MAT3457 – ÁLGEBRA LINEAR I

2ª Lista de Exercícios – 1º semestre de 2020

Nesta lista, dadas bases E e F de V^3, usaremos a notação M_{EF} para denotar a matriz que satisfaz $[\vec{u}]_F = M_{EF}[\vec{u}]_E$, para todo $\vec{u} \in V^3$.

1. Sendo $E = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$, $F = \{\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}\}$ bases de V^3 com

$$\begin{cases} \vec{f_1} = 2\vec{e_1} - \vec{e_3} \\ \vec{f_2} = \vec{e_2} + 2\vec{e_3} \\ \vec{f_3} = 7\vec{e_3} \end{cases}$$

   e $\vec{w} = \vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3}$, determine as coordenadas de $\vec{w}$ na base F.

2. Seja $E = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$ uma base ortonormal de V^3. Sendo $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k})$, $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\jmath} + \vec{k})$ e $\vec{w} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k})$, prove que $F = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é uma base ortonormal de V^3 e calcule as coordenadas do vetor $\vec{t} = 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} - \vec{k}$ em relação à base F.

3. Dadas as bases $E = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$, $F = \{\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}\}$ e $G = \{\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3}\}$ de V^3, se valem

$$\begin{cases} \vec{e_1} = 2\vec{f_1} + \vec{f_2} \\ \vec{e_2} = \vec{f_1} - \vec{f_2} \\ \vec{e_3} = \vec{f_1} + \vec{f_3} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \vec{g_1} = \vec{e_1} - \vec{e_2} \\ \vec{g_2} = \vec{e_1} - \vec{e_3} \\ \vec{g_3} = \vec{e_1} + \vec{e_3} \end{cases},$$

   determine todas as matrizes de mudança de base envolvendo essas bases.

4. Utilizando as bases E, F e G do exercício anterior, determine as coordenadas do vetor $\vec{u} = 4\vec{g_1} + 2\vec{g_2} + \vec{g_3}$ em relação às bases E e F.

5. Sejam $E = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ e $F = \{\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}\}$ bases de V^3 tais que $\vec{f_1} = \vec{e_1} - \vec{e_3}$, $\vec{f_2} = 3\vec{e_1}$ e $\vec{f_3} = 4\vec{e_1} - 3\vec{e_2}$. Calcule as coordenadas de $\vec{v} = (1, 2, -1)_F$ na base E.

6. Sejam $E = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ e $F = \{\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}\}$ bases de V^3 tais que $\vec{f_1} = \vec{e_1} + \vec{e_2}$, $\vec{f_2} = \vec{e_1} - \vec{e_3}$ e $\vec{f_3} = \vec{e_2}$. Determine a matriz M tal que para todo $\vec{u}$ em V^3, vale $M[\vec{u}]_E = [\vec{u}]_F$.

7. Verifique, em cada um dos casos abaixo, se as bases $E = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ e $F = \{\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}\}$ têm a mesma orientação:

$$\text{(i)} \begin{cases} \vec{f_1} = 2\vec{e_1} - \vec{e_2} - \vec{e_3} \\ \vec{f_2} = \vec{e_1} - \vec{e_3} \\ \vec{f_3} = \vec{e_2} \end{cases} \qquad \text{(ii)} \begin{cases} \vec{f_1} = \vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3} \\ \vec{f_2} = \vec{e_1} - \vec{e_2} + \vec{e_3} \\ \vec{f_3} = \vec{e_1} + \vec{e_2} - \vec{e_3} \end{cases}$$

8. Suponha fixada uma base positiva E. Dados os seguintes conjuntos de vetores, cujas coordenadas estão expressas em termos da base E, determine se formam base, uma base positiva ou uma base negativa:

   (i) $\{(1,0,0),\ (0,0,1),\ (0,1,0)\}$

   (ii) $\{(-1,0,0),\ (0,0,1),\ (0,1,0)\}$

   (iii) $\{(1,0,1),\ (-2,1,0),\ (-1,1,-2)\}$

   (iv) $\{(1,2,-1),\ (1,3,2),\ (1,0,-7)\}$

(v) $\{(1,1,1),\ (0,1,-1),\ (-2,0,0)\}$

(vi) $\{(1,1,1),\ (1,1,-1),\ (5,5,1)\}$

9. Suponha que o conjunto ordenado $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ seja uma base positiva. Determinar as relações entre os números reais a,b,c, para que o conjunto ordenado $\{a\vec{u},b\vec{v},c\vec{w}\}$ seja uma base positiva.

10. Sendo $ABCD$ um tetraedro regular de lado unitário, calcule $\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|$.

Nos exercícios 11-27, assumimos que as coordenadas de vetores de V^3 estão expressas em relação a uma base ortonormal positiva $\{\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\}$.

11. O *momento* de uma força $\vec{F}$ em relação a um ponto O é a grandeza física que dá uma medida da tendência de aquela força provocar rotação em torno do ponto O. Se a força $\vec{f}$ for aplicada no ponto P, então o momento da força $\vec{f}$ em relação ao ponto O é determinado por $\vec{M}=\overrightarrow{OP}\wedge\vec{f}$. Calcule o momento em relação ao ponto O da força $\vec{f}=(-1,3,4)$, aplicada ao ponto P tal que $\overrightarrow{OP}=(1,1,1)$.

12. Calcule a área do triângulo ABC, sendo $\overrightarrow{AC}=(-1,1,0)$ e $\overrightarrow{AB}=(0,1,3)$.

13. Dados $\vec{u}=(1,1,1)$ e $\vec{v}=(0,1,2)$, determine uma base ortonormal positiva $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ tal que
    - $\vec{a}$ e $\vec{u}$ são paralelos e têm o mesmo sentido do que $\vec{u}$, e
    - $\vec{b}$ é combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, e sua primeira coordenada é positiva.

14. Resolva o sistema $\begin{cases}\vec{x}\cdot(2\vec{\imath}+3\vec{\jmath}+4\vec{k})=9\\ \vec{x}\wedge(-\vec{\imath}+\vec{\jmath}-\vec{k})=-2\vec{\imath}+2\vec{k}.\end{cases}$.

15. Determine $\vec{x}$ tal que $\vec{x}\wedge(\vec{\imath}+\vec{k})=2(\vec{\imath}+\vec{\jmath}-\vec{k})$ e $\|\vec{x}\|=\sqrt{6}$.

16. Prove que se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são colineares e $\vec{w}\wedge\vec{u}=\vec{w}\wedge\vec{v}=\vec{0}$, então $\vec{w}=\vec{0}$. Interprete esse resultado geometricamente.

17. Seja $\vec{u}\neq\vec{0}$. Prove que se $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ e $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$, então $\vec{v}=\vec{0}$. Interprete esse resultado geometricamente.

18. Calcule a altura do triângulo ABC relativa ao lado AB em função de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$.

19. Sendo $\|\vec{u}\|=26$, $\|\vec{v}\|=3$ e $\|\vec{v}\wedge\vec{u}\|=72$, calcule $\vec{u}\cdot\vec{v}$ sabendo que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ formam um ângulo obtuso.

20. Seja $\vec{v}=(\vec{a}+\alpha\vec{b})\wedge(2\vec{a}+\vec{b})$, com $\alpha\in\mathbb{R}$. Se $\|\vec{a}\|=\sqrt{2}$, $\|\vec{b}\|=1$ e a medida do ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é $\frac{3\pi}{4}$ radianos, determine α para que $\|\vec{v}\|=1$.

21. Seja M o ponto de encontro das diagonais AC e BD do paralelogramo $ABCD$. Sendo $\overrightarrow{BM}=(0,-1,2)$ e $\overrightarrow{AC}=(-2,2,2)$, calcule a área do paralelogramo $ABCD$ e a distância do ponto M à reta AB.

22. Seja O a origem do sistema de coordenadas e considere os pontos R, S, T tais que $\overrightarrow{OR}=(12,-7,9)$, $\overrightarrow{OS}=(14,-6,9)$ e $\overrightarrow{OT}=(t+11,t-7,10)$. Determine a menor área possível para o triângulo RST, em que t percorre $\mathbb{R}$.

23. Sejam $\overrightarrow{AB} = (1, 0, 1)$ e $\overrightarrow{CB} = (0, 0, 2)$.
   (i) Mostre que o triângulo ABC é retângulo.
   (ii) Determine $\text{proj}_{\overrightarrow{BC}} \overrightarrow{AB}$.
   (iii) Calcule o comprimento da altura relativa à hipotenusa do triângulo retângulo ABC.

24. Considere os vetores $\vec{u} = (0, 3, -4)$, $\vec{v} = (1, 2, -1)$, $\vec{w} = (1, 0, \sqrt{3})$ e $\vec{t} = (0, 0, 2)$. Calcule o volume do tetraedro $ABCD$ e a altura relativa à base determinada por $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, sabendo que

$$\overrightarrow{AB} = \text{proj}_{\vec{u}} \vec{v}, \quad \|\overrightarrow{AC}\| = 1, \quad \overrightarrow{AC} // \vec{w}, \quad \overrightarrow{AC} \cdot \vec{w} < 0 \quad \text{e} \quad (\text{proj}_{\vec{t}} \overrightarrow{AB}) \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}.$$

25. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores unitários que formam um ângulo de $\pi/6$ radianos e seja $\vec{w}$ um vetor ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$ de norma igual a 4. Determine $|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$.

26. Sejam A, B, C e D pontos tais que
   - $\|\overrightarrow{AB}\| = 2$, $\|\overrightarrow{BC}\| = 2$ e $\|\overrightarrow{BD}\| = 1$,
   - o ângulo entre $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ mede $\pi/3$ radianos,
   - $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são paralelos ao plano de equação $x - y + z = 0$, e
   - o vetor $(1, -1, 1)$ faz um ângulo de $\pi/3$ radianos com $\overrightarrow{BD}$.

   Então, o volume do paralelepípedo que tem os segmentos AB, AC e AD como arestas vale
   (A) $\sqrt{3}$
   (B) 3
   (C) 1
   (D) $\sqrt{3}/2$
   (E) 1/2

27. Considere as afirmações abaixo a respeito de vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V^3$:
   I. $\vec{u} = 2\vec{v} + 2\vec{w}$ implica $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 2\|\vec{v}\|^2\|\vec{w}\| + 2\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|^2$.
   II. Se $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são dois a dois ortogonais, então $|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|$.
   III. $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}]$.

   Está correto o que se afirma em
   (A) II, apenas.
   (B) III, apenas.
   (C) II e III, apenas.
   (D) I e III, apenas.
   (E) I, II e III.

Nos exercícios 28-63, assumimos que as coordenadas de vetores de V^3 estão expressas em relação a uma base ortonormal positiva $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$ e que as coordenadas de pontos de E^3 estão expressas em relação a um sistema de coordenadas de origem O e base ortonormal positiva $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$.

28. São dados os pontos $A = (3, 6, -7)$, $B = (-5, 2, 3)$ e $C = (4, -7, -6)$.

(i) Escreva equações vetorial e paramétrica para a reta determinada pelos pontos B e C, e obtenha sua forma simétrica (se existir). O ponto $D = (3, 1, 4)$ pertence a essa reta?

(ii) Verifique que os pontos A, B e C são vértices de um triângulo.

(iii) Escreva uma equação paramétrica da mediana relativa ao vértice C do triângulo.

29. Dados os pontos $A = (1, 2, 5)$ e $B = (0, 1, 0)$, determine P sobre a reta que passa por A e B tal que o comprimento de PB seja o triplo do comprimento de PA.

30. Em cada um dos itens abaixo, encontre uma equação paramétrica para a reta r que passa pelo ponto $A = (2, 0, -3)$ e é paralela à reta s.

    (i) $s : \dfrac{1-x}{5} = \dfrac{3y}{4} = \dfrac{z+3}{6}$.

    (ii) s é a reta passa pelos pontos $B = (1, 0, 4)$ e $C = (2, 1, 3)$.

31. Escreva equações geral e paramétrica para os planos π descritos abaixo.

    (i) π passa por $A = (1, 1, 0)$ e $B = (1, -1, -1)$ e é paralelo ao vetor $\vec{v} = (2, 1, 0)$.

    (ii) π passa por $A = (1, 0, 1)$ e $B = (0, 1, -1)$ e é paralelo ao segmento CD, onde $C = (1, 2, 1)$ e $D = (0, 1, 0)$.

    (iii) π passa pelos pontos $A = (1, 0, 1)$, $B = (2, 1, -1)$ e $C = (1, -1, 0)$.

32. Sejam $P = (4, 1, -1)$ e $r : X = (2, 4, 1) + \lambda(1, -1, 2)$.

    (i) Mostre que $P \notin r$.

    (ii) Obtenha uma equação geral do plano determinado por r e P.

33. Decomponha o vetor $\vec{v} = (1, 2, 4)$ em duas parcelas, sendo uma delas paralela ao plano $X = (1, 1, 0) + \lambda(1, 0, 1) + \mu(0, 1, -1)$ e outra paralela à reta $X = (0, 0, 0) + \nu(2, 1, 0)$.

34. Um paralelogramo de vértices A, B, C, D tem lados AB e CD paralelos à reta de equação $r : X = (0, 0, 0) + \lambda(3, 4, 5)$ e os outros dois paralelos ao plano $\pi : x + y + 3z = 0$. Sabendo que $A = (0, 0, 0)$ e $D = (1, 1, 1)$, determine os vértices B e C.

35. Obtenha um vetor normal ao plano π nos seguintes casos:

    (i) π passa pelos pontos $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 0, 1)$ e $C = (1, 2, 3)$.

    (ii) π tem equações paramétricas $\begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 2 - \alpha + \beta \\ z = \alpha - 2\beta \end{cases}$.

36. Nos itens abaixo, estude a posição relativa das retas r e s.

    (i) $r : X = (1, -1, 1) + \lambda(-2, 1, -1)$, $s : \begin{cases} y + z = 3 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$

    (ii) $r : \begin{cases} x - y - z = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$, $s : \begin{cases} 2x - 3y + z = 5 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$

37. Nos itens abaixo, estude a posição relativa da reta r e do plano π.

    (i) $r : X = (1, 1, 0) + \lambda(0, 1, 1)$, $\pi : x - y - z = 2$

    (ii) $\pi : X = (0, 1/2, 0) + \lambda(1, -1/2, 0) + \mu(0, 1, 1)$, $r : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}$

38. Em cada um dos itens abaixo, verifique se os planos π_1 e π_2 são iguais.
    (i) $\pi_1 : X = (1,2,1) + \lambda(1,-1,2) + \mu(-3,4,-6)$, $\pi_2 : X = (2,1,3) + \lambda(-1,1,-2) + \mu(-2,3,-4)$
    (ii) $\pi_1 : x - 3y + 2z + 1 = 0$, $\pi_2 : 2x - 6y + 4z + 1 = 0$

39. Em cada um dos itens abaixo, verifique se a reta r está contida no plano π.
    (i) $r : X = (1,0,0) + \lambda(2,-1,0)$ e $\pi : x + 2y + 3z = 1$.
    (ii) $\pi : X = (1,4,1)+\lambda(1,-1,1)+\mu(-1,2,1)$ e r é a reta que passa pelos pontos $A = (2,3,2)$ e $B = (0,0,1)$.

40. Obtenha uma equação vetorial para as retas (caso existam) que passam pelo ponto P, são paralelas ou contidas no plano π e são concorrentes com a reta r nos seguintes casos (interprete geometricamente):
    (i) $P = (1,1,0)$, $\pi : 2x + y - z - 3 = 0$, $r : X = (1,0,0) + \lambda(-1,0,1)$
    (ii) $P = (1,0,1)$, $\pi : x - 3y - z = 1$, $r : X = (0,0,0) + \lambda(2,1,-1)$
    (iii) $P = (1,2,1)$, $\pi : x - y = 0$, $r : X = (1,0,0) + \lambda(2,2,1)$

41. Dados os pontos $A = (0,0,1)$, $B = (1,2,1)$ e $C = (1,0,1)$, obtenha equações paramétricas das bissetrizes interna e externa do triângulo ABC, relativas ao vértice C.

42. Dê uma equação geral do plano π que passa pela origem e é perpendicular à reta que passa por $A = (1,1,1)$ e $B = (2,1,-1)$.

43. Determine o ponto simétrico de $P = (4,-7,4)$ em relação ao plano $\pi : x - 3y + z - 3 = 0$.

44. Determine as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto $P = (1,-2,-1)$ e intercepta as retas reversas $r : \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2z - 3 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x = z - 2 \\ y = -z + 1 \end{cases}$.

45. Considere os planos $\pi_1 : 2x = y$, $\pi_2 : x = 0$, $\pi_3 : z = 0$ e seja π_4 o plano que contém retas $r : X = (1,2,0) + \lambda(1,2,-1)$ e $s : \begin{cases} x = 0 \\ z + y = 1 \end{cases}$. Verifique se esses planos determinam um tetraedro e calcule o seu volume.

46. Em cada um dos itens abaixo, determine a projeção ortogonal
    (i) do ponto $P = (4,0,1)$ sobre o plano $\pi : 3x - 4y + 2 = 0$.
    (ii) da reta $r : x + 1 = y + 2 = 3z - 3$ sobre o plano $\pi : x - y + 2z = 0$.
    (iii) da origem sobre a reta intersecão dos planos $\pi_1 : x+y+z = 1$ e $\pi_2 : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \mu \\ z = 1 + \lambda + \mu \end{cases}$.

47. Ache o vértice B de um triângulo retângulo ABC sabendo que
    - $A = (1,1,1)$ e a cota de C é maior do que a de A,
    - a hipotenusa AC é ortogonal ao plano $x + y - z - 10 = 0$ e mede $\sqrt{3}$, e
    - o lado AB é ortogonal ao plano $2x - y - z = 0$.

48. Um cubo tem diagonal AB e uma de suas faces está contida no plano $\pi : x-y = 0$. Determine seus vértices, dados $A = (1,1,0)$ e $B = (1,3,\sqrt{2})$.

49. Um hexágono regular $ABCDEF$ está contido no plano $\pi : x + y + z - 1 = 0$. Sendo $A = (1, 0, 0)$ e $D = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ dois vértices diametralmente apostos, determine os outros quatro.

50. Considere as retas $r : X = (1, 0, 1) + \lambda(0, 1, 2)$ e $s : X = (0, 0, 1) + \lambda(1, 1, 1)$. Mostre que r e s são retas reversas. Encontre o ponto da reta s mais próximo do ponto $A = (1, 0, 1)$. Encontre dois pontos $P \in r$ e $Q \in S$ cuja distância seja a menor possível.

51. Decomponha o vetor $\vec{v} = (-3, 4, -5)$ em uma soma $\vec{v} = \vec{v_1} + \vec{v_2}$, com $\vec{v_1}$ paralelo ao plano $\pi : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -2 \\ z = \lambda - \mu \end{cases}$ e $\vec{v_2}$ ortogonal a π.

52. Considere os planos $\pi_1 : 3x - y + z - 4 = 0$ e $\pi_2 : x + y - z + 2 = 0$.
    (i) Mostre que π_1 e π_2 são concorrentes.
    (ii) Ache uma equação vetorial da reta $s = \pi_1 \cap \pi_2$.
    (iii) Ache uma equação vetorial da reta r que passa pelo ponto $P = (1, 0, 1)$ e é perpendicular à reta s.

53. Considere as retas r e s dadas por $r : X = (1, 0, 1)+\lambda(1, 1, 1)$ e $s : X = (1, 1, 1)+\mu(1, 0, -1)$.
    (i) Mostre que r e s são retas reversas.
    (ii) Dê uma equação geral para os planos π_1 e π_2 tais que $r \subset \pi_1$, $s \subset \pi_2$ e π_1 é paralelo a π_2.
    (iii) Calcule a menor distância possível entre um ponto de r e um ponto de s.

54. Em cada um dos itens abaixo, encontre as equações paramétricas para a reta r.
    (i) r passa por $P = (-3, 6, 0)$ e é perpendicular à reta $(x, y, z) = (-3, 1, 2) + t(0, 1, -2)$.
    (ii) r passa por $P = (7, -7, 2)$ e é perpendicular à reta $(x, y, z) = (2, 0, -1) + t(1, 5, 1)$.
    (iii) r é a intersecção dos planos $x + 2y - 3z = 0$ e $5x + 3y - 2z = 4$.

55. Em cada um dos itens abaixo, encontre a (menor) distância entre as retas não paralelas r e s e os pontos onde ela é atingida.
    (i) $r : (x, y, z) = (-2, 3, 1) + t(-3, 2, 1)$, $s : (x, y, z) = (-1, 2, 3) + t(1, 1, 1)$.
    (ii) $r : (x, y, z) = (7, 5, 6) + t(-3, -1, -2)$, $s : (x, y, z) = (2, 3, -1) + t(1, 0, 0)$.

56. Em cada um dos itens abaixo, encontre uma equação para o plano π.
    (i) π é o plano que passa por $A = (3, 1, -1)$ e é perpendicular à reta $(x, y, z) = (5, 5, 5) + t(0, 8, -2)$.
    (ii) π é o plano que passa por $P = (5, 2, -1)$ e é paralelo ao plano determinado pelos pontos $A = (1, 3, -7)$, $B = (-1, 2, 0)$ e $C = (0, 1, 3)$.
    (iii) π é o plano que contém $A = (3, 0, -2)$ e a reta $(x, y, z) = (2, 1, -5) + t(5, -1, 3)$.
    (iv) π é o plano que contém as retas $(x, y, z) = (-2, 1, 1) + t(4, 3, 0)$ e $(x, y, z) = (7, 7, -1) + t(5, 3, -2)$.
    (v) π é o plano que é equidistante dos pontos $A = (1, -3, 7)$ e $B = (3, -5, 9)$.

57. Em cada caso, ou demonstre que a afirmação é verdadeira ou dê um exemplo mostrando que ela é falsa.

(i) Se uma reta é paralela a um plano, ela nunca intercepta o plano.

(ii) Quaisquer três planos que não incluam um par de planos paralelos se encontram em um único ponto.

(iii) Se o plano $ax + by + cz = k$ passa pela origem, então $k = 0$.

(iv) Todo plano tem exatamente uma equação da forma $ax + by + cz = k$.

(v) Se duas retas não se interceptam, elas não estão ambas contidas em um mesmo plano.

(vi) Se uma reta é paralela ao vetor normal de um plano, então ela é paralela ao plano.

(vii) A reta interseção de dois planos (não paralelos) é ortogonal a ambos os vetores normais dos planos.

(viii) Uma reta ortogonal ao vetor normal de um plano tem que ser paralela ao plano.

58. Duas partículas movimentam-se de acordo com as seguintes equações:

$$X(t) = (-m, m, 0) + t(1, -1, 1), \qquad X(t) = (-1, 1, -2) + t(1, -1, 2),$$

em que t indica o tempo. Assinale a alternativa que contém uma afirmação verdadeira.

(A) Se $m \neq 0$, as trajetórias não se cruzam.

(B) Para todo $m \in \mathbb{R}$, há colisão.

(C) Para todo $m \in \mathbb{R}$, não há colisão.

(D) Para todo $m \in \mathbb{R}$, as trajetórias se cruzam e para somente um valor de m, há colisão.

(E) Se $m = 1$, as trajetórias se cruzam, mas não há colisão.

59. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. As retas r e s de equações

$$r : \begin{cases} \alpha x + y + z = 9 \\ x - y + z = 2 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s : \begin{cases} x - 2y + \beta z = \beta \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

são ortogonais se, e somente se,

(A) $\alpha\beta - 2\alpha - \beta - 8 = 0$

(B) $\alpha\beta + 2\alpha - \beta - 8 = 0$

(C) $\alpha\beta - 2\alpha - \beta + 8 = 0$

(D) $\alpha\beta - 2\alpha + \beta + 8 = 0$

(E) $\alpha\beta + 2\alpha + \beta + 8 = 0$

60. Acerca do plano π de equação $x - 3y - z = 1$ e da reta r de equação $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + 3y + 2z = 2 \end{cases}$, está correto afirmar que

(A) r é paralela a π, mas não está contida em π.

(B) r está contida em π.

(C) r não é paralela e nem perpendicular a π, e um vetor diretor de r faz um ângulo de 45 graus com um vetor normal a π.

(D) r é perpendicular a π.

(E) r não é paralela e nem perpendicular a π, e um vetor diretor de r faz um ângulo de 60 graus com um vetor normal a π.

61. Assinale a alternativa contendo equações de uma reta que passa pelo ponto de coordenadas $(1,2,-1)$ e que é paralela à reta de equação $\begin{cases} x-y-z-1=0 \\ x-2y-z+2=0 \end{cases}$.

(A) $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2 \\ z=-1+3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

(B) $\begin{cases} x=3-2t \\ y=2 \\ z=1-2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

(C) $\begin{cases} x=3+2t \\ y=2 \\ z=-4-3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

(D) $\begin{cases} x=4+t \\ y=2 \\ z=3+t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

(E) $\begin{cases} x=1-3t \\ y=2 \\ z=2-3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

62. Seja r a reta contida no plano $\pi : 2x+y-z-4=0$, que passa pelos pontos $(0,5,1)$ e $(1,3,1)$. Assinale a alternativa que contém as coordenadas de um ponto da reta perpendicular a r, contida em π, que passa por $(1,3,1)$.

(A) $(-4,0,-12)$
(B) $(-1,1,-5)$
(C) $(2,3,3)$
(D) $(-3,1,-9)$
(E) $(1,2,0)$

63. A distância entre o ponto $(1,1,3)$ e o plano $\begin{cases} x=1+\lambda+\mu \\ y=-2+2\lambda-\mu \\ z=1-\lambda+\mu \end{cases} \quad (\lambda,\mu \in \mathbb{R})$ é igual a

(A) $12/\sqrt{3}$
(B) $3/\sqrt{14}$
(C) $1/\sqrt{2}$
(D) $5/\sqrt{2}$
(E) $12/\sqrt{14}$

Respostas

1. $\vec{w} = (1/2, 1, -1/14)$
2. $\vec{a} = (\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{7}{\sqrt{6}})_F$
3. $M_{EF} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad M_{FE} = M_{EF}^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

   $M_{GE} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad M_{EG} = M_{GE}^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

   $M_{GF} = M_{EF}M_{GE} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad M_{FG} = M_{EG}M_{FE} = \dfrac{1}{6}\begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -5 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$
4. $\vec{u} = (7, -4, -1)_E$; $\vec{u} = (9, 11, -1)_F$
5. $(3, 3, -1)_E$
6. $M = M_{EF} = M_{FE}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$
7. (i) mesma orientação; (ii) mesma orientação
8. (i) base negativa; (ii) base positiva; (iii) base negativa; (iv) coplanares; (v) base positiva; (vi) coplanares
9. $abc > 0$
10. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
11. $(1, -5, 4)$
12. $\frac{\sqrt{19}}{2}$
13. $\vec{a} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$; $\vec{b} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$; $\vec{c} = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})$
14. $\vec{x} = (1, 1, 1)$
15. $\vec{x} = (-1, 2, 1)$
18. $\dfrac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}$
19. -30
20. $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$
21. área $= 2\sqrt{14}$; distância $= \sqrt{\frac{7}{3}}$
22. $\frac{\sqrt{5}}{2}$
23. $\text{proj}_{\overrightarrow{BC}} \vec{v}AB = (0, 0, 1)$; altura $= 1$

24. volume $= \frac{8}{75}$; altura $= \frac{8}{5\sqrt{13}}$

25. 2

26. (A)

27. (C)

28. (i) $X = (4, -7, -6) + \lambda(1, -1, -1)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$; D não pertence à reta.

(ii) Basta verificar que $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$ é L.I.

(iii) $\begin{cases} x = -1 + 5\lambda \\ y = 4 - 11\lambda \\ z = -2 - 4\lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

29. $P = (\frac{3}{4}, \frac{7}{4}, \frac{15}{4})$ ou $P = (\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{15}{2})$

30. $\begin{cases} x = 2 - 15\lambda \\ y = 4\lambda \\ z = -3 + 18\lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R}); \quad \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -3 - \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

31. (i) $\begin{cases} x = 1 + 2\mu \\ y = 1 + 2\lambda + \mu \\ z = \lambda \end{cases} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}); \; x - 2y + 4z + 1 = 0$

(ii) $\begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = -\lambda + \mu \\ z = 1 + 2\lambda + \mu \end{cases} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}); \; 3x - y - 2z - 1 = 0$

(iii) $\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -1 - 2\lambda + \mu \\ z = \lambda + \mu \end{cases} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}); \; 3x - y + z - 4 = 0$

32. (ii) $8x + 6y - z - 39 = 0$

33. $\vec{v} = (11, 7, 4) + (-10, -5, 0)$

34. $C = \left(\frac{7}{22}, \frac{2}{22}, \frac{-3}{22}\right)$ e $B = \left(\frac{15}{22}, \frac{20}{22}, \frac{25}{22}\right)$

35. (i) $(1, 0, 0)$; (ii) $(1, 2, 1)$

36. (i) paralelas distintas; (ii) concorrentes em $P = (1, -1, 0)$

37. (i) r e π são transversais em $P = (1, 0, -1)$; (ii) r está contida em π.

38. (i) sim; (ii) não

39. (i) sim; (ii) não

40. (i) $X = (1, 1, 0) + \lambda(1, -3, -1)$; (ii) Há infinitas soluções; (iii) Não existe solução.

41. bissetriz interna : $\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$; bissetriz externa : $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

42. $x - 2z = 0$

43. $(-\frac{8}{11}, \frac{79}{11}, -\frac{8}{11})$

44. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - t \qquad (t \in \mathbb{R}) \\ z = -1 - 2t \end{cases}$

45. Determinam um tetraedro de volume $\frac{1}{6}$.

46. (i) $(\frac{58}{25}, \frac{56}{25}, 1)$; (ii) $X = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 0\right) + \lambda(8, 10, 1)$; (iii) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$

47. $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$

48. $(2, 2, 0),\ (1, 3, 0),\ (0, 2, 0),\ (1, 1, \sqrt{2}),\ (2, 2, \sqrt{2}),\ (0, 2, \sqrt{2})$

49. $(0, 1, 0),\ (0, 0, 1),\ \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right),\ \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

50. $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right),\ P = \left(1, \frac{1}{2}, 2\right)$ e $Q = \left(\frac{5}{6}, \frac{5}{6}, \frac{11}{6}\right)$

51. $(-3, 4, -5) = (-3, 0, -5) + (0, 4, 0)$

52. (ii) $X = \left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}, 0\right) + \lambda(0, 1, 1),\ \lambda \in \mathbb{R}$; (iii) $X = (1, 0, 1) + \lambda\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{4}\right),\ \lambda \in \mathbb{R}$

53. (ii) $\pi_1 : x - 2y + z - 2 = 0,\ \pi_2 : x - 2y + z = 0$; (iii) $\frac{2}{\sqrt{6}}$

54. (i) $(x, y, z) = (-3, 6, 0) + t(0, -16, -8)$; (ii) $(x, y, z) = (7, -7, 2) + t(-6, 2, -4)$; (iii) $(x, y, z) = (\frac{8}{7}, -\frac{4}{7}, 0) + t(1, -\frac{13}{7}, \frac{47}{7})$

55. (i) $\frac{13}{42}\sqrt{42}$; pontos: $(-\frac{19}{14}, \frac{36}{14}, \frac{11}{14}), (-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3})$; (ii) $\frac{3}{5}\sqrt{5}$; pontos: $(-\frac{13}{5}, \frac{9}{5}, -\frac{2}{5}), (-\frac{13}{5}, 3, -1)$

56. (i) $4y - z = 5$; (ii) $4x + 13y + 3z = 43$; (iii) $3y + z = -2$; (iv) $-6x + 8y - 3z = 17$; (v) $x - y + z = 14$

57. (i) verdadeiro (se a reta não está contida no plano); (ii) falso; (iii) verdadeiro; (iv) falso; (v) falso; (vi) falso; (vii) verdadeiro; (viii) verdadeiro

58. (D)

59. (E)

60. (A)

61. (B)

62. (D)

63. (E)