Matemática

Aula 10

FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Profa. Me. Alessandra Azzolini

Função Logarítmica

Uma pessoa aplicou a importância de R$ 500,00 em uma instituição bancária, que paga **juros** mensais de 3,8%, no regime de **juros compostos**. Quanto tempo após a aplicação o montante será de R$ 3 000,00?

500,00 * 1,038 * 1,038* 1,038

$500{,}00 \,.\, 1{,}038^{n} = 3000{,}00$

M = C . $(1+i)^{n}$

3000,00 = 500,00 . $1{,}038^{n}$

$$\frac{3000{,}00}{500{,}00} = 1{,}038^{n}$$

$$6 = 1{,}038^{n}$$

$$\mathbf{\log_{1,038} 6 = \frac{\mathit{log}\ 6}{\mathit{log}\ 1,038} = 48,0418\ \cong 48\ \mathit{meses}}$$

Você sabia que a escala decibel, que mede a intensidade de sons, é uma escala logarítmica na base 10?

Além disso, as funções logarítmicas permitem que sejam analisados outros fenômenos físicos em que os números adquirem valores muito grandes.

Esse recurso matemático torna esses valores menores, facilitando os cálculos e a construção de gráficos.

A função logarítmica de base **a** é definida como $f(x) = \log_a x$, com **a** real, positivo e **a** ≠ 1. A função inversa da função logarítmica é a função exponencial.
O logaritmo de um número é definido como o expoente ao qual se deve elevar a base **a** para obter o número **x**, ou seja:

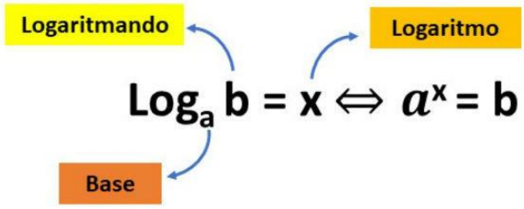


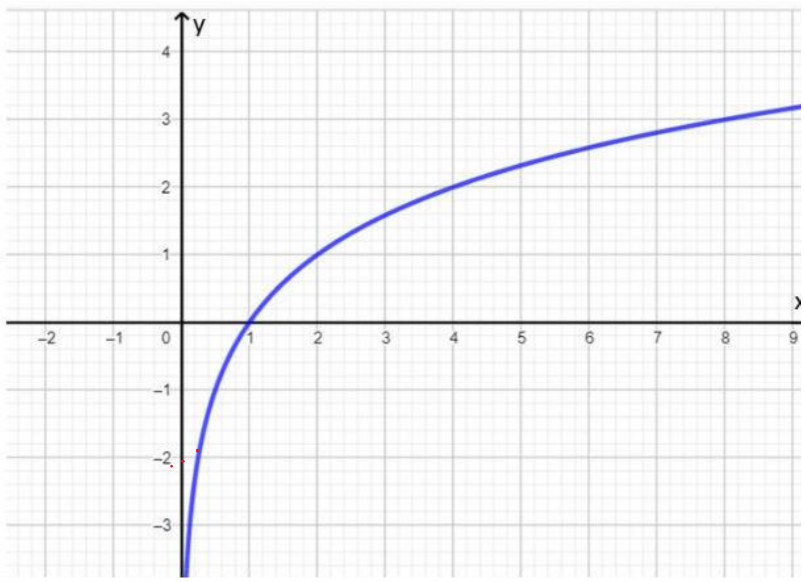
Gráfico da função logarítmica

De uma forma geral, o gráfico da função $y = \log_a x$ está localizado no I e IV quadrantes, pois a função só é definida para $x > 0$.
Além disso, a curva da função logarítmica não toca o eixo y e corta o eixo x no ponto de abscissa igual a 1, pois $y = \log_a 1 = 0$, para qualquer valor de **a**.
Abaixo, apresentamos o esboço do gráfico da função logarítmica.

Uma função logarítmica será crescente quando a base **a** for maior que 1, ou seja, x_1 2 ⇔ $\log_a x_1$ a x_2.
Por exemplo, a função $f(x) = \log_2 x$ é uma função crescente, pois a base é igual a 2.
Para verificar que essa função é crescente, atribuímos valores para x na função e calculamos a sua imagem. Os valores encontrados estão na tabela abaixo.

Observando a tabela, notamos que quando o valor de x aumenta, a sua imagem também aumenta. Abaixo, representamos o gráfico desta função.

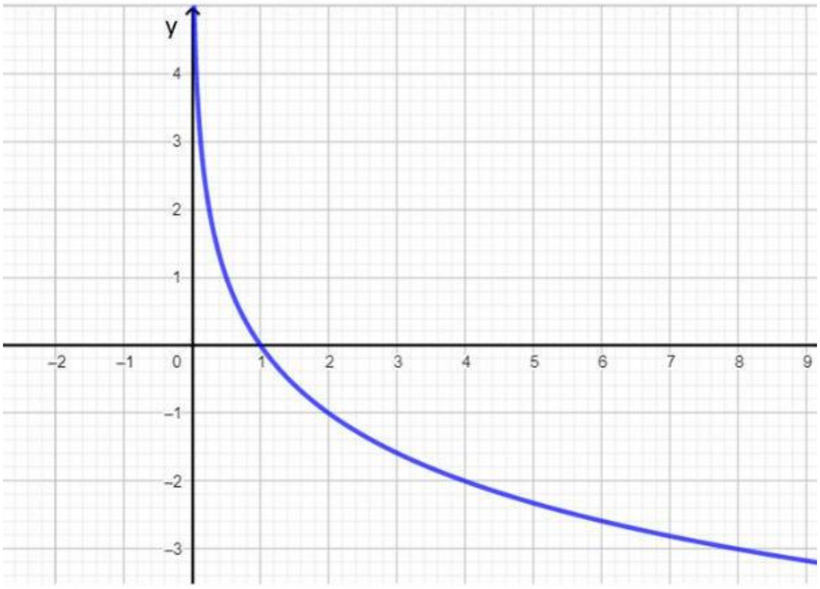
x	$y = \log_2 x$
$\frac{1}{4}$	$y = \log_2 (\frac{1}{4}) = -2$
$\frac{1}{2}$	$y = \log_2 (\frac{1}{2}) = -1$
1	$y = \log_2 1 = 0$
2	$y = \log_2 2 = 1$
4	$y = \log_2 4 = 2$



Calculamos a imagem de alguns valores de x desta função e o resultado encontra-se na tabela abaixo:

x	$y = log_{\frac{1}{2}} x$
$\frac{1}{4}$	$y = log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4}\right) = 2$
$\frac{1}{2}$	$y = log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right) = 1$
1	$y = log_{\frac{1}{2}} 1 = 0$
2	$y = log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$
4	$y = log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$

Com os valores encontrados na tabela, traçamos o gráfico dessa função. Note que quanto menor o valor de x, mais perto do zero a curva logarítmica fica, sem contudo, cortar o eixo y.



Definições

I) O logaritmo cujo o logaritmando é igual a 1 e a base é qualquer, é igual a zero:

$$\log_a 1 = 0, \text{ pois } a^0 = 1$$

II) O logaritmo cujo a base e o logaritmando são iguais é igual a um:

$$\log_a a = 1, \text{ pois } a^1 = a$$

III) A potência de base "a" e expoente $\log_a b$ é igual a b:

$$a^{\log_a b} = b$$

IV) Dois logaritmos são iguais, numa mesma base, se os logaritmandos são iguais:

$$\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$$

FMU
CENTRO UNIVERSITÁRIO

Propriedade dos logaritmos

1. Logaritmo do produto

O logaritmo do produto de dois fatores "a" e "b", em qualquer base "c", é igual à soma dos logaritmos de cada um desses fatores.

Se c > 0 e $c \neq 1$, a > 0, b > 0, então:

$$\log_c(a \cdot b) = \log_c a + \log_c b$$

Exemplo: $\log_3(9 \cdot 27) = \log_3 9 + \log_3 27 = 2 + 3 = 5$

2. Logaritmo do quociente

O logaritmo do quociente de dois fatores a e b, em qualquer base c, é igual à diferença dos logaritmos de cada um desses fatores.

Se c > 0 e $c \neq 1$, a > 0, b > 0, então:

$$\log_c\left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b$$

Exemplo: $\log_3\left(\frac{27}{9}\right) = \log_3 27 - \log_3 9 = 3 - 2 = 1$

3. Logaritmo da potência

O logaritmo de uma potência, em qualquer base c, é igual ao produto entre o expoente da potência e o logaritmo cujo logaritmando é a base da potência.

Se a > 0 e $a \neq 1$, b > 0, $c \in \mathbb{R}$, então:

$$\log_a b^c = c \cdot \log_a b$$

Exemplo: $\log_3 9^5 = 5 \cdot \log_3 9 = 5 \cdot 2 = 10$

4. Logaritmo de uma raiz

O logaritmo da raiz enésima de um número real positivo é o produto entre o inverso do índice da raiz pelo logaritmo cujo o logaritmando é o radicando:

Se a > 0 e $a \neq 1$, b > 0, $n \in \mathbb{N}^*$, então:

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \log_a b^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \log_a b$$

Exemplo: $\log_5 \sqrt[3]{25} = \frac{1}{3} \cdot \log_5 25 = \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}$

Mudança de Base

Algumas vezes, os logaritmos com bases diferentes precisam ser transformados para outra base, de forma que ela seja a mesma para ambos.

Se **a**, **b** e **c** são números reais positivos, então:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a},\ a \neq 1 \text{ e } c \neq 1$$

Exemplo: $\log_3 5$ transformado para a base 2 fica:

$$\log_3 5 = \frac{\log_2 5}{\log_2 3}$$

Se a e b são reais positivos e quisermos transformar $\log_a b$ para a base b, temos:

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a},\ a \neq 1 \text{ e } b \neq 1$$

Exemplo: $\log_3 4 = \frac{1}{\log_4 3}$

Se a e b são reais positivos, temos que:

$$\log_{a^\beta} b = \frac{1}{\beta} \cdot \log_a b,\ a \neq 1 \text{ e } \beta \neq 0$$

Exemplo: $\log_{3^5} 10 = \frac{1}{5} \cdot \log_3 10$

Exemplo

Dados log 2 = 0,301 e log 3 = 0,477, determine o log 12.

log 12 = log (2.2.3) = log2 + log2 + log 3 = 0,301 +0,301 + 0,477 = 1,079

log 12 = log(2^2.3) = log 2^2 + log 3 = 2.log2 + log 3 = 2*0,301 + 0,477 = 1,079

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad 2^2.3$$

Exercícios

1) Calcule o valor dos seguintes logaritmos:

$\boldsymbol{a)}\ \mathbf{log_{16}\, 64 = x}$ $16^x = 64$ $(4^2)^x = 4^3$ $4^{2x} = 4^3$ $2x = 3$ $x = \frac{3}{2}$ $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$	$\boldsymbol{b)}\ \mathbf{log_{625} \sqrt{5} = x}$ $625^x = \sqrt{5}$ $(5^4)^x = 5^{\frac{1}{2}}$ $5^{4x} = 5^{\frac{1}{2}}$ $4x = \frac{1}{2}$ $x = \frac{1}{2.4}$ $x = \frac{1}{8}$ $S = \left\{\frac{1}{8}\right\}$	$\boldsymbol{c)}\ \mathbf{log_{49} \sqrt[3]{7}}$ $49^x = \sqrt[3]{7}$ $(7^2)^x = 7^{\frac{1}{3}}$ $7^{2x} = 7^{\frac{1}{3}}$ $2x = \frac{1}{3}$ $x = \frac{1}{3.2}$ $x = \frac{1}{6}$ $S = \left\{\frac{1}{6}\right\}$
$\boldsymbol{d)}\ \mathbf{log_{\sqrt[5]{2}}\, 128 = x}$ $(\sqrt[5]{2})^x = 2^7$ $(\sqrt[5]{2^x}) = 2^7$ $2^{\frac{x}{5}} = 2^7$ $\frac{x}{5} = 7$ $x = 7.5$ $x = 35$ $S = \{35\}$	$\boldsymbol{e)}\ \mathbf{log_9\, 3\sqrt{3}}$ $9^x = 3\sqrt{3}$ $(3^2)^x = 3^1.3^{\frac{1}{2}}$ $3^{2x} = 3^{1+\frac{1}{2}}$ $3^{2x} = 3^{\frac{3}{2}}$ $2x = \frac{3}{2}$ $x = \frac{3}{2.2}$ $x = \frac{3}{4}$ $S = \left\{\frac{3}{4}\right\}$	$\boldsymbol{f)}\ \mathbf{log_2 \sqrt[8]{64}}$ $2^x = \sqrt[8]{64}$ $2^x = \sqrt[8]{2^6}$ $2^x = 2^{\frac{6}{8}}$ $x = \frac{6}{8}$ $x = \frac{3}{4}$ $S = \left\{\frac{3}{4}\right\}$

FMU
CENTRO UNIVERSITÁRIO

2) Calcule o valor da incógnita *"N"* em cada exercício, aplicando a equivalência fundamental:

a) $\log_5 N = 3$

b) $\log_2 N = 8$

c) $\log_2 N = -9$

d) $\log_{\sqrt{3}} N = 2$

a) $5^3 = \boldsymbol{N}$ $\boldsymbol{N = 125}$	b) $2^8 = \boldsymbol{N}$ $\boldsymbol{N = 256}$	c) $2^{-9} = \boldsymbol{N}$ $\boldsymbol{N = \frac{1}{2^9}}$ $\boldsymbol{N = \frac{1}{512}}$	d) $\sqrt{3}^2 = \boldsymbol{N}$ $\boldsymbol{N = \sqrt{3^2}}$ $\boldsymbol{N = 3}$

3) Calcule o valor da incógnita *"a"* em cada exercício, aplicando a equivalência fundamental:

a) $\log_a 81 = 4$

b) $\log_a 1024 = 20$

c) $\log_a 10 = 2$

d) $\log_{9a} \sqrt{27} = \frac{1}{2}$

a) $a^4 = 81$ $\boldsymbol{a = \sqrt[4]{81}}$ $\boldsymbol{a = 3}$	$b)\ a^{20} = 1024$ $\boldsymbol{a = \sqrt[20]{1024}}$ $\boldsymbol{a = \sqrt[20:10]{2^{10:10}}}$ $\boldsymbol{a = \sqrt[2]{2^1}}$ $\boldsymbol{a = \sqrt{2}}$	$c)\ a^2 = 10$ $\boldsymbol{a = \sqrt{10}}$	$d)\ (9a)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{27}$ $\boldsymbol{\sqrt{9a} = \sqrt{27}}$ $\boldsymbol{(\sqrt{9a})^2 = (\sqrt{27})^2}$ $\boldsymbol{9a = 27}$ $\boldsymbol{a = \frac{27}{9}}$ $\boldsymbol{a = 3}$

4) Determine o logaritmo decimal de 18 sabendo que o log 2 = 0,30 e o log 3 = 0,48

log 18 = log (2.3^2) = log 2 + log 3^2 = log2 + 2log3 = 0,30 + 2. 0,48 = 0,30 + 0,96 = 1,26

5) (UFRGS – 2014) - Atribuindo para log2 o valor 0,3, então os valores de log 0,2 e log 20 são, respectivamente,

(a) - 0,7 e 3 .

(b) - 0,7 e 1,3.

(c) 0,3 e 1,3.

(d) 0,7 e 2,3.

(e) 0,7 e 3.

log 0,2= log (2/10) = log 2 – log 10 = 0,3 – 1= - 0,7

log 20 = log(2.10) = log 2 + log 10 = 0,3 + 1 = 1,3

6) Resolva a equação logarítmica $\mathbf{\log_{x+3}(5x-1) = 1}$.

$(x+3)^1=(5x-1)$

$x+3 = 5x-1$

$x - 5x = -1 -3$

$- 4x = -4$

$x =-4/-4$

$x =1$

7) (Fuvest) Se $x = log_4 7 \; e \; y = log_{16} 49 \, , então \; x - y$ é $igual \; a$:

(a) $\log_4 7$
(b) $\log 7$
(c) 1
(d) 2
(e) 0

$$log_{16} 49 = \frac{log_4 49}{log_4 16} = \frac{log_4 7^2}{2} = \frac{2. log_4 7}{2} = log_4 7$$

$y = x$

$x - y = 0$

8) (Vunesp) $Se \; log_3 a = x, então \; log_9 a^2$ é $igual \; a$:

(a) $2x^2$
(b) x^2
(c) $x+2$
(d) $2x$
(e) x

$$log_9 a^2 = 2log_9 a = 2.\frac{log_3 a}{log_3 9} = 2.\frac{log_3 a}{2} = \frac{2x}{2} = x$$