Capítulo 6

Análise de funções discretas: A transformada discreta de Fourier

6.1. Introdução

Neste capítulo iniciamos a análise de sistemas elétricos em que as correntes e tensões elétricas não são funções contínuas. Assim, nesse tipo de sistemas elétricos as correntes e tensões são discretas. Esse tipo de problemas aparecem em disciplinas tais como processamento de sinais, sistemas de comunicação, sistemas de controle, entre outros.

Neste capítulo mudamos um pouco a terminologia usada e, assim aparecem os conceitos de sinais e sistemas. Um sinal é uma função de uma ou mais variáveis que representa informação relacionada sobre a natureza de um fenômeno físico. Exemplos típicos de fenômenos representáveis através de sinais são, por exemplo, uma fala, uma imagem, um batimento cardiaco, etc. Logicamente, uma corrente elétrica de um circuito elétrico é também um sinal. Um sistema é uma identidade que manipula um ou mais sinais para realizar uma função específica e, portanto, produzindo novos sinais como resposta. Assim, um sistema tem um sinal de entrada que é interpretada pelo sistema e o sistema repassa uma resposta como sinal de saída. Por exemplo, em um sistema de comunicação, o sinal de entrada pode ser um sinal de fala ou dados de um computador e o sinal de saída pode ser uma estimativa do sinal da mensagem original. Nesse caso o sistema está representado por um transmissor, um canal de comunicação e um receptor. Lógicamente, um circuito elétrico formado por bipolos simples também representa um sistema em que, por exemplo, o sinal de entrada pode ser a tensão em um bipolo e o sinal de saída pode ser a corrente elétrica de um outro bipolo do circuito elétrico. A figura 1 mostra de forma esquemática um sistema com os sinais de entrada e saída.

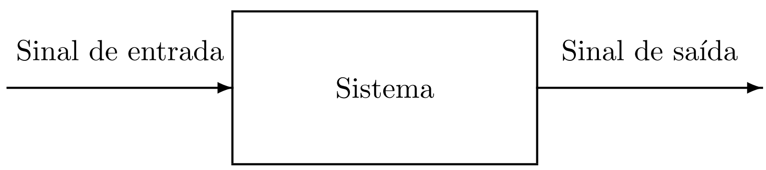

Figura 1: Diagrama de blocos de um sistema

6.2. Definição de tópicos básicos de sinais discretos

Analisamos as características de um sinal unidimenional que varia com o tempo. Assim, esse tipo de sinal é uma função matemática que depende da variável independente tempo. Nesse contexto, embora o tempo sea uma variável real, o sinal pode assumir um valor real ou um valor complexo. Os sinais podem ser classificados em cinco tipos que são apresentados a seguir.

6.2.1. Sinal de tempo contínuo e tempo discreto

Deve-se observar novamente que neste capítulo usamos a terminologia de sinal mas devemos lembrar que o sinal é apenas um tipo de função matemática com domínio conhecido. Um sinal $x(t)$ é um sinal de tempo contínuo se essa função está definida para todo valor de t no domínio da função. Assim, uma corrente elétrica senoidal pode ser considerado um sinal de tempo contínuo.

Um sinal de tempo discreto é definido apenas em instantes isolados de tempo. Nesse caso, a variável independente tempo varia de forma discreta e geralmente espaçada de forma uniforme. Um sinal discreto é obtido, por exemplo, quando se faz amostragem a uma taxa uniforme de um sinal contínuo. Nesse caso, a amostragem consiste em capturar o valor da função $x(t)$ apenas a intervalos de tempo uniformemente distribuídos. A figura 2 mostra um sinal discreto obtido de um sinal contínuo mostrada na mesma figura.

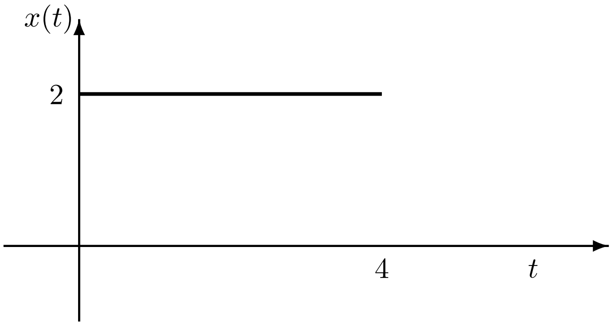

Figura 2(a): Sinal contínuo

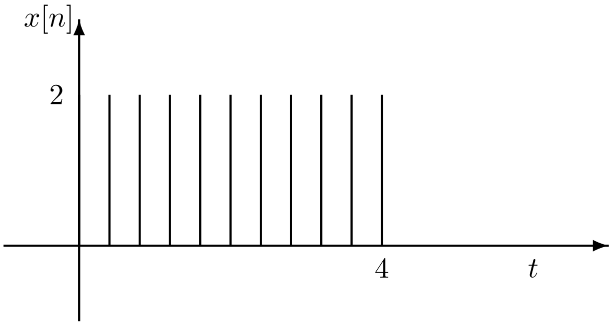

Figura 2(b): Sinal discreto

Supor que um sinal discreto é obtido da amostragem de um sinal contínuo. Seja P o período de amostragem (intervalo de tempo em que é tomada uma amostra) e n um número inteiro. Nesse contexto, a amostragem de um sinal de tempo contínuo $x(t)$ no instante $t = nP$ produz uma amostra de valor $x(nP)$ e o conjunto dessas amostras representam um sinal de tempo discreto. Assim, o sinal de tempo discreto, obtido após amostragem, assume a seguinte forma:

$$x[n] = x(nP); \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{6.1}$$

Em outras palavras, um sinal de tempo discreto é representado pelos números da sequência $\ldots, x[-2], x[-1], x[0], x[1], x[2], \ldots$. Esse tipo de sequência de números é chamada de sequência temporal e representada na forma $\{x[n], n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ o, de forma mais simples, $x[n]$. Portanto, no restante deste capítulo, a notação $x[n]$ representa um sinal de tempo discreto, isto é, uma função matemática cujo domínio assume valores discretos uniformemente distribuídos e o valor da função em cada ponto do domínio é um número real (ou complexo). Também t é usado para indicar a variável independente tempo de um sinal de tempo contínuo e n para indicar o tempo de um sinal de tempo discreto. Finalmente a notação (.) é usado para sinais de tempo contínuo tal como $x(t)$ e [.] é usado para sinais de tempo discreto tal como $x[n]$. Em resumo, um sinal de tempo discreto é representada pela notação $x[n]$.

6.2.2. Sinais pares e impares

O conceito de funções pares e impares já foi desenvolvido na disciplina. Assim, um sinal de tempo contínuo $x(t)$ é um sinal par se $x(-t) = x(t)$ e, obviamente, desde que para todo t do domíno da função então $-t$ também deve fazer parte do domínio da função. Também, o sinal $x(t)$ é um sinal impar se $x(-t) = -x(t)$. A informação nova neste caso é que esse conceito pode ser usado também para sinais de tempo discreto. Portanto, um sinal de tempo discreto é par se $x[-n] = x[n]$ e é impar se $x[-n] = -x[n]$.

6.2.3. Sinais periódicos e não periódicos

O conceito de funções periódicas e não periódicas (aperiódicas) também já foi desenvolvido na disciplina. Assim, um sinal de tempo contínuo $x(t)$ é periódico se satisfaz a seguinte relação:

$$x(t) = x(t + T) \tag{6.2}$$

sempre que para todo t do domínio da função então $t + T$ também deve fazer parte do domínio da função. Sabemos também que T é o período fundamental de $x(t)$. Também sabemos que associado com T definimos a chamada frequência angular ω na forma $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Se não existe um valor de T do domínio de $x(t)$ que cumpra com a exigência da equação (6.2) então o sinal $x(t)$ é chamado de sinal aperiódico ou não periódico.

Para o caso de sinais de tempo discreto dizemos que um sinal $x[n]$ é periódico se satisfaz a seguinte relação:

$$x[n] = x[n + N] \tag{6.3}$$

para todos os números inteiros n e N é um número inteiro positivo e o menor valor de N que cumpre com a relação (6.3) é chamado de período fundamental do sinal de tempo discreto $x[n]$. A correspondente frequência angular de $x[n]$ é definida pela relação:

$$\Omega = \frac{2\pi}{N} \tag{6.4}$$

em que a frequência angular Ω é medida em radianos. É muito importante observar que o período fundamental T de um sinal de tempo contínuo pode assumir qualquer valor real positivo. Por outro lado, o período fundamental N de um sinal de tempo discreto pode assumir apenas valores inteiros positivos. A figura 3 mostra um sinal de tempo discreto periódico e a figura 4 mostra um sinal de tempo discreto aperiódico com apenas três amostras diferentes de zero.

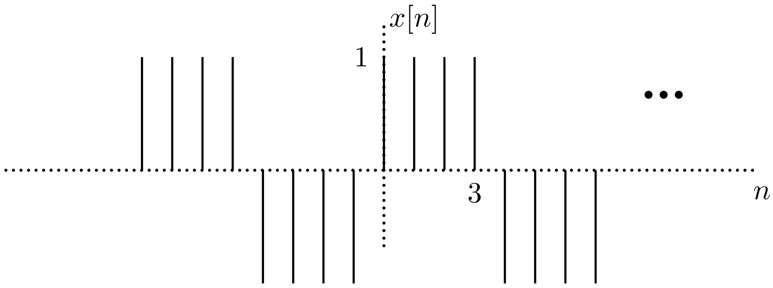

Figura 3: Sinal quadrada periódica de tempo discreto alternando entre -1 e + 1

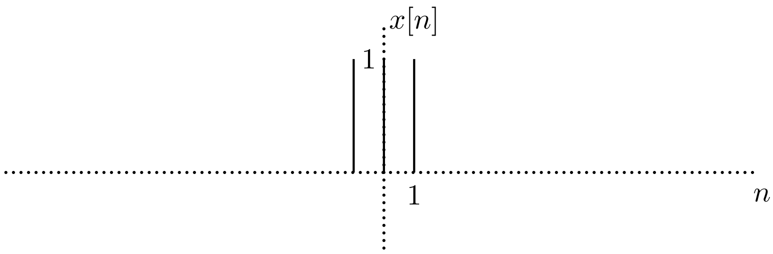

Figura 4: Sinal de tempo discreto aperiódico com apenas 3 amostras diferentes de zero.

6.2.4. Sinais determinísticas e aleatórias

Um sinal determinístico é um tipo de sinal sobre o qual no existe incerteza sobre o valor desse sinal em qualquer instante de tempo. Assim, um sinal determinístico é completamente modelada como uma função do tempo. Por outro lado, um sinal aleatório é um tipo de sinal na qual existe incerteza antes de sua ocorrência real. Por exemplo, o ruído gerado no amplificador de um receptor de rádio é um exemplo de sinal aleatório.

6.2.5. Sinais de energia e sinais de potência

Em sistemas elétricos um sinal pode representar uma tensão ou uma corrente em um bipolo como, por exemplo, um resistor. Assim, seja $v(t)$ a tensão nos extremos de um resistor R em que passa uma corrente elétrica $i(t)$. Nesse contexto, a potência instantânea dissipada pelo resistor assume a seguinte forma:

$$p(t) = \frac{v^2(t)}{R} = Ri^2(t) \tag{6.5}$$

Na relação anterior, se $R = 1$ então a potência instantânea assume uma forma quadrática da corrente ou da tensão. Por esse motivo, na análise de sinais a potência é definida em termos de um resistor de 1 ohm e, nesse contexto, a variávle $x(t)$ pode representar corrente elétrica ou tensão elétrica. Assim, a potência instantânea de um sinal $x(t)$ (representando corrente ou tensão elétrica) assume a seguinte forma:

$$p(t) = x^2(t) \tag{6.6}$$

Usando a relação anterior, a energia total de um sinal de tempo contínuo $x(t)$ assume a seguinte forma:

$$E = \lim_{T \to \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt \tag{6.7}$$

Da mesma forma podemos definir a potência média a partir da potência instantânea da seguinte forma:

$$P = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)dt \tag{6.8}$$

Para um sinal periódico a relação anterior da potência média assume a seguinte forma:

$$P = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)dt \tag{6.9}$$

Para um sinal de tempo discreto $x[n]$, as integrais nas equações (6.7) e (6.8) devem ser substituídas pelas somas correspondentes. Assim, a energia total de $x[n]$ assume a seguinte forma:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] \tag{6.10}$$

Da mesma forma a potência média do sinal de tempo discreto $x[n]$ assume a seguinte forma:

$$P = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N} \sum_{n=-N}^{N} x^2[n] \tag{6.11}$$

Para um sinal periódico de tempo discreto a relação anterior assume a seguinte forma:

$$P = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^2[n] \tag{6.12}$$

Exemplo 1: Encontrar a potência média da onda triangular periódica mostrada na figura 5.

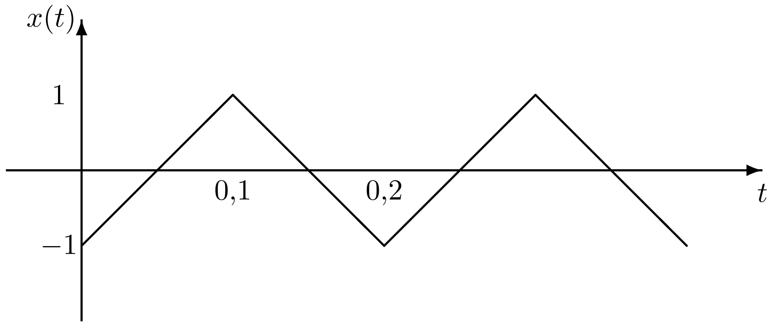

Figura 5: Sinal periódico triangular com $T = 0{,}2$s

O sinal periódico triangular contínuo mostrado na figura 5 pode ser representado da seguinte forma:

$$x(t) = \begin{cases} 20t - 1 & 0 \leq t \leq 0{,}1 \\ \\ -20t + 3 & 0{,}1 \leq t \leq 0{,}2 \end{cases} \qquad\qquad x(t) = x(t+T) = x(t+0{,}2)$$

A potência média assume a seguinte forma:

$$P = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt = \frac{1}{0{,}2}\left[\int_0^{0{,}1}(20t-1)^2dt + \int_{0{,}1}^{0{,}2}(-20t+3)^2dt\right]$$

$$P = \frac{1}{0{,}2}\left[\int_0^{0{,}1}[400t^2 - 40t + 1]dt + \int_{0{,}1}^{0{,}2}[400t^2 - 120t + 9]dt\right]$$

$$P = \frac{1}{0{,}2}\left\{\left[\frac{400}{3}t^3 - 20t^2 + t\right]_0^{0{,}1} + \left[\frac{400}{3}t^3 - 60t^2 + 9t\right]_{0{,}1}^{0{,}2}\right\} = \frac{1}{0{,}2}\left[\frac{0{,}1}{3} + \frac{0{,}1}{3}\right] = \frac{1}{3}$$

O leitor atento pode observar que o mesmo resultado pode ser obtido encontrando as seguintes integrais:

$$P = \frac{2}{T}\int_0^{0{,}1}(20t-1)^2dt \qquad \text{ou} \qquad P = \frac{4}{T}\int_0^{0{,}05}(20t-1)^2dt$$

usando as propriedades de simetria e para o valor de $T = 0{,}2$.

Exemplo 2: Encontrar a energia total do sinal aperiódico de tempo discreto mostrado na figura 4.

A energia total do sinal de tempo discreto mostrado na figura 4 pode ser obtida facilmente da seguinte forma:

$$E = \sum_{-\infty}^{\infty} x^2[n] = \sum_{n=-1}^{n=1} x^2[n] = 1 + 1 + 1 = 3$$

Exemplo 3: Encontrar a potência média do sinal periódico de tempo discreto mostrado na figura 3.

A potência média do sinal periódico de tempo discreto mostrado na figura 3 pode ser obtida facilmente da seguinte forma:

$$P = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x^2[n] = \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{7} x^2[n] = 4(1)^2 + 4(-1)^2 = \frac{1}{8}[8] = 1$$

6.3. Operações básicas em sinais

Nesta seção mostramos algumas operações básicas em sinais. Os sistemas são usados para processar e manipular sinais. Existem operações executadas nas variáveis dependentes e operações realizadas nas variáveis independentes. Fazemos um resumo das principais operações desse tipo.

6.3.1. Operações executadas nas variáveis dependentes

As principais operações realizadas nas variáveis dependentes são as seguintes:

1. **Mudança de escala de amplitude:**

   Seja $x(t)$ um sinal de tempo contínuo. Assim, o sinal $y(t)$ resultante da mudança de escala de amplitude aplicada a $x(t)$ assume a seguinte forma:

   $$y(t) = c\, x(t) \tag{6.13}$$

   em que c é um escalar chamado de fator de mudança de escala. Por exemplo, um resistor executa uma mudança de escala de amplitude quando $x(t)$ é uma corrente, c é a resistência do resistor e $y(t)$ é a tensão de saída.

   De maneira semelhante, para um sinal de tempo discreto temos o seguinte:

   $$y[n] = c\, x[n] \tag{6.14}$$

2. **Adição:**

   Sejam $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sinais de tempo contínuo. Nesse contexto, o sinal obtido pela adição dos dois sinais assume a seguinte forma:

   $$y(t) = x_1(t) + x_2(t) \tag{6.15}$$

   De maneira semelhante, para dois sinais de tempo discreto $x_1[n]$ e $x_2[n]$ temos o seguinte:

   $$y[n] = x_1[n] + x_2[n] \tag{6.16}$$

3. **Multiplicação:**

   Sejam $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sinais de tempo contínuo. Nesse contexto, o sinal obtido pela multiplicação dos dois sinais assume a seguinte forma:

   $$y(t) = x_1(t)x_2(t) \tag{6.17}$$

   De maneira semelhante, para dois sinais de tempo discreto $x_1[n]$ e $x_2[n]$ temos o seguinte:

   $$y[n] = x_1[n]x_2[n] \tag{6.18}$$

6.3.2. Operações executadas nas variáveis independentes

As principais operações realizadas na variável independente são as seguintes:

1. **Mudança de escala de tempo:**

   Seja $x(t)$ um sinal de tempo contínuo. Assim, o sinal $y(t)$ resultante da mudança de escala da variável independente tempo assume a seguinte forma:

   $$y(t) = x(at) \tag{6.19}$$

Se $a > 1$ então $y(t)$ é uma versão comprimida de $x(t)$ e se $0 < a < 1$ então $y(t)$ é uma versão estendida de $x(t)$. A figura 6 mostra esse tipo de operação de mudança de escala de tempo para uma função $x(t)$.

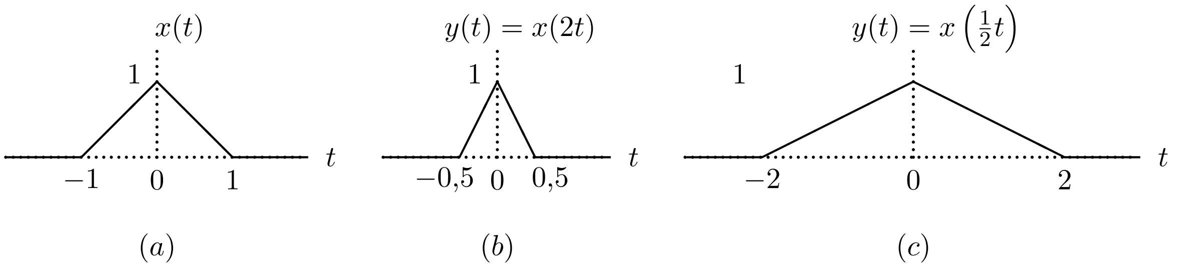

Figura 6: Sinal de tempo contínuo $x(t)$ original (a) e na versão comprimida (b) e expandida(c).

De maneira semelhante, para um sinal de tempo discreto $x[n]$ temos o seguinte:

$$y[n] = x[kn]; \qquad k > 0 \tag{6.20}$$

que é definido apenas para valores inteiros de k. Nesse caso, se $k > 1$ então alguns valores do sinal de tempo discreto $y[n]$ podem ser perdidos. A figura 7 mostra um caso de perda de informação para o caso em que $k = 2$.

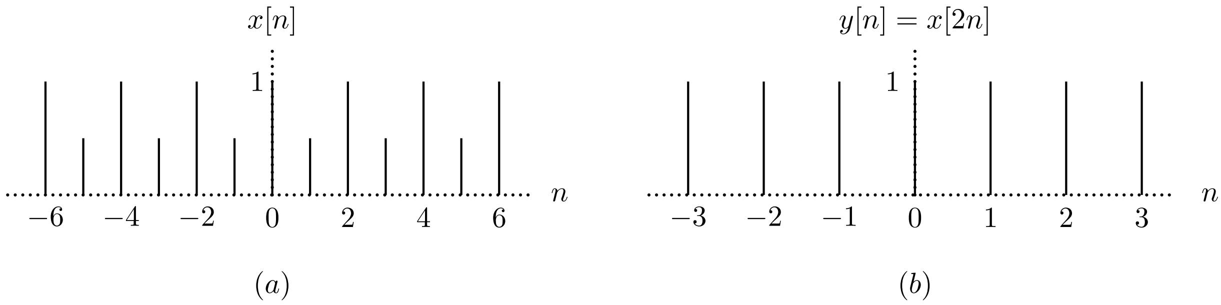

Figura 7: Sinal de tempo discreto: (a) sinal original $x[n]$ e, (b) na versão comprimida por um fator de 2.

Na figura 7 verificamos que os sinais presentes em $x[n]$ para valores impares de n desaparecem na versão comprimida $y[n]$ (lembremos que os sinais discretos existem apenas para valores inteiros de n).

2. **Deslocamento no tempo:**

Seja $x(t)$ um sinal de tempo contínuo. Nesse contexto, a versão de $x(t)$ deslocada no tempo assume a seguinte forma:

$$y(t) = x(t - t_o) \tag{6.21}$$

sendo t_o o deslocamento de tempo. Se $t_o > 0$ então o sinal é deslocado para a direita em relação ao eixo de tempo. Por outro lado se $t_o < 0$ o sinal é deslocado para a esquerda. A figura 8 mostra um sinal de pulso retangular deslocado para a direita.

Para um sinal de tempo discreto $x[n]$, o deslocamento no tempo assume a seguinte forma:

$$y[n] = x[n - m] \tag{6.22}$$

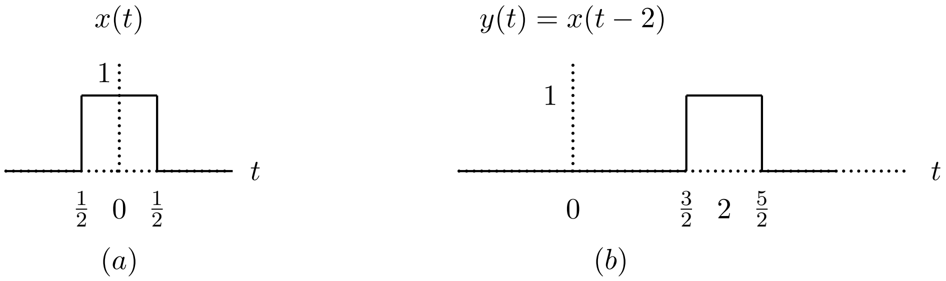

Figura 8: (a) Pulso retangular $x(t)$ e (b) o pulso deslocado em $t_o = 2$.

em que o deslocamento m deve ser um número inteiro (negativo ou positivo).

Exemplo 4: O sinal de tempo discreto $x[n]$ é definido da seguinte forma:

$$x[n] = \begin{cases} 1 & n = 1, 2 \\ -1 & n = -1, -2 \\ 0 & \text{para outros valores de } n \end{cases}$$

Encontre o sinal $y[n] = x[n+3]$.

Neste caso existem apenas quatro amostras diferentes de zero e essas amostras devem ser deslocadas 3 unidades para a esquerda. Assim, $y[n]$ assume a seguinte forma:

$$y[n] = \begin{cases} 1 & n = -1, -2 \\ -1 & n = -4, -5 \\ 0 & n = -3; n < -5 \quad \text{e} \quad n > -1 \end{cases}$$

A figura 9 mostra o deslocamento no tempo do sinal discreto $x[n]$.

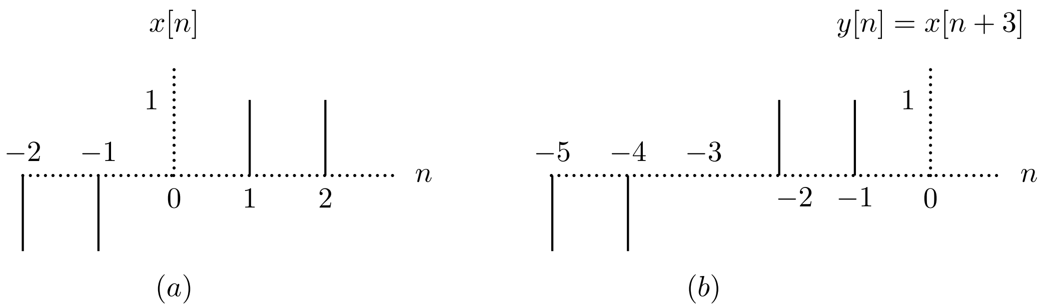

Figura 9: (a) sinal de tempo discreto $x[n]$ e (b) y[n] = x[n + 3].

3. **Regra de precedência para deslocamento no tempo e mudança de escala de tempo:**
   Um caso muito especial acontece quando o sinal de tempo contínuo $y(t)$ é obtido a partir do sinal $x(t)$ através de uma combinação de deslocamento no tempo e mudança de escala de tempo. Nesse caso esse processo de transformação assume a seguinte forma:

$$y(t) = x(at - b) \tag{6.23}$$

Para obter esse tipo de transformação de forma adequada primeiro deve ser realizada a operação de deslocamento no tempo e depois a operação de mudança de escala de tempo. Asssim, após a operação de deslocamento no tempo do sinal $x(t)$ encontramos um sinal intermediário $v(t)$:

$$v(t) = x(t - b)$$

Portanto o deslocamento no tempo substitui t por $t - b$ em $x(t)$. Depois a operação de mudança de escala de tempo subtitui t por at em $v(t)$ encontrandose a saída desejada:

$$y(t) = v(at) = x(at - b)$$

Exemplo 5: Seja o sinal $x(t)$ mostrado na figura 10(a). A partir de $x(t)$ encontre o sinal $y(t) = x(2t{+}3)$.

A transformação é mostrada na figura 10 (b) e (c). Em (b) fazemos inicialmente o deslocamento de 3 unidades para a esquerda e em (c) fazemos a operação de compressão.

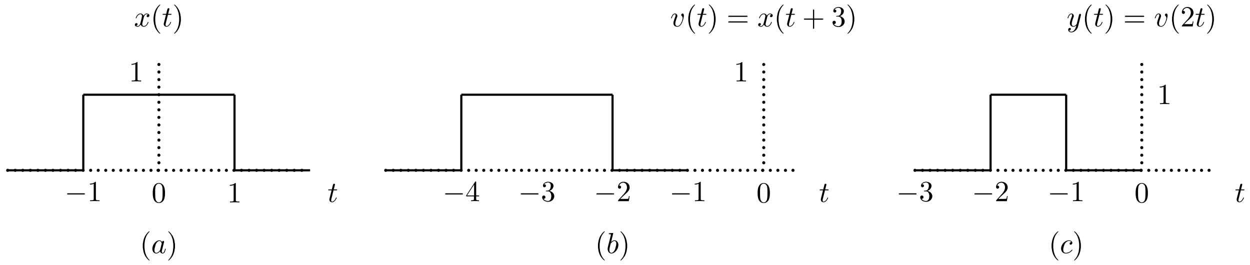

Figura 10: (a) sinal $x(t)$; (b) sinal deslocado no tempo e; (c) sinal com mudança de escala no tempo.

Para sinais de tempo discreto as regras de transformação são parecidas. Assim, para o sinal de tempo discreto $y[n]$, a combinação de deslocamento no tempo e mudança de escala de tempo assume a seguinte forma:

$$y[n] = x[an - b] \tag{6.24}$$

Exemplo 6: Um sinal de tempo discreto $x[n]$ assume a seguinte forma:

$$x[n] = \begin{cases} 1 & n = 1, 2 \\ -1 & n = -1, -2 \\ 0 & \text{para outros valores de } n \end{cases}$$

Encontre o sinal $y[n] = x[2n + 3]$.

O sinal intermediário mostrado na figura 11 (b) é otido deslocando $x[n]$ em 3 unidades para a esquerda e produzindo o sinal $v[n]$. Finalmente $y[n]$ é obtido fazendo uma mudança de escala de tempo em $v[n]$. Deve-se observar que na passagem de $v[n]$ para $y[n]$, que é um processo de compressão, foram perdidas duas amostras (os amostras para $n = 5$ e $n = 3$ já que os valores de n podem ser apenas inteiros). Assim, $y[n]$ mostrada na figura 11 (c) assume a seguinte forma:

$$y[n] = \begin{cases} -1 & n = -2 \\ 1 & n = -1 \\ 0 & \text{para outros valores de } n \end{cases}$$

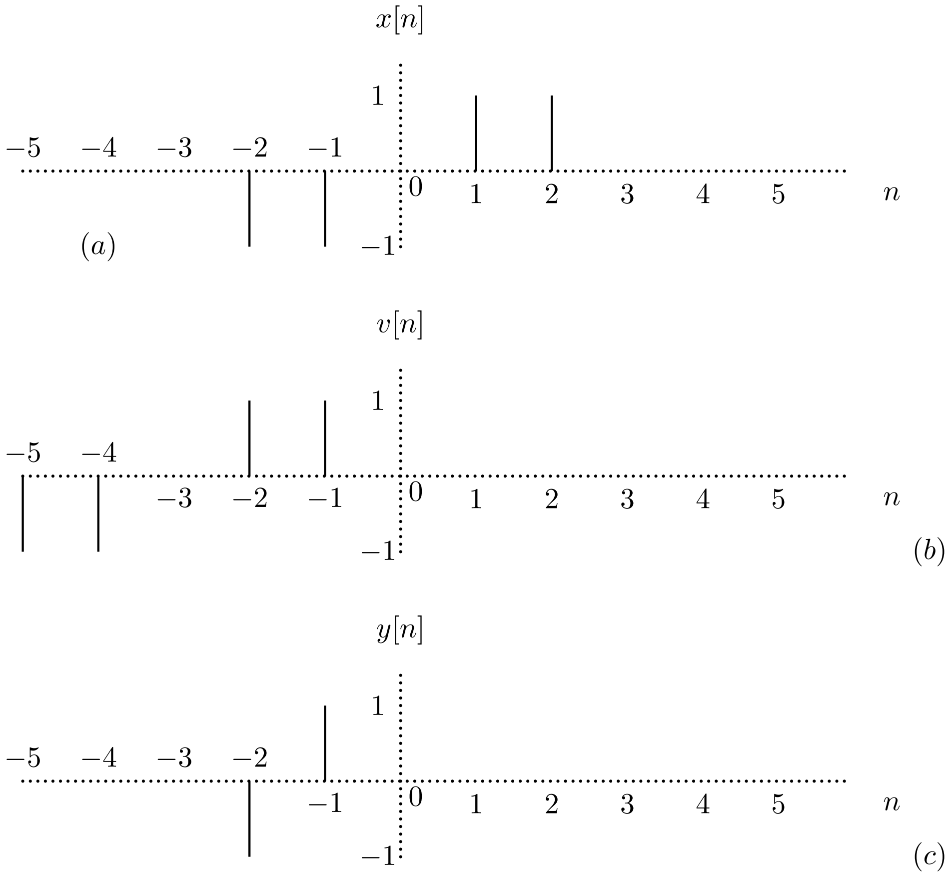

Figura 11: (a) sinal de tempo discreto $x[n]$; (b) com deslocamento e (c) com deslocamento e compressão.

Exemplo 7: Um sinal de tempo discreto $x[n]$ assume a seguinte forma:

$$x[n] = \begin{cases} 1 & -2 \leq n \leq 2 \\ 0 & \text{para outros valores de } n \end{cases}$$

Encontre o sinal $y[n] = x[3n - 2]$.

O sinal intermediário mostrado na figura 12 (b) é otido deslocando $x[n]$ em unidades para a direita e produzindo o sinal $v[n]$. Finalmente $y[n]$ é obtido fazendo uma mudança de escala de tempo em $v[n]$. Deve-se observar que na passagem de $v[n]$ para $y[n]$, que é um processo de compressão, foram perdidas três amostras (os amostras para $n = 1$, $n = 2$ e $n = 4$ já que os valores de n podem ser apenas inteiros).

Portanto, $y[n]$ mostrado na figura 12 (c) assume a seguinte forma:

$$y[n] = \begin{cases} 1 & n = 0, 1 \\ \\ 0 & \text{para outros valores de } n \end{cases}$$

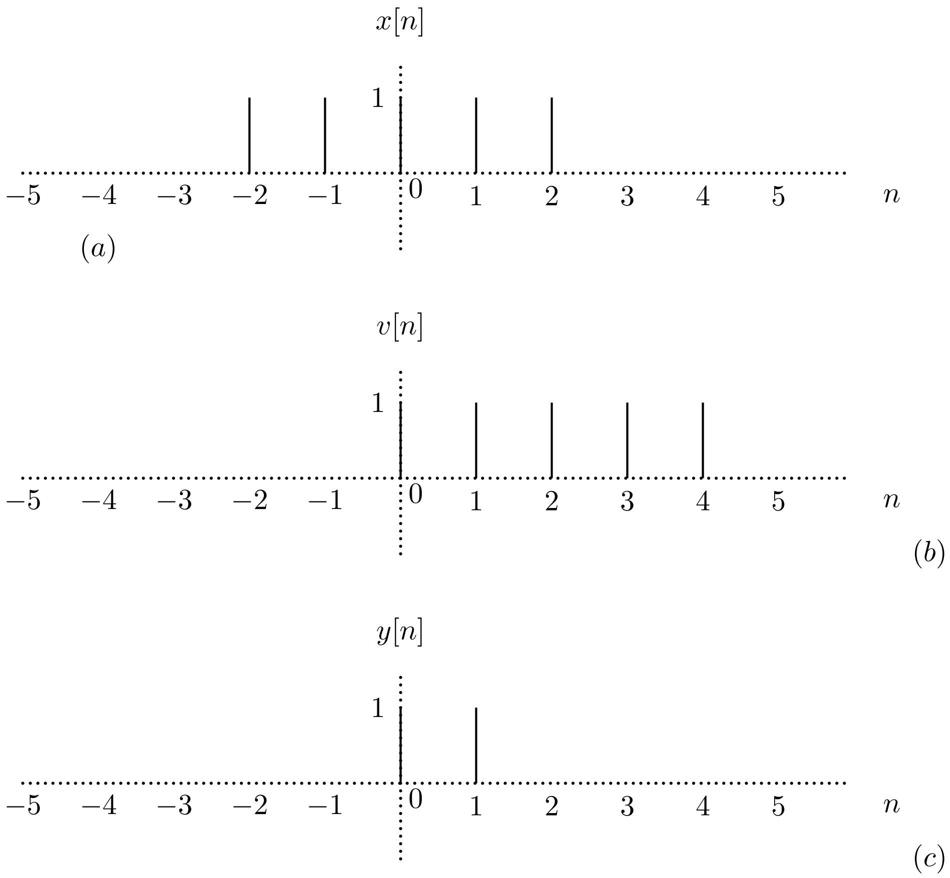

Figura 12: (a) sinal de tempo discreto $x[n]$; (b) com deslocamento e (c) com deslocamento e compressão.

6.4. A Transformada de Fourier de Tempo Discreto - DTFT

A transformada discreta de Fourier é usada quando pretendemos analisar sinais não periódicos e de tempo discreto.

A transformada de Fourier (DTFT) do sinal $x[n]$ assume a seguinte forma:

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} \tag{6.25}$$

Por outro lado, a transformada discreta de Fourier inversa assume a seguinte forma:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}d\Omega \tag{6.26}$$

As relações (6.25) e (6.26) foram deduzidos supondo que $x[n]$ é aperiódica (sinal com duração finita). As relações anteriores podem ser aplicadas a sinais de duração infinita mas, nesse caso, devemos analisar as condições de contorno para convergência da mesma forma como foi realizado ao analisar as relações da transformada de Fourier.

Observação:

Muitos sinais encontrados em engenharia elétrica satisfazem as condições adicionais de convergência mencionadas anteriormente. Entretanto, existem sinais não periódicas como o degrau unitário $u[n]$ que não cumpre essas condições adicionais. Nesse caso podemos definir um par de transformadas que se comportam como uma transformada discreta de Fourier ao incluir impulsos na transformada. Assim, podemos usar essas relações de transformadas para resolver problemas mesmo que a equivalença não seja estritamente verdadeira.

Exemplo 8: Sinal de sequência exponencial:

Encontre a transformada discreta de Fourier (DTFT) do sinal $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

A figura 13 mostra esse tipo de sinal. Usando a relação (6.25) temos o seguinte:

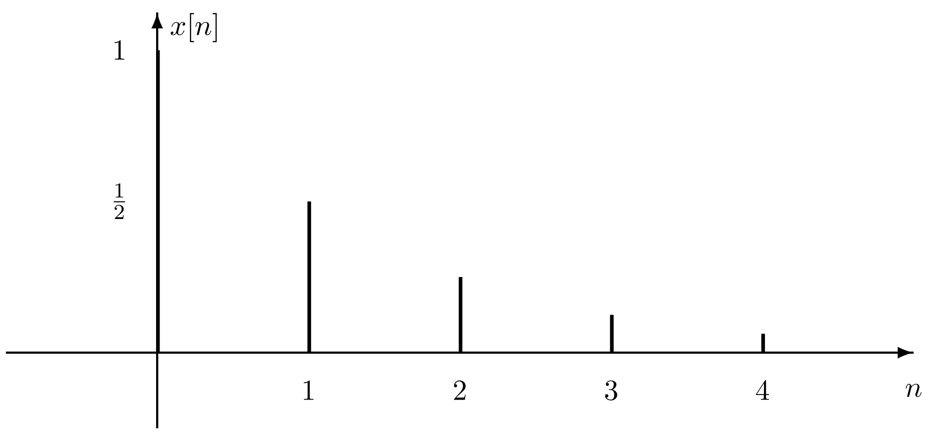

Figura 13: Sinal de tempo discreto do exemplo 8

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-j\Omega n}$$

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right]^n$$

que podemos facilmente identificar como sendo uma série geométrica da seguinte forma:

$$X(e^{j\Omega}) = 1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega} + \frac{1}{4}e^{-j2\Omega} + \frac{1}{8}e^{-j3\Omega} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-j\Omega n} + \ldots$$

Multiplicando a relação anterior por $2e^{j\Omega}$ temos o seguinte:

$$2e^{j\Omega}X(e^{j\Omega}) = 2e^{j\Omega} + 1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega} + \frac{1}{4}e^{-j2\Omega} + \ldots$$

$$2e^{j\Omega}X(e^{j\Omega}) = 2e^{j\Omega} + X(e^{j\Omega})$$

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{2e^{j\Omega}}{2e^{j\Omega} - 1} \Longrightarrow X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

Para encontrar uma relação matemática de $X(e^{j\Omega})$ podemos também usar a soma da série geométrica qua já conhecemos. Assim, sabemos que a série geométrica $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots$ tem a seguinte soma:

$$S = \frac{a}{1 - r}$$

Podemos verificar facilmente que $X(e^{j\Omega})$ é uma série geométrica com $a = 1$ e $r = \frac{1}{2}e^{-j\Omega}$. Assim, encontramos facilmente a seguinte relação:

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

É muito comum também encontrar o módulo e a fase da solução $X(e^{j\Omega})$. Assim, fazemos o seguinte:

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}Cos\Omega) + j\frac{1}{2}Sen\Omega} = \left[\frac{1}{(1 - \frac{1}{2}Cos\Omega) + j\frac{1}{2}Sen\Omega}\right] \frac{(1 - \frac{1}{2}Cos\Omega) - j\frac{1}{2}Sen\Omega}{(1 - \frac{1}{2}Cos\Omega) - j\frac{1}{2}Sen\Omega}$$

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}Cos\Omega)^2 + (\frac{1}{2}Sen\Omega)^2}[(1 - \frac{1}{2}Cos\Omega) - j\frac{1}{2}Sen\Omega]$$

Portanto, o módulo de $X(e^{j\Omega})$ é seguinte:

$$|X(e^{j\Omega})| = \frac{\sqrt{(1-\frac{1}{2}Cos\Omega)^2 + (\frac{1}{2}Sen\Omega)^2}}{(1-\frac{1}{2}Cos\Omega)^2 + (\frac{1}{2}Sen\Omega)^2} \Longrightarrow |X(e^{j\Omega})| = \frac{1}{\sqrt{(1-\frac{1}{2}Cos\Omega)^2 + (\frac{1}{2}Sen\Omega)^2}}$$

mas o denominador pode se simplificado na seguinte forma:

$$(1-\frac{1}{2}Cos\Omega)^2 + (\frac{1}{2}Sen\Omega)^2 = 1 - Cos\Omega + \frac{1}{4}Cos^2\Omega + \frac{1}{4}Sen^2\Omega = \frac{5}{4} - Cos\Omega$$

Assim, $|X(e^{j\Omega})|$ assume a seguinte forma:

$$|X(e^{j\Omega})| = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4} - Cos\Omega}}$$

Por outro lado, a fase de $X(e^{j\Omega})$ assume a seguinte forma:

$$arg(X(e^{j\Omega})) = arc\ tg\left[\frac{-\frac{1}{2}Sen\Omega}{1-\frac{1}{2}Cos\Omega}\right] \Longrightarrow arg(X(e^{j\Omega})) = -arc\ tg\left[\frac{\frac{1}{2}Sen\Omega}{1-\frac{1}{2}Cos\Omega}\right]$$

A figura 14 mostra os gráficos de do módulo e a fase de $X(e^{j\Omega})$.

(a) Módulo de $X(e^{j\Omega})$

(b) Fase de $X(e^{j\Omega})$

Figura 14: Transformada discreta de Fourier do exemplo 8

Exemplo 9: Sinal discreto e aperiódico:

Encontre a transformada discreta de Fourier (DTFT) do sinal $x[n] = 2(3)^n u[-n]$

A figura 15 mostra esse tipo de sinal. Usando a relação (6.25) temos o seguinte:

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2(3)^n u[-n]e^{-j\Omega n}$$

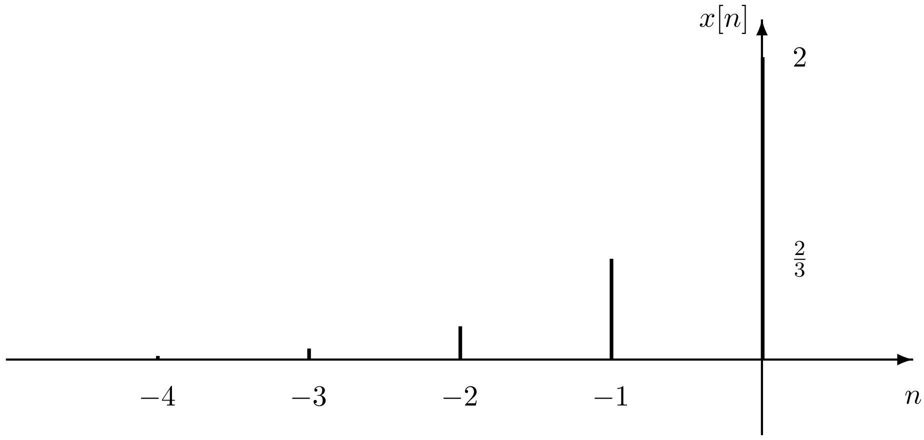

Figura 15: Sinal de tempo discreto do exemplo 9

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{0} 2(3)^n e^{-j\Omega n}$$

$$X(e^{j\Omega}) = 2 + 2(3)^{-1}e^{j\Omega} + 2(3)^{-2}e^{j2\Omega} + \ldots + 2(3)^{-n}e^{j\Omega n} + \ldots$$

$$X(e^{j\Omega}) = 2 + \frac{2}{3}e^{j\Omega} + \frac{2}{3^2}e^{j2\Omega} + \ldots + \frac{2}{3^n}e^{j\Omega n} + \ldots$$

que é uma série geométrica com $a = 2$ e $r = \frac{1}{3}e^{j\Omega}$ e cuja soma assume a seguinte forma:

$$S = \frac{a}{1-r} \Longrightarrow S = X(e^{j\Omega}) = \frac{2}{1 - \frac{1}{3}e^{j\Omega}}$$

Exemplo 10: Encontre a transformada discreta de Fourier (DTFT) do seguinte sinal $x[n]$:

$$x[n] = \begin{cases} 1 & |n| \leq M \\ 0 & |n| > M \end{cases}$$

A figura 16 mostra esse tipo de sinal. Usando a relação (6.25) temos o seguinte:

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-M}^{M} e^{-j\Omega n}$$

Fazemos a seguinte mudança de variável: $m = n + M$. Assim, quando $n = -M \Longrightarrow m = 0$, quando $n = M \Longrightarrow m = 2M$ e $n = m - M$. Portanto, a relação anterior assume a seguinte forma:

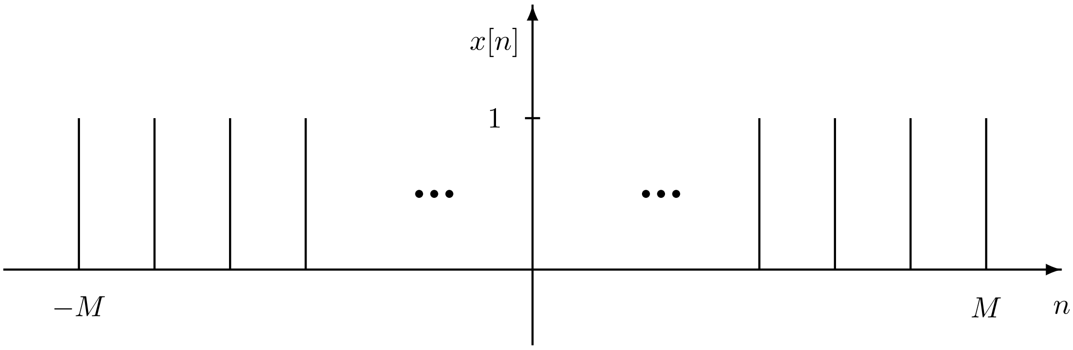

Figura 16: Sinal de tempo discreto do exemplo 10

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{m=0}^{2M} e^{-j\Omega(m-M)} = e^{j\Omega M} \sum_{m=0}^{2M} e^{-j\Omega m} \tag{6.27}$$

É possível encontrar relações simplificadas da relação (6.27). Assim, a análise deve ser separada para dois tipos de valores de Ω: (a) $\Omega = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$, e (b) $\Omega \neq 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$. Também usamos a seguinte relação:

$$e^{-j\Omega\, m} = Cos(m\Omega) - jSen(m\Omega) \tag{6.28}$$

- Quando $\Omega = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$:

  Neste caso, usando (6.28), verificamos facilmente que $e^{-j\Omega\, m} = 1$. Assim, a relação (6.27) assume a seguinte forma:

  $$X(e^{j\Omega}) = e^{j\Omega M}(2M+1) = 2M+1$$

  em que $e^{j\Omega M} = 1$ é obtido usando a relação (6.28). Assim, temos o seguinte:

  $$X(e^{j\Omega}) = 2M+1 \qquad\qquad \text{para} \quad \Omega = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots \tag{6.29}$$

- Quando $\Omega \neq 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$:

  Neste caso usamos a relação (6.27) para encontrar uma relação adequada:

  $$X(e^{j\Omega}) = e^{j\Omega M} \sum_{m=0}^{2M} e^{-j\Omega m}$$

  Inicialmente encontramos uma relação equivalente da seguinte relação:

  $$P = \sum_{m=0}^{2M} e^{-j\Omega m} = 1 + e^{-j\Omega} + e^{-j2\Omega} + e^{-j3\Omega} + \ldots + e^{-j2M\Omega} \tag{6.30}$$

  $$e^{j\Omega}\, P = e^{j\Omega} + 1 + e^{-j\Omega} + e^{-j2\Omega} + \ldots + e^{-j(2M-1)\Omega} + e^{-j2M\Omega} - e^{-j2M\Omega}$$

$$e^{j\Omega}\ P = e^{j\Omega} + P - e^{-j2M\Omega}$$

$$P = \frac{1 - e^{-j\Omega(2M+1)}}{1 - e^{-j\Omega}}$$

Substituindo a relação anterior em (6.27) encontramos o seguinte:

$$X(e^{j\Omega}) = e^{j\Omega M} \frac{\left(1 - e^{-j\Omega(2M+1)}\right)}{1 - e^{-j\Omega}}$$

Assim, temos a seguinte relação:

$$X(e^{j\Omega}) = e^{j\Omega M} \left[\frac{1 - e^{-j\Omega(2M+1)}}{1 - e^{-j\Omega}}\right] \qquad \text{para} \quad \Omega \neq 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots \tag{6.31}$$

Observações:

1. O valor de P em (6.29) pode ser mais rapidamente encontrada sabendo que a soma dos n termos de uma série geométrica com o primeiro elemento igual a a e com razão r é igual ao seguinte:

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

   Assim, em (6.30) temos que $a = 1$, $r = e^{-j\Omega}$ e $n = 2M + 1$ e, portanto, temos o seguinte:

$$P = \frac{1 - (e^{-j\Omega})^{2M+1}}{1 - e^{-j\Omega}} \Longrightarrow P = \frac{1 - e^{-j\Omega(2M+1)}}{1 - e^{-j\Omega}}$$

2. A relação (6.31) pode ser simplificada da seguinte forma:

$$X(e^{j\Omega}) = e^{j\Omega M} \left[\frac{1 - e^{-j\Omega(2M+1)}}{1 - e^{-j\Omega}}\right]$$

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{e^{j\Omega M} e^{-j\Omega(2M+1)/2} [e^{j\Omega(2M+1)/2} - e^{-j\Omega(2M+1)/2}]}{e^{-j\Omega/2} [e^{j\Omega/2} - e^{-j\Omega/2}]}$$

   Simplificamos cada parcela da relação anterior separadamente da seguinte forma:

$$[e^{j\Omega(2M+1)/2} - e^{-j\Omega(2M+1)/2}] = Cos[\frac{\Omega}{2}(2M+1)] + jSen[\frac{\Omega}{2}(2M+1)] - Cos[\frac{\Omega}{2}(2M+1)] + jSen[\frac{\Omega}{2}(2M+1)]$$

$$[e^{j\Omega(2M+1)/2} - e^{-j\Omega(2M+1)/2}] = j2\ Sen[\frac{\Omega}{2}(2M+1)]$$

$$[e^{j\Omega/2} - e^{-j\Omega/2}] = Cos(\frac{\Omega}{2}) + jSen(\frac{\Omega}{2}) - Cos(\frac{\Omega}{2}) + jSen(\frac{\Omega}{2}) = j2\ Sen(\frac{\Omega}{2})$$

$$\frac{e^{j\Omega M}e^{-j\Omega(2M+1)/2}}{e^{-j\Omega/2}} = \frac{e^{j\Omega M}e^{-j\Omega M}e^{-j\Omega/2}}{e^{-j\Omega/2}} = 1$$

Assim, temos o seguinte:

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{j2\ Sen[\frac{\Omega}{2}(2M+1)]}{j2\ Sen(\frac{\Omega}{2})} \Longrightarrow$$

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{Sen[\frac{\Omega}{2}(2M+1)]}{Sen(\frac{\Omega}{2})} \qquad \text{para} \quad \Omega \neq 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots \tag{6.32}$$

De (6.32) podemos encontrar o valor de $X(e^{j\Omega})$ quando $\Omega \longrightarrow 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$. Neste caso usamos a regra de L'Hopital da seguinte forma:

$$\begin{matrix} Lim\ \ X(e^{j\Omega}) \\ \Omega \longrightarrow 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots \end{matrix} = \begin{matrix} Lim \\ \Omega \longrightarrow 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots \end{matrix} \frac{\frac{1}{2}(2M+1)Cos[\frac{\Omega}{2}(2M+1)]}{\frac{1}{2}Cos[\frac{\Omega}{2}]} = (2M+1)$$

o que confirma a validade da relação (6.29).

Finalmente, a transformada discreta de Fourier (DTFT) de $x[n]$ assume a seguinte forma unificada:

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{Sen[\frac{\Omega}{2}(2M+1)]}{Sen(\frac{\Omega}{2})} \tag{6.33}$$

sempre que para $\Omega = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$ seja obtido o limite de (6.33).

A figura 17 mostra o gráfico de $X(e^{j\Omega})$

Figura 17: Transformada discreta de Fourier do exemplo 10

Exemplo 11: Encontrando a função *sinc* de tempo discreto:

Encontre a DTFT inversa de $X(e^{j\Omega})$ definida da seguinte forma:

$$X(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1 & |\Omega| \leq W \\ \\ 0 & W < |\Omega| < \pi \end{cases}$$

A figura 18 mostra esse tipo de sinal.

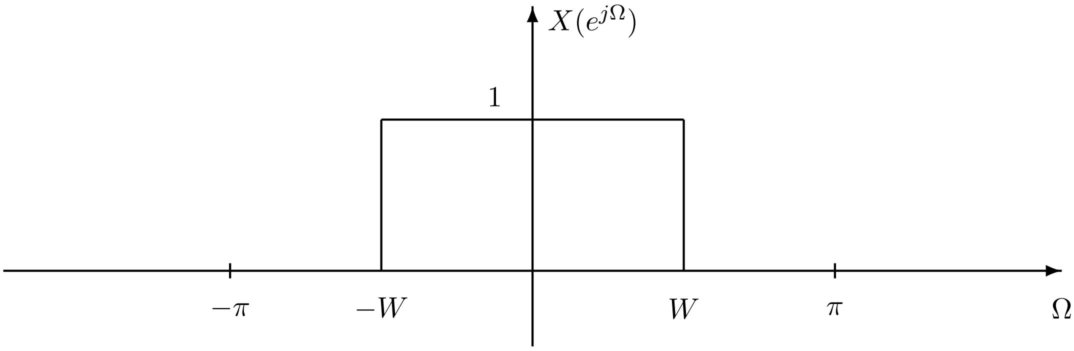

Figura 18: DTFT do exemplo 11

Para encontrar a transformada discreta de Fourier inversa precisamos conhecer apenas $X(e^{j\Omega})$ para o intervalo $-\pi < \Omega < \pi$ (já que $X(e^{j\Omega})$ tem período 2π).

Usando a relação (6.26) temos o seguinte:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega})e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W} e^{j\Omega n} d\Omega$$

A relação anterior deve ser analisado para dois casos: (a) para $n = 0$ que representa um caso patológico e, (b) para $n \neq 0$.

- Para $n = 0$:

$$x[0] = \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W} d\Omega = \frac{1}{2\pi}\left[\Omega\right]_{-W}^{W} = \frac{2W}{2\pi} \Longrightarrow$$

$$x[0] = \frac{W}{\pi} \tag{6.34}$$

- Para $n \neq 0$:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi[jn]}\left[e^{j\Omega n}\right]_{-W}^{W} = \frac{1}{2\pi[jn]}\left[e^{jWn} - e^{-jWn}\right]$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi[jn]}\left[Cos(nW) + jSen(nW) - Cos(nW) + jSen(nW)\right]$$

$$x[n] = \frac{j2Sen(nW)}{j2\pi n} \Longrightarrow x[n] = \frac{Sen(nW)}{\pi n} \tag{6.35}$$

Também podemos encontrar $x[0]$ a partir da relação (6.35) da seguinte forma:

$$\underset{n \longrightarrow 0}{Lim\ \ x[n]} = \underset{n \longrightarrow 0}{lim} \left[\frac{Sen(nW)}{\pi n}\right] = \underset{n \longrightarrow 0}{lim} \left[\frac{W\ Cos(nW)}{\pi}\right] = \frac{W}{\pi} = x[0]$$

Portanto, $x[n]$ pode ser representada de forma unificada da seguinte forma:

$$x[n] = \frac{Sen(W\ n)}{\pi n} \tag{6.36}$$

Sendo que para $n = 0$ devemos encontrar o limite.

A função *sinc*, muito comum em análise de sinais, assume a seguinte forma:

$$sinc[n] = \frac{Sen(\pi\ n)}{\pi n} \Longrightarrow sinc[u] = \frac{Sen(u\ \pi)}{u\ \pi} \tag{6.37}$$

Assim, é possível representar $x[n]$ de (6.36) usando a função *sinc* da seguinte forma:

$$x[n] = \frac{Sen(W\ n)}{\pi n} = \left(\frac{W}{\pi}\right) \frac{Sen(W\ n)}{W\ n} = \left(\frac{W}{\pi}\right) \frac{Sen(\pi . \frac{W\ n}{\pi})}{\pi \left(\frac{W\ n}{\pi}\right)}$$

$$x[n] = \left(\frac{W}{\pi}\right) sinc \left(\frac{W\ n}{\pi}\right) \tag{6.38}$$

A figura 19 mostra o sinal $x[n]$.

Figura 19: Transformada discreta de Fourier inversa do exemplo 11

Exemplo 12: Transformada discreta de Fourier da função impulso:

Encontre a transformada discreta de Fourier (DTFT) de $x[n] = \delta[n]$.

A figura 20 mostra o sinal $x[n]$.

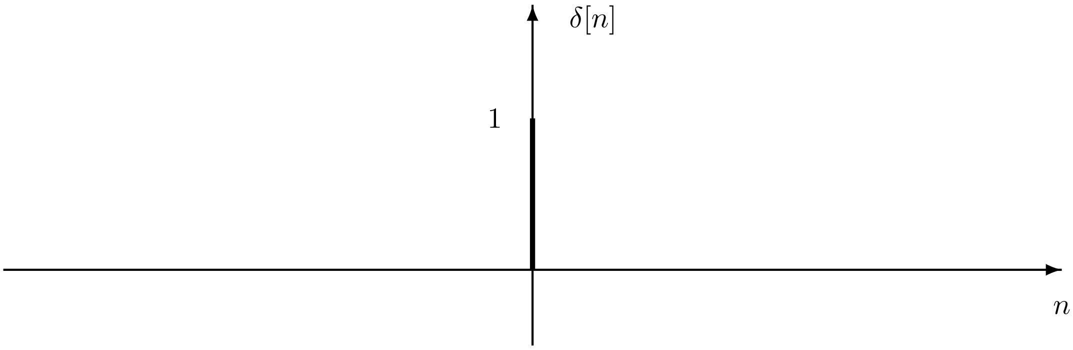

Figura 20: A função impulso $\delta[n]$

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n]e^{-j\Omega n} = e^{-j\Omega 0} = 1 \Longrightarrow$$

$$X(e^{j\Omega}) = 1$$

A figura 21 mostra a transformada discreta de Fourier $X(e^{j\Omega})$ de $\delta[n]$.

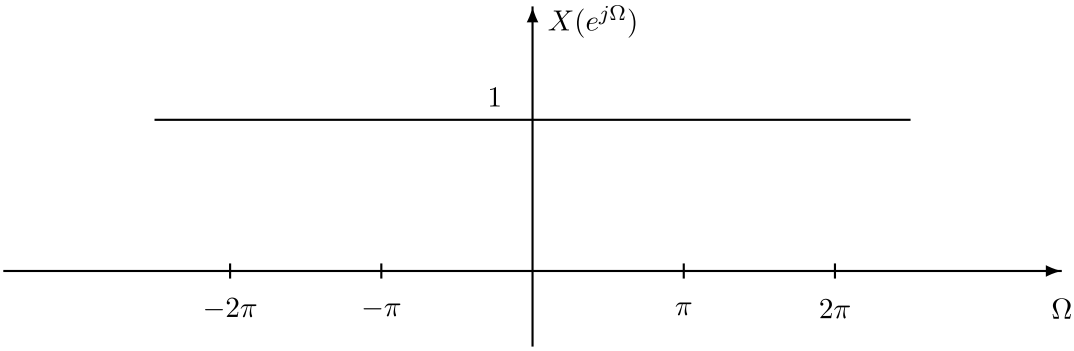

Figura 21: DTFT do exemplo 12

Exemplo 13: Encontre a DTFT inversa de $X(e^{j\Omega})$ definida da seguinte forma:

$$X(e^{j\Omega}) = \delta(\Omega)$$

para $-\pi < \Omega \leq \pi$.

Usando a relação (6.26) temos o seguinte:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \delta(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \delta(\Omega - 0)e^{j\Omega n}d\Omega$$

Pela propriedade de filtragem da função impulso temos o seguinte:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} e^{j(0)n} \Longrightarrow x[n] = \frac{1}{2\pi}$$

Observações:

1. Podemos definir alternativamente $X(e^{j\Omega})$ da seguinte forma:

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2k\pi) \tag{6.39}$$

Neste caso cada $\delta(.)$ geraria um $x[.]$ da seguinte forma:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \tag{6.40}$$

e teriamos uma relação entre $X(e^{j\Omega})$ e $x[n]$ da forma mostrada na figura 22.

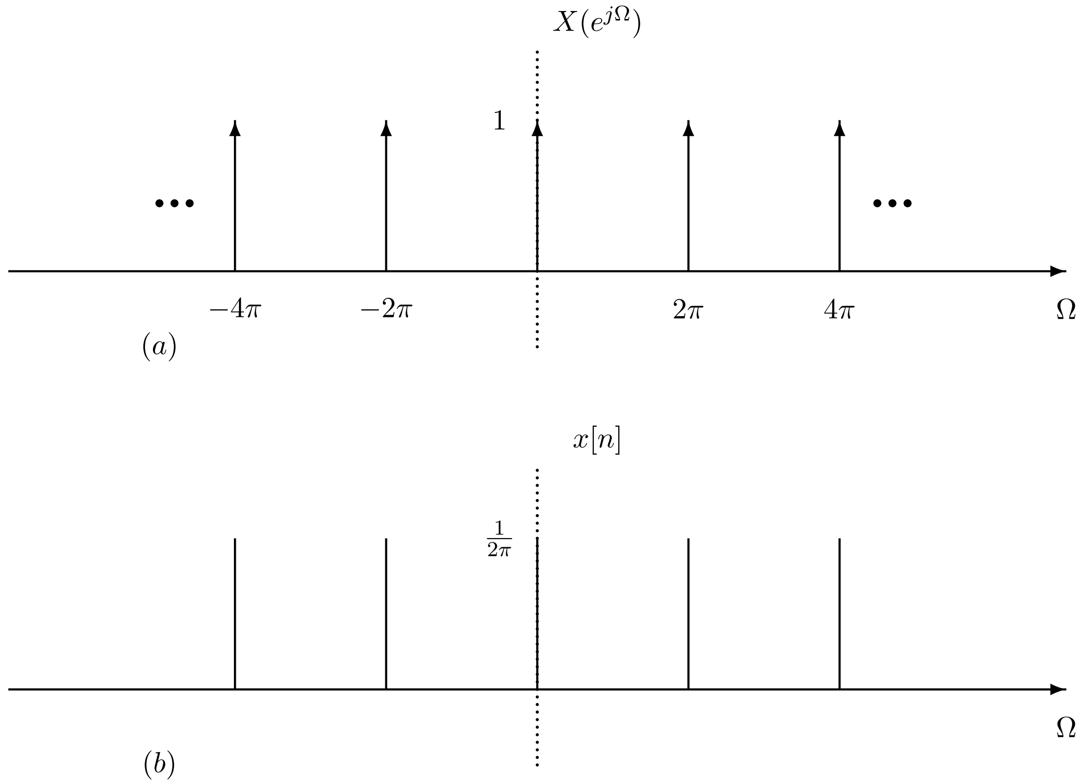

Figura 22: Gráfico de (a) $X(e^{j\Omega})$ e (b) $x[n]$

Entretanto a correspondência entre $x[n]$ e $X(e^{j\Omega})$ mostrados anteriormente nas relações (6.39) e (6.40) não é totalmente verdadeira. Deve-se observar que se tentamos encontrar a DTFT de $x[n]$ mostrado em (6.40) podemos verificar que a relação encontrada não converge. Entretanto, $x[n]$ é uma DTFT inversa de $X(e^{j\Omega})$. Essa validade é uma consequência direta de permitir impulsos em $X(e^{j\Omega})$. Assim, mesmo com esses problemas, as relações (6.39) e (6.40) são tratadas como uma relação DTFT válida porque cumprem com todas as propriedades de um par DTFT.

2. Devemos observar que $X(e^{j\Omega})$ (a transformada de Fourier de tempo discreto) é uma função continua e periódica com período 2π no dominio da frequência).

Exemplo 14: Encontre a DTFT inversa de $X(e^{j\Omega})$ definida da seguinte forma:

$$X(e^{j\Omega}) = 2Cos(2\Omega)$$

Usando a relação (6.26) temos o seguinte:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2Cos(2\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega$$

$$x[n] = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Cos(2\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega \tag{6.41}$$

Encontramos inicialmente a relação de P:

$$P = \int Cos(2\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega$$

Integramos a relação anterior usando a técnica de integração por partes:

$$u = Cos(2\Omega) \Longrightarrow du = -2Sen(2\Omega)d\Omega$$

$$dv = e^{j\Omega n}d\Omega \Longrightarrow v = \frac{1}{jn}e^{j\Omega n}$$

Assim, temos o seguinte:

$$P = \int Cos(2\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega = \frac{Cos(2\Omega)e^{j\Omega n}}{jn} + \frac{2}{jn}\int Sen(2\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega$$

Agora integramos por partes a seguinte integral:

$$Q = \int Sen(2\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega$$

$$u = Sen(2\Omega) \Longrightarrow du = 2Cos(2\Omega)d\Omega$$

$$dv = e^{j\Omega n}d\Omega \Longrightarrow v = \frac{1}{jn}e^{j\Omega n}$$

$$Q = \int Sen(2\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega = \frac{Sen(2\Omega)e^{j\Omega n}}{jn} - \frac{2}{jn}\int Cos(2\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega$$

Substituindo o valor de Q em P temos o seguinte:

$$P = \frac{Cos(2\Omega)e^{j\Omega n}}{jn} + \frac{2}{jn}\left[\frac{Sen(2\Omega)e^{j\Omega n}}{jn} - \frac{2}{jn}P\right]$$

$$P\left[1 + \left(\frac{2}{jn}\right)^2\right] = \frac{Cos(2\Omega)e^{j\Omega n}}{jn} + \frac{2Sen(2\Omega)e^{j\Omega n}}{(jn)^2}$$

Substituindo o valor de P em (6.41) temos o seguinte:

$$x[n] = \frac{1}{\pi\left[1 + \left(\frac{2}{jn}\right)^2\right]}\left[\frac{Cos(2\Omega)e^{j\Omega n}}{jn} + \frac{2Sen(2\Omega)e^{j\Omega n}}{(jn)^2}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$x[n] = \frac{1}{\pi\left[1 + \left(\frac{2}{jn}\right)^2\right]}\left[\frac{Cos(2\pi)e^{j\pi n}}{jn} + \frac{2Sen(2\pi)e^{j\pi n}}{(jn)^2} - \frac{Cos(-2\pi)e^{-j\pi n}}{jn} - \frac{2Sen(-2\pi)e^{-j\pi n}}{(jn)^2}\right]$$

$$x[n] = \frac{1}{\pi\left[1 - \frac{4}{n^2}\right]}\left[\frac{1}{jn}\right]\left[e^{j\pi n} - e^{-j\pi n}\right]$$

$$x[n] = \frac{1}{j\pi n\left[1 - \frac{4}{n^2}\right]}\left[Cos(\pi n) + jSen(\pi n) - Cos(\pi n) + jSen(\pi n)\right]$$

$$x[n] = \frac{j2}{j\pi n\left[1 - \frac{4}{n^2}\right]}\left[Sen(\pi n)\right] \Longrightarrow$$

$$x[n] = \frac{2}{\pi n\left[1 - \frac{4}{n^2}\right]}Sen(\pi n) \tag{6.42}$$

Devemos observar que $x[n]$ encontrado em (6.42) é igual a zero para valores inteiros de n (a causa do $Sen(\pi n)$) exceto para valores inteiros de n para o qual o denominador é igual a zero. Assim temos o seguinte:

$$n\left[1 - \frac{4}{n^2}\right] = 0 \Longrightarrow$$

$$n = 0$$

e

$$\left[1 - \frac{4}{n^2}\right] = 0 \Longrightarrow n^2 = 4 \Longrightarrow n = \pm 2$$

Portanto, os valores de n que podem gerar valores de $x[n] \neq 0$ são iguais a $n = 0$ e $n = \pm 2$. Encontramos esses valores usando o teorema de L'Hopital em (6.42). Assim, temos o seguinte:

$$\begin{matrix} lim\ x[n] \\ n \rightarrow a \end{matrix} = \begin{matrix} lim \\ n \rightarrow a \end{matrix} \left[\frac{2Sen(\pi n)}{\pi\left(n - \frac{4}{n}\right)} \right] = \begin{matrix} lim \\ n \rightarrow a \end{matrix} \left[\frac{2\pi Cos(\pi n)}{\pi\left(1 + \frac{4}{n^2}\right)} \right]$$

Quando $n = \pm 2$ temos o seguinte:

$$\begin{matrix} lim\ x[n] \\ n \rightarrow \pm 2 \end{matrix} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \Longrightarrow \begin{matrix} lim\ x[n] \\ n \rightarrow \pm 2 \end{matrix} = 1$$

Quando $n = 0$ temos o seguinte:

$$\begin{matrix} lim\ x[n] \\ n \rightarrow 0 \end{matrix} = \frac{2\pi Cos(0)}{\pi(1 + \frac{4}{0})} = \frac{2\pi}{\infty} = 0 \Longrightarrow \begin{matrix} lim\ x[n] \\ n \rightarrow 0 \end{matrix} = 0$$

Portanto, $x[n]$ assume a seguinte forma:

$$x[n] = \begin{cases} 1 & \text{se } n = \pm 2 \\ \\ 0 & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

Exemplo 15: Encontre a transformada discreta de Fourier (DTFT) de $x[n]$:

$$x[n] = \begin{cases} 2^n & 0 \leq n \leq 9 \\ \\ 0 & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{9} 2^n e^{-j\Omega n}$$

$$X(e^{j\Omega}) = 1 + 2e^{-j\Omega} + 4e^{-j2\Omega} + \ldots + 2^9 e^{-j9\Omega} \tag{6.43}$$

$$\frac{X(e^{j\Omega})}{2e^{-j\Omega}} = \frac{1}{2e^{-j\Omega}} + 1 + 2e^{-j\Omega} + \ldots + 2^8 e^{-j8\Omega} + 2^9 e^{-j9\Omega} - 2^9 e^{-j9\Omega}$$

$$\frac{X(e^{j\Omega})}{2e^{-j\Omega}} = \frac{1}{2e^{-j\Omega}} + X(e^{j\Omega}) - 2^9 e^{-j9\Omega}$$

$$X(e^{j\Omega}) = 1 + 2e^{-j\Omega} X(e^{j\Omega}) - 2^{10} e^{-j10\Omega}$$

$$X(e^{j\Omega})\left[1-2e^{-j\Omega}\right]=1-2^{10}e^{-j10\Omega}\Longrightarrow$$

$$X(e^{j\Omega})=\frac{1-2^{10}e^{-j10\Omega}}{1-2e^{-j\Omega}}$$

Deve-se observar que $X(e^{j\Omega})$ pode ser encontrado mais rapidamente observando que (6.43) é uma progressão geométrica de n termos e cuja soma assume a seguinte forma:

$$S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

Para nosso exemplo temos que $a=1$, $r=2e^{-j\Omega}$ e $n=10$. Assim, temos o seguinte:

$$X(e^{j\Omega})=\frac{1[1-(2e^{-j\Omega})^{10}]}{1-2e^{-j\Omega}}\Longrightarrow$$

$$X(e^{j\Omega})=\frac{1-2^{10}e^{-j10\Omega}}{1-2e^{-j\Omega}}$$