos. Assim, o problema de encontrar as raízes de uma equação algébrica, isto é, de um polinômio, é alvo de estudo de muitas pessoas há muito tempo.

Segundo registro de historiadores, o primeiro povo a lidar com essas equações foram os Egípcios. No Papiro de Ahmes, também conhecido como o Papiro de Rhind, adquirido pelo escocês Henry Rhind, em 1868, numa cidade as margens do Rio Nilo, consta que os Egípcios não se referiam a problemas com objetos concretos, mas já tratavam de incógnitas em seus problemas.

**Entendendo um polinômio**

**Monômios**

Ao iniciar seus estudos na álgebra, você certamente começou a verificar que a matemática não é feita apenas de números, mas também de letras, as quais são denominadas variáveis, podendo assumir infinitos valores. Em algum momento, no 7º Ano do Ensino Fundamental, você passou a escutar a palavra **monômio**. E o que vem a ser um monômio?

Podemos denominar **monômio** ou **termo algébrico** toda expressão algébrica representada apenas por um número, por uma variável ou por um produto (multiplicação) de números e variáveis.

**Exemplos:** $2x$ $3a$ $121$ $y^2$ $7xy$ $xyz$

Um monômio é constituído de duas partes: **Coeficiente**, que é representado pelo número em frente a letra, e **parte literal**, que é representado por uma variável (letra) ou por um produto de variáveis.

**Polinômio**

Adição algébrica com dois ou mais monômios. Expressões com dois monômios são chamadas de **binômios**, com três **trinômios**.

O **grau** de um polinômio é definido pelo maior expoente encontrado no polinômio

**Exemplos:**

a. $2x + y$ (primeiro grau)
b. $3x^2 + 2x + 5$ (segundo grau)
c. $a + b$ (primeiro grau)
d. $y^2 - 5x^5 - 4z - w$ (quinto grau)

**Adição e Subtração de Polinômios**

Só é possível quando efetuada por termos semelhantes, ou seja, a parte literal deve ter a mesma base (letra) e o mesmo expoente. Deve-se somar, ou subtrair, os coeficientes, mantendo-se a parte literal.

**Exemplos:**

a) 3x + 4x = 7x

b) 2a + 3b – 5a – 2b = -3a + b

c) $2x^2 + 3x - x^2 + 5x^2 = 6x^2 + 3x$

**Multiplicação de Polinômios**

Só é possível quando os monômios tiverem a mesma parte literal, independentemente do valor do expoente. Deve-se obedecer aos critérios de multiplicação e divisão de potências de mesma base, explorados na aula 1.

**Exemplos:**

a)$2x\,.\,3x^2 = 6x^3$

b)$-3y^3\; 2x^5\,.\,5y^2.\,4x^{-4} = -120xy^5$

**Divisão de Polinômios**

Ao dividir um polinômio P (x) por um polinômio D (x) não nulo, em que o grau de P é maior que D ($_P >\, _D$), quer dizer que devemos encontrar um polinômio Q (x) e R (x), de modo que:

$$P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

$$\delta_R < \delta_D \text{ ou } R(x) = 0$$

Note que esse processo é equivalente a escrever:

$$\begin{array}{r|l} P(x) & D(x) \\ \hline R(x) & Q(x) \end{array}$$

P (x) → dividendo

D (x) → divisor

Q (x) → quociente

R (x) → resto

Das propriedades da potenciação, temos que o grau do quociente é igual à diferença entre os graus do dividendo e divisor.

**Exemplos:**

$a)\; 30x^3 : 15x = 2x^2$

$b)\; (9x^5 + 21x^4 - 12x^3) : 3x^3 = 3x^2 + 7x - 4$

$c)\; (21x^4 - 12x) : 3x^3 = 7x - 4x^{-2}$

**Propriedade Distributiva**

Ocorre quando há multiplicação de somas e/ou subtrações

**Exemplos:**

a. $a.(2a+b)=2a^2+ab$

b. $5x^2y.(3x-2xy)=15x^3y-10x^3y^2$

## Exercícios

**1.** Efetue os cálculos dos polinômios abaixo.

a. $(15a-7b+4c)+(-8b+3c-9)=15a-7b+4c-8b+3c-9=15a-15b+7c-9$

b. $(2y^2-3ay+4a^2)-(ay-5y^2-a^2)=$

$=2y^2-3ay+4a^2-ay+5y^2+a^2==7y^2-4ay+5a^2$

c. $(x+7)(x+5)=x^2+5x+7x+35=x^2+12x+35$

d. $(2a+b)(a-2b)=2a^2-4ab+ab-2b^2=2a^2-3ab-2b^2$

**2.** Duas lojas vendem o mesmo produto pelo mesmo preço (x reais) quando o pagamento é à vista. Para venda a prazo, esse produto tem preços diferentes.:

**Loja A:** Entrada de 60% do preço *x* mais duas prestações de *y* reais

**Loja B:** Entrada de 40% do preço *x* mais três prestações de *y* reais

Escreva o polinômio que representa:

a. O preço a prazo do produto na loja *A Resp: 0,6x +2y*

b. O preço a prazo do produto na loja *B Resp: 0,4x + 3y*

c. A diferença entre os preços, a prazo, da loja *A* e da loja *B*. *Resp: 0,2x - y*

**3.** Um computador está à venda em uma loja nas seguintes condições: uma entrada de *x* reais e 4 prestações de *y* reais. Se a loja vendeu, em um dia, 10 desses computadores, qual o polinômio que representa a quantia que a loja vai faturar com essa venda?

10(x + 4y)

10x + 40y

**4.** Efetue as divisões dos polinômios pelo método da chave:

a. $(-28x^4 + 8x^2) : (4x^2) = -7x^2 + 2$

$$\frac{-28x^4 + 8x^2}{4x^2} = \frac{-28x^4}{4x^2} + \frac{8\cancel{x^2}}{4\cancel{x^2}} = -7x^2 + 2$$

b. $(30y^6 - 48y^5 - 18y^2) : (6y^2) = 5y^4 - 8y^3 - 3$

## PRODUTOS NOTÁVEIS

São expressões que existem para facilitar o cálculo de problemas que envolvem equações, por exemplo. Fórmulas, com regras básicas que facilitam **enigmas matemáticos**. Existem diversos os momentos em que se pode usar os produtos notáveis, por isso ele recebe essa palavra "notável" em seu nome. Esse assunto envolve alguns conceitos e outros temas matemáticos, tais quais: **potenciação** (elevação a segunda potência (quadrado) e elevação a terceira potência (cubo), **produto** (multiplicação) e **diferença** (subtração).

### Quadrado da Soma de Dois Termos

*"O quadrado da soma de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo, mais duas vezes o produto do primeiro pelo segundo termo, mais o quadrado do segundo termo".*

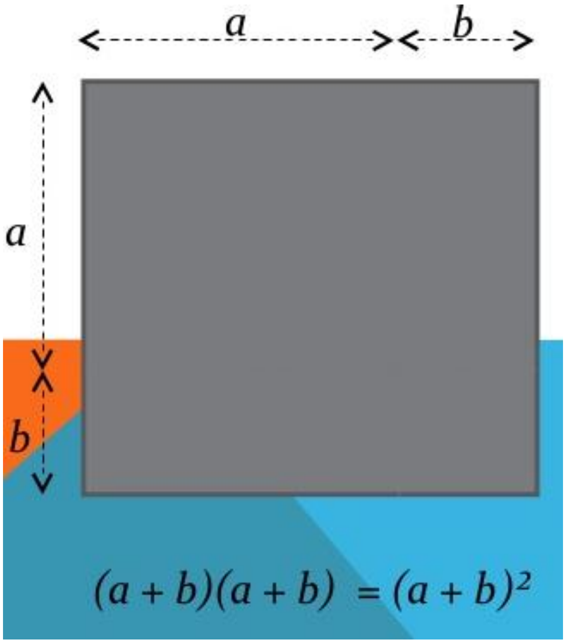
$$\boldsymbol{(a+b)^2 = (a+b)(a+b)}$$

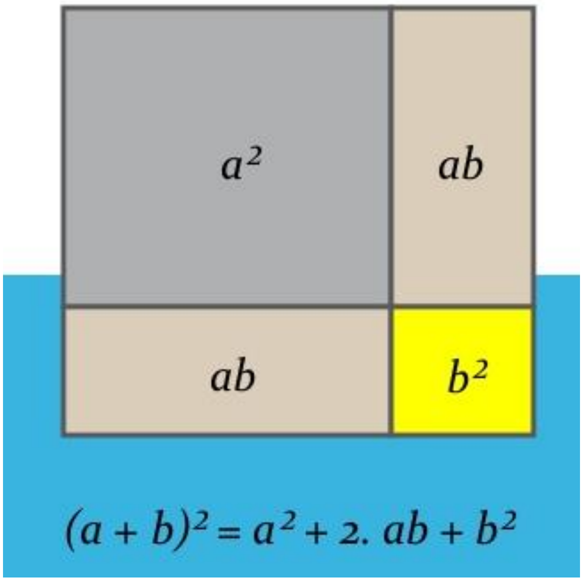
$$\boldsymbol{a^2 + ab + ab + b^2}$$

$$\boldsymbol{a^2 + 2ab + b^2}$$

*Fórmula do quadrado da soma de dois termos.*

Podemos representar geometricamente a área do quadrado, quando a e b são positivos.




**Exemplos:**

$$(x+2)^2 = (x+2).(x+2) = x^2 + 2x + 2x + 4 = x^2 + 4x + 4$$

$$(x+4)^2 = x^2 + 2.x.4 + 4^2 = x^2 + 8x + 16$$

$$(x+5)^2 = x^2 + 10x + 25$$

$$(3x+2y)^2 = 9x^2 + 12xy + 4y^2$$

**Quadrado da Diferença de Dois Termos**

*"O quadrado da diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo, menos duas vezes o produto do primeiro pelo segundo termo, mais o quadrado do segundo termo".*

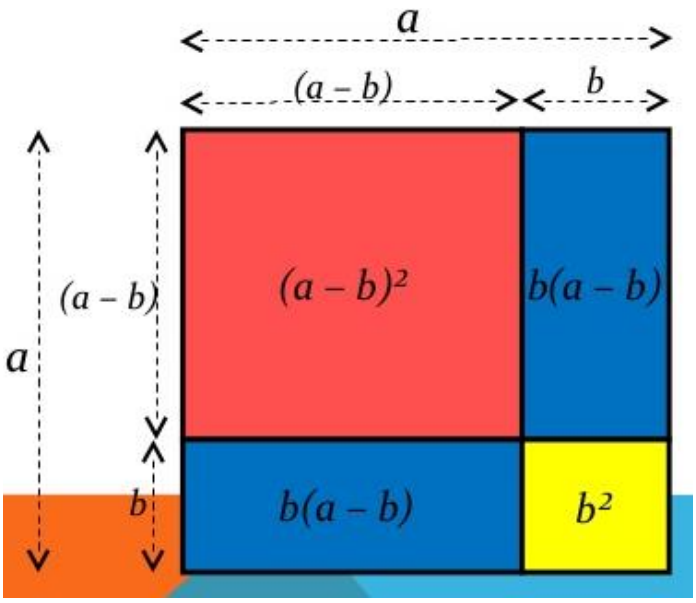
$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$$

$$a^2 - ab - ab + b^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2$$

*Fórmula do quadrado da diferença de dois termos.*

*A área do quadrado de lado ( a – b )vermelho pode ser obtida subtraindo a área dos dois retângulos azuis e a área do quadrado amarelo.*




$$a^2 - 2ab + b^2$$

**Exemplos:**

$$(x-5)^2 = (x-5).(x-5) = x^2 - 5x - 5x + 25 = x^2 - 10x + 25$$

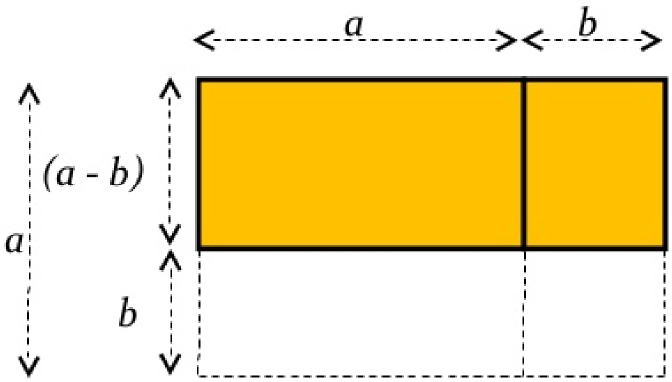
$$(3a-4b)^2 = (3a-4b).(3a-4b) = 9a^2 - 24ab + 16b^2$$

**Produto da Soma pela Diferença de Dois Termos**

*"O produto da soma pela diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo menos o quadrado do segundo termo"*

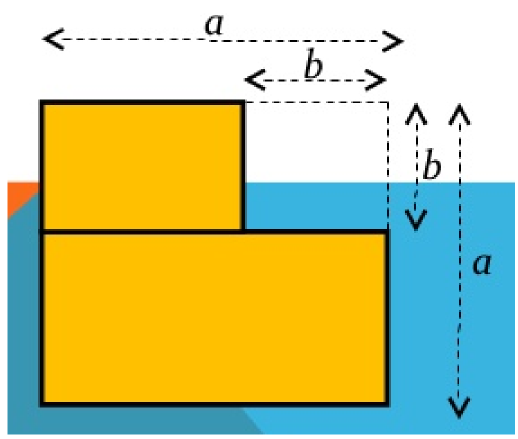
$$\boldsymbol{a^2 - b^2 = (a+b).(a-b)}$$

*Fórmula da soma pela diferença de dois termos.*




*A área do retângulo laranja é*

*(a + b).(a – b)*




*A área da figura obtida pode ser expressa por $a^2$ - $b^2$*

**Exemplos:**

$$\boldsymbol{x^2 - 16 = (x+4).(x-4)}$$

$$\boldsymbol{x^2 - 9 = (x + 3).(x - 3)}$$

$$\boldsymbol{4x^2 - 49y^2 = (2x-7y)(2x+7y)}$$

$$\boldsymbol{u^2 - 6 = (u-\sqrt{6}).(u+\sqrt{6})}$$

## Fatoração

O termo fatorar representa a **multiplicação de dois ou mais fatores**, lembrando que fatores são os **números que se multiplicam**. Daí surgiu a frase *"a ordem dos fatores não altera o produto"*.

*"Fatorar um polinômio, quando possível, significa escrever esse polinômio como uma **multiplicação de dois ou mais polinômios**.*

A fatoração será muito importante na disciplina de cálculo.

## Fator Comum em Evidência

1º) Identificar se existe algum número que divide todos os coeficientes do polinômio e letras que se repetem em todos os termos.
2º) Colocar os fatores comuns (número e letras) na frente dos parênteses (em evidência).
3º) Colocar dentro dos parênteses o resultado da divisão de cada fator do polinômio pelo fator que está em evidência. No caso das letras, usamos a regra da divisão de potências de mesma base.

**Exemplos**

**a)** $9x + 3y - 12z = 3(3x + y - 4z)$

**b)** $2a^2b + 3a^3c - a^4 = a^2 (2b + 3ac - a^2)$

**c)** $5xy - 15x^2 = 5x ( y - 3x)$

## Trinômio Quadrado Perfeito

Trinômios são polinômios com 3 termos.

Os trinômios quadrados perfeitos $a^2 + 2ab + b^2$ e $a^2 - 2ab + b^2$ resultam do produto notável do tipo $(a + b)^2$ e $(a - b)^2$.

$\mathbf{a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2}$ (quadrado da soma de dois termos)

$\mathbf{a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2}$ (quadrado da diferença de dois termos)

Para saber se realmente um trinômio é quadrado perfeito, fazemos o seguinte:

1º) Calcular a raiz quadrada dos termos que aparecem ao quadrado.
2º) Multiplicar os valores encontrados por 2.
3º) Comparar o valor encontrado com o termo que não apresenta quadrados. Se forem iguais, é um quadrado perfeito.

**Exemplos**

a) Fatorar o polinômio $\mathbf{x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2}$

Primeiro, temos que testar se o polinômio é quadrado perfeito.

$\sqrt{\mathbf{x^2}} = x$ e $\sqrt{\mathbf{9}} = 3$

Multiplicando por 2, encontramos: $2 \cdot 3 \cdot x = 6x$

Como o valor encontrado é igual ao termo que não está ao quadrado, o polinômio é quadrado perfeito.

Assim, a fatoração será: $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$

Fatorar o polinômio $x^2 - 8xy + 9y^2$

Testando se é trinômio quadrado perfeito: $\sqrt{x^2} = x$ e $\sqrt{9y^2} = 3y$

Fazendo a multiplicação: $2 \cdot x \cdot 3y = 6xy$

O valor encontrado não coincide com o termo do polinômio ($8xy \neq 6xy$).

Como não é um trinômio quadrado perfeito, não podemos usar esse tipo de fatoração.

**Diferença de Dois Quadrados**

Para fatorar polinômios do tipo $a^2 - b^2$ usamos o produto notável da soma pela diferença.

Assim, a fatoração de polinômios desse tipo será:

$\mathbf{a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)}$

Para fatorar, devemos calcular a raiz quadrada dos dois termos.

Depois, escrever o produto da soma dos valores encontrados pela diferença desses valores.

**Exemplo**

Fatorar o binômio $9x^2 - 25$.

Primeiro, encontrar a raiz quadrada dos termos: $\sqrt{9x^2} = 3x$ e $\sqrt{25} = 5$

Escrever esses valores como produto da soma pela diferença: $(3x + 5) \cdot (3x - 5)$

## Exercícios

**5.** Utilizando as regras dos produtos notáveis, calcule:

a. $(7a+1)(7a-1) = 49a^2 - 7a + 7a - 1^2 = 49a^2 - 1$

b. $(2+9x)^2 = (2+9x).(2+9x) = 4 + 36x + 81x^2$

c. $(6x-y)^2 = (6x-y).(6x-y) = 36x^2 - 12xy + y^2$

d. $(a^4+m^4)(a^4-m^4) = a^8 - m^8$

e. $(a^3+6y^2)^2 = a^6 + 12a^3y^2 + 36y^4$

**6.** Fatore os polinômios abaixo:

a. $10a + 10b = 10(a+b)$

b. $a^2 + 5ab = a(a+5b)$

c. $x^2 - 81 = (x+9).(x-9)$

d. $b^2 - \frac{c^2}{16} = \left(b + \frac{c}{4}\right).\left(b - \frac{c}{4}\right)$

e. $4x^2 - 12xy + 9y^2 = (2x-3y)^2$

f. $y^2 + 14y + 49 = (y+7)^2$