



**UNIVERSITATEA POLITEHNICA  
DIN BUCUREŞTI**  
**FACULTATEA DE AUTOMATICĂ  
ŞI CALCULATOARE**



Departamentul de Automatică și Ingineria Sistemelor

# **Proiectarea filtrelor IIR prin metode de transformare**

## **Proiect PS**

**Autor:**

Student Badea Cătălin-Gabriel  
Grupa 331AC

**Coordonatori:**

Prof. dr. ing. Dan ȘTEFĂNOIU  
S.l. dr. ing. Vasilică VOINEA

**Anul universitar: 2025-2026**

## **Sumar**

Acest proiect abordează problema proiectării filtrelor numerice cu Răspuns Infinit la Impuls (IIR) utilizând metoda transformării filtrelor analogice prototip. Lucrarea analizează comparativ performanțele diverselor familii de filtre (Butterworth, Cebîșev de tip I și II, Cauer/Eliptic) în contextul satisfacerii unor specificații stricte de toleranță în domeniul frecvență (PPFTI). De asemenea, se studiază influența perioadei de eșantionare și a transformării biliniare asupra caracteristicilor filtrului digital rezultat, precum și o comparație cu filtrelor de tip FIR.

# Capitolul 1

## Obiectivele proiectului

Obiectivul principal al acestui proiect îl constituie aprofundarea și aplicarea metodelor de sinteză a filtrelor digitale de tip IIR (Infinite Impulse Response) plecând de la prototipuri analogice consacrate. Proiectul urmărește înțelegerea mecanismului de discretizare a filtrelor continue prin intermediul transformării biliniare și a efectelor acesteia asupra caracteristicilor spectrale.

Obiectivele specifice ale lucrării sunt:

- **Rezolvarea Problemei de Proiectare a Filtrelor cu Toleranțe Impuse (PPFTI):** Determinarea parametrilor optimi (ordinul filtrului  $M$  și pulsătia de tăiere  $\Omega_c$ ) pentru un filtru analogic care să satisfacă specificațiile dorite ( $\omega_p, \omega_s, \Delta_p, \Delta_s$ ) impuse în domeniul digital.
- **Studiul Transformării Biliniare:** Analiza modului în care transformarea variabilă  $s \rightarrow z$  influențează polii și zerourile sistemului, precum și conservarea caracteristicilor de amplitudine și fază. Se va analiza și o variantă modificată a acestei transformări.
- **Analiza comparativă a tipurilor de filtre:** Studiu performanțelor (ordin minim, comportamentul în benzile de trecere și stopare) pentrufiltrele:
  - Butterworth;
  - Cebîșev Tip I și Tip II;
  - Cauer/Eliptic.
- **Influența parametrilor de proiectare:** Investigarea dependenței funcției de transfer discrete de perioada de eșantionare  $T_s$  și analiza variației ordinului filtrului în funcție de toleranțele impuse.
- **Comparația IIR vs. FIR:** Evaluarea eficienței filtrelor IIR proiectate prin transformare față de filtrelle FIR obținute prin metoda ferestrei și metoda celor mai mici pătrate.
- **Extinderea algoritmului de proiectare:** Adaptarea metodei de proiectare pentru cazul filtrelor Butterworth cu amplificare staționară neunitară ( $H(0) \neq 1$ ).

# Capitolul 2

## Descrierea pașilor de implementare

Proiectul este structurat în patru faze distincte, fiecare abordând aspecte specifice ale proiectării și analizei filtrelor IIR. În continuare sunt descriși pașii care trebuie parcursi pentru atingerea obiectivelor propuse.

### 2.1 Faza 1: Proiectarea filtrelor Butterworth și analiza parametrilor

Această fază se concentrează pe implementarea algoritmului de proiectare pentru filtrul Butterworth și analiza sensibilității acestuia la parametrii de discretizare.

- **Pasul 1.a (Proiectarea de bază):** Se vor inițializa parametrii individuali de proiectare ( $\omega_p, \omega_s, \Delta_p, T_s$ ) apelând o funcție dedicată, furnizată fiecărui student apoi se va proiecta filtrul Butterworth discret utilizând transformarea biliniară clasică. Caracteristica de frecvență (spectru și fază) se trasează cu o rezoluție de 5000 de puncte, evidențiind încadrarea în benzile de toleranță și pulsătia de tăiere calculată.
- **Pasul 1.b (Transformarea biliniară modificată):** Se va modifica algoritmul pentru a utiliza o variantă a transformării biliniară definită prin relația  $s = \frac{1}{T_s} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ . Se vor genera grafice comparative (diferențe de spectru și fază) între filtrul obținut prin transformarea standard și cea modificată, calculând norma erorii.
- **Pasul 1.c (Dependența de  $T_s$ ):** Se va efectua un studiu teoretic și experimental privind dependența funcției de transfer de perioada de eșantionare. Se vor testa 8 valori diferite ale lui  $T_s$  (multipli și submultipli ai valorii inițiale) și se vor afișa rezultatele sub forma unor matrici de grafice  $4 \times 4$ , analizând erorile spectrale și de fază față de filtrul de referință.
- **Pasul 1.d (Variația toleranțelor):** Se va analiza impactul toleranțelor  $\Delta_p$  și  $\Delta_s$  asupra ordinului filtrului. Se vor testa 16 combinații de toleranțe, menținând pulsătiiile constante. Rezultatele vor fi sintetizate grafic pentru a evidenția compromisul dintre strictetea specificațiilor și complexitatea filtrului (ordinul  $M$ ).
- **Pasul 1.e (Comparația cu filtre FIR):** Se vor proiecta filtre FIR echivalente folosind metoda ferestrei (`fir1`) și metoda celor mai mici pătrate (`firls`). Se va determina iterativ ordinul minim necesar pentru cafiltrele FIR să respecte aceleasi toleranțe ca filtrul IIR și se va efectua o comparație a performanțelor (ordin, spectru).

## 2.2 Faza 2: Filtre Cauer, Cebîșev și analiză comparativă

În această etapă se va extinde aria de analiză către alte tipuri de filtre IIR, modificând specificațiile de proiectare ( $\Delta_s = 2\Delta_p$ ).

- **Pasul 2.a (Filtrul Eliptic/Cauer):** Se va reproiecta filtrul **Butterworth** pentru noile specificații, ordinul minim al acestuia constituind punctul de plecare pentru tot restul acestei faze.

Apoi, se va utiliza funcția `ellip` pentru a proiecta un filtru eliptic. Deoarece funcția nu permite specificarea directă a lui  $\omega_s$ , se va implementa o buclă de căutare pentru a găsi ordinul minim care satisface toleranțele impuse.

- **Pasul 2.b (Filtrele FIR):** Se vor reproiecta șifiltrele FIR pentru noile specificații și se va realiza un clasament empiric al celor mai bune filtre, bazat pe un compromis între ordinul redus și comportamentul spectral.
- **Pasul 2.c (Filtrele Cebîșev):** Similar, se vor utiliza funcțiile `cheby1` și `cheby2` pentru a proiecta filtrele Cebîșev de tip I și II. Rezultatele vor fi integrate în analiza comparativă.

## 2.3 Faza 3: Concurs de proiectare

Se va urmări obținerea celui mai eficient filtru (cu număr minim de coeficienți) pentru un set nou de specificații, în vederea identificării celor mai bune performanțe obținute de studenți.

- Se va defini un criteriu de performanță original care ponderează ordinul filtrului și distanța față de caracteristica ideală, pentru a putea departaja filtrele propuse.
- Se vor proiecta și optimiza cele 4 tipuri de filtre IIR analogice adaptate prin transformarea biliniară.
- Rezultatele (spectre, ordine, tipuri) vor fi afișate comparativ într-o matrice grafică, ordonate după performanță.

## 2.4 Faza 4: Proiectarea filtrelor cu câștig neunitar (Supliment)

Această fază presupune modificarea fundamentelor teoretice ale algoritmului de proiectare Butterworth.

- Se vor deduce analitic noile relații pentru ordinul minim  $M$  și pulsăția de tăiere  $\Omega_c$  în condițiile în care  $|H(0)| = 1 + \Delta_p$ .
- Se va implementa algoritmul modificat și se va verifica prin simulare că filtrul rezultat respectă noile condiții de amplificare staționară, păstrând forma caracteristicii Butterworth.

# Capitolul 3

## Modul de abordare

### 3.1 Faza 1: Proiectarea filtrelor Butterworth și analiza parametrilor

Pentru început, aşa cum am menționat, vom aborda această fază folosind specificațiile de proiectare obținute din funcția *PS\_PRJ\_3\_Faza\_1a(ng,ns)* primită în cadrul laboratorului aferent (unde  $n_g$  și  $n_s$  sunt parametri specifici fiecărui student, în acest caz  $n_g = 3$  și  $n_s = 15$ ), și anume:

$$\begin{aligned}\Delta_p &= 0.0723 \\ \Delta_s &= 0.0723 \\ \omega_p &= 1.2295 \\ \omega_s &= 1.3485 \\ T_s &= 2.2757\end{aligned}$$

Acești parametri sunt memorati și încărcați cu ajutorul script-ului *DateProblema.m*. Graficele prezentate sunt calculate și reprezentate cu o rezoluție de 5000 de puncte.

Am definit 4 funcții, folosite pe tot parcursul proiectului, care plotează spectrele filtrelor (atât liniar cât și în dB) și fazele lor, alături de benzile de toleranțe specifice problemei. Optional se poate afișa și verticala corespunzătoare lui  $\omega_c$ . În cazul filtrelor Butterworth, punctul de la 0.707 corespunzător lui  $\omega_c$  este marcat cu un *x* de culoare mov.

Ordinul filtrului, și optional, perioada de eșantionare acolo unde este cazul, sunt afișate în partea stângă a figurii.

Fazele au fost reprezentate utilizând funcția *unwrap*, pentru eliminarea discontinuităților artificiale de tip  $2\pi$  și o mai bună interpretare a comportamentului acesteia.

De asemenea, vom avea nevoie să plotăm vectori de eroare pentru comparații, deci am definit și o funcție care va face asta. În colțul din stânga sus se poate observa norma acestui vector.

Codul aferent acestei secțiuni se află în scriptul *Faza1.m*.

O listă în fișierul *Library.txt* prezintă toate funcțiile utilizate în cadrul proiectului, împreună cu semnăturile lor, plus câte o scurtă descriere. Pentru explicații detaliate se pot consulta headerele acestora în arhivă.

### 3.1.a) Proiectare de bază

Primul filtru analizat este *Butterworth*. Pentru caclulul filtrului minimal vom folosi teoria prezentată la curs, implementată prin funcția *But\_FTI.m*, furnizată de asemenea în cadrul laboratorului.

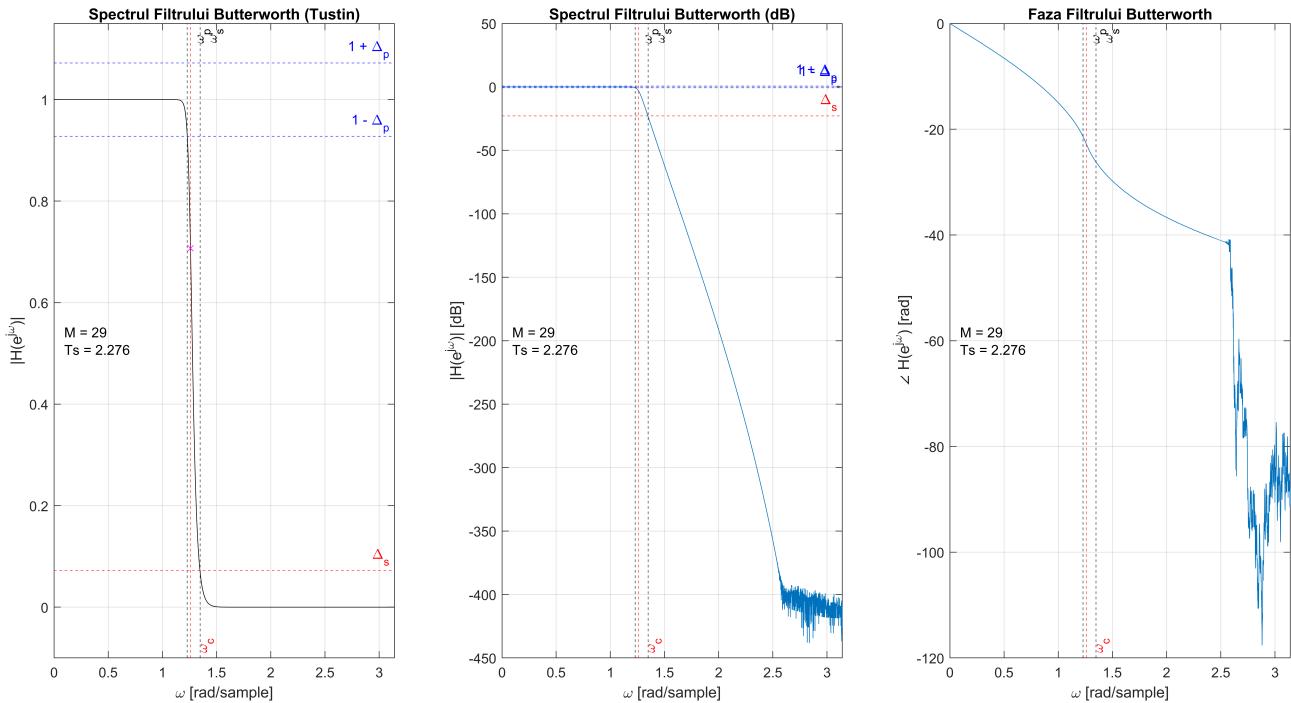


Figura 3.1: Răspunsul filtrului Butterworth utilizând transformarea biliniară Tustin

Figura 3.1 prezintă răspunsul obținut, unde se poate constata vizual încadrarea în toleranțele impuse. Pentru o analiză mai detaliată, am actualizat această funcție (*But\_FTI\_detailed.m*), returnând odrinul găsit și pulsăția de tăiere  $\Omega_c$ . Corespondența acestei pulsății în domeniul discret este calculat cu ajutorul transformării biliniare (Tustin):

$$\omega_c = 2 \arctan\left(\frac{\Omega_c T_s}{2}\right) \quad (3.1)$$

Rezultatul a fost afișat în consolă:

```
Faza 1 a):
(TUSTIN) M = 29, Omega_c = 0.64026 omega_c = 1.2592
```

#### Observații importante:

- Spectrul filtrului Butterworth este maxim plat, neprezentând nici un fel de fenomen Gibbs, costul fiind ordinul relativ mare al său. Acest lucru generează o fază cât mai netedă posibil, ceea ce este de dorit, filtrele IIR neputând avea fază perfect liniară prin definiția lor.
- În cazul plotului în dB, pentru valorile de după pulsăția de 2.5, graficul prezintă un aspect neregulat. Acest lucru nu reprezintă un fenomen fizic real, ci este efectul erorilor numerice. Magnitudinea filtrului Butterworth tinde teoretic spre zero în banda de oprire, iar valorile foarte mici, trecute prin logaritm, generează aceste deviații vizibile. Atenuările extreme, de ordinul -400 dB, reflectă limitele de precizie numerică, nu comportamentul fizic al filtrului.

### 3.1.b) Transformarea biliniară modificată

Studiul nostru se va axa acum pe un alt tip de transformare, și anume cea de tip Pseudo-Tustun, care se exprimă prin:

$$s = \frac{1}{T_s} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (3.2)$$

Pentru a putea realiza acest studiu, mai întâi trebuie să reluăm toti pașii de proiectare ai filtrelor Butterworth, conform teoriei:

Pornind de la relația de definiție, vom exprima  $z$  în funcție de  $s$ :

$$s = \frac{1}{T_s} \frac{z - 1}{z + 1}$$

$$sT_s(z + 1) = z - 1$$

$$z \cdot sT_s + sT_s = z - 1$$

$$z(sT_s - 1) = -(1 + sT_s)$$

$$z = -\frac{1 + sT_s}{sT_s - 1} = \frac{1 + sT_s}{1 - sT_s}$$

Pentru a găsi relația dintre frecvențe, înlocuim  $z = e^{j\omega}$  și  $s = j\Omega$ :

$$e^{j\omega} = \frac{1 + j\Omega T_s}{1 - j\Omega T_s}$$

Amplificăm cu conjugata numitorului:

$$e^{j\omega} = \frac{(1 + j\Omega T_s)^2}{(1 - j\Omega T_s)(1 + j\Omega T_s)} = \frac{1 + 2j\Omega T_s - \Omega^2 T_s^2}{1 + \Omega^2 T_s^2} = \frac{1 - \Omega^2 T_s^2}{1 + \Omega^2 T_s^2} + j \frac{2\Omega T_s}{1 + \Omega^2 T_s^2}$$

Stim că  $e^{j\omega} = \cos \omega + j \sin \omega$ . Egalând partea reală:

$$\cos \omega = \frac{1 - \Omega^2 T_s^2}{1 + \Omega^2 T_s^2}$$

Folosind identitatea trigonometrică  $\cos \omega = \frac{1 - \tan^2(\frac{\omega}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\omega}{2})}$ :

$$\frac{1 - \tan^2(\frac{\omega}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\omega}{2})} = \frac{1 - (\Omega T_s)^2}{1 + (\Omega T_s)^2}$$

Prin identificare rezultă:

$$\begin{aligned} \tan^2\left(\frac{\omega}{2}\right) &= (\Omega T_s)^2 \Rightarrow \tan\left(\frac{\omega}{2}\right) = \Omega T_s \\ \Rightarrow \frac{\omega}{2} &= \arctan(\Omega T_s) \\ \Rightarrow \omega &= 2 \arctan(\Omega T_s) \end{aligned}$$

Sau invers, frecvența analogică în funcție de cea digitală:

$$\Omega = \frac{1}{T_s} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

## Pasul 1: Definirea parametrilor

$$\Omega_p = \frac{1}{T_s} \tan\left(\frac{\omega_p}{2}\right)$$

$$\Omega_s = \frac{1}{T_s} \tan\left(\frac{\omega_s}{2}\right)$$

Căutăm  $M$  și  $\Omega_c$  pentru filtrul analogic Butterworth. Impunem condițiile:

$$\begin{cases} |H(j\Omega_p)| \geq M_p = 1 - \Delta_p \\ |H(j\Omega_s)| \leq \Delta_s \end{cases}$$

Funcția de transfer în modul pătrat pentru Butterworth:

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2M}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\frac{1}{T_s} \tan(\frac{\omega}{2})}{\frac{1}{T_s} \tan(\frac{\omega_c}{2})}\right)^{2M}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\tan(\frac{\omega}{2})}{\tan(\frac{\omega_c}{2})}\right)^{2M}}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

*Notă: Aici, datorită simplificărilor, formula spectrului (densitatea spectrului de putere) este aceeași cu cea din cazul Transformării Biliniare, deși maparea frecvențelor are altă formulă.*

## Pasul 2: Determinarea parametrilor $M$ și $\Omega_c$

Avem deci inegalitățile:

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2M}} \geq M_p^2 \quad (3.3)$$

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2M}} \leq \Delta_s^2 \quad (3.4)$$

Din (3.3), izolând termenul cu frecvențele:

$$1 + \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2M} \leq \frac{1}{M_p^2}$$

$$\left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2M} \leq \frac{1 - M_p^2}{M_p^2}$$

Logaritmăm:

$$2M[\log(\Omega_p) - \log(\Omega_c)] \leq \log\left(\frac{1 - M_p^2}{M_p^2}\right) \quad (3.5)$$

Analog pentru a doua inegalitate (banda de stop):

$$2M[\log(\Omega_s) - \log(\Omega_c)] \geq \log\left(\frac{1 - \Delta_s^2}{\Delta_s^2}\right) \quad (3.6)$$

Scăzând (3.6) din (3.5) îl putem obține pe M:

$$2M(\log \Omega_s - \log \Omega_c) - 2M(\log \Omega_p - \log \Omega_c) \geq \log \frac{1 - \Delta_s^2}{\Delta_s^2} - \log \frac{1 - M_p^2}{M_p^2}$$

$$2M [(\log \Omega_s - \log \Omega_c) - (\log \Omega_p - \log \Omega_c)] \geq \log \frac{1 - \Delta_s^2}{\Delta_s^2} - \log \frac{1 - M_p^2}{M_p^2}$$

$$2M(\log \Omega_s - \log \Omega_p) \geq \log \frac{1 - \Delta_s^2}{\Delta_s^2} - \log \frac{1 - M_p^2}{M_p^2}$$

Transformăm diferența de logaritmi în logaritm de raport:

$$2M \log \frac{\Omega_s}{\Omega_p} \geq \log \left( \frac{1 - \Delta_s^2}{\Delta_s^2} \cdot \frac{M_p^2}{1 - M_p^2} \right)$$

$$M \geq \frac{\log \left( \frac{1 - \Delta_s^2}{\Delta_s^2} \cdot \frac{M_p^2}{1 - M_p^2} \right)}{2 \log \frac{\Omega_s}{\Omega_p}}$$

(3.7)

Pentru a afla  $\Omega_c$ , impunem egalitate la marginea benzii de trecere:

$$\left( \frac{\Omega_p}{\Omega_c} \right)^{2M} = \frac{1 - M_p^2}{M_p^2}$$

$$\frac{\Omega_p}{\Omega_c} = \sqrt[2M]{\frac{1 - M_p^2}{M_p^2}}$$

$$\Omega_c = \frac{\Omega_p}{\sqrt[2M]{\frac{1 - M_p^2}{M_p^2}}}$$

(3.8)

Până în acest punct, ecuațiile ar rămas aceleiasi ca și în cazul transformării biliniare.

### **Pasul 3: Construim filtrul Butterworth discret**

Aplicăm transformarea Pseudo-Tustin asupra celui continuu. Funcția de transfer analogică:

$$H(s) \cdot H(-s) = \frac{1}{1 + \left( \frac{s}{j\Omega_c} \right)^{2M}}, \quad \text{deoarece } s = j\Omega \Rightarrow \Omega = \frac{s}{j}$$

Polii sunt în număr de  $2M$  și sunt plasați pe cercul de rază  $\Omega_c$ . Pentru  $H(s)$  păstrăm polii cu partea reală negativă (pentru stabilitate):

$$s_m = \Omega_c e^{j \frac{(2m-1+M)\pi}{2M}}, \quad m = 1, \dots, M$$

Însă aici  $\Omega_C$  este cel determinat la Pasul 1.

Funcția de transfer analogică este:

$$H(s) = (-1)^M \frac{\prod_{m=1}^M s_m}{\prod_{m=1}^M (s - s_m)}$$

Aplicăm discretizarea  $s = \frac{1}{T_s} \frac{z-1}{z+1}$  pentru a obține  $G(z)$ :

$$G(z) = (-1)^M \frac{\prod_{m=1}^M s_m}{\prod_{m=1}^M \left( \frac{1}{T_s} \frac{z-1}{z+1} - s_m \right)}$$

Aducem la același numitor, amplificăm cu  $T_s(z + 1)$ :

$$G(z) = (-1)^M \frac{\prod_{m=1}^M s_m}{\prod_{m=1}^M \frac{(z-1) - s_m T_s(z+1)}{T_s(z+1)}} = (-1)^M \frac{\prod_{m=1}^M s_m T_s(z+1)}{\prod_{m=1}^M [(z-1) - s_m T_s(z+1)]}$$

Grupăm termenii cu  $z$  la numitor:

$$G(z) = (-1)^M \frac{\prod_{m=1}^M s_m T_s(z+1)}{\prod_{m=1}^M [z - 1 - s_m T_s z - s_m T_s]} = (-1)^M \frac{\prod_{m=1}^M s_m T_s(z+1)}{\prod_{m=1}^M [z(1 - s_m T_s) - (1 + s_m T_s)]}$$

Scoatem factor comun forțat pe  $(1 - s_m T_s)$  de la numitor:

$$G(z) = (-1)^M \frac{\prod_{m=1}^M s_m T_s(z+1)}{\prod_{m=1}^M (1 - s_m T_s) \left( z - \frac{1 + s_m T_s}{1 - s_m T_s} \right)}$$

Apoi grupăm termenii constanți:

$$G(z) = (-1)^M \left( \prod_{m=1}^M \frac{s_m T_s}{1 - s_m T_s} \right) \frac{(z+1)^M}{\prod_{m=1}^M \left( z - \frac{1 + s_m T_s}{1 - s_m T_s} \right)}$$

Ca să aducem la forma standard (în care G este exprimat în  $z^{-1}$ ), vom împărți toată cuația la  $z$ :

$$G(z) = \frac{(-1)^M \left( \prod_{m=1}^M \frac{s_m T_s}{1 - s_m T_s} \right) (1 + z^{-1})^M}{\prod_{m=1}^M \left( 1 - z^{-1} \frac{1 + s_m T_s}{1 - s_m T_s} \right)}$$

(3.9)

Aceasta este forma finală a ecuației lui  $G(z)$ . După cum putem observa, formula este similară transformării Tustin, însă în loc de factorul 2, acum avem 1, lucru care era de așteptat.

**Diferențe:** Transformarea Pseudo-Tustin păstrează stabilitatea sistemului, însă scalarea axei frecvențelor nu este identică cu cea a transformării biliniară clasice, fiind aproximativ la jumătate:

$$\left( \frac{1}{T_s} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \text{ în loc de } \frac{2}{T_s} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)$$


---

În continuare vrem să analizăm spectrul acestui filtru. Pentru asta am modificat formulele funcției *But\_FTI* (implementată în noua funcție *But\_FTI\_PseudoTustin*). Figura (3.2) prezintă aceste rezultate.

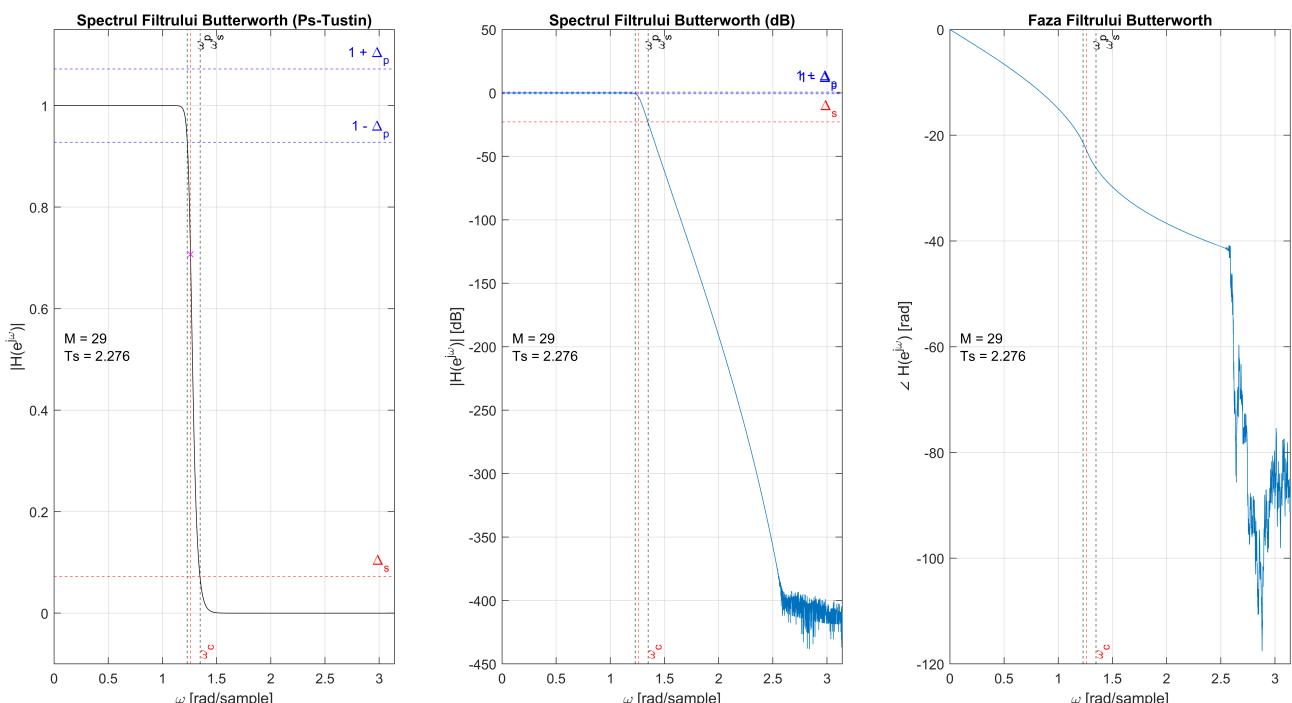


Figura 3.2: Răspunsul filtrului Butterworth utilizând transformarea Pseudo-Tustin

Observațiile anterioare se aplică și pentru filtrul Butterworth analizat aici. Deoarece specetrele par similare, efectuăm o analiză mai riguroasă prin calcularea normei vectorului diferenței dintre cele două spectre.

Această analiză comparativă este ilustrată în Figura (3.3). Se observă că cele două spectre coincid perfect, confirmând că, deși metodele de discretizare diferă, filtrul rezultat este același. În plus, norma diferenței dintre coeficienții celor două filtre ( $a$  și  $b$ , în domeniul timp) este zero, ceea ce demonstrează, de asemenea, identitatea completă a filtrelor. Rezultatul a fost afișat în consolă:

Faza 1 b):

(PS-TUSTIN)  $M = 29$ ,  $\Omega_c = 0.32013$   $\omega_c = 1.2592$

Diferența dintre coeficienții calculația:

Norma diferenței coeficienților  $b$ : 0

Norma diferenței coeficienților  $a$ : 0

Încă un aspect important de menționat este că pulsătia de tăiere analogică  $\Omega_c$  pentru transformarea Pseudo-Tustin este aproximativ jumătate din cea obținută prin transformarea Tustin clasică. Totuși, frecvența discretă  $\omega_c$  rămâne identică, deoarece filtrele rezultante sunt aceleași. Această diferență se explică prin scalarea axei frecvențelor în Pseudo-Tustin, unde factorul de conversie analog-digital este  $1/T_s$  în loc de  $2/T_s$ .

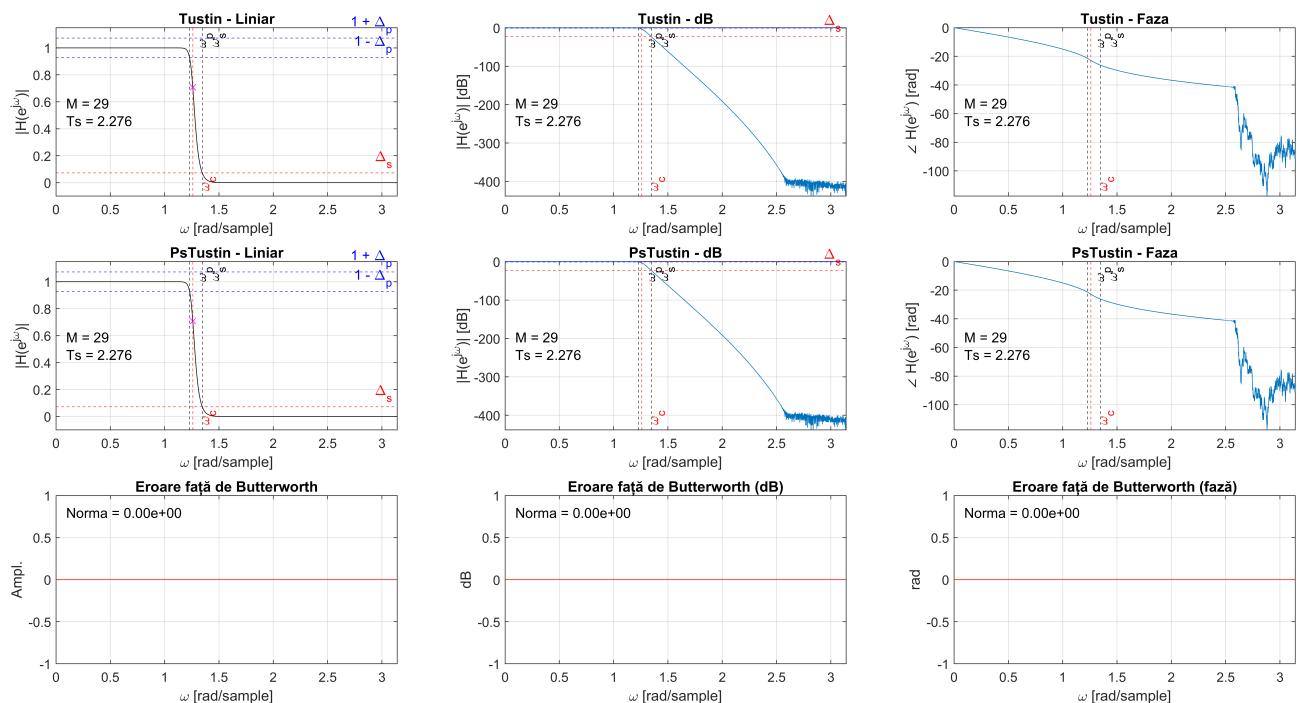


Figura 3.3: Comparația dintre filtrele Butterworth proiectate prin Tustin și Pseudo-Tustin

### 3.1.c) Dependența de $T_s$

Dorim mai departe să analizăm influența perioadei de eșantionare asupra filtrului construit.

Pentru început, vom căuta acest răspuns în mod empiric, prin analiza mai multor filtre construite pentru aceleasi specificații, dar cu perioade de eșantionare diferite. Vom păstra ca etalon de comparație filtrul construit la punctul  $a)$ , cu perioada de eșantionare  $T_s$ , și vom genera încă 8 filtre, având  $T_s^{(c)} \in \{0.1 T_s, \frac{1}{4} T_s, \frac{1}{2} T_s, \frac{3}{4} T_s\}$  pentru valori mai mici, respectiv  $T_s^{(c)} \in \{\frac{5}{4} T_s, \frac{7}{4} T_s, \frac{9}{4} T_s, 3 T_s\}$ .

Similar ca la punctul precedent, afișăm graficele în decibeli împreună cu fazele lor pe câte o coloană. Pe pagina următoare sunt afișate cele două seturi de grafice, în figurile (3.4) și (3.5). Dedesubt, eroarea diferenței noului filtru față de cel inițial (în axa liniară), alături de cea a fazelor este prezentat.

#### Observații importante:

- **Analiza erorilor de amplitudine:** Erorile observate în spectrele de amplitudine sunt de ordinul  $10^{-9}$  sau mai mici. Această valoare se situează la limita preciziei numerice a calculelor în virgulă mobilă. Vârfurile de eroare observate în jurul frecvențelor de tăiere  $\omega_p$  și  $\omega_s$  se explică prin panta foarte abruptă a caracteristicii în acele puncte. Variatii mici (cauzate de rotunjiri numerice diferite pentru valori diferite ale lui  $T_s$ ) se traduc printr-o diferență vizibilă pe axa amplitudinii. Totuși, fizic, filtrele sunt considerate identice.
- **Analiza erorilor de fază:** Erorile mari de fază care apar la frecvențe înalte nu reprezintă o divergență reală a filtrelor, ci sunt artefacte de calcul: diferențe numerice infime pot face ca un filtru să aibă o fază de  $-\pi + \epsilon$ , iar celălalt de  $\pi - \epsilon$ . Deși punctele sunt geometrice identice pe cercul unitate, diferența algebrică este de  $2\pi$ . Funcția *unwrap* poate interpreta aceste salturi diferit, cumulând erori de  $2k\pi$ .

De asemenea, pentru frecvențele medii și joase eroarea fazări este 0, ceea ce ne confirmă încă odată că problemele apar din cauza unor aproximări.

**Concluzie:** Putem afirma că forma caracteristicii de frecvență a unui filtru digital obținut prin transformarea binară **nu depinde** de perioada de eșantionare  $T_s$ , atât timp cât specificațiile de proiectare ( $\omega_p, \omega_s$ ) sunt date direct în domeniul digital. (Cel puțin pentru transformările similare cu Tustin. Pentru alte cazuri trebuie studiat, dar nu face aici obiectul proiectului, deși intuitiv, ne aşteptăm ca această proprietate să nu se păstreze).

Astfel, vom dori să demonstrăm această ipoteză într-o manieră riguroasă, în cele ce urmează mai jos.

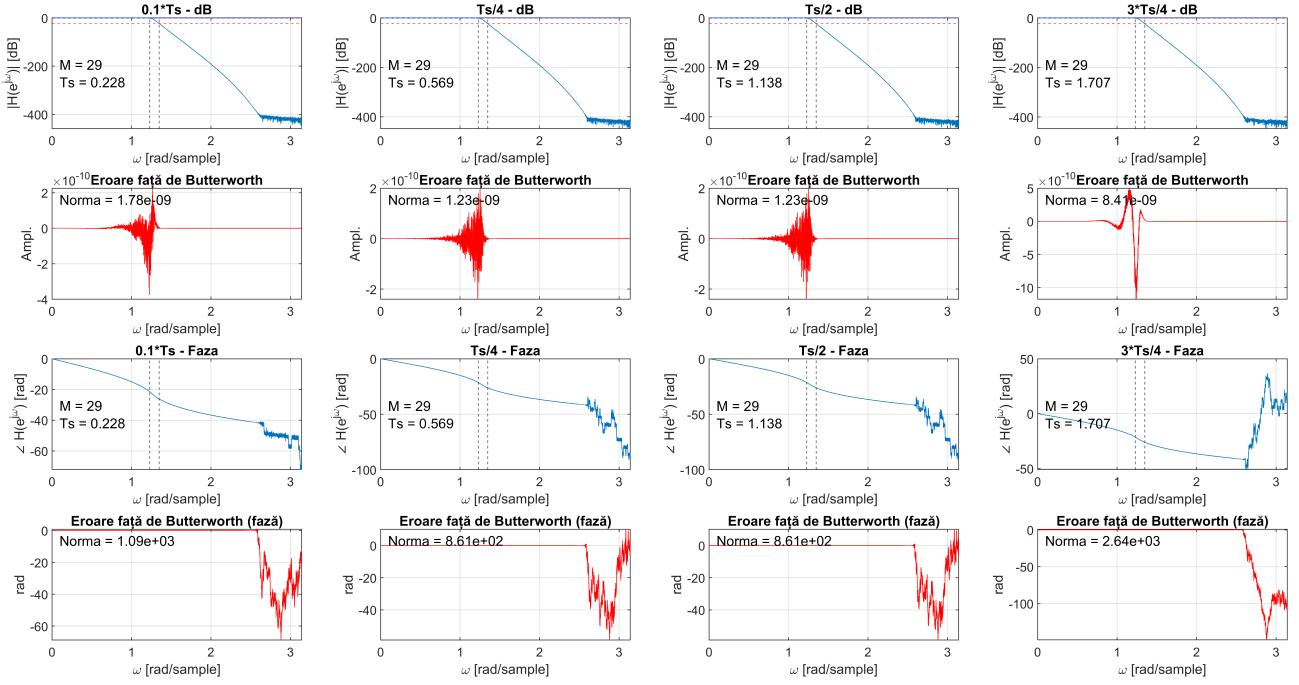


Figura 3.4: Analiza influenței perioadei de eşantionare pentru valori  $T_s^{(c)} < T_s$

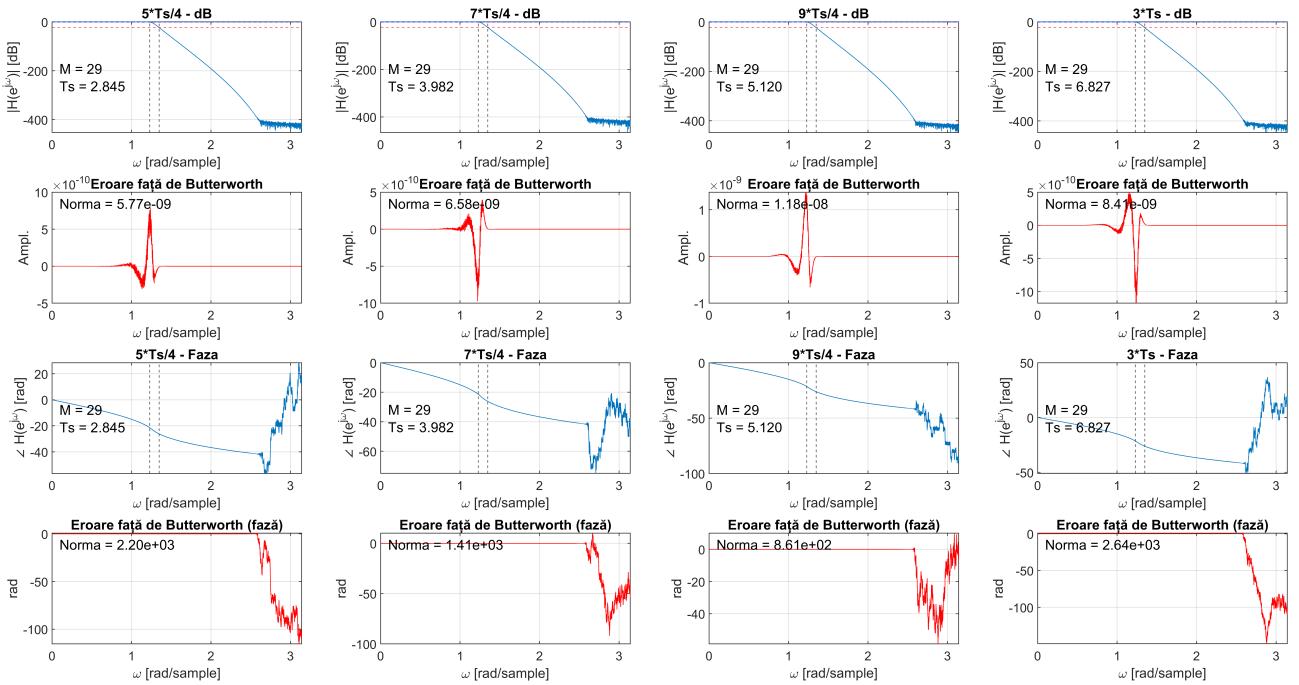


Figura 3.5: Analiza influenței perioadei de eşantionare pentru valori  $T_s^{(c)} > T_s$

## Demonstrația independentei de $T_s$

Putem demonstra invarianța filtrului la perioada de eşantionare  $T_s$  analizând expresia funcției de transfer în modul pătrat. Pornim de la caracteristica filtrului analogic Butterworth de ordinul  $M$ :

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2M}} \quad (3.10)$$

Trecem în domeniul discret folosind transformarea bilinară, deci avem:

$$\begin{aligned} s &= \frac{2}{T_s} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}, \quad s = j\Omega \\ \implies \Omega &= \frac{1}{j T_s} \frac{2}{1 + z^{-1}} \end{aligned}$$

Formula pulsării de tăiere este:

$$\Omega_c = \frac{2}{T_s} \tan\left(\frac{\omega_c}{2}\right)$$

Deci înlocuind în (3.10) obținem:

$$|G(z)|^2 = \frac{1}{1 + \left[ \frac{\frac{1}{j} \cdot \frac{2}{T_s} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}}{\frac{2}{T_s} \cdot \tan\left(\frac{\omega_c}{2}\right)} \right]^{2M}}$$

Se observă clar că termenul  $\frac{2}{T_s}$  apare atât la numărătorul parantezei, cât și la numitorul său și se simplifică:

$$\begin{aligned} |G(z)|^2 &= \frac{1}{1 + \left[ \frac{\frac{1}{j} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}}{\tan\left(\frac{\omega_c}{2}\right)} \right]^{2M}} \\ \implies |G(z)| &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left[ \frac{1}{j \tan\left(\frac{\omega_c}{2}\right)} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right]^{2M}}} \quad (3.11) \end{aligned}$$

După cum se poate observa în (3.11) expresia modulului funcției discrete  $G(z)$  nu depinde decât de ordinul  $M$  și de pulsărea de tăiere  $\omega_c$ , parametrul  $T_s$  simplificându-se în proces, pentru transformarea în cauză, sau evident, orice transformare ce are factorul  $T_s$  izolat, confirmându-ne, într-o anumită măsură, ipoteza anterioară.

Evident, din moment ce știm modulul funcției  $G(z)$  putem afla polii și mai departe chiar funcția pondere, deci pentru această demonstrație, folosirea expresiei funcției de transfer în modul pătrat nu afectează cu nimic rezultatul.

### 3.1.d) Variația toleranțelor

În această secțiune vom analiza impactul strictetii toleranțelor asupra ordinului filtrului Butterworth. Similar ca la punctul precedent, vom păstra ca etalon  $\Delta_0 = \Delta_p$  și vom explora toate combinațiile  $\Delta_p, \Delta_s$  înmulțite cu factorii din multimea {0.5, 1.0, 1.5, 2.0}. Cele 16 cazuri sunt prezentate în figurile (3.6) și (3.7) pe pagina următoare.

#### Observații importante:

Este trivial că o micșorare a benzilor de toleranță implică necesitatea creșterii ordinului, pentru a putea fi satisfăcute cerințele de proiectare.

#### Cel mai bun compromis:

Încercăm să căutăm cel mai bun filtru. Acest lucru depinde mult de cerințele problemei ingineresti abordate. Uneori poate fi foarte importantă secțiunea benzii de trecere (deci  $\Delta_p$  trebuie să fie cât mai mic), alteori poate atenuarea este crucială ( $\Delta_s$  trebuie redus), sau poate nu este atât de semnificativă, atâtă timp cât este redusă (caz în care  $\Delta_s$  poate fi lărgit liniștit). Astfel, nu se poate determina un filtru universal perfect, ci doar cel mai bun pentru o anumită problemă.

Totuși, în scopul nostru didactic putem alege, deocamdată numai empiric (criterii de performanță fiind dezvoltate în fazele ulterioare ale proiectului), un filtru care să fie mai echitabil în situații diverse.

Analizând ordinul minim (20) și maxim (38), media este 29, care este chiar ordinul filtrului inițial ( $\Delta_p = \Delta_s = \Delta_0$ ), deci probabil am vrea ceva cu un ordin mai mic, în detrimentul performanței, dacă se justifică.

Dacă studiem cazurile în care avem un set din { {1.0  $\Delta_p$ , 2.0  $\Delta_s$ } ; {2.0  $\Delta_p$ , 1.0  $\Delta_s$ } ; {1.5  $\Delta_p$ , 1.5  $\Delta_s$ } } găsim ordinele 23, 25, respectiv 26, ceea ce ne conduce la concluzia că setul {1.0  $\Delta_p$ , 2.0  $\Delta_s$ } aduce cel mai bun compromis. Lărgind ambele toleranțe simțim că pierdem prea mult din valoarea elementului de filtrare, iar dacă le îngustăm și mai mult, ordinul devine foarte complex.

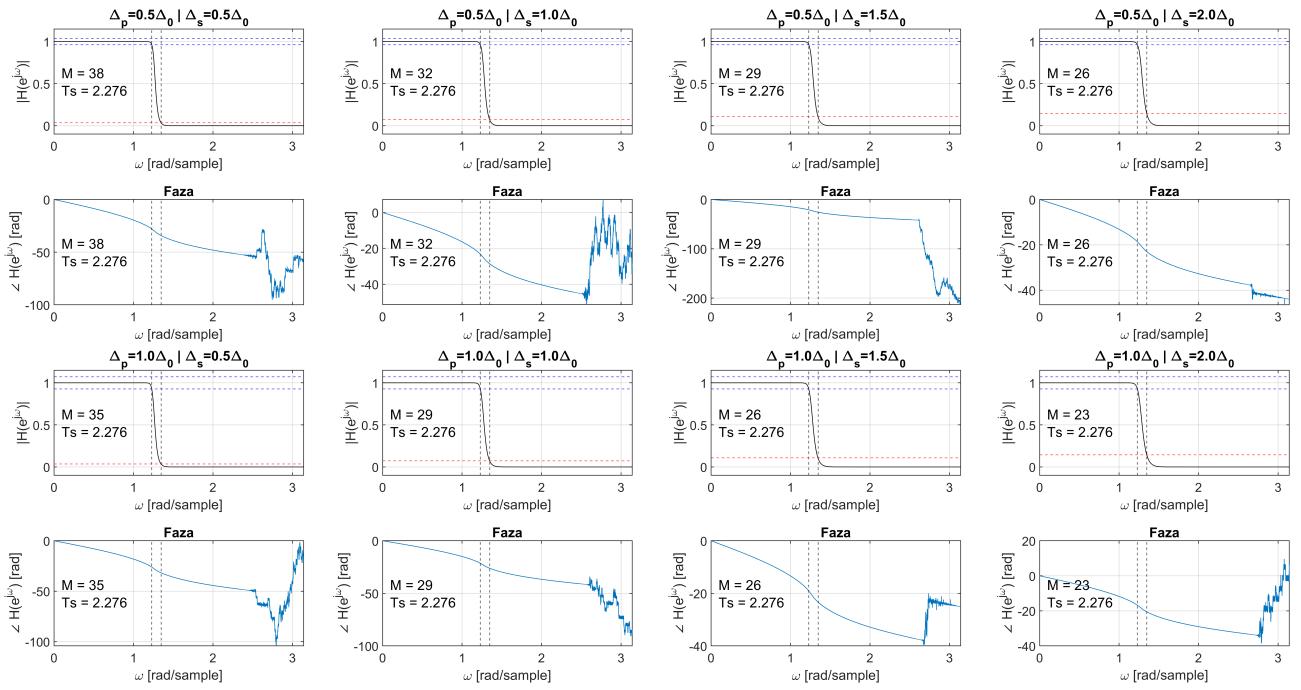


Figura 3.6: Analiza variației toleranțelor de proiectare – Setul 1

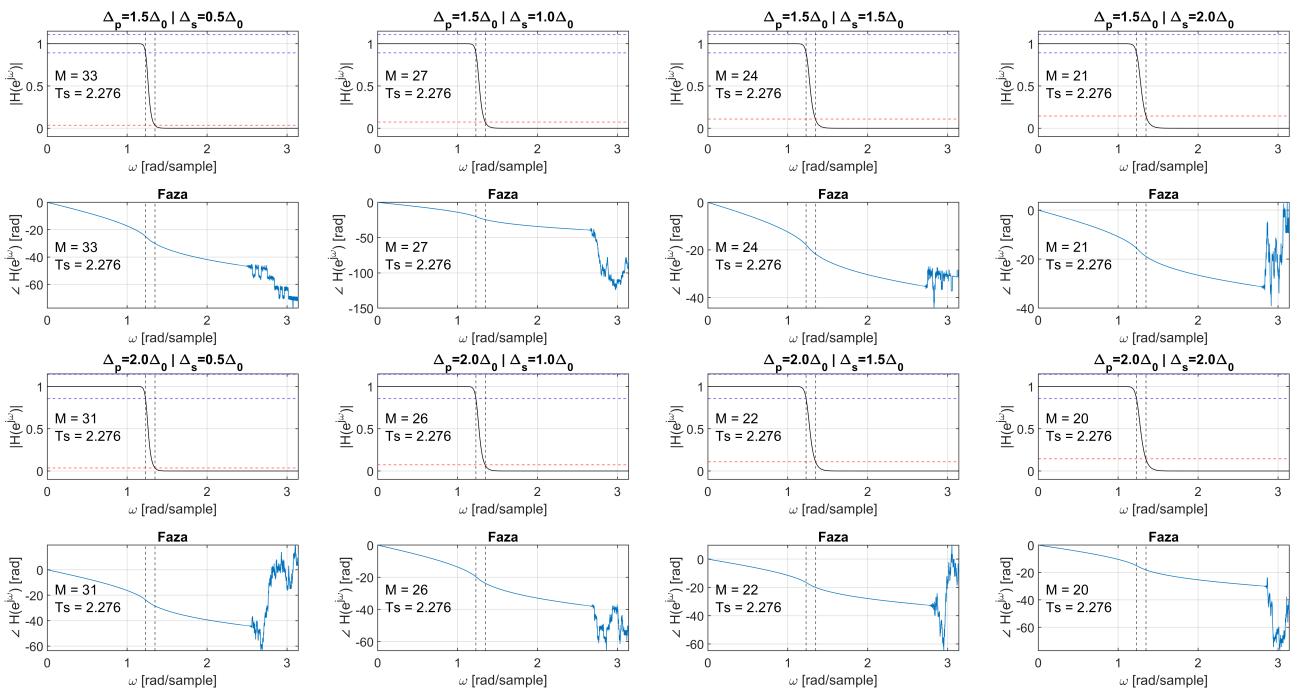


Figura 3.7: Analiza variației toleranțelor de proiectare – Setul 2

### 3.1.e) Comparația cu filtrele FIR

Continuăm analiza noastră comparativă prin raportarea filtrului IIR Butterworth proiectat anterior la filtrele de tip FIR (Finite Impulse Response).

Spre deosebire de filtrele IIR, filtrele FIR nu posedă poli în funcția de transfer, ceea ce le conferă o stabilitate necondiționată. Caracteristica lor definitorie și cel mai mare avantaj este însă **faza perfect liniară**, proprietate esențială în anumite aplicații.

În cadrul acestui punct, am utilizat două metode de proiectare studiate la curs:

- **Metoda ferestrei (fir1):** Trunchiază răspunsul ideal la impuls (care este infinit) prin înmulțirea cu o fereastră finită (în cazul nostru, fereastra implicită Hamming).
- **Metoda celor mai mici pătrate (firls):** Minimizează integrala pătratului erorii dintre răspunsul dorit și cel real pe benzile de interes.

Graficele rezultate proiectării acestor filtre cu specificațiile initiale de proiectare sunt prezentate centralizat în figura (3.8). Primele două linii de grafice corespund filtrului de tip **fir1**, iar următoarele două corespund metodei **firls**. Erorile față de filtrul Butterworth de referință de la punctul a) sunt atașate sub fiecare grafic.

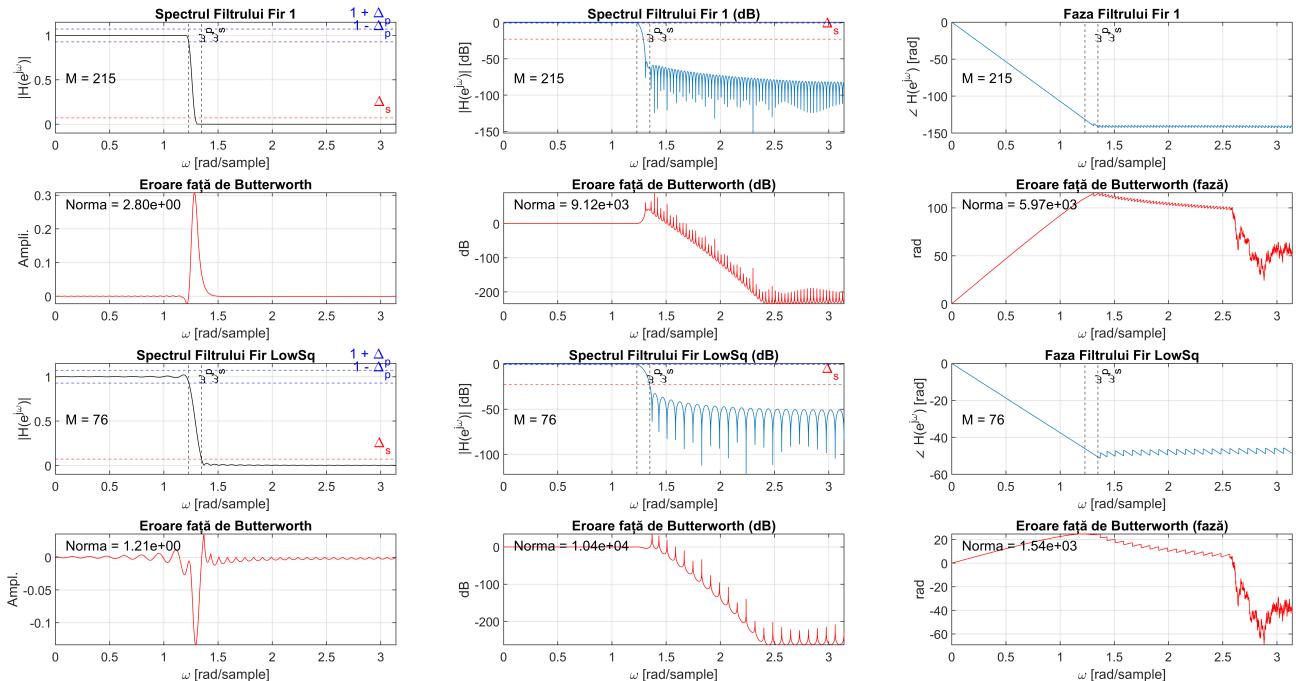


Figura 3.8: Analiza filtrelor FIR1 și Firls și comparația acestora cu filtrul Butterworth

### Observații importante:

- **Atenuarea în banda de stopare:** Din moment ce aceste filtre nu au poli care să genereze pante asymptotice abrupte ca la IIR, atenuarea nu tinde spre infinit. În spectrul logaritmic (dB) se observă un plafon de atenuare limitat de efectul de trunchiere (fenomenul Gibbs) și de ordinul finit: aproximativ **-60 dB** pentru **fir1**, respectiv **-50 dB** pentru **firls**.
- **Liniaritatea Fazei:** Așa cum era de așteptat, în graficele de fază se observă o dreaptă perfectă în zona de interes. Acesta este, de fapt, singurul motiv real pentru care am alege un FIR în detrimentul unui IIR în acest context.
- **Fenomenul Gibbs:** În reprezentarea liniară a amplitudinii, se remarcă prezența unor ondulații (ripples) atât în banda de trecere, cât și în cea de stopare. Acesta este o manifestare a fenomenului Gibbs, cauzat de aproximarea unui filtru ideal (cu răspuns infinit) printr-o structură finită. Deși filtrul **firls** prezintă oscilații vizual mai accentuate comparativ cu **fir1** (o consecință a metodei de minimizare a erorii pătratice medii, împreună cu metoda ferestrei), amplitudinea acestora se încadrează strict în limitele de toleranță impuse, validând astfel filtrul, la un ordin redus.
- **Eroarea față de IIR:** Norma erorii este mare. Aceasta nu mai este o eroare numerică (ca la punctul anterior cu  $T_s$ ), ci o diferență structurală, formele caracteristicilor diferind fundamental. Cele două norme sunt comparabile, deci ambele se apropie de filtrul Butterworth cam în aceeași măsură.
- **Dezavantajul major (Ordinul):** Prețul plătit pentru faza liniară și stabilitate este imens în termeni de complexitate. Așa cum se poate observa în consolă, pentru a satisface aceleași toleranțe stricte ca filtrul Butterworth (care avea ordinul  $\approx 29$ ), filtrele FIR au nevoie de ordine uriașe: **215** pentru **fir1** și **76** pentru **firls**. Din acest motiv, filtrele FIR nu sunt dorite în general în aplicații cu resurse limitate.

Faza 1 e):

(FIR 1)      M = 215  
(FIR LS)    M = 76

### Comparatie FIR1 vs FIRLS:

Dacă ar fi să alegem strict între cele două metode FIR, **firls** pare mai eficient din punct de vedere al resurselor, reușind să respecte toleranțele cu un ordin mult mai mic. Totuși, acest câștig vine cu prețul unei atenuări ușor mai slabe în banda de stopare și a unor ondulații mai vizibile. Chiar dacă acestea sunt permise, putem constata că nu suntem aproape de filtrul ideal.

Din punct de vedere al implementării în MATLAB, funcția **firls** este mai flexibilă, permitând precizarea exactă a marginilor benzilor ( $\omega_p, \omega_s$ ), în timp ce **fir1** lucrează cu o frecvență de tăiere unică ( $\omega_c$ ), necesitând o ajustare iterativă pentru a nimeri exact toleranțele impuse.

## 3.2 Faza 2: Filtre Cauer, Cebîșev și analiză comparativă

Acum că am efectuat o analiză detaliată asupra filtrelor Butterworth, atenția noastră se îndreaptă asupra altor filtre IIR. Vom studia aicifiltrele Cauer alături de Cebîșev I și II. Pentru a putea compara aceste filtre între ele vom utiliza aceleasi specificații, însă pe durata acestei faze vom dubla toleranța în banda de stopare:

$$\Delta_p = 0.0723$$

$$\Delta_s = 0.1446$$

$$\omega_p = 1.2295$$

$$\omega_s = 1.3485$$

$$T_s = 2.2757$$

Așa cum am menționat și mai sus, funcția *But\_FTI* returnează filtrul Butterworth de ordin minim care îndeplinește specificațiile de proiectare. Totuși, funcțiile Matlab *ellip*, *cheby1* și *cheby2*, returnează filtrul pentru ordinul cerut. De aici se observă nevoia unui algoritm iterativ pentru minimizarea ordinului și verificarea încadrării în benzile de toleranță. Soluția implementată în acest proiect funcționează pe algoritmul descris în algoritm (1), implementat pentru fiecare dintre cele 3 cazuri de filtre IIR, plus cele 2 FIR-uri, în funcțiile de tip *F\_find\_best\_tip*.

### 3.2.a) Filtrele Butterworth și Cauer

Pentru a avea un punct de plecare și un etalon de comparație, începem prin a genera filtrul Butterworth conform specificațiilor. Ordinul său (minim) va fi ordinul cu care vom începe căutările pentru toate celelalte tipuri de filtre.

Un lucru care trebuie menționat este faptul că acest ordin este relativ mare pe lângă ordineaile pe care le vom obține pentru următoarele filtre IIR, iar funcțiile *ellip*, *cheby1* și *cheby2* nu efectuează căutarea pentru date de intrare astfel inconsistente. Motiv pentru care, în algoritm (1), am impus o limitare, ca dacă ordinul initial este mult prea mare, să pornească de la  $M = 10$  sau  $M = 15$  după caz.

Efectuând pașii descriși mai sus, obținem și filtrul elliptic corespunzător. Figura (3.9) prezintă într-o manieră similară exercițiilor precedente diferențele dintre acest filtru și Butterworth.

#### Observații importante:

- **Câștigul imens de eficiență:** Așa cum se poate observa în consolă, diferența de complexitate este foarte mare. În timp ce filtrul Butterworth necesită un ordin **M=23** pentru a satisface noile toleranțe, filtrul Elliptic reușește să se încadreze în aceleasi specificații cu un ordin de doar **M=7**. Aceasta este un avantaj considerabil din punct de vedere computațional, reducând numărul de operații necesare filtrării de peste 3 ori.

**Faza 2 a):**

**M\_Butterworth = 23, M\_Elliptic = 7**

- **Prețul plătit - Ondulațiile:** Graficele de spectru ne arată clar compromisul făcut pentru această eficiență. Filtrul Elliptic prezintă ondulații vizibile atât în banda de trecere, cât și în cea de stopare. Spre deosebire de Butterworth, care este monoton (neted), Cauer oscilează între limitele admise ( $1 \pm \Delta_p$  și  $\Delta_s$ ) pentru a obține o pantă de coborâre extrem de abruptă.

- **Tranzitiea rapida:** Observăm că zona de tranzitie (între  $\omega_p$  și  $\omega_s$ ) este parcursă mult mai ”agresiv” de către filtrul Eliptic. Această coborâre foarte rapidă îi permite să atingă atenuarea necesară mult mai devreme, ceea ce este încă un mare avantaj al său.
- **Interpretarea normei erorii:** Norma vectorului de eroare în scară liniară este de aproximativ 8.7. Această valoare mare subliniază diferența fundamentală de formă dintre cele două filtre. Deși filtrul Eliptic arată complet diferit față de etalonul Butterworth (din cauza ondulațiilor și a pantei), el respectă cu strictețe aceleasi cerințe matematice impuse la intrare.
- **Nivelul atenuării (Banda de stopare):** Se observă că atenuarea în banda de stopare stagnează în jurul valorii de **-18 dB**. Deși această valoare este permisă și respectă condiția impusă ( $\leq \Delta_s$ ), ea este relativ modestă (mică). Spre deosebire de Butterworth, care continuă să atenueze semnalul spre  $-\infty$  pe măsură ce frecvența crește, filtrul Eliptic se menține la limita toleranței. Astfel, el îndeplinește cerința, dar nu excelează, oferind doar minimul necesar de rejecție a zgomotului.

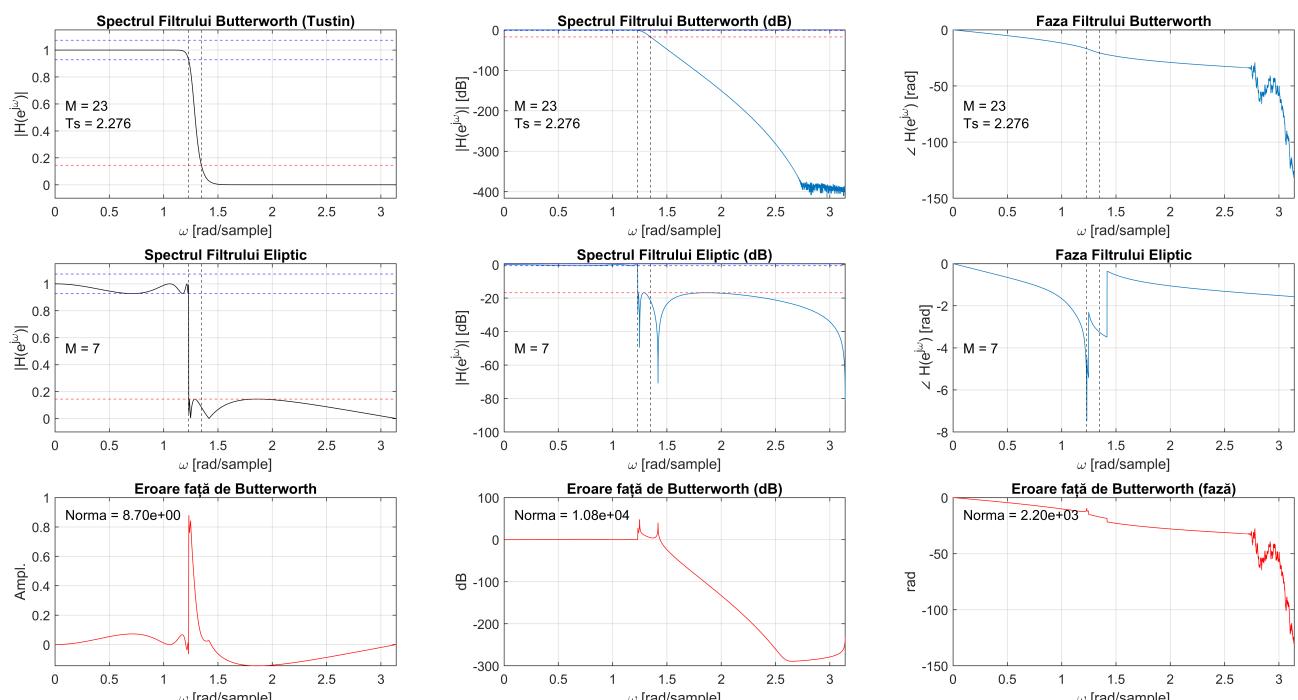


Figura 3.9: Comparația dintre filtrul Butterworth și filtrul Eliptic

#### Concluzii critice – Filtrul Eliptic:

- + Ordin extrem de mic (eficiență maximă)
- + Pantă de coborâre foarte abruptă
- Ondulații prezente în ambele benzi
- Atenuare strict la limita cerințelor
- Fază puternic neliniară

#### Concluzii critice – Filtrul Butterworth:

- + Caracteristică maxim plată (fără ondulații)
- + Atenuare monotonă ce tinde spre infinit
- + Fază cea mai ”liniară” dintre filtrele IIR
- Ordin foarte mare (complexitate ridicată)
- Tranzitie lentă (pantă lină)

---

**Algorithm 1:** Căutarea ordinului minim pentru un filtru digital IIR

---

**Input:** ordin inițial  $M_0$ ; frecvențe  $w$ ; margini de bandă  $\omega_p, \omega_s$ ; toleranțe  $\Delta_p, \Delta_s$ ; ordin maxim admis  $M_{\max}$

**Output:** coeficienți  $b, a$ ; ordin final  $M_{\text{found}}$ ; indicator de succes  $ok$

$M \leftarrow M_0$ ;

$ok \leftarrow \text{false}$ ;

Construiește filtrul de ordin  $M$ ;

Calculează răspunsul în frecvență  $H(e^{j\omega})$ ;

**if** specificațiile NU sunt respectate **then**

// Ordin insuficient  $\Rightarrow$  creștem ordinul

**while**  $M < M_{\max}$  **do**

$M \leftarrow M + 1$ ;

    Construiește filtrul de ordin  $M$ ;

    Calculează  $H(e^{j\omega})$ ;

**if** specificațiile sunt respectate **then**

$ok \leftarrow \text{true}$ ;

**break**;

**else**

// Ordin suficient  $\Rightarrow$  încercăm reducerea lui

$ok \leftarrow \text{true}$ ;

**while**  $M > 1$  **do**

$M \leftarrow M - 1$ ;

    Construiește filtrul de ordin  $M$ ;

    Calculează  $H(e^{j\omega})$ ;

**if** specificațiile NU sunt respectate **then**

$M \leftarrow M + 1$ ;

        Reconstruiește filtrul de ordin  $M$ ;

**break**;

$M_{\text{found}} \leftarrow M$ ;

**return**  $b, a, M_{\text{found}}, ok$

---

Specificațiile sunt considerate îndeplinite dacă:

$$\begin{cases} 1 - \Delta_p \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1 + \Delta_p, & \forall \omega \in [0, \omega_p] \\ |H(e^{j\omega})| \leq \Delta_s, & \forall \omega \in [\omega_s, \pi] \end{cases}$$

### 3.2.b) Filtrele FIR

Continuăm analiza comparativă prin includerea filtrelor FIR în studiu, pentru a observa cum se comportă acestea sub noile specificații (cu toleranța  $\Delta_s$  relaxată). Pentru a determina ordinul minim necesar filtrelor `fir1` și `firls`, am utilizat algoritmul (1) descris anterior.

Graficele rezultate, prezentate în Figura (3.10), ilustrează răspunsul în frecvență al celor două filtre, alături de erorile lor față de referința Butterworth.

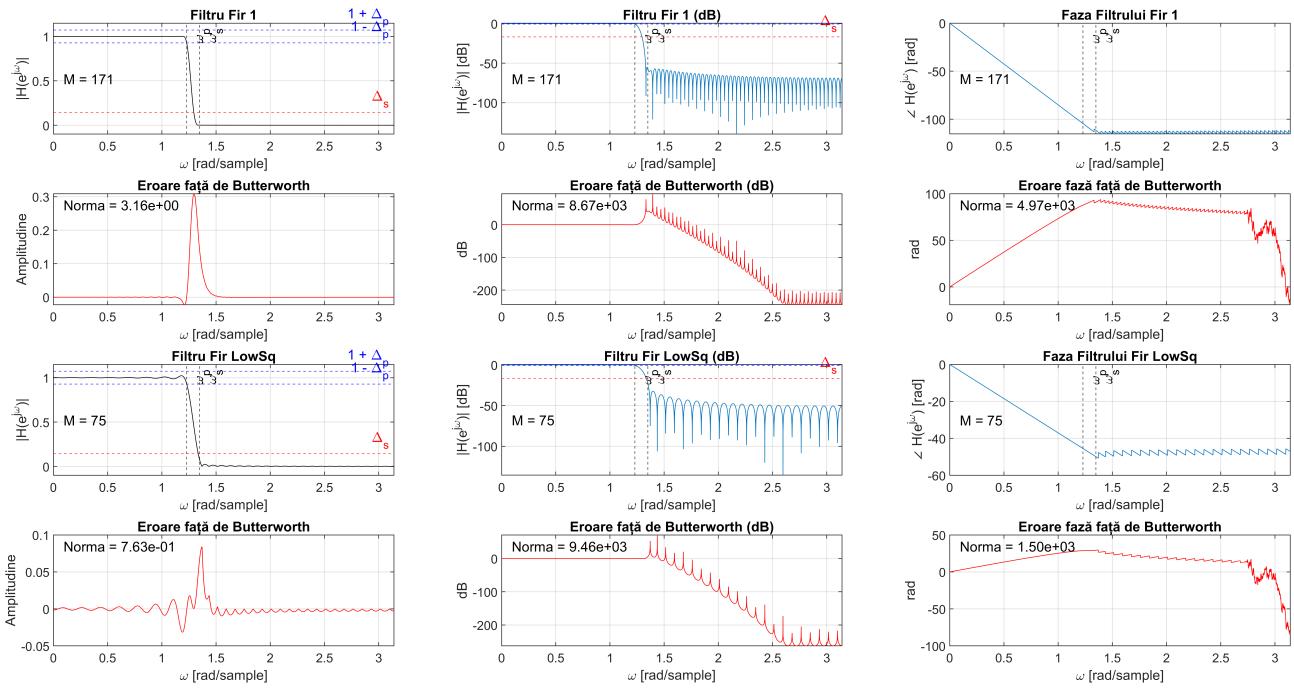


Figura 3.10: Comparația dintre filtrul Butterworth și filtrelor FIR

#### Observații importante:

- Fenomenul Gibbs:** Similar cu situația de la punctul 3.1.e), spectrele prezintă ondulații vizibile în ambele benzi, manifestare clasică a fenomenului Gibbs. Deși amplitudinea acestora respectă toleranțele, ele contrastează cu monotonia filtrului Butterworth.
- Atenuarea:** Un aspect interesant este nivelul de atenuare în banda de stopare. Filtrul `fir1` menține o atenuare constantă de aproximativ **-60 dB**, iar `firls` în jur de **-50 dB**. Comparativ cu filtrul Eliptic (care se oprea la -18 dB, fix la limita cerinței),filtrele FIR oferă o performanță mult superioară la acest capitol. Totuși, inginereste vorbind, această "performanță extra" poate fi considerată neneceasă dacă specificațiile problemei cereau doar  $\Delta_s = 0.1446$  (cca -16 dB).
- Discrepanța uriașă de Ordin:** Privind informațiile afișate în consolă, observăm că filtrul `fir1` necesită un ordin de **171**, iar `firls` un ordin de **75**. Comparam cu ordinul **7** al filtrului Eliptic, aceste valori sunt imense. Deși am relaxat toleranțele față de Faza 1, ineficiența structurală a filtrelor FIR în ceea ce privește selectivitatea rămâne evidentă. Așa cum am mai discutat, utilizarea lor se justifică strict dacă liniaritatea fazei este critică.

Faza 2 b):

M\_fir1 = 171, M\_firls = 75

- **Analiza Normei Erorii:** Un detaliu notabil apare la norma erorii liniare față de Butterworth. Pentru **fir1** aceasta este  $\approx 3.2$ , indicând o diferență de formă semnificativă. În schimb, pentru **firls**, eroarea este surprinzător de mică, doar  $\approx 0.76$ . Aceasta ne sugerează că metoda celor mai mici pătrate reușește să aproximeze forma generală a filtrului Butterworth mult mai bine, oferind o caracteristică de amplitudine similară pe axa liniară, dar cu avantajul major al fazei liniare. Totuși, norma spectrului în dB este  $\approx 9400$ , deci aproximarea este numai aparentă. În orice caz, nu urmărim să replicăm filtrul Butterworth, ci să evaluăm performanțele lor.

#### Concluzii critice – Metoda Ferestrei:

- + Fază perfectă liniară
- + Atenuare medie în banda de stopare
- Ordin **extrem** de mare
- Ondulații vizibile (Gibbs)

#### Concluzii critice – Least Squares:

- + Fază perfectă liniară
- + Atenuare medie în banda de stopare
- Ordin foarte mare
- Ondulații vizibile (Gibbs)

---

#### Clasament:

Putem încerca să facem un clasament bazat pe observații empirice până acum al acestor 4 tipuri de filtre. Din moment ce nu avem (încă) un criteriu matematic riguros pe care să ne bazăm, ordinul filtrelor este un criteriu suficient de important și definitiv, deci numai bazându-ne pe el putem clasa filtrele astfel:

- I. Cauer
- II. Butterworth
- III. FIRLS
- IV. FIR1

### 3.2.c) Filtrele Cebîșev

În ultima parte a acestei faze, ne concentrăm asupra filtrelor Cebîșev de Tip I și Tip II. Acestea reprezintă o clasă intermediară între monotonia filtrului Butterworth și eficiența extremă a filtrului Cauer.

La fel ca în cazurile precedente, determinarea ordinului minim necesar pentru a satisface toleranțele specificate a fost realizată automatizat, prin intermediul algoritmului (1).

Analiza comparativă a răspunsurilor în frecvență pentru aceste două filtre este ilustrată în figura (3.11).

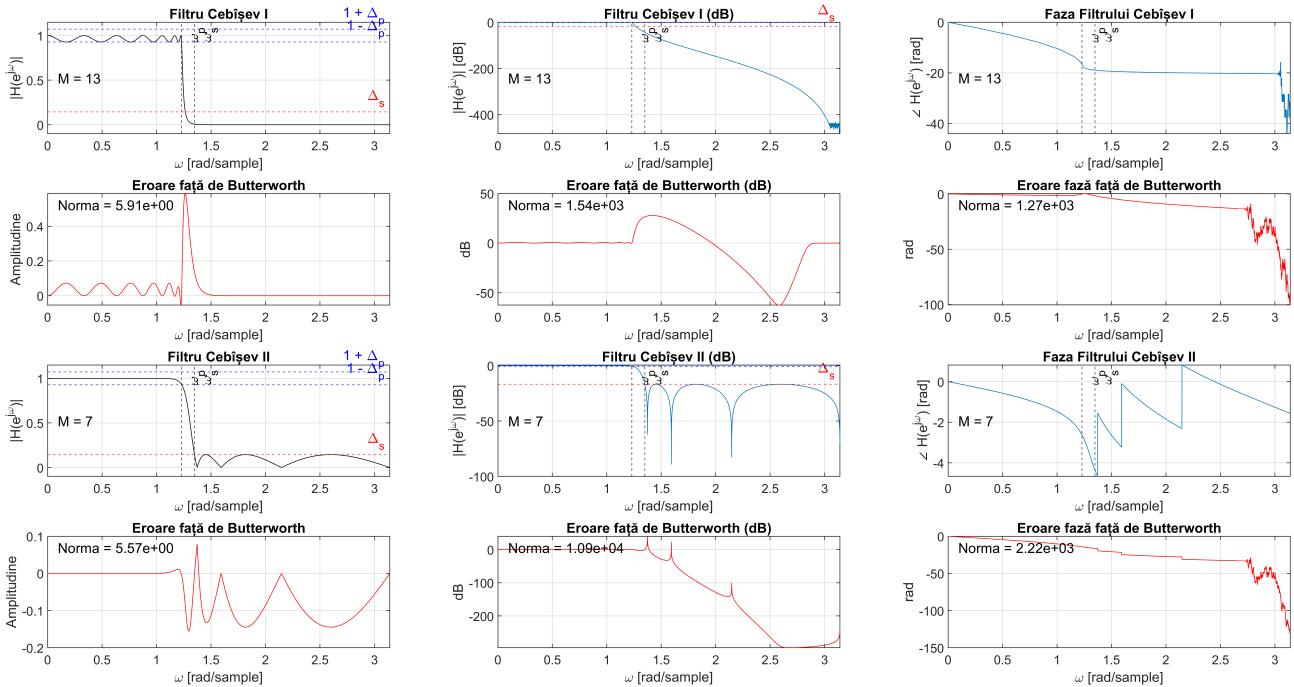


Figura 3.11: Comparația dintre filtrul Butterworth și filtrelor Cebîșev

#### Observații importante:

- **Dualitatea Ondulațiilor:** Diferența fundamentală dintre cele două tipuri este vizibilă imediat:
  - **Cebîșev Tip I** prezintă ondulații exclusiv în banda de trecere, banda de stopare fiind monotonă.
  - **Cebîșev Tip II** este inversul, având banda de trecere perfect plată (monotonă) și ondulații doar în banda de stopare.
- **Compromisul Integritate Semnal - Atenuare:** Din grafice se observă că **Cebîșev Tip I** are o coborâre inițială mai abruptă, ajungând "primul" la nivelul de atenuare dorit. Totuși, acest avantaj vine cu un risc: ondulațiile din banda de trecere pot distorsiona puțin amplitudinea semnalului util. În aplicații critice, unde fidelitatea semnalului în banda de trecere este vitală, acest filtru pierde puncte.  
În schimb, **Cebîșev Tip II** păstrează o caracteristică plată în banda de trecere (ideală pentru semnal), mutând "problemele" (ondulațiile) în banda de stopare. De cele mai multe ori, faptul că zgomotul este atenuat inegal nu deranjează, atât timp cât rămâne sub pragul  $\Delta_s$ .

- **Similitudinea cu Butterworth și Cauer:** Analizând spectrele de eroare și comportamentul asimptotic:
  - **Cebîșev Tip I** se comportă identic cu Butterworth în banda de stopare, atenuarea tinzând spre infinit la frecvențe înalte.
  - **Cebîșev Tip II** se comportă identic cu Butterworth în banda de trecere, dar în banda de stopare se comportă similar filtrului Eliptic (Cauer), atenuarea rămânând limitată la pragul de acceptare ( $\approx -18$  dB).
- **Analiza Ordinelor:** Consola ne oferă o surpriză plăcută în cazul filtrului **Cebîșev Tip II**: acesta a obținut un ordin de  $M=7$ , identic cu cel al filtrului Eliptic. Este o performanță remarcabilă, oferind eficiență maximă și o bandă de trecere curată. Filtrul **Cebîșev Tip I** a necesitat un ordin  $M=13$ . Deși este aproape dublu față de Tip II, este totuși mult mai bun decât Butterworth ( $M=23$ ), reprezentând un compromis bun dacă dorim atenuare infinită.

Faza 2 c):

$M_{\text{Cebîșev I}} = 13$ ,  $M_{\text{Cebîșev II}} = 7$

- **Faza:** Deși niciunul nu are fază liniară, caracteristica de fază a filtrului Cebîșev Tip I pare ușor mai "liniară" (mai puțin distorsionată) în banda de trecere comparativ cu celealte filtre IIR de ordin mic, plus un comportament interesant în banda de stopare: faza rămâne constantă.
- **Norma Erorii:** Normele erorii liniare sunt **5.9** (Tip I) și **5.6** (Tip II). Aceste valori sunt mai mici decât la Eliptic (8.7), indicând faptul că filtrele Cebîșev sunt, ca formă globală, ceva mai apropiate de Butterworth decât Cauer, dar totuși, mai departe de cele de tip FIR.

#### Concluzii critice – Cebîșev Tip I:

- + Atenuare infinită la frecvențe mari
- + Fază decentă în banda de trecere
- + Coborâre foarte rapidă sub  $\Delta_s$
- = Ordin acceptabil
- Ondulații în banda de trecere

#### Concluzii critice – Cebîșev Tip II:

- + Bandă de trecere maxim plată
- + Ordin foarte mic
- Atenuare limitată în banda de stopare
- Ondulații în banda de stopare
- Coborâre mai lentă sub  $\Delta_s$

### Clasament:

Apariția în discuție a acestor 2 noi filtre introduce mai multe elemente ce pot fi luate în calcul pentru a decide care este filtrul ideal. Criteriile pe care urmarim sunt următoarele:

- **Ordinul M minim:** Cel mai important criteriu este clar ordinul. Cu cât acesta este mai mic, cu atât efortul de calcul este redus, viteza mărită, costul micșorat și deci eficiența mărită.  
Astfel putem exclude din start filtrele FIR, care nu satisfac aceste nevoi.
- **Liniaritatea benzii de trecere:** Cu cât filtrul este mai plat în banda de trecere, cu atât interferează mai puțin cu semnalul, ceea ce este de dorit (și crucial în anumite aplicații, așa cum am mai menționat)
- **Liniaritatea fazei:** În anumite domenii, liniaritatea fazei este cerută. Totuși în cadrul studiului nostru, filtrele IIR neprezentând o fază liniară, nu este un criteriu prea definitiv, ci mai mult orientativ, din moment ce am menționat că filtrele FIR sunt singurele care ar putea câștiga aici.
- **Viteza de coborâre:** Este bine ca filtrul să coboare cât mai rapid sub limita toleranței benzii de stopare în intervalul  $\{\omega_p, \omega_s\}$ , practic micșorând efectul zonei de frecvențe ce nu sunt de interes, deși nu este mandatoriu, limita fiind considerată acceptată prin definirea problemei.
- **Atenuarea caracteristică:** Alt criteriu auxiliar ar fi atenuarea medie. Un filtru al cărei atenuare stagnează la o anumită valoare (de exemplu -50dB) poate fi considerat mai slab, din acest punct de vedere, față de unul al cărei atenuare tinde spre infinit la frecvențe înalte.

Acestea fiind spuse, putem reactualiza clasamentul prezentat la punctul anterior, într-o manieră aproximativă, ținând cont de noile filtre și criterii de departajare. Am numerotat, pe o scară de la 0 la 5, cum se descurcă fiecare filtru conform acestor proprietăți, în această ordine.

Evident nu toate ar trebui să aibă aceeași pondere, deci suma lor nu este criteriu după care le clasificăm.

Loc	Filtru	Ordin	Pass-Band plat	Fază liniară	Tranzitie	Atenuare
I.	Cauer	5	3	1	5	1
II.	Cebîșev II	4	5	1	3	1
III.	Cebîșev I	3	2	2	4	5
IV.	Butterworth	2	5	3	1	5
V.	FIRLS	1	4	5	1	3
VI.	FIR1	0	4	5	3	3

### 3.3 Faza 3: Concurs de proiectare

În această etapă, am depășit simpla respectare a toleranțelor, urmărind identificarea filtrului *optim* printr-un proces de cuantificare a performanței. Pentru a realiza acest lucru, am implementat funcția `F_calculare_performanta`, care evaluează fiecare filtru valid pe baza unei funcții de scor compuse.

Filtrele FIR, aşa cum am menționat și mai sus, vor fi excluse din această analiză, nefind foarte performante.

#### Definirea Funcției de Scor

Scorul final este o valoare normalizată (teoretic între 0 și 1), calculată plecând de la premisa unui filtru ideal (Scor = 1), din care se scad penalizări pentru imperfecțiuni. Componentele funcției de cost sunt:

1. **Penalizare pentru Complexitate ( $M_{score}$ )**: Ordinul filtrului este factorul determinant pentru costul de implementare.

$$M_{score} = 1 - e^{-\frac{M}{M_0}}, \quad \text{unde } M_0 = 60$$

Pentru penalizarea complexității filtrului se utilizează o funcție de saturatie exponențială, care mapează domeniul nelimitat al ordinului filtrului într-un interval normalizat [0, 1]. Această abordare asigură o penalizare accentuată pentru ordine mici (panta fiind maximă în origine), în timp ce diferențele dintre ordinele foarte mari au un impact progresiv redus asupra scorului final (efect de saturatie).

Constanta  $M_0$  definește scala caracteristică a ordinului, determinând rapiditatea cu care funcția de penalizare tinde către saturatie. Mai precis,  $M_0$  reprezintă ordinul pentru care penalizarea atinge aproximativ 63% din valoarea maximă ( $1 - e^{-1} \approx 0.632$ ).

Figura (3.12) prezintă alura acestei funcții (pentru  $M_0 = 60$ ), valorile fiind scalate procentual (factor 100) pentru o vizualizare clară. Același tip de funcție de saturatie este utilizat și pentru normalizarea celorlalte criterii de performanță.

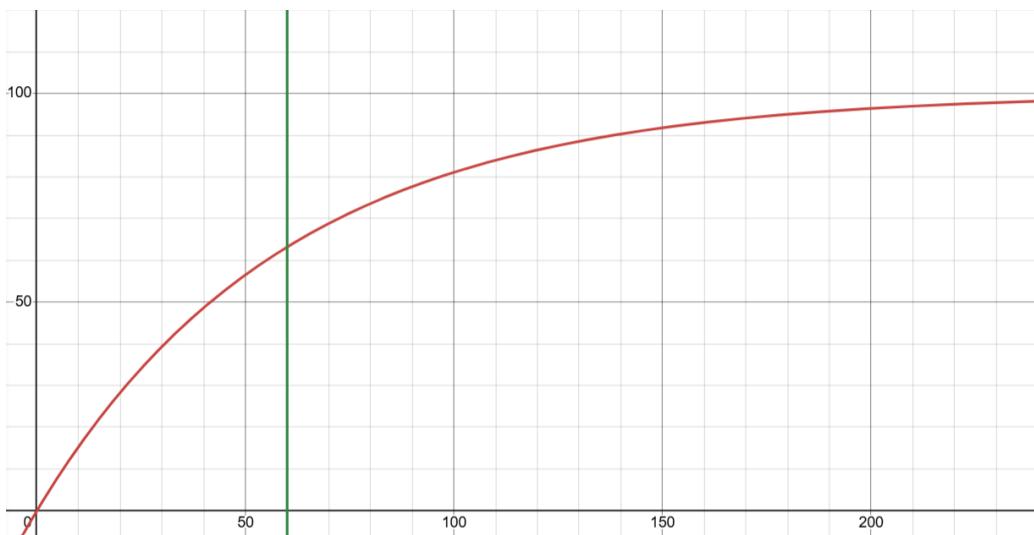


Figura 3.12: Caracteristica funcției de saturatie, amplificată cu factorul 100 (exprimată procentual), corespunzătoare valorii  $x_0 = 60$

Ponderarea asociată acestui criteriu este  $w_M = 0.50$ . Aceasta este cea mai mare pondere din setul ales, reflectând faptul că prioritățile minimizarea complexității filtrului peste celelalte caracteristici.

2. **Penalizare pentru Eroarea de Formă ( $E_{score}$ )**: Acest criteriu măsoară abaterea caracteristicii reale  $|H(\omega)|$  de la filtrul ideal ("dreptunghiular"). Calculul se bazează pe eroarea pătratică medie (RMS - Root Mean Square), obținută prin normalizarea normei Euclidiene la numărul de eșantioane. Această abordare asigură independența scorului față de rezoluția grilei de frecvență utilizate în simulare.

Formula finală de penalizare urmează aceeași lege de saturatie exponențială:

$$E_{score} = 1 - e^{-\frac{\varepsilon_{total}}{E_0}}, \quad \text{cu } E_0 = 0.15$$

Unde eroarea totală  $\varepsilon_{total}$  este o sumă ponderată a erorilor RMS din cele două benzi:

$$\varepsilon_{total} = w_p \cdot \varepsilon_{pass} + w_s \cdot \varepsilon_{stop}$$

Componentele sunt definite astfel:

- **Erorile normalize (RMS):**

$$\varepsilon_{pass} = \frac{\|1 - |H_{pass}|\|}{\sqrt{N_{pass}}}, \quad \varepsilon_{stop} = \frac{\|0 - |H_{stop}|\|}{\sqrt{N_{stop}}}$$

- **Ponderile dinamice ( $w_p, w_s$ )**: Acestea depind de lățimea relativă a benzii în spectru, dar includ și un factor de importanță:

$$w_p = 1.5 \cdot \frac{N_{pass}}{N_{total}}, \quad w_s = 1.0 \cdot \frac{N_{stop}}{N_{total}}$$

**Notă critică asupra ierarhiei:** Factorul de multiplicare **1.5** aplicat benzii de trecere reflectă decizia noastră de proiectare de a considera integritatea semnalului (distorsiuni minime în banda utilă) mai importantă decât atenuarea zgomotului.

Această decizie influențează direct clasamentul filtrelor Cebîșev:

- **Cebîșev Tip II** (care este plat în banda de trecere, deci  $\varepsilon_{pass} \approx 0$ ) este avantajat de această formulă.
- **Cebîșev Tip I** (care prezintă ondulații în banda de trecere) este penalizat mai aspru.

Dacă am reduce acest factor (de ex. la 1.1) sau l-am eliminat, ierarhia s-ar putea inversa rapid în favoarea Tipului I. Acest fapt subliniază că nu există un "filtru ideal universal", ci doar soluția optimă pentru un set specific de priorități.

Desigur, fidelitatea semnalului este un criteriu crucial, motiv pentru care ponderea sa  $w_E$  este setată la **0.40**. Această valoare, a doua ca mărime, subliniază faptul că preferăm un filtru eficient (ordin mic), dar care în același timp să aproximeze cât mai fidel comportamentul ideal.

Pentru a rămâne fideli caracteristicilor calitative discutate la punctul anterior (panta de coborâre și atenuarea maximă), am inclus două obiective secundare. Întrucât acestea nu sunt critice pentru specificații, ci doar pentru rafinarea soluției, le-am acordat ponderi reduse ( $w_T = w_A = 0.05$ ).

3. **Penalizare pentru Tranzitie Lentă ( $T_{score}$ ):** Primul dintre acestea,  $T_{score}$ , măsoară rapiditatea cu care răspunsul în frecvență coboară sub pragul  $\Delta_s$ :

$$T_{score} = \frac{\omega_{cut} - \omega_p}{\omega_s - \omega_p}$$

O valoare a lui  $T_{score}$  apropiată de 0 indică o cădere ideală (aproape instantanee), în timp ce 1 indică o cădere lentă, care atinge atenuarea necesară abia la limita benzii de incertitudine.

4. **Bonus pentru Atenuare ( $A_{score}$ ):** Cel de-al doilea obiectiv secundar recompensează filtrele care oferă o atenuare medie în banda de stopare superioară minimului necesar.

În implementare, pentru a păstra consistența formulei generale (unde termenii se scad), acest scor este calculat cu semn negativ. Astfel, scăderea unui număr negativ devine o adunare (bonus) la scorul final:

$$A_{score} = - \left( 1 - e^{-\frac{Atten_{dB}}{A_0}} \right), \quad \text{cu } A_0 = 60 \text{ (dB)}$$

Astfel, un filtru cu atenuare foarte mare va genera un  $A_{score}$  negativ (aproape de -1), crescând scorul total, în timp ce un filtru "la limită" va avea un impact neglijabil.

Astfel, formula finală implementată în MATLAB este:

$$Scor = 1 - 0.5 \cdot M_{score} - 0.4 \cdot E_{score} - 0.05 \cdot T_{score} - 0.05 \cdot A_{score} \quad (3.12)$$

## Optimizarea frecvenței de tăiere $\omega_c$

Până în acest punct, am proiectat filtrele IIR (Cauer și Cebîșev) considerând frecvența de tăiere  $\omega_c$  ca fiind fixată la una dintre marginile benzilor ( $\omega_p$  sau  $\omega_s$ ). Totuși, definiția matematică a acestor filtre permite ca frecvența de tăiere să fie plasată oriunde în intervalul de tranzitie  $[\omega_p, \omega_s]$ , atâtă timp cât toleranțele sunt respectate.

Această libertate ne oferă o oportunitate de *fine-tuning*. Este posibil ca, pentru o anumită poziție a lui  $\omega_c$  din interiorul zonei de tranzitie, panta filtrului să se așeze mai bine pe specificații, permitând astfel satisfacerea cerințelor cu un ordin mai mic decât cel determinat inițial.

Pentru a identifica configurația optimă, am implementat un algoritm de căutare iterativă descris în algoritmul (2).

Trebuie menționat din start că abordarea aleasă este una de căutare exhaustivă (brute-force) pe grila de frecvențe discretizate a vectorului  $w$ . Deși sunt conștient că din punct de vedere computațional nu este cea mai eficientă metodă am optat pentru această soluție din cauza presiunii termenelor limită, plus implementarea este robustă, simplu de înțeles și verificat, iar pentru dimensiunea problemei noastre, timpul de execuție este neglijabil. Rămâne o temă de studiu pentru cercetări ulterioare.

Deoarece validarea finală se face pe eșantioanele vectorului  $w$ , căutarea optimului direct pe aceste valori elimină riscul ca optimul teoretic (dintre eșantioane) să producă erori la discretizare.

**Obiectivul fundamental:** Deși algoritmul calculează scorul de performanță definit anterior, scopul principal nu este maximizarea oricărui scor prin creșterea calității filtrului (ceea ce ar putea implica creșterea ordinului), ci **minimizarea ordinului  $M$** . Criteriul de performanță este unul subiectiv, definit pentru acest proiect, și nu un standard absolut. De aceea, logica algoritmului este următoarea:

- Pornim de la ordinul minim găsit în etapa anterioară.
- Căutăm cel mai bun  $\omega_c$  pentru acest ordin, care maximizează scorul descris mai sus.
- Dacă găsim un filtru valid, încercăm decrementarea ordinului ( $M \leftarrow M - 1$ ) și repetăm căutarea.
- Ne oprim când nu mai există niciun  $\omega_c$  care să satisfacă toleranțele pentru ordinul curent.

Rezultatele acestei optimizări sunt notabile. De exemplu, în cazul filtrului **Cebîșev Tip II**, prin simpla ajustare a lui  $\omega_c$ , am reușit să scădem ordinul necesar de la 15 la **13** (așa cum se poate observa în consolă, pe pagina următoare). Acest câștig de eficiență, fără a compromite specificațiile, validează utilitatea pasului de optimizare.

---

**Algorithm 2:** Optimizarea Ordinului și a Frecvenței de Tăiere ( $\omega_c$ )

---

**Input:** ordin inițial  $M_{start}$ ; vector frecvențe  $w$ ; margini  $\omega_p, \omega_s$ ; toleranțe  $\Delta_p, \Delta_s$

**Output:** coeficienți  $b_{best}, a_{best}$ ; ordin minim  $M_{best}$ ; frecvență optimă  $\omega_{c,best}$ ; scor maxim  $S_{best}$

```

 $M \leftarrow M_{start};$ 
 $M_{best} \leftarrow M_{start};$ 
 $S_{best} \leftarrow -1;$ 
// Selectăm doar frecvențele din banda de tranziție
 $W_{candidates} \leftarrow w(\omega_p \leq w \leq \omega_s);$ 
while  $M > 0$  do
     $found\_valid\_for\_M \leftarrow \text{false};$ 
    foreach  $\omega_c \in W_{candidates}$  do
        Generează filtru  $(b, a)$  cu ordin  $M$  și frecvență  $\omega_c$ ;
        Calculează  $H(e^{j\omega})$ ;
         $S \leftarrow F\_calculare\_performanta(H, M, \dots);$ 
        if  $S \geq 0$  (Filtru Valid) then
             $found\_valid\_for\_M \leftarrow \text{true};$ 
            if  $S > S_{best\_temporar}$  then
                 $S_{best} \leftarrow S;$ 
                 $M_{best} \leftarrow M;$ 
                 $\omega_{c,best} \leftarrow \omega_c;$ 
                Store coefficients  $(b_{best}, a_{best})$ ;
    if  $found\_valid\_for\_M$  is true then
        // Am găsit soluție pentru  $M$ , încercăm să reducem ordinul
         $M \leftarrow M - 1;$ 
    else
        // Ordinul curent e prea mic pentru orice  $\omega_c$ 
        break;
return  $b_{best}, a_{best}, M_{best}, \omega_{c,best}, S_{best}$ 

```

---

Rezultatele obținute la această fază sunt sintetizate în figura (3.13). Toate filtrele au fost optimizate conform algoritmului (2) și sortate într-un clasament conform criteriului de performanță maxim obținut.

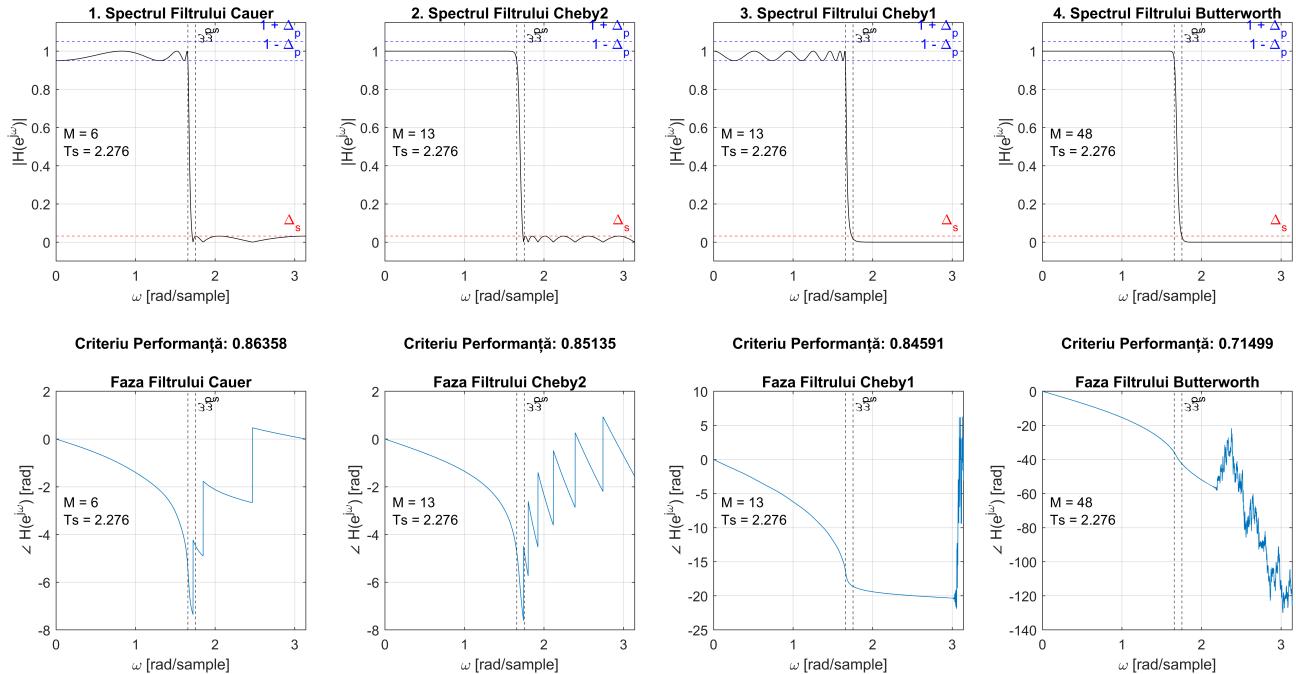


Figura 3.13: Analiza comparativă a filtrelor în funcție de criteriu de performanță

În consola atașată mai jos se pot observa diferențele dintrefiltrele obținute inițial și cele optimizate, alături de  $w_c$  detectat.

Faza 3:

Scor Butterworth = 0.71499 M = 48

Scor Cheby1 = 0.84591 M = 13

Scor Cheby2 = 0.85135 M = 13

Scor Ellip = 0.86358 M = 6

Scoruri noi, după optimizarea lui  $w_c$

Scor Butterworth (optim) = 0.71499 M = 48

Scor Cheby1 (optim) = 0.84591 M = 13  $w_c$  = 1.6575

Scor Cheby2 (optim) = 0.85135 M = 13  $w_c$  = 1.736

Scor Ellip (optim) = 0.86358 M = 6  $w_c$  = 1.6575

Clasament filtre Faza 3:

1. Cauer | Scor = 0.86358 | Ordin M = 6
2. Cheby2 | Scor = 0.85135 | Ordin M = 13
3. Cheby1 | Scor = 0.84591 | Ordin M = 13
4. Butterworth | Scor = 0.71499 | Ordin M = 48

Concluzia acestei faze este că filtrul eliptic pare a fi cel mai potrivit pentru uzul general, având performanțe foarte bune și ordine reduse, însă nici filtrele Cebâșev nu sunt departe, necesitatea utilizării fiecărui fiind justificată de tipul de problemă.

Filtrele optime au fost generate și salvate în fișierul *FiltreConcurs.mat*.

### 3.4 Faza 4: Proiectarea filtrelor cu câștig neunitar (Supliment)

Această etapă suplimentară a proiectului analizează cazul în care câștigul maxim nu mai este strict unitar, definind  $|H(0)| = 1 + \Delta_p$ .

Această abordare este utilă deoarece, în proiectarea standard, se exploatează doar jumătate din intervalul permis al toleranțelor în banda de trecere; secțiunea  $[1, 1 + \Delta_p]$  rămâne neutilizată. Pornind de la valoarea maxim admisă, ne aşteptăm să putem reduce ordinul minim al filtrului, valorificând mai eficient spațiul de manevră disponibil.

#### Reluarea calculelor în vederea determinării noilor formule

Folosim transformarea de discretizare biliniară ca la Faza 1:

$$\Omega = \frac{2}{T_s} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

**Pasul 1** Determinăm frecvențele critice analogice:

$$\Omega_p = \frac{2}{T_s} \tan\left(\frac{\omega_p}{2}\right), \quad \Omega_s = \frac{2}{T_s} \tan\left(\frac{\omega_s}{2}\right)$$

Considerăm câștigul maxim la origine:

$$H(0) = 1 + \Delta_p$$

Noua limită inferioară în banda de trecere este:

$$M_p = 1 - \Delta_p + \Delta_p = 1$$

Funcția de transfer în modul pătrat devine:

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{(1 + \Delta_p)^2}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2M}}$$

Condițiile care trebuie respectate sunt:

- $|H(j\Omega_p)| \geq M_p = 1$
- $|H(j\Omega_s)| \leq \Delta_s$

#### Pasul 2: Rezolvarea inegalităților

*Analiza Benzii de Trecere:*

$$\begin{aligned} \frac{(1 + \Delta_p)^2}{1 + \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2M}} &\geq M_p^2 = 1^2 = 1 \\ \Rightarrow (1 + \Delta_p)^2 &\geq 1 + \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2M} \\ \Rightarrow \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2M} &\leq (1 + \Delta_p)^2 - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2M} \leq 1 + 2\Delta_p + \Delta_p^2 - 1 \\ &\Rightarrow \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2M} \leq \Delta_p(2 + \Delta_p) \end{aligned}$$

Logaritmăm expresia:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 2M \log \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right) \leq \log(\Delta_p(2 + \Delta_p)) \\ &\Rightarrow \boxed{2M(\log \Omega_p - \log \Omega_c) \leq \log(\Delta_p(2 + \Delta_p))} \quad (3.13) \end{aligned}$$

*Analiza Benzii de Stopare:*

$$\begin{aligned} &\frac{(1 + \Delta_p)^2}{1 + \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2M}} \leq \Delta_s^2 \\ &\Rightarrow (1 + \Delta_p)^2 \leq \Delta_s^2 \left[1 + \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2M}\right] \\ &\Rightarrow \frac{(1 + \Delta_p)^2}{\Delta_s^2} \leq 1 + \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2M} \\ &\Rightarrow \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2M} \geq \frac{(1 + \Delta_p)^2}{\Delta_s^2} - 1 \\ &\Rightarrow \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2M} \geq \frac{1 + 2\Delta_p + \Delta_p^2}{\Delta_s^2} - \frac{\Delta_s^2}{\Delta_s^2} \\ &\Rightarrow \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2M} \geq \frac{1 + 2\Delta_p + \Delta_p^2 - \Delta_s^2}{\Delta_s^2} \end{aligned}$$

Logaritmăm expresia:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 2M \log \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right) \geq \log \left(\frac{(1 + \Delta_p)^2 - \Delta_s^2}{\Delta_s^2}\right) \\ &\Rightarrow \boxed{2M(\log \Omega_s - \log \Omega_c) \geq \log \left(\frac{(1 + \Delta_p)^2 - \Delta_s^2}{\Delta_s^2}\right)} \quad (3.14) \end{aligned}$$

### Calculul Ordinului M

Pentru a obține inegalitatea finală din care se obține  $M$ , din (3.14) scădem (3.13):

$$\begin{aligned} &2M \log \Omega_s - 2M \log \Omega_c - (2M \log \Omega_p - 2M \log \Omega_c) \geq \dots \\ &2M(\log \Omega_s - \log \Omega_p) \geq \log \left(\frac{(1 + \Delta_p)^2 - \Delta_s^2}{\Delta_s^2}\right) - \log(\Delta_p(2 + \Delta_p)) \end{aligned}$$

Rearanjând termenii pentru  $M$ :

$$2M \log \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_p}\right) \geq \log \left(\frac{\frac{(1 + \Delta_p)^2 - \Delta_s^2}{\Delta_s^2}}{\Delta_p(2 + \Delta_p)}\right)$$

$$M \geq \frac{\log \left( \frac{(1 + \Delta_p)^2 - \Delta_s^2}{\Delta_p \Delta_s^2 (2 + \Delta_p)} \right)}{2 \log \left( \frac{\Omega_s}{\Omega_p} \right)}$$

Observăm că sus avem o diferență de pătrate, deci folosind formula corespunzătoare, rezultă formula finală pentru ordinul  $M$ :

$$M \geq \frac{\log \left( \frac{(1 + \Delta_p + \Delta_s)(1 + \Delta_p - \Delta_s)}{\Delta_p \Delta_s^2 (2 + \Delta_p)} \right)}{2 \log \left( \frac{\Omega_s}{\Omega_p} \right)} \quad (3.15)$$

### Calculul frecvenței $\Omega_c$

Pentru a afla  $\Omega_c$  impunem egalitate într-un dintre condițiile inițiale, de exemplu pentru banda de trecere avem:

$$\begin{aligned} (1 + \Delta_p)^2 &= 1 + \left( \frac{\Omega_p}{\Omega_c} \right)^{2M} \\ \Rightarrow 1 + 2\Delta_p + \Delta_p^2 - 1 &= \left( \frac{\Omega_p}{\Omega_c} \right)^{2M} \\ \Rightarrow \Delta_p(2 + \Delta_p) &= \left( \frac{\Omega_p}{\Omega_c} \right)^{2M} \\ \Rightarrow \frac{\Omega_p}{\Omega_c} &= \sqrt[2M]{\Delta_p(2 + \Delta_p)} \end{aligned}$$

Deci formula finală pentru  $\Omega_c$  este:

$$\Omega_c = \frac{\Omega_p}{\sqrt[2M]{\Delta_p(2 + \Delta_p)}} \quad (3.16)$$

### Interpretarea rezultatelor

În continuare vom explora rezultatele acestei abordări. Pentru a realiza graficele prezentate în figura (3.14), am adaptat algoritmul inițial în funcția *But FTI amplified*.

Așa cum se poate observa în consolă, obținem alte valori pentru  $\Omega_c$  și  $\omega_c$  decât la Faza 1, punctul a). Ceea ce ne surprinde însă este că ordinul  $M$  este mai mare, contrar așteptărilor inițiale pentru acest set de date.

**Faza 4:**

**M = 30, Omega\_c = 0.64042, omega\_c = 1.2595**

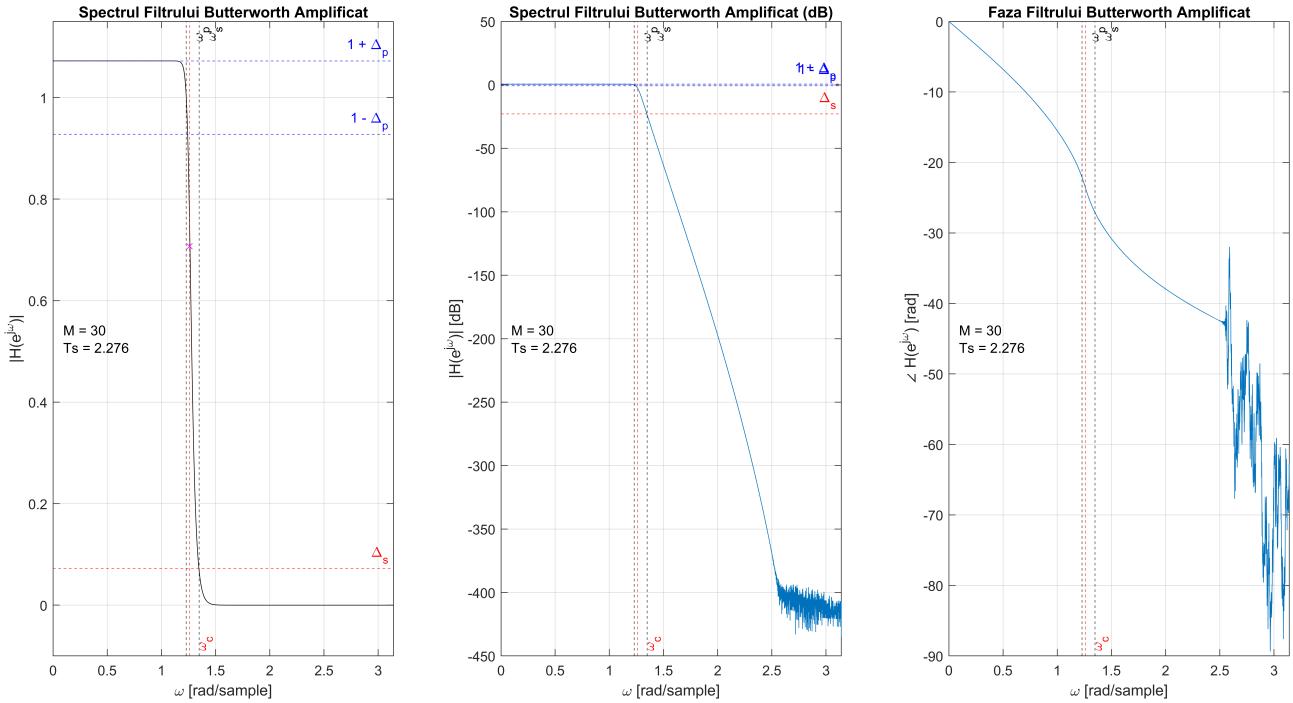


Figura 3.14: Răspunsul filtrului Butterworth amplificat, cu  $H(0) = 1 + \Delta_p$

Acest comportament se explică prin natura duală a amplificării:

- Pe de o parte, am relaxat constrângerea în banda de trecere (filtrul poate coborî mai mult).
- Pe de altă parte, prin ridicarea câştigului la  $1 + \Delta_p$ , am mărit distanța totală pe care filtrul trebuie să o parcurgă pentru a se încadra în ambele benzi de toleranțe.

În acest caz particular, costul atenuării suplimentare a depășit marginal câştigul obținut prin relaxarea benzii de trecere, rezultând o valoare a ordinului  $M$  care, după rotunjirea la întregul superior, a necesitat incrementarea cu o unitate.

Acest rezultat subliniază faptul că tehnica „Butterworth Amplificat” nu garantează necondiționat reducerea ordinului, eficiența ei depinzând de raportul specific dintre  $\Delta_p$  și  $\Delta_s$ .

### Toleranțele superioare lui 1

Totuși, rămâne întrebarea: de ce am avea nevoie întotdeauna de o impunere superioară lui 1 a toleranțelor?

Deși filtrul Butterworth este teoretic lipsit de ondulații în banda de trecere, în implementarea digitală pot apărea depășiri usoare ale valorii unitare din cauza discretizării, transformării biliniară și erorilor numerice. Impunerea unei toleranțe superioare lui 1 permite acceptarea acestor deviații inevitabile fără a penaliza inutil ordinul filtrului.

În plus, nu este întotdeauna explicit ce filtru trebuie proiectat. În cazul unora dintre celelalte filtre studiate, banda de toleranțe superioară lui 1 este utilizată. Astfel, este evident că este importantă permiterea și precizarea acestui interval.

# Capitolul 4

## Concluzii

Proiectul a urmărit aprofundarea și aplicarea metodelor de sinteză a filtrelor digitale IIR, pornind de la prototipuri analogice și utilizând transformarea biliniară. Analiza celor patru faze a permis evaluarea comportamentului filtrelor în frecvență, influența parametrilor și eficiența diferitelor topologii.

Concluziile majore sunt următoarele:

### 1. Echivalența metodelor de transformare și independența de $T_s$

Filtrele obținute prin transformarea biliniară clasică (Tustin) și Pseudo-Tustin sunt echivalente, iar forma caracteristicii de frecvență rămâne invariantă la schimbarea perioadei de eşantionare  $T_s$ .

### 2. Eficiența filtrelor IIR comparativ cu FIR

Pentru specificații stricte,filtrele IIR ating performanța dorită cu ordine mult mai mică decât FIR (ex.  $M = 7$  vs.  $M = 75-171$ ),filtrele FIR fiind necesare doar când liniaritatea fazei este critică.

### 3. Ierarhia filtrelor IIR și compromisuri

- **Cauer (Eliptic):** cel mai eficient, ordin mic, tranziție abruptă, dar cu ondulații.
- **Cebîșev Tip II:** bandă de trecere plată, ordin competitiv, soluție de compromis.
- **Cebîșev Tip I:** tranziție rapidă, ondulații în banda de trecere, ordin mediu.
- **Butterworth:** ordin mare, dar monotonic și fără ondulații, preferat pentru fideliitatea semnalului.

### 4. Optimizarea frecvenței de tăiere

Reglarea fină a  $\omega_c$  poate reduce ordinul filtrului, demonstrând utilitatea algoritmilor iterative de optimizare (ex. Cebîșev Tip II de la  $M = 15$  la  $M = 13$ ).

### 5. Limitele „Butterworth-ului amplificat”

Relaxarea câștigului la  $|H(0)| = 1 + \Delta_p$  nu garantează reducerea ordinului: costul atenuării suplimentare poate depăși beneficiul, ducând la creșterea ordinului (ex. de la 29 la 30).

În concluzie, nu există un filtru ideal universal; proiectantul trebuie să echilibreze resursele (ordinul) cu calitatea semnalului (fază, ondulații), alegând topologia optimă pentru aplicația specifică.

# Bibliografie

- [1] D. Ștefănoiu, A. Dumitrașcu, V. Voinea, *Proiectarea filtrelor IIR prin metode de transformare (Suport de curs)*, Universitatea Politehnica din București, 2025.