Capítulo 4

Equações diferenciais parciais

4.1. Introdução

O problema de equações diferenciais parciais aparece quando em determinadas aplicações aparecem modelos matemáticos em que existem duas ou mais variáveis independentes. Nesse tipo de aplicações, o modelo matemático é representado por equações diferenciais parciais.

Para resolver uma equação diferencial apresentamos o **método de separação de variáveis**. A idéia central desse método consiste em substituir a equação diferencial por um conjunto de equações diferenciais ordinárias que são resolvidas sujeitas a condições iniciais ou de contorno. Portanto, para desenvolver o método de separação de variáveis devemos revisar as propriedades básicas de problemas de valores de contorno para equações diferenciais ordinárias, assim como das propriedades de séries de Fourier em senos e/ou cosenos.

4.2. Problemas de valores de contorno para fronteiras com dois pontos

Quando estudamos as equações diferenciais ordinárias da forma:

$$y'' + p(t)\, y' + q(t)\, y = g(t) \tag{4.1}$$

normalmente informamos **duas condições iniciais em um mesmo ponto**, geralmente em $t = t_o$, da seguinte forma:

$$y(t_o) = y_o \qquad\qquad y'(t_o) = y'_o \tag{4.2}$$

Entretanto, existem casos práticos de problemas em que o valor da variável dependente y ou de sua derivada é especificado em **dois pontos diferentes**. Esse tipo de informação é chamada de **condições de contorno** que são tratadas de forma diferente às **condições iniciais** que especificam os valores de y e de y' **no mesmo ponto**.

Uma equação diferencial junto com as condições de contorno adequadamente especificadas forma um problema de valores de contorno com dois pontos como a seguinte:

$$y'' + p(t)\, y' + q(t)\, y = g(t) \tag{4.3}$$

junto com as condições de contorno:

$$y(\alpha) = y_o \qquad\qquad\qquad y(\beta) = y_1 \tag{4.4}$$

A solução do problema (4.3)-(4.4) assume a forma $y = \phi(x)$ que satisfaz (4.3) no intervalo $\alpha < x < \beta$ e que tem valores especificados y_o e y_1 nos extremos do intervalo. Em geral encontramos primeiro a solução geral da equação diferencial e depois usamos as condições de contorno para encontrar os valores das constantes arbitrárias.

Observações: As seguintes observações são muito importantes:

1. Se $g(t) = 0$ para todo t e se os valores de y_o e y_1 também são nulos então o sistema (4.3)-(4.4) é homogêneo. Em caso contrário, o problema é não homogêneo.

2. Os problemas de **valor inicial** (4.1)-(4.2) e de valores de contorno com dois pontos (4.3)-(4.4) apresentam soluções que diferem em aspectos importantes. Assim, o problema de equação diferencial de valor inicial geralmente tem uma única solução. Por outro lado, as equações diferenciais de valores de contorno com dois pontos podem ter uma única solução, não ter solução ou ter uma infinidade de soluções. Neste aspecto, os problemas de equações diferenciais lineares com valores de contorno são parecidas com as equações algébricas lineares.

3. Relembrando os sistemas lineares consideremos o seguinte sistema algébrico linear:

$$A\,x = b \tag{4.5}$$

   onde A é uma matriz de dimensão $n \times n$, b é um vetor de dimensão $n \times 1$ e x é um vetor de dimensão $n \times 1$. Nesse contexto temos o seguinte:

   - Se A tem inversa então o sistema (4.5) tem solução única.
   - Se A é singular (não tem inversa) então o sistema (4.5) não tem solução ou tem infinitas soluções.

4. Seja o sistema algébrico linear homogêneo:

$$A\,x = 0 \tag{4.6}$$

   obtido de (4.5) com $b = 0$. Nesse contexto temos o seguinte:

   - O sistema (4.6) sempre tem a solução trivial $x = 0$.
   - Se A tem inversa então $x = 0$ é a única solução.
   - Se A é singular (não tem inversa) então o sistema (4.6) tem uma infinidade de soluções não nulas.

5. Solução de uma equação diferencial de segunda ordem com coeficientes constantes homogênea:

   Um dos tópicos principais analisados em equações diferenciais ordinárias é a solução geral de uma equação diferencial de segunda ordem com coeficientes constantes homogênea. Essa equação tem a seguinte estrutura:

$$a\,y^{''} + b\,y^{'} + c\,y = 0$$

   em que a, b e c são parâmetros conhecidos. A solução geral desse sistema assume a seguinte forma:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

onde $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções da equação diferencial de forma que o wronskiano dessas funções seja diferente de zero. Neste contexto, um wronskiano diferente de zero significa que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ devem cumprir a seguinte relação:

$$y_1(x)\, y_2^{'}(x) - y_1^{'}(x)\, y_2(x) \neq 0$$

Uma estratégia para encontrar $y_1(x)$ e $y_2(x)$ é identificar uma forma geral da solução e, a partir dessa estrutura, encontrar duas soluções que cumpram com a exigência de que o wronskiano seja diferente de zero (soluções linearmente independentes). Pode-se verificar que uma solução para a equação diferencial assume a seguinte forma genérica:

$$y(x) = e^{rx}$$

cujas derivadas assumem a seguinte forma:

$$y^{'}(x) = r\, e^{rx} \qquad\qquad y^{''}(x) = r^2\, e^{rx}$$

Substituíndo essas relações na equação diferencial temos o seguinte:

$$a\, r^2\, e^{rx} + b\, r\, e^{rx} + c\, e^{rx} = e^{rx}\left[a\, r^2 + b\, r + c\right] = 0 \Longrightarrow$$

$$a\, r^2 + b\, r + c = 0$$

A relação anterior é chamada de equação característica da equação diferencial. A solução desse sistema assume a seguinte forma:

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Neste caso existem três tipos de soluções:

- Quando: $\sqrt{b^2 - 4ac} > 0$:
  Nesse caso as duas soluções que podem ser obtidas, isto é, $y_1(x) = e^{r_1 x}$ e $y_2(x) = e^{r_2 x}$ cumprem com a exigência do wronskiano e, portanto, a solução geral assume a seguinte forma:

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

- Quando: $\sqrt{b^2 - 4ac} = 0$:
  Nesse caso as duas soluções são iguais. Em outras palavras temos apenas uma solução. Seja $\alpha = \frac{b}{2a}$. Pode-se mostrar que se a primeira solução é $y_1(x) = e^{-\alpha x}$ então a segunda solução pode ser $y_2(x) = x\, e^{-\alpha x}$. Assim, a solução geral assume a seguinte forma:

$$y(x) = c_1 e^{-\alpha\, x} + c_2 x\, e^{-\alpha\, x}$$

- Quando: $\sqrt{b^2 - 4ac} < 0$:
  Nesse caso as duas soluções são chamadas de complexas conjugadas. Seja $\beta = \sqrt{4ac - b^2}$. Assim, os valores de r_1 e r_2 assumem a seguinte forma:

  $$r_1 = -\alpha + i\,\beta \qquad\qquad r_2 = -\alpha - i\,\beta$$

  Nesse contexto, pode-se mostrar que a solução geral assume a seguinte forma:

  $$y(x) = e^{-\alpha\,x}\,[c_1 Sen(\beta x) + c_2 Cos(\beta x)]$$

Exemplo 1: Equação diferencial com solução única:

Resolver a equação diferencial com valores de contorno em dois pontos:

$$y^{''} + 2y = 0 \qquad\qquad y(0) = 1 \qquad\qquad y(\pi) = 0$$

A equação característica da equação diferencial assume a seguinte forma:

$$r^2 + 2 = 0 \Longrightarrow r^2 = -2 \Longrightarrow r = \pm\sqrt{2}i$$

Portanto, as soluções assumem a seguinte forma:

$$y_1 = Cos(\sqrt{2}x) \qquad\qquad y_2 = Sen(\sqrt{2}x)$$

Assim, a solução geral assume a seguinte forma:

$$y = c_1\;Cos(\sqrt{2}x) + c_2\;Sen(\sqrt{2}x)$$

Aplicando as condições de contorno temos o seguinte:

$1 = c_1$

$0 = c_1 Cos(\sqrt{2}\pi) + c_2 Sen(\sqrt{2}\pi)$

$$\Longrightarrow c_1 = 1 \Longrightarrow Cos(\sqrt{2}\pi) + c_2 Sen(\sqrt{2}\pi) = 0$$

$$\Longrightarrow c_2 = -Cotag(\sqrt{2}\pi) = -0{,}276$$

Dessa forma, a solução final assume a seguinte forma:

$$y = Cos(\sqrt{2}x) - Cotag(\sqrt{2}\pi)\;Sen(\sqrt{2}x)$$

Deve-se observar que a equação diferencial do exemplo 1 tem uma única solução.

Exemplo 2: A equação diferencial não tem solução única:

Resolver a equação diferencial com valores de contorno em dois pontos:

$$y'' + y = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad y(\pi) = a$$

A equação característica da equação diferencial assume a seguinte forma:

$$r^2 + 1 = 0 \Longrightarrow r^2 = -1 \Longrightarrow r = \pm i$$

Portanto, as soluções assumem a seguinte forma:

$$y_1 = Cos(x) \qquad y_2 = Sen(x)$$

Assim, a solução geral assume a seguinte forma:

$$y = c_1\ Cos(x) + c_2\ Sen(x)$$

Aplicando as condições de contorno temos o seguinte:

$1 = c_1 \Longrightarrow c_1 = 1$

$a = c_1 Cos(\pi) + c_2 Sen(\pi)$

$$\Longrightarrow c_1 Cos(\pi) + c_2 Sen(\pi) = a \Longrightarrow c_1 Cos(\pi) = a$$

$$\Longrightarrow c_1 = -a$$

Dessa forma, a solução da equação diferencial assume a seguinte forma:

$$c_1 = 1 \quad \text{e} \quad c_1 = -a \qquad c_2 \quad \text{qualquer valor}$$

Para a solução encontrada temos o seguinte:

- Se $a \neq -1$ o sistema não tem solução.
- Se $a = -1$ o sistema aceita infinitas soluções com $c_1 = 1$ e c_2 assumindo qualquer valor e, nesse contexto, a solução geral assume a seguinte forma:

$$y = Cos(x) + c_2 Sen(x)$$

Exemplo 3: A equação diferencial tem solução única:

Resolver a equação diferencial com valores de contorno em dois pontos:

$$y'' + 2y = 0 \qquad y(0) = 0 \qquad y(\pi) = 0$$

O problema anterior é uma equação diferencial homogênea da seguinte forma:

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0 \tag{4.7}$$

com condições de contorno:

$$y(\alpha) = 0 \qquad\qquad y(\beta) = 0 \tag{4.8}$$

que tem a solução trivial $y = 0$ (solução trivial nula) mas pode ter soluções não triviais que pode ser de interesse encontrar.

A forma geral da solução é a mesma do exemplo 1 e, portanto, a solução geral assume a seguinte forma:

$$y = c_1 Cos(\sqrt{2}x) + c_2 Sen(\sqrt{2}x)$$

Aplicando as condições de contorno temos o seguinte:

$0 = c_1 \Longrightarrow c_1 = 0$

$0 = c_1 Cos(\sqrt{2}\pi) + c_2 Sen(\sqrt{2}\pi) \Longrightarrow c_2 Sen(\sqrt{2}\pi) = 0 \Longrightarrow c_2 = 0$

Portanto, $y = 0$ é a única solução da equação diferencial.

Exemplo 4: A equação diferencial tem infinitas soluções:

Resolver a equação diferencial com valores de contorno em dois pontos:

$$y'' + y = 0 \qquad\qquad y(0) = 0 \qquad\qquad y(\pi) = 0$$

A equação diferencial é a mesma do exemplo 2 e, portanto, a solução geral assume a seguinte forma:

$$y = c_1 Cos\ x + c_2 Sen\ x$$

Aplicando as condições iniciais temos o seguinte:

$0 = c_1 \Longrightarrow c_1 = 0$

$0 = c_1 Cos(\pi) + c_2 Sen(\pi) \Longrightarrow c_2 Sen(\pi) = 0 \Longrightarrow c_2$ qualquer valor

Portanto, a solução assume a seguinte forma:

$$y = c_2 Sen\ x$$

que mostra que a equação diferencial tem infinitas soluções.

Observações: As seguintes observações são muito importantes:

1. Os exemplos apresentados mostram uma relação entre problemas de equações diferenciais com valores de contorno com dois pontos homogêneos e não homogêneos com o que acontece com os sistemas algébricos lineares homogêneos e não homogêneos. Se um problema de equação diferencial com valores de contorno não homogêneo tem uma única solução e o problema homogêneo correspondente tem apenas a solução trivial. Além disso, se um problema de equação diferencial não homogênea não tem solução ou tem infinitas soluções e o problema homogêneo correspondente tem (infinitas) soluções não triviais.

2. Sabemos que o sistema algébrico linear:

$$A\,x = \lambda\,x \tag{4.9}$$

tem a solução trivial $x = 0$ para todo valor de λ. Adicionalmente, para determinados valores de λ, chamados de autovalores, existem soluções não triviais. Um comportamento semelhante acontece nas equações diferenciais.

4.3. Autovalores e autofunções em equações diferenciais

Consideremos a equação diferencial:

$$y^{''} + \lambda y = 0 \tag{4.10}$$

com as seguintes condições de contorno:

$$y(0) = 0 \qquad\qquad y(\pi) = 0 \tag{4.11}$$

Nesse contexto, os valores de λ para os quais existem soluções não triviais do problema (4.10)-(4.11) são **chamados de autovalores** e as soluções não triviais correspondentes são **chamados de autofunções**.

Vamos encontrar os autovalores e as autofunções do problema (4.10)-(4.11). Para isso, consideramos três casos: (a) $\lambda > 0$, (b) $\lambda = 0$ e (c) $\lambda < 0$. Deve-se observar que em cada um desses casos a solução assume uma estrutura diferente.

1. Quando $\lambda > 0$:

   Neste caso mudamos a notação para $\lambda = \mu^2$ para facilitar os cálculos. Assim, temos o seguinte:

   $$y^{''} + \mu^2 y = 0 \tag{4.12}$$

   A equação característica dessa equação diferencial assume a seguinte forma:

   $$r^2 + \mu^2 = 0 \Longrightarrow r = \pm i\,\mu$$

   Portanto, a solução geral assume a seguinte forma:

   $$y = c_1 Cos(\mu x) + c_2 Sen(\mu x) \tag{4.13}$$

   Aplicando as condições de contorno temos o seguinte:

   $0 = c_1$

   $0 = c_2 Sen(\mu\pi)$

   As soluções não triviais acontecem com $c_2 \neq 0 \Longrightarrow Sen(\mu\pi) = 0$. Portanto, os valores permitidos para μ são os seguintes: $\mu = 1, 2, 3, \ldots$. Como $\lambda = \mu^2$ então os valores de λ que representam soluções da equação diferencial são os seguintes:

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= 1 \\
\lambda_2 &= 4 \\
\lambda_3 &= 9 \\
&\vdots \\
\lambda_n &= n^2
\end{aligned} \tag{4.14}
$$

Assim, os autovalores da equação diferencial assumem a seguinte forma:

$$\lambda_n = n^2 \qquad\qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{4.15}$$

As autofunções são obtidas de (4.13) e assumem a seguinte forma:

$$y_n = c_2 Sen(n\ x)$$

Assumindo $c_2 = 1$, as autofunções da equação diferencial assumem a seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= Sen\ x \\
y_2 &= Sen\ 2x \\
y_3 &= Sen\ 3x \\
&\vdots \\
y_n &= Sen\ nx
\end{aligned}
$$

Usando notação compacta, as autofunções da equação diferencial assumem a seguinte forma:

$$y_n(x) = Sen(n\ x) \tag{4.16}$$

2. Quando $\lambda < 0$:
   Fazemos $\lambda = -\mu^2 < 0 \Longrightarrow \mu > 0$. Assim, em (4.10) a equação característica assume a seguinte forma:

$$r^2 - \mu^2 = 0 \Longrightarrow r^2 = \mu^2 \Longrightarrow r = \pm\mu$$

Nesse contexto, a solução geral da equação diferencial assume a seguinte forma:

$$y = k_1 e^{\mu x} + k_2 e^{-\mu x}$$

Fazendo: $k_1 = \frac{1}{2}(c_1 + c_2)$ e $k_2 = \frac{1}{2}(-c_1 + c_2)$, a relação anterior assume a seguinte forma:

$$y = c_1 \left[\frac{1}{2}\left(e^{\mu x} - e^{-\mu x}\right)\right] + c_2 \left[\frac{1}{2}\left(e^{\mu x} + e^{-\mu x}\right)\right]$$

A relação anterior assume a seguinte forma:

$$y = c_1 Senh(\mu\ x) + c_2 Cosh(\mu\ x) \tag{4.17}$$

Aplicando as condições de contorno na solução geral mostrada temos o seguinte:

$0 = c_2 \Longrightarrow c_2 = 0$

$0 = c_1 Senh(\mu\pi) \Longrightarrow c_1 = 0$ porque $Senh(\mu\pi) \neq 0$

Das relações anteriores podemos concluir que $y = 0$ é a única solução e não existem soluções não triviais. Portanto, quando $\lambda < 0$ **não existem soluções não triviais**.

3. Quando $\lambda = 0$:

   Neste caso a equação característica assume a seguinte forma:

$$r^2 = 0 \Longrightarrow r = \pm 0$$

   que mostra que as soluções são reais e iguais. Nesse caso a solução geral assume a seguinte forma:

$$y = c_1 e^0 + c_2 x \; e^0 \Longrightarrow y = c_1 + c_2 x \tag{4.18}$$

   Aplicando as condições de contorno na solução geral temos o seguinte:

   $0 = c_1 \Longrightarrow c_1 = 0$

   $0 = c_1 + \pi \; c_2 \Longrightarrow c_2 = 0 \Longrightarrow y = 0$

   Os resultados encontrados mostram que a equação diferencial tem apenas a solução trivial ($y = 0$). Portanto, quando $\lambda = 0$ **não existem soluções não triviais**.

A análise anterior da equação diferencial representada pelo sistema (4.10)-(4.11) nos permite concluir que essa equação diferencial apresenta soluções não triviais apenas quando $\lambda > 0$ e nesse caso o sistema (4.10)-(4.11) que tem a seguinte estrutura:

$$y^{''} + \lambda y = 0 \qquad\qquad y(0) = 0 \qquad y(\pi) = 0 \tag{4.19}$$

tem uma sequência infinita de autovalores positivos da forma:

$$\lambda_n = n^2 \qquad\qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{4.20}$$

e as autofunções correspondentes tem a seguinte estrutura:

$$y_n = k \;\; Sen(n \; x) \tag{4.21}$$

sendo k uma constante.

Exemplo 5: Um caso de aplicação do tópico anterior:

Considere o sistema (4.10)-(4.11) em que $\pi = L$. Para esse caso particular encontre os autovalores e as autofunções dessa equação diferencial.

Neste caso temos a seguinte equação diferencial com as condições de contorno em dois pontos:

$$y^{''} + \lambda y = 0 \qquad\qquad y(0) = 0 \qquad y(L) = 0 \tag{4.22}$$

A solução é a mesma mostrada em (4.20)-(4.21) exceto na aplicação da segunda condição de contorno. Assim, a solução assume a seguinte forma:

$$y = c_1 Cos(\mu\, x) + c_2 Sen(\mu\, x)$$

Aplicando as condições de contorno temos o seguinte:

$0 = c_1$

$0 = c_2 Sen(\mu L) \Longrightarrow \mu L = \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \ldots$

Das relações anteriores encontramos a seguinte relação:

$$\mu_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right) \tag{4.23}$$

Portanto, os autovalores assumem a seguinte forma:

$$\lambda = \mu^2 \Longrightarrow \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$$

Finalmente, as autofunções assumem a seguinte forma:

$$y_n = c_2 Sen(\mu_n\, x) \Longrightarrow y_n = Sen\left(\frac{n\pi\, x}{L}\right) \qquad\qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{4.24}$$

Os importantes resultados encontrados neste exemplo são usados com frequência nos seguintes tópicos deste capítulo. Os tópicos apresentados são usados para analisar três tipos muito especiais de equações diferenciais parciais.

4.4. A solução da equação do calor

Três tipos de equações diferenciais parciais são os mais estudados e analisados porque tem aplicação em várias áreas da engenharia: (i) a equação do calor, (b) a equação de onda e (iii) a equação do potencial. Todos esses tipos especiais de problemas são resolvidos usando o método de separação de variáveis.

A equação diferencial de segunda ordem parcial, chamada de equação do calor, tem a seguinte estrutura:

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \qquad\qquad 0 < x < L \qquad t > 0 \tag{4.25}$$

O problema (4.25) representa um conjunto de problemas que aparecem na engenharia sendo o problema de condução de calor em um corpo sólido o mais representativo e o mais conhecido. Esse tipo de problema aparece em todos os sistemas em que aparecem a transferência de calor em dispositivos.

Neste caso analisamos o problema específico de condução de calor em uma barra de seção reta constante como mostrada na figura 4.1. O material é homogêneo e a barra está alinhada com o eixo x. Neste problema específico α^2 é uma constante de difusividade térmica que depende apenas do material do qual é feita a barra. Assim, a seguinte relação é verdadeira:

$$\alpha^2 = \frac{k}{\rho\, s} \tag{4.26}$$

Figura 4.1: Uma barra metálica condutora.

onde k é a condutividade térmica, ρ é a densidade do material e s é o calor específico. α está em $\frac{cm^2}{s}$.

Adicionalmente, não existe transferência de calor pela superficie lateral da barra e os extremos da barra coincide com $x = 0$ e $x = L$. Assim, a equação diferencial parcial de segunda ordem mostrada em (4.25) assume a seguinte forma:

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t \qquad 0 < x < L \qquad t > 0 \tag{4.27}$$

onde foi usada notação compacta para indicar a derivada parcial.

Outras suposições particulares para o problema: Para o problema em análise, deve-se ainda especificarse condições iniciais e/ou de contorno. Assim, especificamos o seguinte:

1. Condição inicial:

   A distribuição inicial de temperatura na barra satisfaz a relação:

   $$u(x, 0) = f(x) \qquad 0 \leq x \leq L \tag{4.28}$$

   onde $f(x)$ é uma função conhecida e especificada em cada problema específico.

2. Condições de contorno:

   As temperaturas nos extremos da barra são conhecidas e mantidas fixas. Nesse caso, vamos fixar as temperaturas nos extremos em zero, isto é, se a temperatura é T_1 em $x = 0$ e T_2 em $x = L$ então $T_1 = T_2 = 0$ e temos as seguintes condições de contorno:

   $$u(0, t) = 0 \qquad u(L, t) = 0 \qquad t > 0 \tag{4.29}$$

Portanto, na equação diferencial parcial que pretendemos resolver relacionado com o problema fundamental de condução de calor, pretende-se encontrar a função de distribuição de temperatura $u(x, t)$ que satisfaz a equação diferencial (4.27), a condição inicial (4.28) e as condições de contorno (4.29).

O problema (4.27)-(4.28)-(4.29) é linear porque u aparece em todas as equações na primeira potência. Também, o problema é homogêneo em relação às condições de contorno. Assim, uma estratégia para resolver o problema é encontrar uma solução para a equação diferencial e as condições de contorno. Na sequência podemos fazer uma superposição para satisfazer a condição inicial.

4.4.1. Estratégia de solução

Uma solução da equação diferencial (4.27) que satisfaz as condições de contorno (4.28) pode ser a função $u(x,t) = 0$ mas essa proposta de solução não satisfaz a condição inicial exceto para o caso trivial de $f(x) = 0$.

Para encontrar uma solução não trivial para $u(x,t)$ assumimos a hipótese de que $u(x,t)$ pode ser representada como um produto de duas funções, uma que depende apenas de x e outra que depende apenas de t. Sejam $X(x)$ e $T(t)$ essas funções então temos o seguinte:

$$u(x,t) = X(x)\,T(t) \tag{4.30}$$

Assim temos o seguinte:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = u_x = X^{'}(x)T(t) \Longrightarrow \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = u_{xx} = X^{''}(x)\,T(t) \qquad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = u_t = X(x)\,T^{'}(t)$$

Substituíndo as relações anteriores em (4.27) temos o seguinte:

$$\alpha^2 X^{''}(x)\,T(t) = X(x)\,T^{'}(t) \Longrightarrow \frac{X^{''}(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T^{'}(t)}{T(t)} \tag{4.31}$$

A relação (4.31) mostra uma separação de variáveis. A única forma de garantir a igualdade é que ela seja igual a uma constante que identificaremos por $-\lambda$. Assim, temos o seguinte:

$$\alpha^2 X^{''}(x)\,T(t) = X(x)\,T^{'}(t) \Longrightarrow \frac{X^{''}(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T^{'}(t)}{T(t)} = -\lambda \tag{4.32}$$

Podemos encontrar a solução de cada equação diferencial para qualquer valor de λ resolvendo (4.32) para encontrar $X(x)$ e $T(t)$. Assim, a solução é o produto dessas funções. Para encontrar a forma matemática de $X(x)$ e $T(t)$ repassamos as condições de contorno em $u(x,t)$ para $X(x)$.

Para $x = 0$ temos o seguinte:

$$u(0,t) = 0 = X(0)\,T(t) \Longrightarrow X(0) = 0 \tag{4.33}$$

já que $T(t) = 0$ levaria para $u(x,t) = 0$ que é a solução trivial que não interessa.

Para $x = L$ temos o seguinte:

$$u(L,t) = 0 = X(L)\,T(t) \Longrightarrow X(L) = 0 \tag{4.34}$$

Assim, podemos resolver a primeira parcela de (4.32):

$$\frac{X^{''}(x)}{X(x)} = -\lambda \Longrightarrow X^{''}(x) + \lambda\,X(x) = 0 \qquad X(0) = 0 \qquad X(L) = 0 \tag{4.35}$$

A relação (4.35) é uma equação diferencial homogênea com condições de contorno já analisada anteriormente (veja exemplo 5). Os autovalores desse problema assumem a seguinte forma:

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{4.36}$$

As autofunções assumem a seguinte forma:

$$X_n(x) = Sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{4.37}$$

Agora resolvemos a outra equação diferencial de (4.32) para o valor de λ encontrado. Assim, temos o seguinte:

$$\frac{1}{\alpha^2}\frac{T^{'}(t)}{T(t)} = -\lambda \Longrightarrow T^{'}(t) = -\lambda\alpha^2\, T(t) \Longrightarrow T^{'}(t) + \lambda\alpha^2\, T(t) = 0 \Longrightarrow$$

$$T_n^{'}(t) + \left(\frac{\alpha^2 n^2\pi^2}{L^2}\right) T_n(t) = 0 \tag{4.38}$$

A solução de (4.38) é trivial e assume a seguinte forma:

$$T_n(t) = e^{-\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{L^2}t} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{4.39}$$

que é obtido usando o seguinte processo:

$$\frac{T^{'}(t)}{T(t)} = -\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{L^2} \Longrightarrow \int \frac{T^{'}(t)}{T(t)}\, dt = -\int \frac{n^2\pi^2\alpha^2}{L^2}\, dt \Longrightarrow Ln[T(t)] = -\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{L^2}\, t \Longrightarrow T_n(t) = e^{-\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{L^2}t}$$

Assim, uma solução do problema assume a seguinte forma:

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = e^{-\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{L^2}t} Sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{4.40}$$

que satisfaz a equação diferencial parcial (4.27) e as condições de contorno (4.29) para cada n inteiro e positivo. As funções $u_n(x,t)$ são chamadas de soluções fundamentais do problema de condução de calor (4.27)-(4.28)-(4.29). Entretanto, falta satisfazer a condição inicial (4.28), isto é, a relação:

$$u(x,0) = f(x) \qquad 0 \le x \le L \tag{4.41}$$

Uma solução $u(x,t)$ do problema é uma combinação linear de (4.40) que satisfaz a condição inicial (4.41). Assim, uma solução geral assume a seguinte forma:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\ e^{-\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{L^2}t}\ Sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{4.42}$$

onde os coeficientes c_n ainda não são conhecidos. Lembremos que os termos individuais de (4.42) satisfazem a equação diferencial parcial (4.27) e as condições de contorno (4.29). Agora, supor que a série infinita (4.42) converge e satisfaz (4.27) e (4.29). Nesse contexto, para satisfazer a condição inicial (4.28), deve-se cumprir o seguinte:

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \;\; Sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{4.43}$$

Em outras palavras, os coeficientes c_n devem ser escolhidos de forma que a série mostrada em (4.43) represente a função $f(x)$ que representa a função de distribuição inicial de temperatura para $0 \leq x \leq L$. Assim, a série mostrada em (4.43) é a série de Fourier em senos de $f(x)$ e seus coeficientes são encontrados usando a relação:

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \;\; Sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \tag{4.44}$$

A solução final é encontrada substituíndo os coeficientes c_n obtidos em (4.44) na relação geral (4.42).

Exemplo 6: Aplicação da equação do calor.

Encontre a temperatura $u(x,t)$ em qualquer instante em uma barra metálica com 50 cm. de comprimento e com superficie lateral isolada. A temperatura inicial é de 20^o C em toda a barra e as extremidades são mantidas a 0^o C para todo $t > 0$.

Sabemos que a forma geral da solução assume a seguinte forma:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \;\; e^{-\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{L^2}t} \;\; Sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Adicionalmente sabemos que: $L = 50$ cm. e $f(x) = 20$ para $0 < x < 50$ cm.

Encontramos os elementos de c_n da seguinte forma:

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\; Sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{50}\int_0^{50} 20\; Sen\left(\frac{n\pi x}{50}\right) dx = \frac{4}{5}\int_0^{50} Sen\left(\frac{n\pi x}{50}\right) dx$$

$$c_n = \frac{4}{5}\left(\frac{50}{n\pi}\right)\left[-Cos\left(\frac{n\pi x}{50}\right)\right]_0^{50} = \frac{40}{n\pi}\left[1 - Cos(n\pi)\right]$$

Quando n é impar então $Cos(n\pi) = -1$ e portanto $(1 - Cos(n\pi)) = 2$ e quando n é par então $Cos(n\pi) = 1$ e portanto $(1 - Cos(n\pi)) = 0$. Assim, c_n assume a seguinte forma:

$$c_n = \frac{80}{n\pi} \quad \text{para } \; n = 1, 3, 5, \ldots \qquad\qquad c_n = 0 \quad \text{para } \; n = 2, 4, 6, \ldots$$

Finalmente, a temperatura $u(x,t)$ assume a seguinte forma:

$$u(x,t) = \frac{80}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{2500}t} \;\; Sen\left(\frac{n\pi x}{50}\right)$$

$$u(x,t) = \frac{80}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2k+1}\right) e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2\alpha^2}{2500}t} \;\; Sen\left(\frac{(2k+1)\pi x}{50}\right)$$

4.5. A solução da equação de onda: Vibrações de uma corda elástica

A equação de onda representa um segundo tipo de equação diferencial parcial importante. Esse tipo de equação diferencial aparece na análise de fenômenos relacionados com a propagação de ondas em um meio contínuo. Assim, são casos de aplicação específicos a análise de ondas acústicas, ondas sísmicas, ondas eletromagnéticas, etc. Neste caso, escolhemos para análise específico a vibração mecânica de uma corda elástica.

O tipo de problema mais simples de analisar é a vibração mecânica de uma corda elástica de comprimento L que se encontra ligeiramente esticada entre dois suportes no mesmo nível horizontal de forma que o eixo x se encontre alinhado com a corda como se mostra na figura 4.2.

Figura 4.2: Uma corda elástica.

Supor que a corda é colocada em movimento no plano vertical por uma ação externa (puxando verticalmente a corda de alguma forma). Nesse contexto, a função $u(x,t)$ representa o deslocamento da corda no ponto x e no instante t. Considerando algumas hipóteses simplificadoras (eliminando a resistência do ar e para amplitudes de movimento não muito grandes) pode-se provar que $u(x,t)$ cumpre com a seguinte equação diferencial parcial:

$$a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \Longrightarrow a^2\, u_{xx} = u_{tt} \qquad 0 < x < L; \quad t > 0 \tag{4.45}$$

A equação diferencial parcial (4.45) é chamada de equação de onda. Para o caso particular da vibração da corda o coeficiente a é dada pela relação:

$$a^2 = \frac{T}{\rho}$$

onde T é a tensão da corda e ρ é a massa por unidade de comprimento da corda. Assim, a tem unidade de velocidade e representa a velocidade de propagação das ondas ao longo da corda.

Outras suposições particulares para o problema: Para o problema em análise, deve-se ainda especificarse condições iniciais e/ou de contorno. Assim, especificamos o seguinte:

1. Condições de contorno:

   A corda tem suas extremidades fixas:

$$u(0,t) = 0 \qquad\qquad u(L,t) = 0 \qquad\qquad t \geq 0 \tag{4.46}$$

2. Condição iniciais:

   Devemos especificar a posição inicial da corda e sua velocidade inicial:

$$u(x,0) = f(x) \qquad\qquad 0 \leq x \leq L \tag{4.47}$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = u_t(x,0) = g(x) \qquad\qquad 0 \leq x \leq L \tag{4.48}$$

   onde $f(x)$ e $g(x)$ são funções conhecidas e dadas como parte do problema.

3. Condições adicionais:

   Para que as condições impostas sejam consistentes, deve-se cumprir adicionalmente o seguinte:

$$f(0) = f(L) = 0 \qquad\qquad g(0) = g(L) = 0 \qquad\qquad t > 0 \tag{4.49}$$

   já que a corda tem seus extremos fixos na posição zero e, estando fixas, a velocidade nos extremos da corda sempre é nula.

A solução da equação diferencial parcial chamada de **equação de onda** deve encontrar uma função $u(x,t)$ (a posição da corda em cada ponto x e para todo $t \geq 0$) que satisfaz (4.45), as condições de contorno (4.46) e as condições iniciais (4.47)-(4.48). Assim como no problema da equação de calor, o problema da equação de onda é um problema de condições de contorno na variável espacial x e um problema de valor inicial na variável temporal t. A forma matemática é a mesma para outras aplicações relacionados com movimentos tais como ondas acústicas e ondas eletromagnéticas.

O problema da equação de onda pode ser generalizado para duas e três dimensões assumindo a seguinte forma:

$$a^2(u_{xx} + u_{yy}) = u_{tt} \tag{4.50}$$

ou

$$a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = u_{tt} \tag{4.51}$$

e também devemos generalizar as condições de contorno.

A estratégia de solução também é o método de separação de variáveis. Assim, analisamos tipos particulares do problema da equação de onda.

4.5.1. Corda elástica com deslocamento inicial não nulo

Neste caso a corda é deslocada da posição de equilíbrio e solta em $t = 0$ com velocidade nula. Assim, a corda pode vibrar livremente. O deslocamento vertical $u(x,t)$ deve satisfazer as seguintes condições:

$$a^2\, u_{xx} = u_{tt} \qquad 0 < x < L \qquad t > 0 \tag{4.52}$$

$$u(0,t) = 0 \qquad u(L,t) = 0 \qquad t \geq 0 \tag{4.53}$$

$$u(x,0) = f(x) \qquad u_t(x,0) = 0 \qquad 0 \leq x \leq L \tag{4.54}$$

onde $f(x)$ deve fornecer informação da configuração da corda em $t = 0$. Usando o método de separação de variáveis temos o seguinte:

$$u(x,t) = X(x)\,T(t)$$

$$u_x = X^{'}(x)\,T(t) \Longrightarrow u_{xx} = X^{''}(x)\,T(t)$$

$$u_t = X(x)\,T^{'}(t) \Longrightarrow u_{tt} = X(x)\,T^{''}(t)$$

Substituíndo as relações anteriores em (4.52) temos o seguinte:

$$a^2 X^{''}(x)\,T(t) = X(x)\,T^{''}(t) \Longrightarrow \frac{X^{''}(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T^{''}(t)}{T(t)} = -\lambda \tag{4.55}$$

que podem ser separadas nas seguintes equações diferenciais independentes:

$$X^{''}(x) + \lambda\;\; X(x) = 0 \tag{4.56}$$

$$T^{''}(t) + a^2\;\lambda\;\; T(t) = 0 \tag{4.57}$$

Encontrando uma solução para (4.56):

Inicialmente devemos repassar as condições de contorno de (4.53) para a equação diferencial (4.56) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} u(0,t) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad 0 = X(0)\,T(t) \Longrightarrow X(0) = 0 \\ u(L,t) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad 0 = X(L)\,T(t) \Longrightarrow X(L) = 0 \end{aligned} \tag{4.58}$$

Assim, a solução da equação diferencial (4.56) sujeito às condições de contorno é um tipo de solução que já conhecemos e essa solução tem os seguintes autovalores:

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \qquad\qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{4.59}$$

e as seguintes autofunções (soluções):

$$X_n(x) = Sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{4.60}$$

Encontrando uma solução para (4.57):

Agora devemos encontrar uma solução para (4.57) sujeito às condições iniciais e a partir da solução encontrada para (4.56).

Usando a segunda condição inicial, isto é, $u_t(x,0) = 0$ temos o seguinte:

$$u_t(x,0) = X(x)\,T^{'}(0) = 0 \Longrightarrow T^{'}(0) = 0 \tag{4.61}$$

Também, usando o valor de λ encontrado em (4.59) resolvemos o sistema (4.57):

$$T_n^{''}(t) + \frac{n^2\pi^2a^2}{L^2} T_n(t) = 0 \tag{4.62}$$

A equação característica da equação diferencial anterior assume a seguinte forma:

$$r^2 + \frac{n^2\pi^2a^2}{L^2} = 0 \Longrightarrow r = \pm\left(\frac{n\pi\ a}{L}\right) i$$

que indica que as raizes são complexas conjugadas e, nesse caso, a solução geral assume a seguinte forma:

$$T_n(t) = k_1 Cos\left(\frac{n\pi a}{L}t\right) + k_2 Sen\left(\frac{n\pi a}{L}t\right) \tag{4.63}$$

Impondo a condição inicial (4.61) em (4.63) temos o seguinte:

$$T_n^{'}(t) = \left(\frac{n\pi a}{L}\right)\left[-k_1 Sen\left(\frac{n\pi a}{L}t\right) + k_2 Cos\left(\frac{n\pi a}{L}t\right)\right]$$

$T_n^{'}(0) = 0 = \left(\frac{n\pi a}{L}\right) k_2 \Longrightarrow k_2 = 0$. Assim, uma solução $T_n(t)$ é proporcional ao seguinte:

$$T_n(t) = Cos\left(\frac{n\pi a}{L}t\right)$$

Portanto, as funções que satisfazem a equação diferencial (4.52), as condições de contorno (4.53) e a segunda condição inicial de (4.54) assumem a seguinte forma:

$$u_n(x,t) = X_n(x)\,T_n(t) = Sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) Cos\left(\frac{n\pi a}{L}t\right) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{4.64}$$

que representam soluções fundamentais do problema. Falta satisfazer a primeira condição inicial de (4.54). Para satisfazer essa condição inicial vamos considerar uma superposição das soluções fundamentais mostradas em (4.64). Assim, $u(x,t)$ assume a seguinte forma:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n Sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) Cos\left(\frac{n\pi a}{L}t\right) \tag{4.65}$$

Para encontrar as constantes c_n usamos a seguinte condição inicial:

$$u(x,0) = f(x)$$

na solução mostrada em (4.65). Assim temos o seguinte:

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n Sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{4.66}$$

Portanto, os coeficientes c_n devem ser os coeficientes da série de Fourier em senos de $f(x)$ e com período $2L$. Assim temos o seguinte:

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\ Sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \qquad\qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{4.67}$$

Assim, a solução completa do problema (4.52)-(4.53)-(4.54) é a função $u(x,t)$ mostrada em (4.65) com os coeficientes c_n encontrados usando (4.67).

Observação importante:

Para um valor de n especificado a relação $Sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) Cos\left(\frac{n\pi a}{L}t\right)$ em (4.64) é periódica no tempo com período $\frac{2L}{na}$ (lembremos que $\frac{n\pi a}{L} = \omega = \frac{2\pi}{T} \Longrightarrow T = \frac{2L}{na}$). Assim, essa relação representa um movimento vibratório da corda com período $\frac{2L}{na}$. Portanto, $\omega_n = \frac{n\pi a}{L}$ representa as frequências naturais da corda. O fator $Sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ representa o padrão de deslocamento que ocorre na corda ao vibrar na frequência dada. Cada padrão de deslocamento é chamado de modo natural de vibração e é periódico na variável espacial x com período $\frac{2L}{n}$ que é chamado de comprimento de onda do modo de frequência natural $\frac{n\pi a}{L}$. Os três primeiros modos naturais são mostrados na figura 4.3.

Figura 4.3: Modos naturais na vibração de uma corda.

Exemplo 7: Movimento de uma corda elástica com deslocamento inicial não nulo.

Considere uma corda vibrante de comprimento $L = 30$ cm. que satisfaz a condição da equação de onda:

$$4u_{xx} = u_{tt} \qquad\qquad 0 < x < 30 \qquad t > 0 \tag{4.68}$$

As extremidades da corda estão fixas e a corda é colocada em movimento **sem velocidade inicial** e na seguinte posição inicial:

$$u(x,0)=f(x)=\begin{cases}\frac{x}{10} & 0\leq x\leq 10\\ \\ \frac{(30-x)}{20} & 10<x\leq 30\end{cases} \tag{4.69}$$

Encontrar a equação de deslocamento da corda $u(x,t)$.

Dados conhecidos: $a^2=4\Longrightarrow a=2$ e também $L=30$. Da mesma forma verificamos que $f(0)=f(30)=0$ e $u_t(x,0)=g(x)=0$. Portanto, a solução geral assume a seguinte forma:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n Sen\left(\frac{n\pi x}{30}\right)Cos\left(\frac{2n\pi}{30}t\right)$$

Os valores de c_n são encontrados usando a relação (4.67):

$$c_n=\frac{2}{30}\left\{\int_0^{10}\frac{x}{10}Sen\left(\frac{n\pi x}{30}\right)dx+\int_{10}^{30}\frac{(30-x)}{20}Sen\left(\frac{n\pi x}{30}\right)dx\right\}$$

$$c_n=\frac{1}{15}\left\{\int_0^{10}\frac{x}{10}Sen\left(\frac{n\pi x}{30}\right)dx+\int_{10}^{30}\frac{3}{2}Sen\left(\frac{n\pi x}{30}\right)dx-\int_{10}^{30}\frac{x}{20}Sen\left(\frac{n\pi x}{30}\right)dx\right\}$$

Precisamos conhecer o resultado da seguinte integral:

$$\int x\ \ Sen\left(\frac{n\pi x}{30}\right)dx$$

que pode ser facilmente integrada por partes fazendo o seguinte:

$u=x\Longrightarrow du=dx$

$dv=Sen\left(\frac{n\pi x}{30}\right)dx\Longrightarrow v=-\frac{30}{n\pi}Cos\left(\frac{n\pi x}{30}\right)$

Assim temos o seguinte:

$$\int x\ \ Sen\left(\frac{n\pi x}{30}\right)dx=-\frac{30}{n\pi}x\ Cos\left(\frac{n\pi x}{30}\right)+\int\frac{30}{n\pi}\ Cos\left(\frac{n\pi x}{30}\right)dx$$

$$\int x\ \ Sen\left(\frac{n\pi x}{30}\right)dx=-\frac{30}{n\pi}x\ Cos\left(\frac{n\pi x}{30}\right)+\left(\frac{30}{n\pi}\right)^2\ Sen\left(\frac{n\pi x}{30}\right)$$

O resultado encontrado pode ser usado para encontrar c_n da seguinte forma:

$$c_n=\frac{1}{15}\left\{\frac{1}{10}\left[-\frac{30}{n\pi}x\ Cos\left(\frac{n\pi x}{30}\right)+\left(\frac{30}{n\pi}\right)^2\ Sen\left(\frac{n\pi x}{30}\right)\right]_0^{10}+\frac{3}{2}\left[-\frac{30}{n\pi}\ Cos\left(\frac{n\pi x}{30}\right)\right]_{10}^{30}+\right.$$

$$\left.-\frac{1}{20}\left[-\frac{30}{n\pi}x\ Cos\left(\frac{n\pi x}{30}\right)+\left(\frac{30}{n\pi}\right)^2\ Sen\left(\frac{n\pi x}{30}\right)\right]_{10}^{30}\right\}$$

$$c_n = \frac{1}{15}\left\{\frac{1}{10}\left[-\frac{300}{n\pi}Cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \left(\frac{30}{n\pi}\right)^2 Sen\left(\frac{n\pi}{3}\right) + 0 - 0\right] + \frac{3}{2}\left[-\frac{30}{n\pi}\left(Cos(n\pi) - Cos(\frac{n\pi}{3})\right)\right]\right.$$

$$\left.-\frac{1}{20}\left[-\frac{900}{n\pi}Cos(n\pi) + \left(\frac{30}{n\pi}\right)^2 Sen(n\pi) + \frac{300}{n\pi}Cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) - \left(\frac{30}{n\pi}\right)^2 Sen\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right]\right\}$$

$$c_n = \frac{1}{15}\left[\frac{90}{(n\pi)^2}Sen\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \frac{45}{(n\pi)^2}Sen\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right] \Longrightarrow c_n = \frac{9}{(n\pi)^2}Sen\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

Assim, a solução geral $u(x,t)$ assume a seguinte forma:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{n^2\pi^2} Sen\left(\frac{n\pi}{3}\right) Sen\left(\frac{n\pi x}{30}\right)\ Cos\left(\frac{n\pi t}{15}\right)$$

$$u(x,t) = \left(\frac{9}{\pi^2}\right)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} Sen\left(\frac{n\pi}{3}\right) Sen\left(\frac{n\pi x}{30}\right)\ Cos\left(\frac{n\pi t}{15}\right)$$

A solução encontrada $u(x,t)$ é periódica no tempo com período $T = 30$ s. ($\omega = \frac{\pi}{15} = \frac{2\pi}{T} \Longrightarrow T = 30$ s.).

4.5.2. Corda elástica com velocidade inicial não nula

Neste caso vamos supor que a corda é colocada em movimento a partir de sua posição de equilíbrio ($f(x) = 0$) mas com uma velocidade inicial dada. Assim, a equação de deslocamento vertical $u(x,t)$ deve satisfazer as seguintes condições:

$$a^2 u_{xx} = u_{tt} \qquad 0 < x < L \qquad t > 0 \tag{4.70}$$

com as condições de contorno:

$$u(0,t) = 0 \qquad u(L,t) = 0 \qquad t \geq 0 \tag{4.71}$$

e as condições iniciais:

$$u(x,0) = 0 \qquad u_t(x,0) = g(x) \qquad 0 \leq x \leq L \tag{4.72}$$

onde $g(x)$ é a velocidade inicial da corda no ponto x.

Em relação ao problema da corda elástica com deslocamento inicial não nulo, analisado anteriormente, verificamos que não mudaram as condições de contorno. Entretanto, a condição inicial foi mudada. Assim temos o seguinte:

$$u(x,0) = 0 \Longrightarrow u(x,t) = X(x)\ T(t) \Longrightarrow u(x,0) = 0 = X(x)\ T(0) \Longrightarrow T(0) = 0 \tag{4.73}$$

Usando a mesma estratégia utilizada para resolver o caso em que a corda tem deslocamento inicial não nulo verificamos que a solução $X_n(x)$ assume a seguinte forma:

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \Longrightarrow X_n(x) = Sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Da mesma forma, a solução geral de $T_n(t)$ assume a seguinte forma:

$$T_n(t) = k_1 Cos\left(\frac{n\pi a}{L}t\right) + k_2 Sen\left(\frac{n\pi a}{L}t\right)$$

Com a condição inicial $T(0) = 0$ temos o seguinte:

$$T_n(0) = 0 = k_1 \Longrightarrow k_1 = 0$$

Portanto, a solução de $T_n(t)$ assume a seguinte forma genérica:

$$T_n(t) = Sen\left(\frac{n\pi a}{L}t\right)$$

A solução fundamental $u_n(x,t)$ assume a seguinte forma:

$$u_n(x,t) = X_n(x)\ T_n(t)$$

Para satisfazer a condição inicial (não homogênea) restante vamos supor que $u(x,t)$ pode ser representado como uma combinação linear das soluções fundamentais. Assim, $u(x,t)$ assume a seguinte forma:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n Sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\ \ Sen\left(\frac{n\pi a}{L}t\right) \tag{4.74}$$

Para encontrar os parâmetros k_n usamos a segunda condição inicial:

$$u_t(x,0) = g(x)$$

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi a}{L}\right) k_n Sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\ \ Cos\left(\frac{n\pi a}{L}t\right)$$

Das relações anteriores temos o seguinte:

$$u_t(x,0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi a}{L}\right) k_n Sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{4.75}$$

Portanto, os termos $\left(\frac{n\pi a}{L}\right) k_n$ são os coeficientes da série de Fourier em senos de $g(x)$ com período $2L$. Assim, temos o seguinte:

$$\left(\frac{n\pi a}{L}\right) k_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\ \ Sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{4.76}$$

Portanto, a solução da equação diferencial para a corda elástica com velocidade inicial não nula é a relação (4.74) com os coeficientes k_n obtidos de (4.76).

4.5.3. Solução geral para a corda elástica

O problema mais geral da equação diferencial para a corda elástica acontece quando o movimento é iniciado com a corda deslocada da posição de equilíbrio e com velocidade inicial não nula. Nessa forma geral devemos resolver o seguinte problema:

$$a^2 u_{xx} = u_{tt} \qquad 0 < x < L \qquad t > 0 \tag{4.77}$$

com as condições de contorno:

$$u(0,t) = 0 \qquad u(L,t) = 0 \qquad t \geq 0 \tag{4.78}$$

e as condições iniciais:

$$u(x,0) = f(x) \qquad u_t(x,0) = g(x) \tag{4.79}$$

$f(x)$ define a posição inicial da corda e $g(x)$ a velocidade inicial da corda. Este problema geral também pode ser resolvido usando o método de separação de variáveis mas pode ser resolvido mais facilmente usando o princípio da superposição.

A solução geral pode ser obtida apenas somando as soluções obtidas em 4.5.1 e 4.5.2 encontradas anteriormente. Para mostrar a validade da proposta consideremos que $v(x,t)$ é a solução do caso do deslocamento da corda com deslocamento inicial não nulo e seja $w(x,t)$ a solução do caso de deslocamento da corda com velocidade inicial não nula. Assim, a solução geral para o deslocamento vertical da corda assume a seguinte forma:

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t) \tag{4.80}$$

Vamos verificar que $u(x,t)$ de (4.80) satisfaz a relação:

$$a^2 u_{xx} = u_{tt} \Longrightarrow a^2 u_{xx} - u_{tt} = 0$$

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n Sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \ \ Cos\left(\frac{n\pi a}{L}t\right)$$

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n Sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \ \ Sen\left(\frac{n\pi a}{L}t\right)$$

$$a^2 u_{xx} - u_{tt} = a^2(v_{xx} + w_{xx}) - (v_{tt} + w_{tt}) = (a^2 v_{xx} - v_{tt}) + (a^2 w_{xx} - w_{tt}) \tag{4.81}$$

Derivando $v(x,t)$ temos o seguinte:

$$v_x = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{L}\right) c_n Cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \ \ Cos\left(\frac{n\pi a}{L}t\right) \Longrightarrow$$

$$v_{xx} = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 c_n Sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \ Cos\left(\frac{n\pi a}{L}t\right)$$

$$v_t = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi a}{L}\right) c_n Sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \ Sen\left(\frac{n\pi a}{L}t\right) \Longrightarrow$$

$$v_{tt} = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 c_n Sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \ Cos\left(\frac{n\pi a}{L}t\right)$$

Das relações anteriores podemos verificar facilmente que:

$$a^2 v_{xx} - v_{tt} = 0$$

Derivando $w(x,t)$ temos o seguinte:

$$w_x = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{L}\right) k_n Cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \ Sen\left(\frac{n\pi a}{L}t\right) \Longrightarrow$$

$$w_{xx} = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 k_n Sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \ Sen\left(\frac{n\pi a}{L}t\right)$$

$$w_t = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi a}{L}\right) k_n Sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \ Cos\left(\frac{n\pi a}{L}t\right) \Longrightarrow$$

$$w_{tt} = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 k_n Sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \ Sen\left(\frac{n\pi a}{L}t\right)$$

Das relações anteriores podemos verificar facilmente que:

$$a^2 w_{xx} - w_{tt} = 0$$

Assim, provamos que (4.81) assume a seguinte forma:

$$a^2 u_{xx} - u_{tt} = (a^2 v_{xx} - v_{tt}) + (a^2 w_{xx} - w_{tt}) = 0$$

Analisando as condições de contorno temos o seguinte:

$$u(0,t) = v(0,t) + w(0,t) = 0 + 0 = 0 \Longrightarrow u(0,t) = 0$$

$$u(L,t) = v(L,t) + w(L,t) = 0 + 0 = 0 \Longrightarrow u(L,t) = 0$$

Analisando as condições iniciais temos o seguinte:

$$u(x,0) = v(x,0) + w(x,0) = f(x) + 0 = f(x) \Longrightarrow u(x,0) = f(x)$$

$$u_t(x,0) = v_t(x,0) + w_t(x,0) = 0 + g(x) = g(x) \Longrightarrow u_t(x,0) = g(x)$$

Assim, $u(x,t)$ satisfaz todas as condições do problema geral. Portanto, a forma de $u(x,t)$ assume a seguinte forma:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n Sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \ \ Cos\left(\frac{n\pi a}{L}t\right) + \sum_{n=1}^{\infty} k_n Sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \ \ Sen\left(\frac{n\pi a}{L}t\right) \tag{4.82}$$

onde os coeficientes c_n e k_n são encontradas usando as seguintes relações:

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\ Sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\ dx \qquad n = 1,2,3,\ldots \tag{4.83}$$

$$k_n = \left(\frac{2}{n\pi a}\right)\int_0^L g(x)\ Sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\ dx \qquad n = 1,2,3,\ldots \tag{4.84}$$

Exemplo 8: Movimento de uma corda elástica com velocidade inicial não nula.

Considere uma corda elástica com comprimento $L = 10$ cm. e cujas extremidades são mantidas fixas. A corda é colocada em movimento **a partir de sua posição de equilíbrio** com a seguinte velocidade inicial:

$$u_t(x,0) = g(x) = \begin{cases} \frac{x}{5} & 0 \le x \le 5 \\ \frac{(10-x)}{5} & 5 < x \le 10 \end{cases}$$

Considerando $a = 1$ encontre a forma matemática de $u(x,t)$.

Para resolver o problema precisamos calcular apenas os valores de k_n. Assim, temos o seguinte:

$$\left(\frac{n\pi a}{L}\right) k_n = k_n^{'} = \left(\frac{2}{L}\right)\int_0^L g(x)\ Sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\ dx$$

$$k_n^{'} = \frac{2}{10}\left\{\int_0^5 \frac{x}{5}\ Sen\left(\frac{n\pi x}{10}\right)\ dx + \int_5^{10} \frac{(10-x)}{5}\ Sen\left(\frac{n\pi x}{10}\right)\ dx\right\}$$

$$k_n^{'} = \frac{1}{5}\left\{\frac{1}{5}\int_0^5 x\ Sen\left(\frac{n\pi x}{10}\right)\ dx + 2\int_5^{10} Sen\left(\frac{n\pi x}{10}\right)\ dx - \frac{1}{5}\int_5^{10} Sen\left(\frac{n\pi x}{10}\right)\ dx\right\}$$

Anteriormente já foi deduzida a seguinte integral:

$$\int x\ Sen\left(\frac{n\pi x}{10}\right)\ dx = -\left(\frac{10}{n\pi}\right)x\ Cos\left(\frac{n\pi x}{10}\right) + \left(\frac{10}{n\pi}\right)^2 Sen\left(\frac{n\pi x}{10}\right)$$

Usando a relação anterior temos o seguinte:

$$k_n^{'} = \frac{1}{5}\left\{\frac{1}{5}\left[-\left(\frac{10}{n\pi}\right)x\ Cos\left(\frac{n\pi x}{10}\right) + \left(\frac{10}{n\pi}\right)^2 Sen\left(\frac{n\pi x}{10}\right)\right]_0^5 + 2\left[-\left(\frac{10}{n\pi}\right)\ Cos\left(\frac{n\pi x}{10}\right)\right]_5^{10} + \right.$$

$$\left. -\frac{1}{5}\left[-\left(\frac{10}{n\pi}\right)x\ Cos\left(\frac{n\pi x}{10}\right) + \left(\frac{10}{n\pi}\right)^2 Sen\left(\frac{n\pi x}{10}\right)\right]_5^{10}\right\}$$

$$k_n^{'} = \frac{1}{5}\left\{\frac{1}{5}\left[-\frac{50}{n\pi}Cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \left(\frac{10}{n\pi}\right)^2 Sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] + 2\left[-\frac{10}{n\pi}\ Cos\left(n\pi\right) + \frac{10}{n\pi}\ Cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] + \right.$$

$$\left. -\frac{1}{5}\left[-\frac{100}{n\pi}Cos\left(n\pi\right) + \left(\frac{10}{n\pi}\right)^2 Sen\left(n\pi\right) + \frac{50}{n\pi}Cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \left(\frac{10}{n\pi}\right)^2 Sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]\right\}$$

$$k_n^{'} = \frac{1}{5}\left\{\frac{20}{(n\pi)^2}Sen\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{20}{(n\pi)^2}Sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right\} \Longrightarrow k_n^{'} = \frac{8}{(n\pi)^2}Sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Agora encontramos o valor de k_n:

$$\left(\frac{n\pi a}{L}\right)k_n = k_n^{'} = \frac{8}{(n\pi)^2}Sen\left(\frac{n\pi}{2}\right) \Longrightarrow \left(\frac{n\pi}{10}\right)k_n = \frac{8}{(n\pi)^2}Sen\left(\frac{n\pi}{2}\right) \Longrightarrow k_n = \frac{80}{n^3\pi^3}Sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

A solução $u(x,t)$ assume a seguinte forma geral:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n Sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\ \ Sen\left(\frac{n\pi a}{L}t\right)$$

Assim, substituíndo o valor de k_n, assim como os valores de $a = 1$ e $L = 10$ temos a seguinte solução do problema:

$$u(x,t) = \left(\frac{80}{\pi^3}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^3}\right) Sen\left(\frac{n\pi}{2}\right) Sen\left(\frac{n\pi x}{10}\right)\ \ Sen\left(\frac{n\pi t}{10}\right)$$

4.6. A equação de Laplace: Equação do potencial

A equação diferencial parcial conhecida como equação de Laplace assume a seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0 \Longrightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{4.85}$$

A equação de Laplace pode ainda ser analisada na forma tridimensional:

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$$

A equação diferencial de Laplace é um tipo de equação diferencial parcial que aparece em várias aplicações tais como:

- No problema de condução de calor com duas dimensões espaciais e quando a função de temperatura $u(x,y,t)$ chega a um estado estacionário, isto é, a temperatura não varia mais com o tempo.
- Na análise de campos eletrostáticos quando pretendemos analisar o potencial em um meio dielétrico sem cargas elétricas.
- Na análise da função potencial de uma partícula livre no espaço sob a ação de forças gravitacionais.

Observações: As seguintes observações são muito importantes:

1. O problema da equação do potencial não depende do tempo e, portanto, não existem condições iniciais no problema.
2. Devemos especificar as chamadas condições de contorno. Na análise mais geral realmente devemos especificar **uma condição de contorno para cada ponto da fronteira** da função $u(x,y)$ da região onde procuramos uma solução para $u(x,y)$.
3. Nesse contexto, a condição de contorno mais comum ocorre quando é **especificado o valor de** u em cada ponto da fronteira. No problema de condução de calor essa exigência equivale a especificar a temperatura nos extremos da barra metálica. Entretanto, a condição de contorno pode ser especificada de outras formas tais como a taxa de variação de u (a derivada ou taxa de variação de u na direção normal à fronteira) ou uma combinação de ambos.
4. Quando a condição de contorno em cada ponto da fronteira é dada especificando os valores de u então o problema resultante é chamado de problema de Dirichlet. Por outro lado, se são dados os valores da derivada normal na fronteira então o problema resultante é chamado de problema de Neumann.

4.6.1. O problema de Dirichlet em um retângulo

Neste caso devemos conhecer a condição de contorno em cada ponto da fronteira do retângulo especificando o valor de $u(x,y)$ em cada ponto dessa fronteira. Pretendemos encontrar $u(x,y)$ que satisfaz a equação de Laplace:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{4.86}$$

no retângulo $0 < x < a$, $0 < y < b$ e as condições de contorno:

$$\begin{array}{lll} u(x,0) = 0 & u(x,b) = 0 & 0 < x < a \\ u(0,y) = 0 & u(a,y) = f(y) & 0 \leq y \leq b \end{array} \tag{4.87}$$

onde $f(y)$ é uma função conhecida e dada para o intervalo $0 \leq y \leq b$. A figura 4.4 mostra o problema em análise.

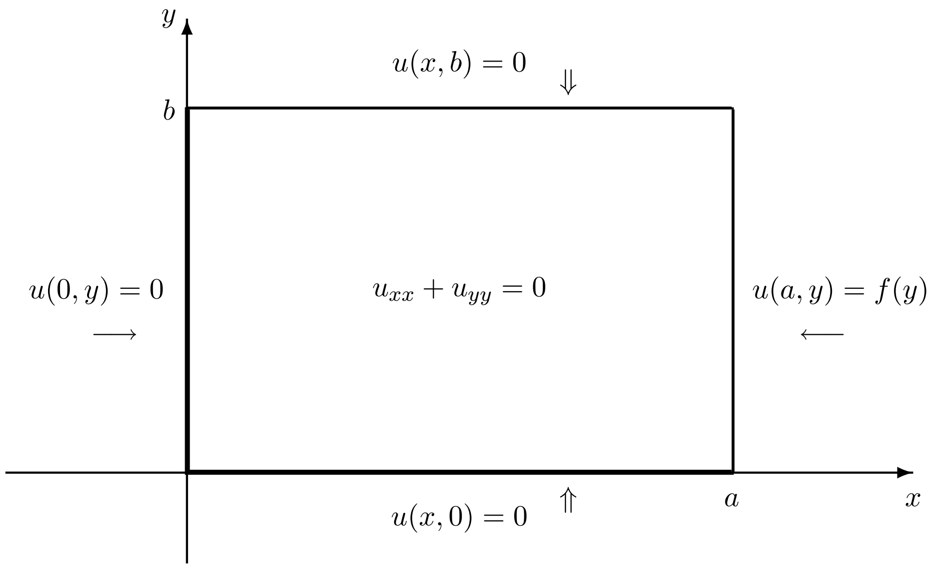

Figura 4.4: O problema de Dirichlet em um retângulo.

Neste caso também usamos o método de separação de variáveis para resolver a equação diferencial parcial. Assim, devemos construir um conjunto fundamental de soluções satisfazendo a equação diferencial parcial e as condições de contorno homogêneas. Depois fazemos a superposição dessas soluções para satisfazer a condição de contorno restante. Assim temos o seguinte:

$$u(x,y) = X(x)\ \ Y(y) \Longrightarrow$$

$$u_x = X^{'}(x)\, Y(y) \Longrightarrow u_{xx} = X^{''}(x)\, Y(y)$$
$$u_y = X(x)\, Y^{'}(y) \Longrightarrow u_{yy} = X(x)\, Y^{''}(y)$$

Substituíndo a relação anterior na relação (4.86) temos o seguinte:

$$X^{''}(x)\, Y(y) + X(x)\, Y^{''}(y) = 0 \Longrightarrow \frac{X^{''}(x)}{X(x)} = -\frac{Y^{''}(y)}{Y(y)} = \lambda$$

onde λ é a constante de separação. Assim, temos as duas equações diferenciais ordinárias:

$$X^{''}(x) - \lambda X(x) = 0 \tag{4.88}$$

$$Y^{''}(y) - \lambda Y(y) = 0 \tag{4.89}$$

As condições de contorno homogêneas são as seguintes:

$$\begin{aligned} u(x,0) = 0 \Longrightarrow \quad X(x)\,Y(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad Y(0) = 0 \\ u(x,b) = 0 \Longrightarrow \quad X(x)\,Y(b) = 0 \quad \Longrightarrow \quad Y(b) = 0 \end{aligned} \tag{4.90}$$

$$u(0,y) = 0 \Longrightarrow \quad X(0)\,Y(y) = 0 \quad \Longrightarrow \quad X(0) = 0 \tag{4.91}$$

A continuação devemos encontrar as soluções para $Y(y)$ e $X(x)$:

- Solução de $Y(y)$:
  De(4.89) e as condições de contorno (4.90) verificamos que a solução de $Y(y)$ assume a seguinte forma:

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \Longrightarrow \qquad Y_n(y) = Sen\left(\frac{n\pi}{b}\right) \tag{4.92}$$

- Solução de $X(x)$:
  Da solução de $Y(y)$ e de (4.88) temos o seguinte:
  A equação característica de (4.88) assume a seguinte forma:

$$r^2 - \lambda = 0 \Longrightarrow r^2 = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \Longrightarrow r = \pm\left(\frac{n\pi}{b}\right)$$

  Portanto, a forma matemática de $X_n(x)$ assume a seguinte forma:

$$X_n(x) = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)e^{\frac{n\pi x}{b}} + \frac{1}{2}(k_1 - k_2)e^{-\frac{n\pi x}{b}}$$

$$X_n(x) = k_1\left[\frac{1}{2}\left(e^{\frac{n\pi x}{b}} + e^{-\frac{n\pi x}{b}}\right)\right] + k_2\left[\frac{1}{2}\left(e^{\frac{n\pi x}{b}} - e^{-\frac{n\pi x}{b}}\right)\right]$$

$$X_n(x) = k_1 Cosh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) + k_2 Senh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \tag{4.93}$$

  Na relação anterior e usando (4.91) temos o seguinte:

$$X(0) = 0 \Longrightarrow X_n(0) = k_1 \Longrightarrow k_1 = 0$$

  Assim uma solução fundamental para $X(x)$ assume a seguinte forma:

$$X_n(x) = Senh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \tag{4.94}$$

Portanto, uma solução fundamental $u_n(x,y)$ assume a seguinte forma:

$$u_n(x,y) = Senh\left(\frac{n\pi x}{b}\right)\;\; Sen\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \qquad\qquad n = 1,2,3,\ldots \tag{4.95}$$

Usando a mesma estratégia usada para as outras equações diferenciais parciais encontramos uma solução geral para o problema de Dirichlet em um retângulo. Assim, para satisfazer a condição de contorno não homogênea em $x = a$ representamos a solução $u(x,y)$ como uma combinação linear das soluções fundamentais da seguinte forma:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\;\; u_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\;\; Senh\left(\frac{n\pi x}{b}\right)\;\; Sen\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{4.96}$$

em que os coeficientes c_n são obtidos pela condição de contorno:

$$u(a,y) = f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\;\; Senh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)\;\; Sen\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{4.97}$$

Portanto, os coeficientes $c_n Senh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)$ devem ser os coeficientes da série de Fourier em senos de $f(y)$ de período $2b$ e são dados pela seguinte relação:

$$c_n\; Senh\left(\frac{n\pi a}{b}\right) = \frac{2}{b}\int_0^b f(y)\;\; Sen\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\; dy \tag{4.98}$$

Portanto, a solução do problema de Dirichlet em um retângulo é representada por $u(x,y)$ apresentada em (4.96) e os coeficientes c_n são encontradas usando a relação (4.98).

Exemplo 9: Aplicação da equação de Dirichlet em um retângulo.

Resolver a equação de Laplace para os seguintes dados: $a = 3$, $b = 2$ e $f(y)$ dada pela relação:

$$f(y) = \begin{cases} y & 0 \leq y \leq 1 \\ \\ (2-y) & 1 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

A solução geral tem a seguinte estrutura:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\;\; Senh\left(\frac{n\pi x}{b}\right)\;\; Sen\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\;\; Senh\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\;\; Sen\left(\frac{n\pi y}{2}\right)$$

Encontramos os valores de c_n da seguinte forma:

$$c_n\; Senh\left(\frac{3n\pi}{2}\right) = c_n^{'} = \frac{2}{2}\int_0^b f(y)\;\; Sen\left(\frac{n\pi y}{2}\right)\; dy$$

Assim, encontramos inicialmente $c_n^{'}$:

$$c_n^{'} = \int_0^1 y\; Sen\left(\frac{n\pi y}{2}\right)\; dy + \int_1^2 (2-y)\; Sen\left(\frac{n\pi y}{2}\right)\; dy$$

$$c_n^{'} = \int_0^1 y\ Sen\left(\frac{n\pi y}{2}\right)\ dy + 2\int_1^2\ Sen\left(\frac{n\pi y}{2}\right)\ dy - \int_1^2 y\ Sen\left(\frac{n\pi y}{2}\right)\ dy$$

Para resolver a integral anterior devemos usar uma relação já analisada anteriormente e que assume a seguinte forma:

$$\int y\ Sen\left(\frac{n\pi y}{2}\right)\ dy = -\left(\frac{2}{n\pi}\right) y\ Cos\left(\frac{n\pi y}{2}\right) + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 Sen\left(\frac{n\pi y}{2}\right)$$

Usando a relação anterior encontramos a forma matemática de $c_n^{'}$:

$$c_n^{'} = \left[-\left(\frac{2}{n\pi}\right) y\ Cos\left(\frac{n\pi y}{2}\right) + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 Sen\left(\frac{n\pi y}{2}\right)\right]_0^1 + 2\left[-\left(\frac{2}{n\pi}\right)\ Cos\left(\frac{n\pi y}{2}\right)\right]_1^2 +$$

$$-\left[-\left(\frac{2}{n\pi}\right) y\ Cos\left(\frac{n\pi y}{2}\right) + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 Sen\left(\frac{n\pi y}{2}\right)\right]_1^2$$

$$c_n^{'} = \left[-\left(\frac{2}{n\pi}\right)\ Cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 Sen\left(\frac{n\pi}{2}\right) + 0 - 0\right] + 2\left[-\left(\frac{2}{n\pi}\right)\ Cos(n\pi) + \left(\frac{2}{n\pi}\right)\ Cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] +$$

$$-\left[-\left(\frac{4}{n\pi}\right)\ Cos(n\pi) + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 Sen(n\pi) + \left(\frac{2}{n\pi}\right)\ Cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 Sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

$$c_n^{'} = \left(\frac{8}{n^2\pi^2}\right) Sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Com o valor de $c_n^{'}$ conhecido encontramos o valor de c_n:

$$c_n^{'} = c_n\ Senh\left(\frac{3\pi n}{2}\right) \Longrightarrow \left(\frac{8}{n^2\pi^2}\right) Sen\left(\frac{n\pi}{2}\right) = c_n\ Senh\left(\frac{3\pi n}{2}\right) \Longrightarrow c_n = \left(\frac{8}{n^2\pi^2}\right) \frac{Sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{Senh\left(\frac{3\pi n}{2}\right)}$$

Finalmente, encontramos a solução geral:

$$u(x,y) = \left(\frac{8}{\pi^2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right) \left[\frac{Sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{Senh\left(\frac{3n\pi}{2}\right)}\right] Senh\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\ \ Sen\left(\frac{n\pi y}{2}\right)$$

4.7. Problemas propostos

1. Nos seguintes problemas determine se o método de separação de variáveis pode ser usado para substituir a equação diferencial parcial dada por um par de equações diferenciais ordinárias. Nesse caso, encontre as equações:

   a) $x\, u_{xx} + u_t = 0$

   b) $t\, u_{xx} + x\, u_t = 0$

   c) $u_{xx} + u_{xt} + u_t = 0$

   d) $[p(x)u_x]_x - r(x)u_{tt} = 0$

   e) $u_{xx} + (x+y)u_{yy} = 0$

   f) $u_{xx} + u_{yy} + xu = 0$

2. Considere a condução de calor em uma barra com 40 cm. de comprimento cujas extremidades são mantidas à temperatura 0^oC para todo $t > 0$. Nos seguintes problemas, encontre uma expressão para a temperatura $u(x,t)$ se a distribuição de temperatura inicial na barra é a função dada. Suponha que $\alpha^2 = 1$.

   a) $u(x,0) = 50, \qquad 0 < x < 40$

   b) $u(x,0) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 20 \\ (40-x) & 20 \leq x \leq 40 \end{cases}$

   c) $u(x,0) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 10 \\ 50 & 10 \leq x \leq 30 \\ 0 & 30 < x \leq 40 \end{cases}$

   d) $u(x,0) = x, \qquad 0 < x < 40$

3. Considere uma corda elástica de comprimento $L = 10$ cm. cujas extremidades são mantidas fixas. **A corda é colocada em movimento sem velocidade inicial** de uma posição inicial $u(x,0) = f(x)$. Nos seguintes problemas, com $a = 1$ encontre o deslocamento $u(x,t)$ para a posição inicial dada:

   a) $f(x) = \begin{cases} x/5 & 0 \leq x < 5 \\ (10-x)/5 & 5 \leq x \leq 10 \end{cases}$

   b) $f(x) = \begin{cases} 2x/5 & 0 \leq x < 2{,}5 \\ 1 & 2{,}5 < x < 7{,}5 \\ 2(10-x)/5 & 7{,}5 \leq x \leq 10 \end{cases}$

   c) $f(x) = x(10-x)^2/125$

   d) $f(x) = \begin{cases} 1 & 4 \leq x < 6 \\ 0 & 5\text{caso contrário} \end{cases}$

4. Considere uma corda elástica de comprimento $L = 10$ cm. cujas extremidades são mantidas fixas. **A corda é colocada em movimento a partir de sua posição de equilíbrio** com velocidade inicial $u_t(x, 0) = g(x)$. Nos seguintes problemas, com $a = 1$ encontre o deslocamento $u(x, t)$ para o $g(x)$ dado:

   a) $g(x) = \begin{cases} x/5 & 0 \leq x < 5 \\ (10 - x)/5 & 5 \leq x \leq 10 \end{cases}$

   b) $g(x) = \begin{cases} 2x/5 & 0 \leq x < 2{,}5 \\ 1 & 2{,}5 < x < 7{,}5 \\ 2(10 - x)/5 & 7{,}5 \leq x \leq 10 \end{cases}$

   c) $g(x) = x(10 - x)^2/125$

   d) $g(x) = \begin{cases} 1 & 4 \leq x < 6 \\ 0 & 5\text{caso contrário} \end{cases}$

5. (a) Encontre a solução $u(x, y)$ da equação de Laplace no retângulo $0 < x < a$, $0 < y < b$, que satisfaz as condições de contorno:

   $u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0, \quad 0 < y < b$

   $u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = g(x), \quad 0 \leq x \leq a$

   (b) Encontre a solução se:

   $g(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq a/2 \\ (a - x) & a/2 \leq x \leq a \end{cases}$

6. Encontre a solução $u(x, y)$ da equação de Laplace no retângulo $0 < x < a$, $0 < y < b$, que satisfaz as condições de contorno:

   $u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0, \quad 0 < y < b$

   $u(x, 0) = h(x), \quad u(x, b) = 0, \quad 0 \leq x \leq a$

7. Encontre a solução $u(x, y)$ da equação de Laplace no retângulo $0 < x < a$, $0 < y < b$, que satisfaz as condições de contorno:

   $u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = f(y), \quad 0 < y < b$

   $u(x, 0) = h(x), \quad u(x, b) = 0, \quad 0 \leq x \leq a$