

Mecânica Geral
Teoria

Transferência USP

www.transferenciausp.com.br

ÍNDICE

CAPÍTULO 1: CONCEITOS INICIAIS	2
1.1. Apresentação	2
1.2. Vetores	3
1.3. Ponto Material x Corpo Rígido	10
CAPÍTULO 2: ESTÁTICA.....	11
2.1. Apresentação	11
2.2. Forças	11
2.3. Momentos	12
2.4. Redução de Sistemas de Forças	15
2.5. Equilíbrio dos Corpos Rígidos.....	18
2.6. Vínculos	18
2.7. Diagrama de Corpo Livre	23
2.8. Centro de Massa.....	26
2.9. Equilíbrio do Baricentro.....	30
CAPÍTULO 3: CINEMÁTICA.....	32
3.1. Apresentação	32
3.2. Movimento Plano Geral	32
3.3. Centro Instantâneo de Rotação	35
3.4. Equações do Movimento.....	38
3.5. Referenciais Fixos e Móveis	43
3.6. Aceleração de Coriolis	44
3.7. Composição de Referenciais	46
CAPÍTULO 4: DINÂMICA.....	50
4.1. Apresentação	50
4.2. Princípio Fundamental da Dinâmica	50
4.3. Atrito	51
4.4. Teorema do Movimento do Baricentro	54
4.5. Momento de Inércia	59
4.6. Teorema do Momento Angular.....	64
4.7. Rolamento x Escorregamento	69
4.8. Teorema da Energia Cinética.....	74

CAPÍTULO 1: CONCEITOS INICIAIS

1.1. Apresentação

A Mecânica é o ramo da Física que estuda o repouso e o movimento de corpos sob a ação de forças. A divisão da Mecânica abordada nesta apostila é a Mecânica dos Corpos Rígidos, ou seja, é aquela que se restringe ao estudo dos corpos considerados perfeitamente rígidos, que não sofrem quaisquer deformações decorrentes das forças aplicadas.

Corpos infinitamente rígidos não existem no mundo real e tratam-se, portanto, de uma simplificação da realidade e, como tal, suas deformações (que sempre ocorrem, mesmo que ínfimas) serão desprezadas. Esta simplificação aplica-se bem ao estudo dos princípios e leis fundamentais presentes na Mecânica Newtoniana.

Três subdivisões compõem este ramo da Mecânica:

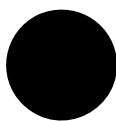
- 1) Estática: estuda forças e momentos aplicados sobre corpos em repouso e as condições para mantê-los em equilíbrio neste estado, bem como as reações nos vínculos que os apóiam.
- 2) Cinemática: aborda os movimentos dos corpos, sem ainda considerar as forças presentes, restringindo-se ao estudo das velocidades e acelerações desvinculadas de suas causas.
- 3) Dinâmica: complementa a Cinemática, agregando o efeito da ação de forças sobre as velocidades e acelerações desenvolvidas, e estabelecendo relações de causa e efeito entre forças e movimentos.

Os conceitos básicos da Mecânica (espaço, tempo, massa e força) são intuitivos e constituem a base da mensuração dos fenômenos estudados. A mensuração dos fenômenos é feita através de grandezas (aceleração, energia, velocidade, etc) coerentes com as unidades do Sistema Internacional (SI).

Algumas destas grandezas são representadas apenas por sua intensidade, em valor numérico e nas unidades adequadas: as denominadas grandezas escalares, como, por exemplo, massa, comprimento, frequência, etc.

Outras não podem ser descritas completamente apenas por sua intensidade, exigindo também uma representação vetorial. Estas grandezas vetoriais são grandezas como força, velocidade e outras relacionadas ao movimento dos corpos, onde a direção e o sentido da atuação da grandeza são tão importantes quanto sua intensidade. Como será explicado adiante, às vezes, o ponto de aplicação do vetor também pode ser necessário à sua representação.

$m = 2 \text{ kg}$ (escalar)



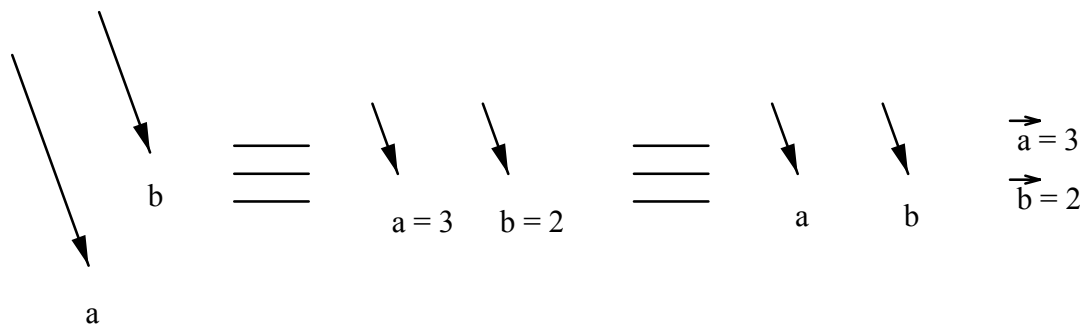
$\vec{v} = 3 \text{ m/s}$ (vetorial)

Grandeza	Escalar ou Vetorial	Unidade
Aceleração	Vetorial	m / s
Ângulo	Escalar	rad
Aceleração angular	Vetorial	rad / s
Área	Escalar	m
Comprimento	Escalar	m
Deslocamento	Vetorial	m
Energia	Escalar	$J = N \cdot m = kg \cdot m^2 / s^2$
Força	Vetorial	$N = kg \cdot m / s^2$
Frequência	Escalar	$Hz = 1 / s = s^{-1}$
Massa	Escalar	kg
Massa específica (densidade)	Escalar	kg / m
Momento de força (torque)	Vetorial	$N \cdot m = kg \cdot m^2 / s^2$
Posição	Vetorial	m
Potência	Escalar	$W = J / s = kg \cdot m^2 / s^3$
Tempo	Escalar	s
Trabalho	Escalar	$J = N \cdot m = kg \cdot m^2 / s^2$
Velocidade	Vetorial	m / s
Velocidade angular	Vetorial	rad / s
Volume	Escalar	m

1.2. Vetores

Os vetores representam em si mesmos a idéia de movimento e, por esta razão, os efeitos produzidos por vetores de direções ou sentido diferentes (mesmo que suas intensidades sejam iguais) não são idênticos ou equivalentes.

Um vetor é representado por uma seta que possui a direção em que se desenvolve e aponta para o sentido da ação. Pode ser desenhado em proporção a uma escala definida ou ser meramente ilustrativo, representado por uma seta acompanhada pelo valor numérico da intensidade (ou uma incógnita que represente a intensidade na forma literal).



Como se pode observar, os vetores devem ser nomeados por letras (a, b, c,...) e podem ser representados graficamente ou por notação matemática acompanhada por seu símbolo característico de grandeza vetorial: uma seta sobreposta à letra, por exemplo \vec{F} .

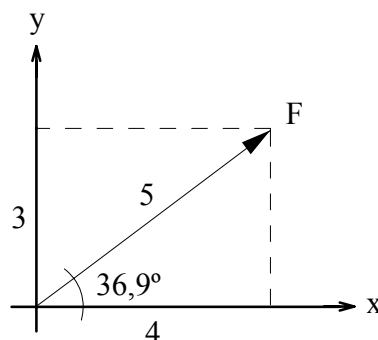
Na ocorrência de vários vetores similares, eles podem também ser representados pela mesma letra e diferenciados entre si apenas por índices (F_1 , F_2 , F_3 , ...).

Algebricamente, os vetores podem ser representados em coordenadas polares ou em coordenadas cartesianas:

- 1) No sistema de coordenadas polares: pelo valor numérico de sua intensidade (raio) e pelo ângulo que forma com o eixo de referência arbitrado.
- 2) No sistema de coordenadas cartesianas: pelo valor numérico da intensidade em relação a cada eixo de referência adotado: dois eixos para vetores bidimensionais (x, y) e três eixos para os tridimensionais (x, y, z).

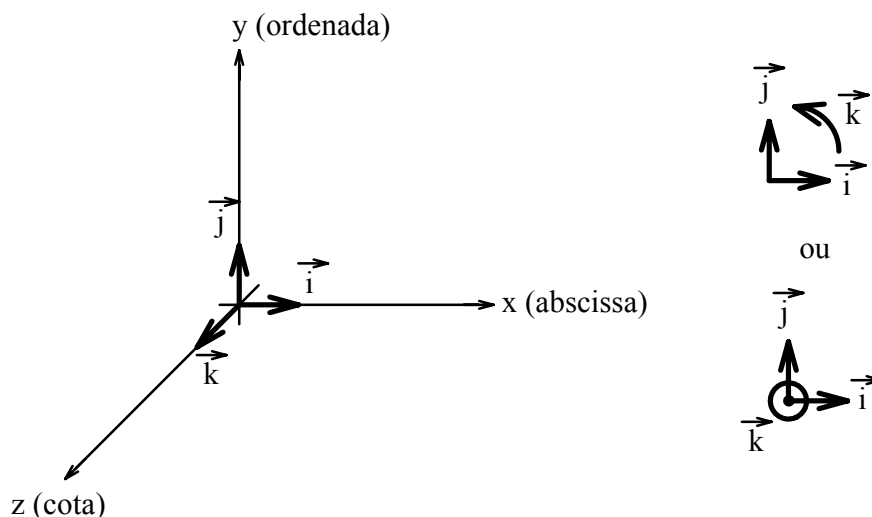
Polares: $\vec{F} = (5 ; 36,9^\circ)$

Cartesianas: $\vec{F} = (4 ; 3) = 4 \vec{i} + 3 \vec{j}$



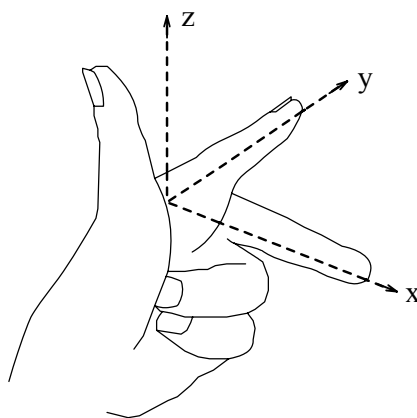
A representação aqui adotada será sempre em coordenadas cartesianas e os eixos adotados x, y, e z serão sempre todos ortogonais entre si. Esta representação é a mais simples na maioria dos casos, principalmente em problemas tridimensionais.

A representação cartesiana possui uma forma decomposta e algébrica, onde as intensidades em cada eixo são acompanhadas por vetores \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} . Estes vetores são meramente indicativos das direções de x, y, e z, de valor unitário e denominados versores.



É importante notar que o posicionamento relativo entre os três versores é fixo. Em muitas situações, podem ser fornecidos em outra origem no espaço ou podem ser rotacionados, a fim de acompanhar um elemento de interesse do problema (um plano inclinado, por exemplo).

Uma regra prática para visualizá-los é a “regra da mão esquerda”: abrindo os dedos médio e indicador da mão esquerda em 90° e esticando o polegar para cima, pode-se visualizar o dedo médio como o eixo x, o indicador como y e o polegar como z. Basta “alinhar” dois dedos com a posição conhecida dos eixos x, y para obter o sentido apontado pelo polegar para o terceiro eixo z.

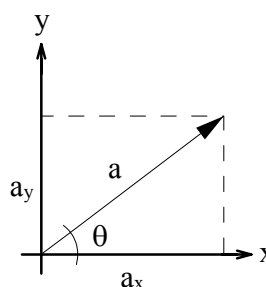


Os vetores podem sofrer várias operações matemáticas, com representação gráfica de algumas delas. As operações necessárias à mecânica vetorial são:

- a) **Decomposição em componentes cartesianas:** é a projeção da intensidade do vetor em relação aos eixos cartesianos nas duas dimensões (x, y) ou nas três (x, y, z).

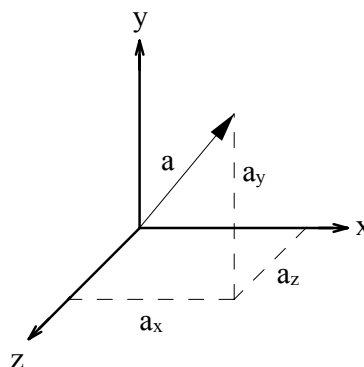
$$\begin{aligned} \vec{a}_x &= |\vec{a}| \cdot \cos \theta \, \vec{i} \\ \vec{a}_y &= |\vec{a}| \cdot \sin \theta \, \vec{j} \end{aligned}$$

Lembrar: $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$



$$\begin{aligned}\vec{b}_x &= |\vec{b}| \cdot \cos \theta_x \vec{i} \\ \vec{b}_y &= |\vec{b}| \cdot \cos \theta_y \vec{j} \\ \vec{b}_z &= |\vec{b}| \cdot \cos \theta_z \vec{k}\end{aligned}$$

Lembrar: $\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1$



O módulo dos vetores ($|\vec{a}|$ e $|\vec{b}|$) é o valor numérico da intensidade dos mesmos, facilmente calculada pelo Teorema de Pitágoras:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad |\vec{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}$$

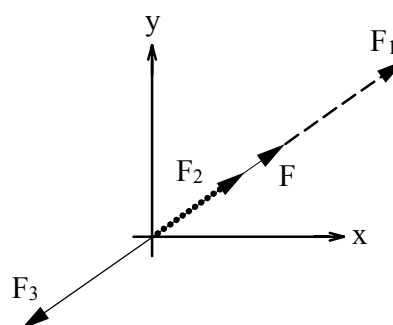
- b) Multiplicação por um escalar: é o produto de um número (escalar) por cada componente do vetor, podendo aumentá-lo (se o escalar for um número maior do que 1), diminuí-lo (se for uma fração entre 0 e 1) ou mesmo inverter seu sentido, aumentando ou reduzindo-o (se o escalar for um número negativo).

$$\vec{F} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$$

$$\vec{F}_1 = 2\vec{F} = 2\vec{F}_x + 2\vec{F}_y = 6\vec{i} + 4\vec{j}$$

$$\vec{F}_2 = \frac{2}{3}\vec{F} = \frac{2}{3}\vec{F}_x + \frac{2}{3}\vec{F}_y = 2\vec{i} + \frac{4}{3}\vec{j}$$

$$\vec{F}_3 = -1\vec{F} = -\vec{F}_x - \vec{F}_y = -3\vec{i} - 2\vec{j}$$

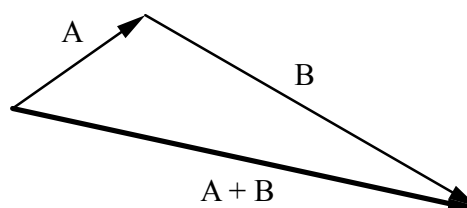


- c) Adição de vetores: pode ser obtida graficamente a partir da “emenda” dos vetores, mas, algebricamente, basta somar suas respectivas componentes cartesianas, dispensando o traçado.

$$\vec{A} = \vec{i} + \vec{j}$$

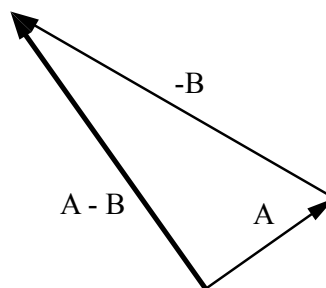
$$\vec{B} = 4\vec{i} - 2\vec{j}$$

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{i} + \vec{j} + 4\vec{i} - 2\vec{j} = 5\vec{i} - \vec{j}$$



- d) Subtração de vetores: consiste em somar os vetores, porém, antes os “subtraídos” devem ser invertidos, ou seja, estes serão multiplicados por -1 ; em seguida, procede-se à soma dos vetores não alterados com estes invertidos.

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{i} + \vec{j} - 4\vec{i} + 2\vec{j} = -3\vec{i} + 3\vec{j}$$



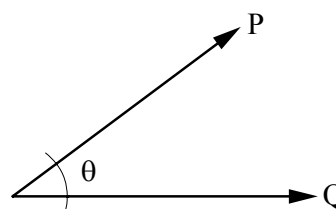
- e) Produto escalar entre dois vetores: é a soma dos produtos dos componentes de um vetor pelos respectivos componentes do outro.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \theta = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$$

$$\vec{P} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$$

$$\vec{Q} = 4\vec{i}$$

$$\vec{P} \cdot \vec{Q} = (3\vec{i} + 2\vec{j}) \cdot (4\vec{i}) = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 0 = 12$$



Este produto é comutativo, ou seja, a ordem dos vetores não afeta o resultado e este resultado é sempre um número puro (escalar), sem direção e sentido: $\vec{C} \cdot \vec{D} = \vec{D} \cdot \vec{C}$.

Produtos escalares de vetores sem nenhum componente na mesma direção resultam nulos:

$$\vec{C} \cdot \vec{D} = (3\vec{i}) \cdot (4\vec{j}) = 0$$

- f) Produto vetorial entre dois vetores: é uma operação que resulta num vetor perpendicular ao plano definido pelos dois vetores originais.

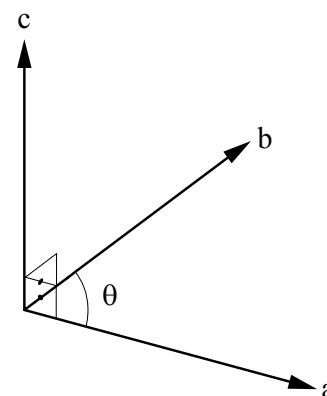
$$\vec{a} \wedge \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \theta = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \wedge (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k})$$

$$\vec{R} = 4\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\vec{S} = \vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\vec{R} \wedge \vec{S} = (4\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}) \wedge (\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k})$$

$$\vec{R} \wedge \vec{S} = 0 + 8\vec{k} - 16\vec{j} - 3\vec{k} + 0 + 12\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{i} + 0 = 8\vec{i} - 14\vec{j} + 5\vec{k}$$



A propriedade distributiva é válida no produto vetorial.

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = a_x \vec{i} \wedge (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) + a_y \vec{j} \wedge (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) + a_z \vec{k} \wedge (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k})$$

O vetor resultante será simultaneamente perpendicular aos dois vetores originais. Por exemplo, se os vetores coincidirem com os eixos (x , y), o vetor resultante terá a direção do eixo z.

$$2 \vec{i} \wedge 3 \vec{j} = 6 \vec{k}$$

$$4 \vec{j} \wedge 5 \vec{k} = 20 \vec{i}$$

O produto entre componentes (ou vetores) de mesma direção resulta nulo.

$$\vec{i} \wedge \vec{i} = 0$$

$$\vec{j} \wedge \vec{j} = 0$$

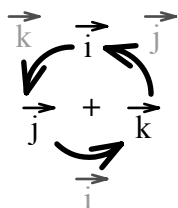
$$\vec{k} \wedge \vec{k} = 0$$

Há uma ordem a ser obedecida para obter o produto positivo. A ordem oposta determina um produto negativo. Portanto, o produto vetorial não é comutativo.

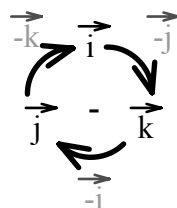
$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$$

$$\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$$

$$\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$$



$$2 \vec{i} \wedge 3 \vec{j} = 6 \vec{k}$$



$$3 \vec{j} \wedge 2 \vec{i} = -6 \vec{k}$$

$$\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}$$

$$\vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}$$

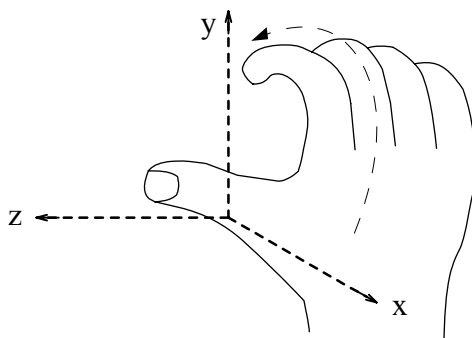
$$\vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$$

As combinações possíveis estão resumidas na tabela a seguir:

		2º Vetor (B)		
		\vec{i}	\vec{j}	\vec{k}
1º Vetor (A)	\vec{i}	0	\vec{k}	$-\vec{j}$
	\vec{j}	$-\vec{k}$	0	\vec{i}
	\vec{k}	\vec{j}	$-\vec{i}$	0

Há duas formas para determinar a direção do vetor resultante, sem recorrer à tabela de sinais:

- f.1)** A “regra da mão direita”, em que o pulso da mão direita se posiciona sobre a extremidade do primeiro vetor do produto e os dedos se movem num arco para chegar ao segundo; o polegar indicará se o vetor resultante é positivo ou negativo.



- f.2)** Ou através do cálculo do determinante da seguinte matriz:

$M = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$	<p>→ versores dos 3 eixos coordenados</p> <p>→ componentes numéricas do 1º vetor</p> <p>→ componentes numéricas do 2º vetor</p>
$\vec{A} \wedge \vec{B} = \det M = (A_y B_z - A_z B_y) \vec{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \vec{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \vec{k}$	

A principal vantagem deste método é o resultado direto e completo obtido sobre todas as componentes dos dois vetores, desde que corretamente montada a matriz.

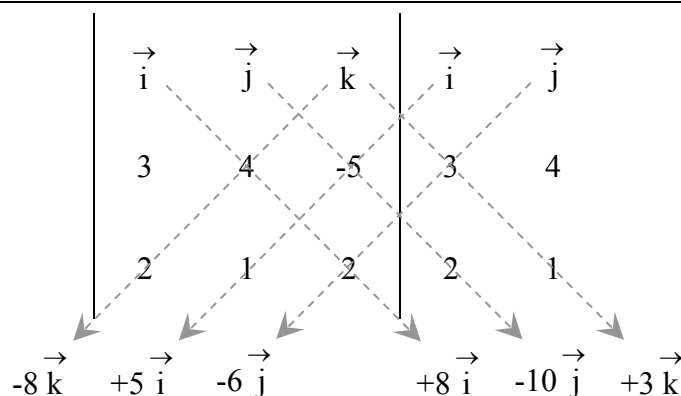
O cálculo da matriz pode ser realizado pela seguinte seqüência de passos:

- f.2.a)** Copiar a primeira e segunda colunas da matriz ao lado direito da mesma.
- f.2.b)** Traçar as seis diagonais desta nova matriz 3 x 6, que servirão como orientação do próximo passo.
- f.2.c)** Calcular os produtos dos 3 termos atravessados por cada diagonal, mantendo o sinal obtido pelo produto das diagonais que descem à direita e invertendo os resultados das matrizes à esquerda.
- f.2.d)** Somar todos os 6 produtos calculados, já invertidos os resultados das diagonais à esquerda. O valor desta soma é o determinante da matriz 3 x 3 original.

$$\vec{F} = 3 \vec{i} + 4 \vec{j} - 5 \vec{k}$$

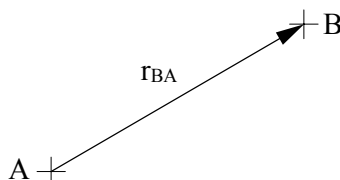
$$\vec{G} = 2 \vec{i} + \vec{j} + 2 \vec{k}$$

$$\vec{F} \wedge \vec{G} = (3 \vec{i} + 4 \vec{j} - 5 \vec{k}) \wedge (2 \vec{i} + \vec{j} + 2 \vec{k}) = -8 \vec{k} + 5 \vec{i} - 6 \vec{j} + 8 \vec{i} - 10 \vec{j} + 3 \vec{k} = 13 \vec{i} - 16 \vec{j} - 5 \vec{k}$$



Os vetores de posição entre dois pontos – orientados a partir de um ponto de origem (ponto A) para um ponto de destino (ponto B) – devem ser representados da seguinte forma:

$$\vec{r}_{BA} = (B - A) = (x_B - x_A) \vec{i} + (y_B - y_A) \vec{j} + (z_B - z_A) \vec{k}$$



1.3. Ponto Material x Corpo Rígido

Um ponto material é um corpo cujas dimensões e formato são irrelevantes para o problema em questão e possuem uma série de simplificações na Mecânica: não são considerados momentos sobre este ponto, apenas forças concorrentes; massa e peso são concentrados; não há rotação em torno de si mesmo, apenas em torno de outros pontos.

Já os corpos rígidos afetam o movimento e o equilíbrio através de suas dimensões: podem ocorrer momentos puros (binários) ou como consequência da não-concorrência (excentricidade) entre forças; a massa e o peso são distribuídos ao longo do corpo; o corpo pode apresentar giro em torno de si mesmo.

Sistemas de pontos materiais – unidos entre si ou que exercem ações uns sobre os outros (ação e reação) – podem se comportar como corpos rígidos ou como sistemas móveis (articulados).

Um mesmo objeto pode ser considerado como ponto material ou como corpo rígido, conforme a relevância de suas dimensões perante o contexto do problema estudado:

- Um carro movimentando-se sobre uma ponte possui tamanho desprezível perante a obra e pode ser considerado como ponto material, com todo o seu peso concentrado em seu baricentro.
- O mesmo carro, quando erguido por meio de um macaco, deve ser considerado como corpo rígido, com maior importância para as características físicas do carro (como distância entre as rodas, posição de centro de gravidade do carro, ponto de apoio do macaco, etc).

As explicações dos próximos capítulos definirão os conceitos aplicados aos corpos rígidos, por serem mais complexos, sendo indicadas as simplificações presentes nos pontos materiais.

CAPÍTULO 2: ESTATICA

2.1. Apresentação

A Estática estuda o equilíbrio em repouso de pontos ou corpos, isolados ou vinculados entre si, bem como a distribuição de esforços resistentes (reações) sobre os vínculos que os sustentam, além da determinação da posição do centro de gravidade de um corpo ou conjunto de corpos.

A rigidez (adotada como infinita) dos corpos simplifica o estudo, pois, ao tratá-los como indeformáveis, não há ocorrência de efeitos de 2ª ordem, que intensificam o efeito das forças atuantes e, conseqüentemente, as deformações.

As disciplinas de Resistência dos Materiais inserem os efeitos da deformabilidade e elasticidade no estudo da Estática, principalmente quanto à sua ruptura, porém são, mais complexas do que a introdução à mecânica aqui pretendida.

Todo o estudo da Estática se concentrará em corpos em repouso estático e nas forças e reações necessárias para garantir este equilíbrio. Caso esta condição de repouso não seja possível, a análise deverá avançar sobre a Cinemática e a Dinâmica, que tratam do estudo do movimentos dos corpos.

2.2. Forças

O conceito de força é intuitivo e está intimamente ligado ao movimento e à alteração do estado inicial dos corpos e suas interações com o meio que os cerca.

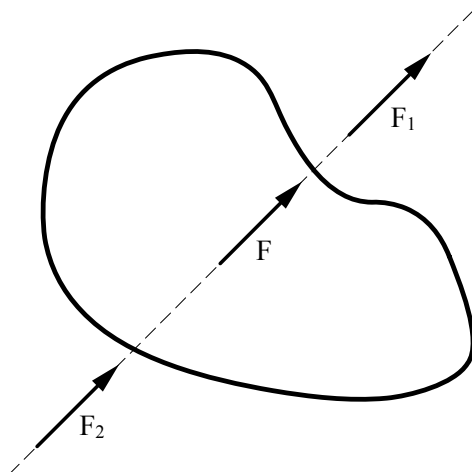
A Primeira Lei de Newton, ou Princípio da Inércia, possui implicitamente uma caracterização para as forças: “Um corpo tende a permanecer em estado de repouso ou em movimento retilíneo uniforme até ser afetado por uma força externa”. Ou seja, forças são agentes físicos capazes de alterar o estado de repouso ou de movimento de um corpo.

As forças são grandezas vetoriais e, portanto, não bastam suas intensidades para caracterizá-las: são necessários também a direção e o sentido de suas ações, que, geralmente, impõem também o sentido do movimento sob o qual passará a se deslocar o corpo afetado.

As forças abordadas adiante serão quase sempre vetores deslocáveis, isto é, vetores que podem ser deslocados para outras posições (que obviamente forem mais convenientes para o problema), sem perder ou alterar seus efeitos sobre o corpo rígido.

Existem ainda mais dois tipos de vetores (quanto à sua mobilidade): os fixos ou aplicados, que estão presos a um determinado ponto do corpo, e os livres, que podem ser deslocados para qualquer ponto do corpo.

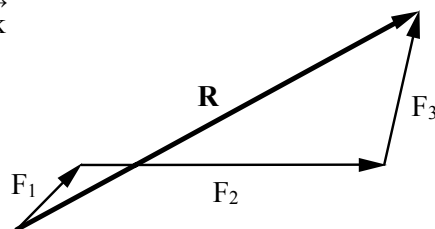
A possibilidade de deslocar as forças quanto ao seu ponto de aplicação fundamenta-se no Princípio da Transmissibilidade, que afirma ser possível mover uma força na direção do seu eixo, mantendo sua intensidade, direção e sentido, sem alteração dos efeitos decorrentes (momento, aceleração, etc), pois, como será explicado, em cada um destes efeitos o fator relevante é a distância do ponto de aplicação ao eixo da força (distância perpendicular).



Uma forma resumida de representação de todas as forças atuantes num mesmo corpo é por uma única força equivalente (às vezes acompanhada por um momento), chamada de força resultante ou somente resultante, obtida pela soma vetorial das componentes de todas as forças presentes.

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \dots + \vec{F}_a = (F_{1x} + \dots + F_{ax}) \vec{i} + (F_{1y} + \dots + F_{ay}) \vec{j} + (F_{1z} + \dots + F_{az}) \vec{k}$$

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^a \vec{F}_i$$

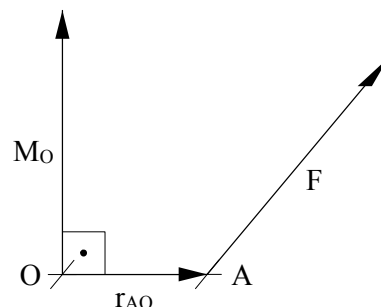
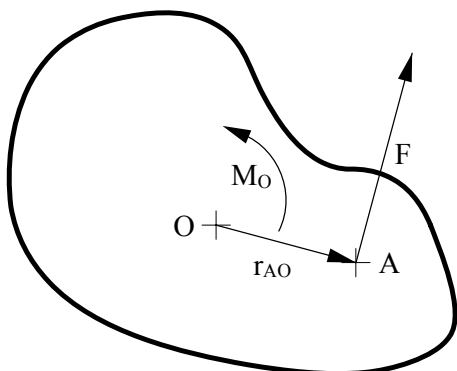


2.3. Momentos

Se as forças presentes no corpo não forem alinhadas ou concorrentes entre si (mesmo que sua resultante seja nula) haverá uma tendência de giro, que se desenvolverá caso o corpo não esteja preso em apoios que impeçam esta rotação. Esta tendência de rotação é denominada momento e, em corpos flexíveis, pode curvar e torcer os corpos (o que não ocorrerá aqui por serem considerados como perfeitamente rígidos).

Ao contrário das forças, que são constantes em todo o corpo devido à rigidez infinita, os momentos decorrentes delas variam de ponto para ponto, pois dependem da distância a cada ponto considerado. O cálculo do momento de uma força em relação a um ponto pode ser obtido pela seguinte expressão:

$$\vec{M}_O = \vec{r}_{AO} \wedge \vec{F} = (\vec{A} - \vec{O}) \wedge \vec{F}$$

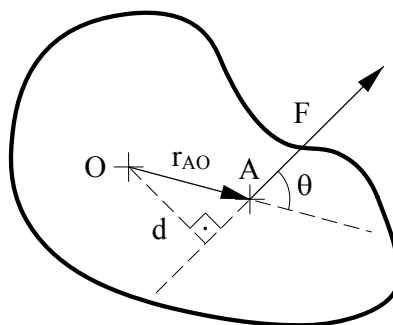


$$\vec{M}_A = M_{Ax} \vec{i} + M_{Ay} \vec{j} + M_{Az} \vec{k} = \det \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

O vetor \vec{r} representa a direção e sentido da distância que une o ponto O (pólo do momento) ao ponto A (ponto de aplicação da força). O sentido desta distância (chamada de braço do momento) é importante, pois este produto vetorial resultará no vetor do momento, perpendicular ao plano que contém a força e o braço.

O valor do momento também pode ser calculado pelo produto simples do módulo da força pelo braço do momento; sua direção e sentido poderão ser determinados pela “regra da mão direita”, bastando repetir a tendência de giro do momento com o movimento da mão.

$$|M_O| = |F| \cdot |r| \sin \theta = |F| \cdot d$$

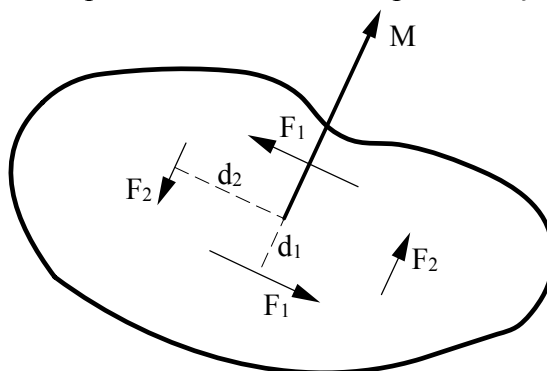


Não há um momento verdadeiramente resultante para todo o corpo, pois cada ponto possuirá seu próprio valor de momento, exceto em situações particulares (explicadas no tópico sobre redução de sistemas de forças).

Outra representação usual para um momento é por meio de um binário: um par de forças iguais, porém de sentidos opostos (portanto a resultante deste par é nula), cujo produto da intensidade das forças pela distância entre elas é igual ao módulo do momento.

A direção das forças não é relevante, apenas o vetor do binário deve obedecer ao sentido e direção do momento original, o que possibilita infinitos binários possíveis na escolha do par de forças:

$$|M| = |F_1| \cdot d_1 = |F_2| \cdot d_2$$



A expressão do momento sobre um ponto P qualquer do corpo, consideradas todas as forças atuantes e todos os binários aplicados, será:

$$\vec{M}_P = \sum_{i=0}^a (\vec{r}_i \wedge \vec{F}_i) + \sum_{j=0}^b \vec{M}_j$$

Exemplo: Calcular a força resultante e o momento no ponto O da placa quadrada:

$$O (3a ; 3a ; 0)$$

$$\vec{F}_1 = -3\vec{k}$$

$$A (2a ; 3a ; 0)$$

$$\vec{F}_2 = -2\vec{i}$$

$$B (4a ; 2a ; 0)$$

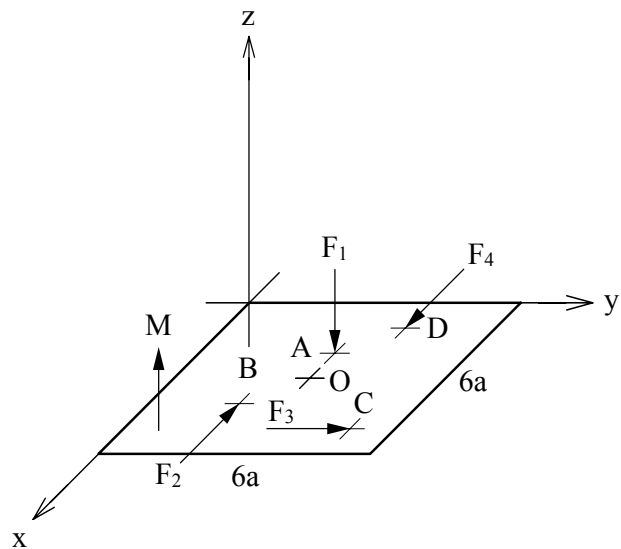
$$\vec{F}_3 = \vec{j}$$

$$C (5a ; 5a ; 0)$$

$$\vec{F}_4 = -4\vec{j} - 4\vec{k}$$

$$D (a ; 4a ; 0)$$

$$\vec{M} = 3a\vec{k}$$



$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = -3\vec{k} - 2\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{j} - 4\vec{k} = -2\vec{i} - 3\vec{j} - 7\vec{k}$$

$$\vec{M}_O = \vec{r}_{AO} \wedge \vec{F}_1 + \vec{r}_{BO} \wedge \vec{F}_2 + \vec{r}_{CO} \wedge \vec{F}_3 + \vec{r}_{DO} \wedge \vec{F}_4 + \vec{M}$$

$$\vec{M}_O = (A - O) \wedge \vec{F}_1 + (B - O) \wedge \vec{F}_2 + (C - O) \wedge \vec{F}_3 + (D - O) \wedge \vec{F}_4 + \vec{M}$$

$$\vec{M}_O = (2a\vec{i} + 3a\vec{j} - 3a\vec{i} - 3a\vec{j}) \wedge (-3\vec{k}) + (4a\vec{i} + 2a\vec{j} - 3a\vec{i} - 3a\vec{j}) \wedge (-2\vec{i}) +$$

$$+ (5a\vec{i} + 5a\vec{j} - 3a\vec{i} - 3a\vec{j}) \wedge \vec{j} + (a\vec{i} + 4a\vec{j} - 3a\vec{i} - 3a\vec{j}) \wedge (-4\vec{j} - 4\vec{k}) + 3a\vec{k}$$

$$\vec{M}_O = (-a\vec{i}) \wedge (-3\vec{k}) + (a\vec{i} - a\vec{j}) \wedge (-2\vec{i}) + (2a\vec{i} + 2a\vec{j}) \wedge \vec{j} + (-2a\vec{i} + a\vec{j}) \wedge (-4\vec{j} - 4\vec{k}) + 3a\vec{k}$$

$$\vec{M}_O = -3a\vec{j} + 0 - 2a\vec{k} + 2a\vec{k} + 0 + 8a\vec{k} + 0 - 8a\vec{j} - 4a\vec{i} + 3a\vec{k} = -4a\vec{i} - 11a\vec{j} + 11a\vec{k}$$

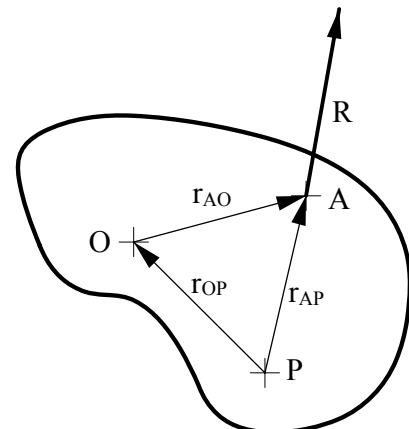
A fim de evitar a repetição da longa somatória de momentos individuais para cada ponto, pode-se calcular o momento para qualquer outro ponto a partir da mudança de pólo: o ponto O (de momento já conhecido ou calculado) funciona como intermediário para transportar o momento de um ponto para outro, bastando que se conheça a resultante e a distância entre os pontos, evitando o cálculo do momento de cada força individual novamente.

$$\vec{M}_O = \vec{r}_{AO} \wedge \vec{F} = (A - O) \wedge \vec{R}$$

$$\vec{M}_P = \vec{r}_{AP} \wedge \vec{F} = (A - P) \wedge \vec{R}$$

$$\vec{M}_P = (A - O + O - P) \wedge \vec{R} = (A - O) \wedge \vec{R} + (O - P) \wedge \vec{R}$$

$$\boxed{\vec{M}_P = \vec{M}_O + (O - P) \wedge \vec{R}}$$



Exemplo: Calcular o momento no ponto B da placa quadrada do exemplo anterior:

$$\begin{aligned}\vec{M}_B &= \vec{M}_O + (\vec{O} - \vec{B}) \wedge \vec{R} = -4a \vec{i} - 11a \vec{j} + 11a \vec{k} + (3a \vec{i} + 3a \vec{j} - 4a \vec{i} - 2a \vec{j}) \wedge (-2 \vec{i} - 3 \vec{j} - 7 \vec{k}) \\ \vec{M}_B &= -4a \vec{i} - 11a \vec{j} + 11a \vec{k} + (-a \vec{i} + a \vec{j}) \wedge (-2 \vec{i} - 3 \vec{j} - 7 \vec{k}) \Rightarrow \vec{M}_B = -4a \vec{i} - 11a \vec{j} + 11a \vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & -7 \end{vmatrix} \\ \vec{M}_B &= -4a \vec{i} - 11a \vec{j} + 11a \vec{k} + 3a \vec{k} - 7a \vec{j} + 2a \vec{k} - 7a \vec{i} \Rightarrow \vec{M}_B = -11a \vec{i} - 18a \vec{j} + 16a \vec{k}\end{aligned}$$

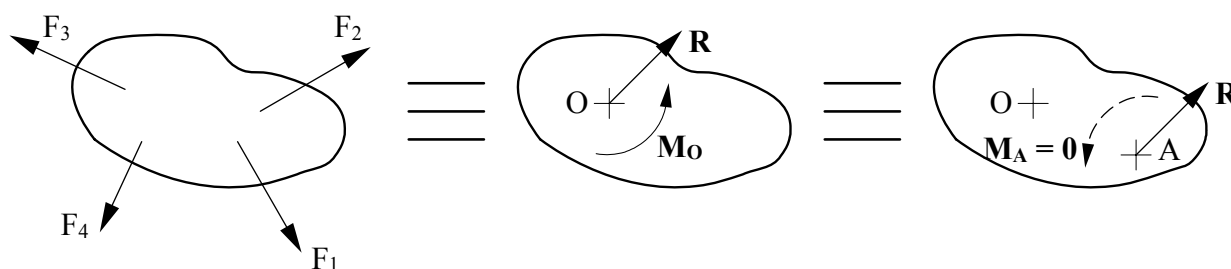
Todas as considerações apresentadas para momentos não se aplicam aos pontos materiais isolados, pois estes não possuem dimensões e distâncias para o braço de momentos, somente sob ação de forças concentradas. Em sistemas de pontos vinculados entre si (por meio de barras, fios ou outras formas de conexão), há possibilidade da ocorrência de momentos, pois as forças influem em todos os pontos, não apenas nos de aplicação, gerando momentos pelas distâncias entre pontos.

\Rightarrow **EXERCÍCIOS 2.1 e 2.2**

2.4. Redução de Sistemas de Forças

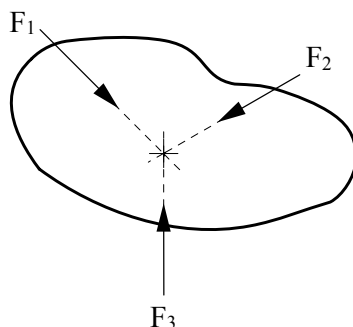
Reduzir um sistema de forças e momentos significa obter um sistema equivalente de uma força resultante e/ou um binário, que produzam os mesmos efeitos originais sobre o sistema. Conhecidos a resultante e o momento em um ponto Q (qualquer) do corpo, poderão ocorrer quatro combinações possíveis no sistema reduzido:

- 1) Nenhuma força ou binário ($\vec{R} = 0$ e $\vec{M}_Q = 0$): o corpo está equilibrado (resultante e momento nulos em todos os pontos).
- 2) Apenas o momento ($\vec{R} = 0$ e $\vec{M}_Q \neq 0$): a resultante é nula e o momento é constante em todos os pontos do corpo.
- 3) Apenas a força resultante ($\vec{R} \neq 0$, $\vec{M}_Q \neq 0$ e $\vec{R} \perp \vec{M}_Q$ – perpendiculares entre si): sendo a resultante não nula, o momento não será constante ao longo do corpo e em um de seus pontos, assumirá valor nulo. Portanto, a redução buscará o deslocamento da resultante para este ponto de momento nulo.

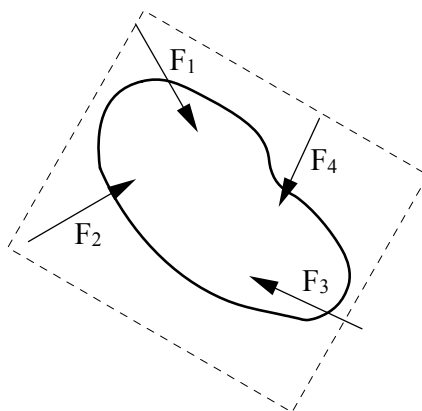


Três casos se enquadram neste tipo de redução:

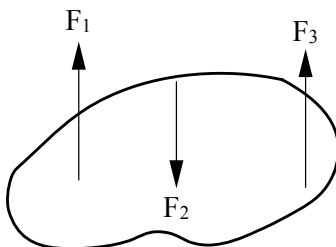
3.1) Forças concorrentes em um mesmo ponto:



3.2) Forças coplanares, ou seja, todas pertencentes ao mesmo plano:



3.3) Forças paralelas entre si:



- 4) Força resultante e momento ($\vec{R} \neq 0$ e $\vec{M}_Q \neq 0$, porém não perpendiculares entre si):** este caso representa a maior parte das situações, onde a resultante está presente e o momento não se anula em nenhum ponto.

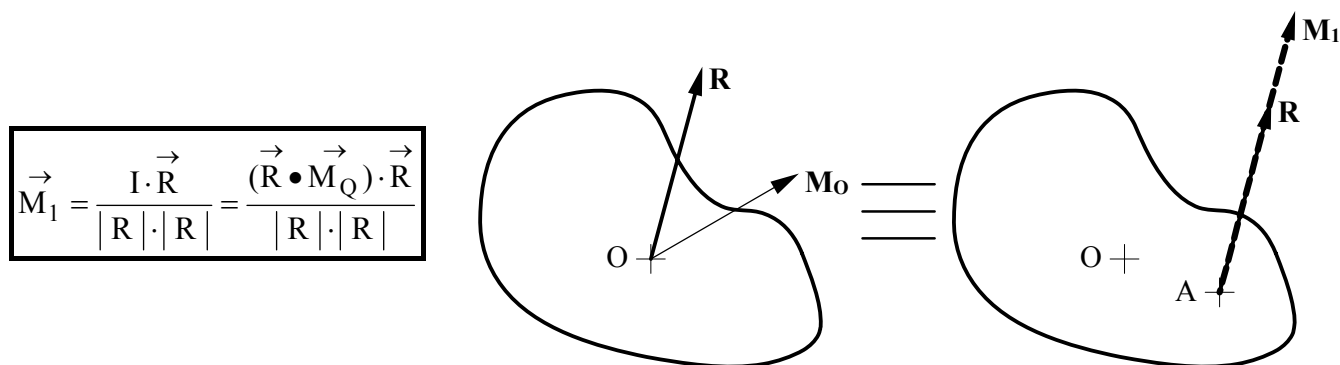
Os dois primeiros casos de redução são claramente identificáveis, porém os dois últimos podem ser confundidos e, para diferenciá-los, é necessário determinar se o momento e força resultante são perpendiculares (3º caso) ou não (4º caso) entre si. Um parâmetro para confirmar ou negar a perpendicularidade é o invariante escalar:

$$I = \vec{R} \cdot \vec{M}_Q$$

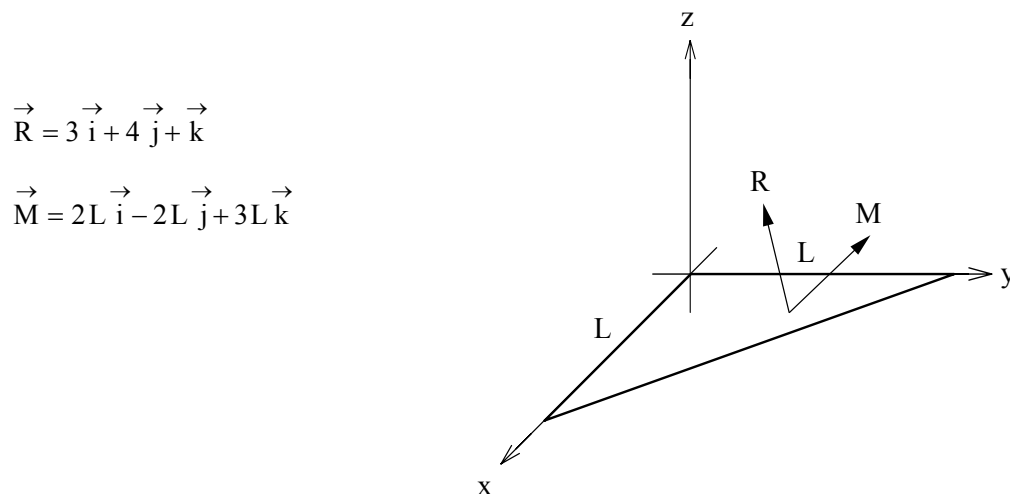
- a) Se este parâmetro for nulo ($I = 0$), os vetores da resultante e do momento são perpendiculares (produto escalar nulo) e o sistema pode ser reduzido apenas à sua resultante (3º caso).
- b) Se o invariante não for nulo ($I \neq 0$), então a redução necessariamente será composta por um par força-binário (4º caso).

Mesmo não redutível a zero, haverá um ponto de momento mínimo (também chamado tursor) que possui a mesma direção do vetor da força resultante.

Porém, apesar de paralelo à resultante, o tursor continua sendo um momento, ou seja, uma tendência de giro em um plano perpendicular ao vetor que o representa.



Exemplo: O sistema força-binário da placa triangular é redutível a uma única força? Se não for redutível, qual o valor do momento mínimo (tursor)?



$$\vec{R} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{M} = 2L\vec{i} - 2L\vec{j} + 3L\vec{k}$$

$$I = (2L\vec{i} - 2L\vec{j} + 3L\vec{k}) \cdot (3\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}) = 6L - 8L + 3L = L$$

Portanto, o sistema não é redutível a uma única força.

$$\vec{M}_1 = \frac{1 \cdot (3\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k})}{(\sqrt{3^2 + 4^2 + 1^2}) \cdot (\sqrt{3^2 + 4^2 + 1^2})} = \frac{3\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{26}} = \frac{3\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}}{26}$$

⇒ **EXERCÍCIOS 2.3 e 2.4**

2.5. Equilíbrio dos Corpos Rígidos

Um corpo rígido, livre no espaço, somente pode permanecer em equilíbrio se a resultante das forças e o momento sobre ele forem nulos em todos os seus pontos (1º caso de redução).

O equilíbrio é garantido quando as seguintes equações são obedecidas:

- 1) Para forças contidas num único plano (problemas bidimensionais):

$$R_x = \sum F_x = 0 \quad R_y = \sum F_y = 0 \quad M_z^R = \sum M_z = 0$$

- 2) Para forças contidas em mais de um plano (problemas tridimensionais):

$$\begin{array}{lll} R_x = \sum F_x = 0 & R_y = \sum F_y = 0 & R_z = \sum F_z = 0 \\ M_x^R = \sum M_x = 0 & M_y^R = \sum M_y = 0 & M_z^R = \sum M_z = 0 \end{array}$$

Os índices x, y, z de cada equação referem-se às componentes cartesianas dos vetores da força resultante e do momento.

Para pontos materiais, não há momentos e, portanto, apenas deverão ser satisfeitas as equações da força resultante ($R_x = 0$, $R_y = 0$, $R_z = 0$).

2.6. Vínculos

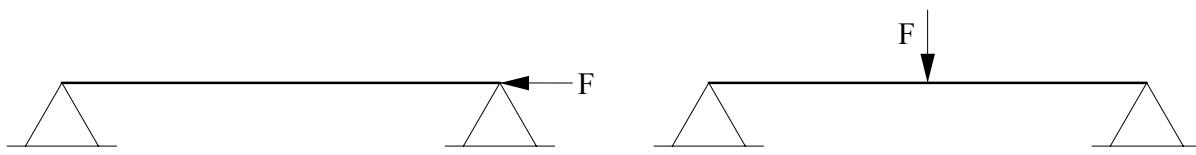
Os vínculos são elementos que possuem a função de anular as forças e momentos não equilibrados do corpo (ou conjunto de corpos), forçando-o ao equilíbrio em repouso. Representam restrições ao sistema e servem como suporte ao mesmo.

Para obter o equilíbrio, a combinação de reações nos vínculos deve impedir os deslocamentos nos graus de liberdade em cada situação: 2 deslocamentos e 1 rotação em problemas planos e 3 deslocamentos e 3 rotações em problemas espaciais.

O excesso ou a falta de reações vinculares pode provocar instabilidade (estruturas hipoestáticas) ou indeterminação do valor das reações de equilíbrio (estruturas hiperestáticas). As estruturas perfeitamente equilibradas são chamadas isostáticas.

Para a resolução dos problemas de equilíbrio na Estática onde estão presentes vínculos, apenas pode-se recorrer às 3 ou 6 equações de equilíbrio vistas anteriormente. Portanto, a classificação de uma estrutura em um dos três tipos anteriores é uma questão essencialmente matemática:

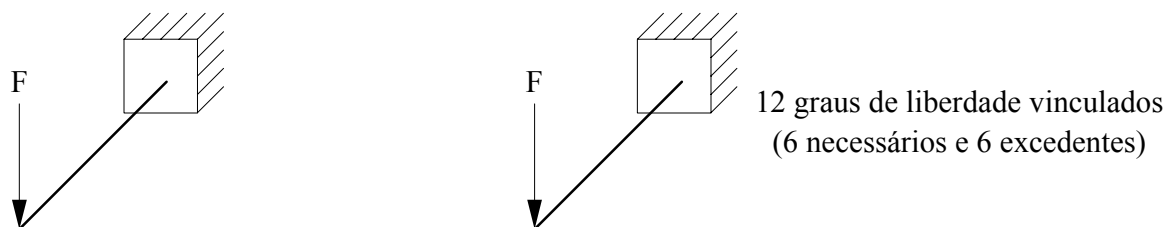
- 1) Se a estrutura apresentar menos reações vinculares (incógnitas) do que equações de equilíbrio (3 ou 6 equações), o sistema será possível e indeterminado (SPI), pois o número de reações é insuficiente para resolver (equilibrar) o sistema e a estrutura será hipoestática e poderá se deslocar na direção dos graus de liberdade não impedidos pelos vínculos.



2 graus de liberdade vinculados (3 necessários, porém 1 grau está livre)

- 2) Se houver mais reações (incógnitas) do que as equações de equilíbrio disponíveis (3 ou 6), o sistema será impossível (SI) na Mecânica dos Corpos Rígidos e somente pode ser resolvido pela introdução de equações de deformação da Mecânica dos Corpos Deformáveis.

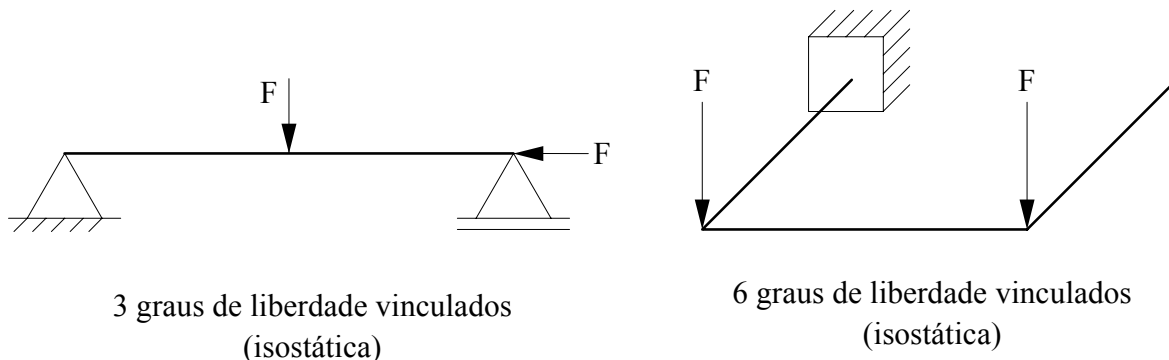
O excesso de reações leva a estruturas hiperestáticas: imóveis e mais resistentes do que o necessário, que sofrem acomodação na distribuição das forças e não podem ser tratadas como corpos rígidos.



- 3) Na ocorrência de igualdade entre o número de incógnitas (reações vinculares) e de equações de equilíbrio, o sistema é possível e determinado (SPD), por possuir uma única resposta, que pode então ser calculada pelas equações disponíveis.

Nesta condição de igualdade entre incógnitas e equações, as estruturas em questão serão isostáticas, cujos vínculos restringem somente os graus de liberdade necessários, impedindo todos os movimentos, sendo as reações de todos os vínculos calculáveis.

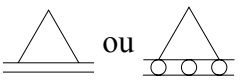

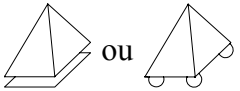

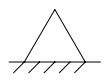

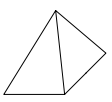
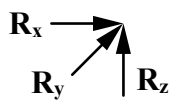

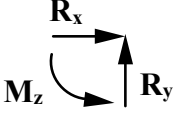

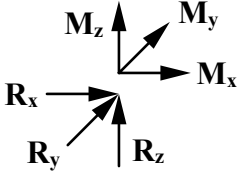

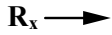

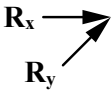
Além da igualdade entre o número de equações e de incógnitas, é necessário que haja uma correta distribuição dos vínculos, segundo suas reações vinculares: conjuntamente, as reações devem possuir componentes em todas as direções (x , y para problemas bidimensionais e x , y , z para tridimensionais) e não podem convergir todas para um mesmo ponto (ou permitirão a ocorrência de momentos sobre o corpo).



O estudo da Estática na Mecânica dos Corpos Rígidos abordará apenas as estruturas isostáticas, cujas reações vinculares podem ser determinadas pelo trio ou sexteto de equações de equilíbrio.

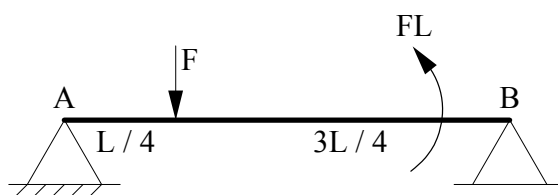
As estruturas hipoestáticas serão estudadas na Cinemática e na Dinâmica, que necessariamente estudam estruturas e corpos em desequilíbrio (em movimento). Em casos excepcionais, estruturas hipoestáticas podem ser estudadas na Estática, desde que equilibradas (precariamente) por forças e/ou binários. As estruturas hiperestáticas não são objeto da Mecânica dos Corpos Rígidos.

A tabela a seguir resume os principais tipos de vínculos e as reações equilibradas por cada um:

Vínculos			Reações vinculares (Graus de liberdade impedidos)
Apoio Móvel	2D		
	3D		
Apoio Fixo	2D		
	3D		
Engaste	2D		
	3D		
Anel	2D		
	3D		

O cálculo das reações vinculares é obtido pela resolução das equações de equilíbrio: separa-se o corpo (ou conjunto de corpos) dos vínculos, substituindo-os pelas reações que representam, servindo como incógnitas nas equações de equilíbrio. Uma dica para facilitar a resolução é escolher o vínculo com mais reações e/ou forças aplicadas (ou cujo eixo intercepte o vínculo) para o cálculo dos momentos, pois os braços destas forças serão nulos (sem gerar momentos), reduzindo o número de incógnitas nas equações de equilíbrio.

Exemplo: Calcular as reações nos vínculos A e B da viga:



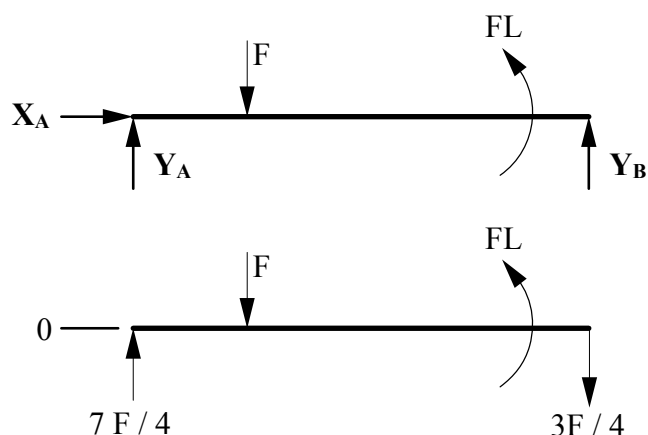
$$R_x = 0 \Rightarrow X_A = 0$$

$$R_y = 0 \Rightarrow Y_A + Y_B - F = 0 \Rightarrow Y_A = -Y_B + F$$

$$M_z = 0 \Rightarrow M_{ZA} = 0 \Rightarrow -F \cdot \frac{L}{4} + Y_B \cdot L + FL = 0$$

$$-\frac{F}{4} + Y_B + F = 0 \Rightarrow Y_B = -\frac{3F}{4}$$

$$Y_A = -Y_B + F \Rightarrow Y_A = \frac{3F}{4} + F \Rightarrow Y_A = \frac{7F}{4}$$



Todas as reações foram admitidas como positivas. Os sentidos (positivo ou negativo) dos momentos da força e de cada reação foram obtidos pela regra da mão direita.

Corpos tridimensionais, sob ação de forças também tridimensionais, por possuírem três equações de momento, exigirão maior atenção quanto ao braço do momento e quanto à direção em relação a cada eixo coordenado, a fim de evitar o erro comum de “troca” de momentos entre um eixo e outro.

Analisando a equação básica do momento ($\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}$), pode-se notar que uma força não exercerá momento em uma determinada direção se ocorrer, pelo menos, uma das duas situações seguintes:

- 1) Força paralela ao eixo em questão, pois o produto vetorial resultará nulo.
- 2) Cruzamento (mesmo que fora do corpo) entre o eixo da força e o eixo considerado (x , y ou z) sobre o ponto em questão, pois o braço será nulo e, conseqüentemente, o momento também.

Exemplo: Calcular as reações vinculares do engaste A:

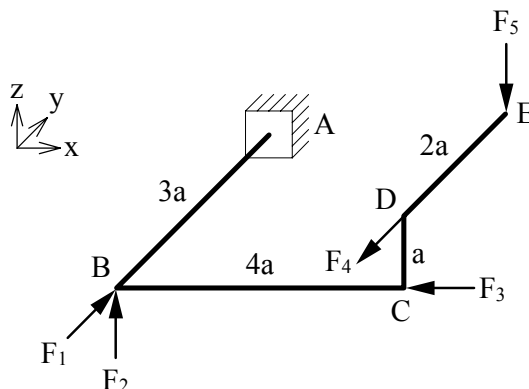
$$|F_1| = 5$$

$$|F_2| = 3$$

$$|F_3| = 1$$

$$|F_4| = 2$$

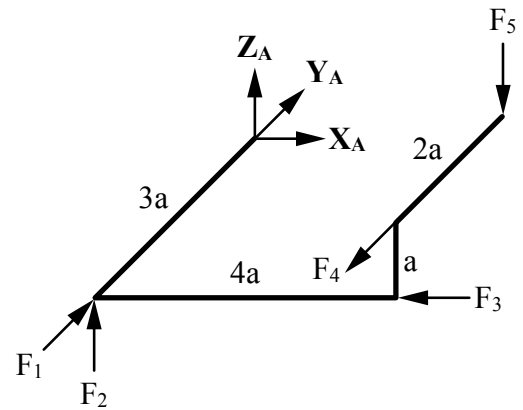
$$|F_5| = 2$$



$$R_x = 0 \Rightarrow X_A + F_3 = 0 \Rightarrow X_A - 1 = 0 \Rightarrow X_A = 1$$

$$R_y = 0 \Rightarrow Y_A + F_1 + F_4 = 0 \Rightarrow Y_A + 5 - 2 = 0 \Rightarrow Y_A = -3$$

$$R_z = 0 \Rightarrow Z_A + F_2 + F_5 = 0 \Rightarrow Z_A + 3 - 2 = 0 \Rightarrow Z_A = -1$$

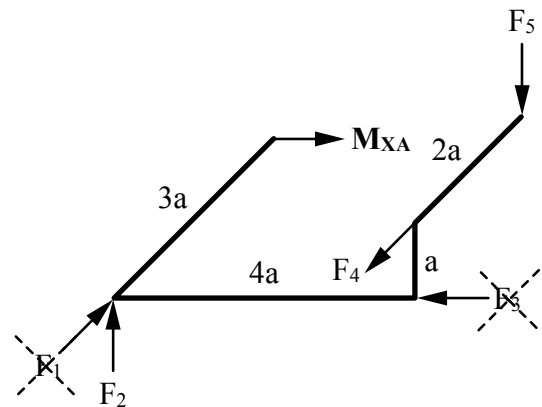


$$M_x = 0$$

$$M_{XA} - |F_2| \cdot 3a + |F_4| \cdot a + |F_5| \cdot (3a - 2a) = 0$$

$$(\vec{i}) \quad (\vec{k} \wedge \vec{j}) \quad (\vec{j} \wedge \vec{k}) \quad (\vec{k} \wedge \vec{j})$$

$$M_{XA} - 3 \cdot 3a + 2 \cdot a + 2 \cdot a = 0 \Rightarrow M_{XA} = 5a$$

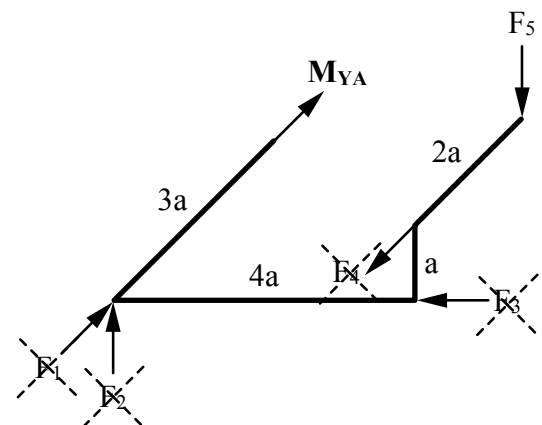


$$M_y = 0$$

$$M_{YA} + |F_5| \cdot 4a = 0$$

$$(\vec{j}) \quad (\vec{k} \wedge \vec{i})$$

$$M_{YA} + 2 \cdot 4a = 0 \Rightarrow M_{YA} = -8a$$

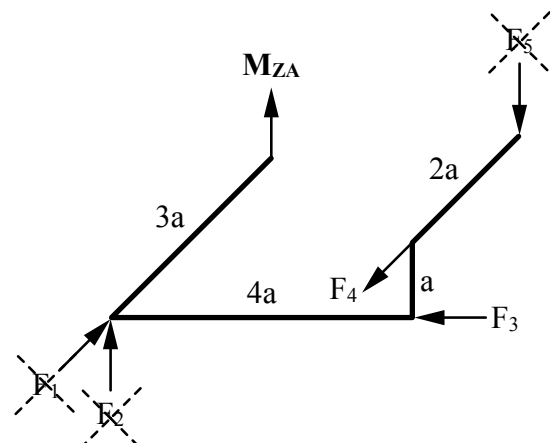


$$M_z = 0$$

$$M_{ZA} - |F_3| \cdot 3a - |F_4| \cdot 4a$$

$$(\vec{k}) \quad (\vec{i} \wedge \vec{j}) \quad (\vec{j} \wedge \vec{i})$$

$$M_{ZA} - 1 \cdot 3a - 2 \cdot 4a = 0 \Rightarrow M_{ZA} = 11a$$



Alternativa para o cálculo de M_{XA} , M_{YA} e M_{ZA} :

$$\vec{M}_A = 0$$

$$M_{XA} \vec{i} + M_{YA} \vec{j} + M_{ZA} \vec{k} + r_{BA} \wedge \vec{F}_1 + r_{BA} \wedge \vec{F}_2 + r_{CA} \wedge \vec{F}_3 + r_{DA} \wedge \vec{F}_4 + r_{EA} \wedge \vec{F}_5 = 0$$

$$M_{XA} \vec{i} + M_{YA} \vec{j} + M_{ZA} \vec{k} + (-3a \vec{j}) \wedge 5 \vec{j} + (-3a \vec{j}) \wedge 3 \vec{k} + (4a \vec{i} - 3a \vec{j}) \wedge (-\vec{i}) + \\ + (4a \vec{i} - 3a \vec{j} + a \vec{k}) \wedge (-2 \vec{j}) + (4a \vec{i} - a \vec{j} + a \vec{k}) \wedge -2 \vec{k} = 0$$

$$M_{XA} \vec{i} + M_{YA} \vec{j} + M_{ZA} \vec{k} + 0 - 9a \vec{i} + 0 - 3a \vec{k} - 8a \vec{k} + 0 + 2a \vec{i} + 8a \vec{j} + 2a \vec{i} + 0 = 0$$

$$M_{XA} \vec{i} + M_{YA} \vec{j} + M_{ZA} \vec{k} - 5a \vec{i} + 8a \vec{j} - 11a \vec{k} = 0$$

$$\vec{i} \rightarrow M_{XA} \vec{i} - 5a \vec{i} = 0 \Rightarrow M_{XA} = 5a$$

$$\vec{j} \rightarrow M_{YA} \vec{j} + 8a \vec{j} = 0 \Rightarrow M_{YA} = -8a$$

$$\vec{k} \rightarrow M_{ZA} \vec{k} - 11a \vec{k} = 0 \Rightarrow M_{ZA} = 11a$$

Na primeira forma de resolução das reações de momentos no ponto A, é importante reconhecer quais forças devem ser desconsideradas nos momentos de cada direção e discernir os braços de cada momento. Os sentidos dos momentos foram adotados segundo a regra da mão direita.

Na segunda forma de resolução (totalmente algébrica e vetorial), a atenção deve concentrar-se na montagem das expressões do momento de cada força e no correto posicionamento dos pontos em questão, pois um desvio nesta etapa inicial propagará erros até os valores finais dos momentos.

\Rightarrow **EXERCÍCIOS 2.5 , 2.6 , 2.7 e 2.8**

2.7. Diagrama de Corpo Livre

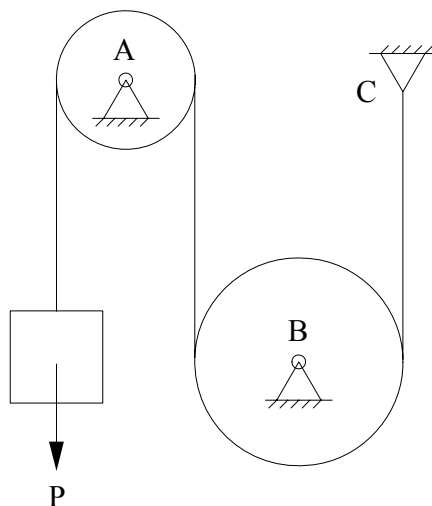
O diagrama de corpo livre apresenta o corpo (ou conjunto de corpos) desligado dos vínculos, substituídos pelas suas reações vinculares, aplicadas as forças externas, inseridas as forças internas (opostas entre par de corpos que ligam) entre os elementos separados do conjunto.

Forças externas são as forças apresentadas até agora, aplicadas sobre os corpos como resultado de ações externas.

Forças internas são as forças entre corpos integrantes de um mesmo conjunto, obedecendo à Terceira Lei de Newton ou Princípio da Ação e Reação: “As forças de ação e reação entre corpos em contato possuem mesma intensidade e direção, porém têm sentidos opostos entre si”.

A resultante destas forças internas sempre deve ser nula, pois, apesar das ações e reações estarem em corpos diferentes, o conjunto não percebe estas forças, já que elas se anulam internamente no sistema.

Exemplo: Desenhar o diagrama de corpo livre do conjunto e calcular as reações vinculares:



Bloco:

$$T - P = 0 \Rightarrow T = P$$

Polia A:

$$X_A = 0$$

$$Y_A - T - T = 0 \Rightarrow Y_A = 2T \Rightarrow Y_A = 2P$$

Polia B:

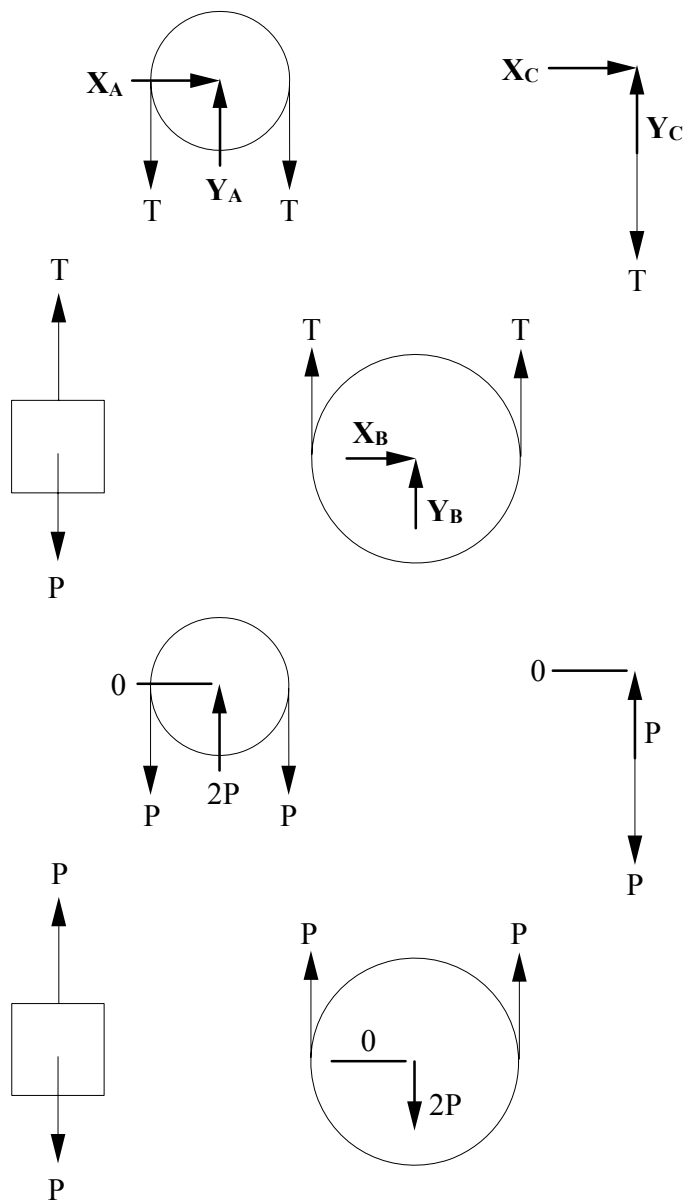
$$X_B = 0$$

$$Y_B + T + T = 0 \Rightarrow Y_B = -2T \Rightarrow Y_B = -2P$$

Polia C:

$$X_C = 0$$

$$Y_C - T = 0 \Rightarrow Y_C = T \Rightarrow Y_C = P$$



Pode-se notar que cada elemento do conjunto está em equilíbrio individual e, conseqüentemente, o conjunto também estará em equilíbrio global.

Os pares de forças internas (de ação e reação) devem representar sempre ambos os vetores, com sentidos opostos (se anulam). Se for correto o sentido inicialmente admitido para estas forças (compressão ou tração), a intensidade resultará positiva; se forem admitidas incorretamente, a intensidade será negativa, bastando inverter o sentido previamente escolhido.

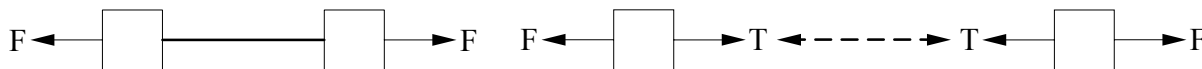
Geralmente as forças internas são adotadas com a orientação de forças de tração. A convenção usual para as forças de tração e compressão é: vetores “saindo” das barras, vínculos ou articulações representam forças internas de tração; vetores “entrando” representam forças de compressão.

À exceção de uma exigência do enunciado, o diagrama de corpo livre apenas é obrigatório quando há mais reações vinculares do que equações de equilíbrio. Porém, se apenas as reações dos vínculos forem desejadas, não é obrigatória a divisão do sistema, podendo ser calculado como um todo.

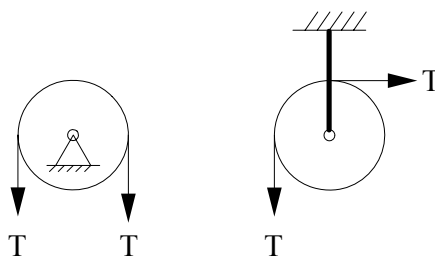
O diagrama de corpo livre auxilia a compreensão e, conseqüentemente, a resolução dos problemas ao compartimentar o conjunto em corpos com poucas forças atuantes em cada um, calculando primeiro as soluções particulares para alcançar a global.

Alguns elementos conectores bastante comuns em conjuntos de corpos rígidos merecem algumas considerações particulares:

- a) Fios: suas características simplificadoras usualmente estão presentes no enunciado do problema: sem peso próprio e inextensíveis, ou seja, não se alongam com a tração. Os fios não podem ser compridos ou transferir momentos, portanto, sempre estarão solicitados apenas por tração (ou se apresentarem frouxos e sem utilidade) e esta tração será constante por todo o fio, sendo transferida sua reação aos corpos unidos por ele. Geralmente, não são representados no diagrama de corpo livre, indicados apenas por suas reações.

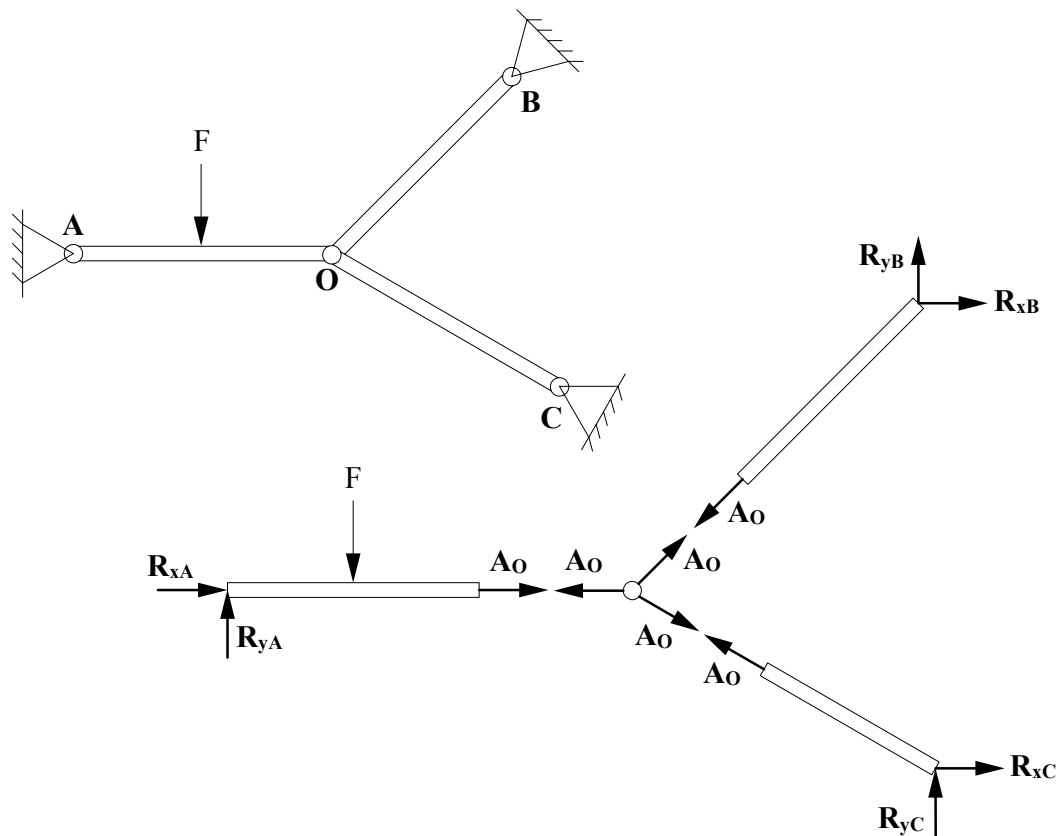


- b) Polias: geralmente consideradas sem peso, servem apenas para mudar a direção da tração de um corpo conectado a outro, por meio de um fio. Na absoluta maioria dos casos, é apoiada em seu eixo por um apoio fixo ou pendurada em um engaste, sempre com possibilidade de rodar livremente em torno do centro, portanto, pode apresentar momento. Este vínculo recebe as reações que devem estar presentes no diagrama da polia.



- c) Articulações: servem como dobradiças entre os elementos, permitindo rotações de forças não equilibradas. Sua principal característica é o fato de não transferirem momentos de um corpo ao outro (apenas as forças), sendo nulos os momentos sobre elas. São importantes nas treliças formadas por barras, pois mantêm a estrutura como sendo isostática

- d) Barras: as barras são elementos com uma dimensão (comprimento) muito maior do que as outras duas (largura e altura da seção transversal). Em geral, sofrem ações longitudinais (tração ou compressão), porém não se dilatam ou contraem por serem corpos infinitamente rígidos e podem possuir ou não peso próprio. Usualmente, compõem estruturas mais complexas como pórticos ou treliças articuladas.



⇒ EXERCÍCIOS 2.9 , 2.10 e 2.11

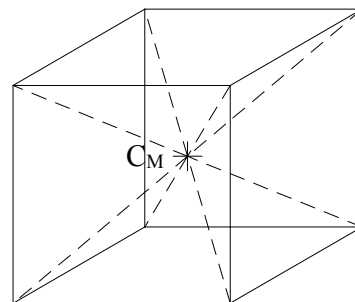
2.8. Centro de Massa

O centro de massa é o ponto onde toda a massa do corpo (distribuída pelos seus pontos) poderia ser concentrada, sofrendo os mesmos efeitos decorrentes das resultantes de forças e momentos, substituído o corpo rígido por um ponto material equivalente.

Vale observar que as coordenadas do centro de massa dos corpos estão diretamente relacionadas à posição e orientação adotadas para a origem do sistema de coordenadas, devendo conservar esta origem durante todo o processo de cálculo deste centro.

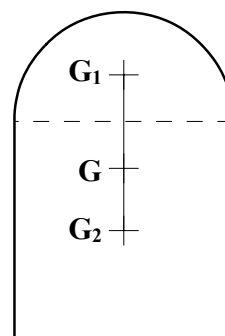
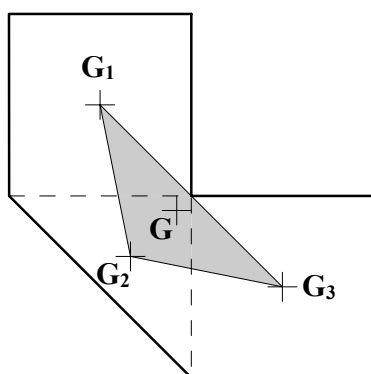
As coordenadas do centro de massa são obtidas a partir das seguintes médias ponderadas (aplicadas as variações de densidade em cada ponto “i” do corpo ou do conjunto de corpos):

$$x_G = \frac{\sum (x_i \cdot m_i)}{\sum m_i} \quad y_G = \frac{\sum (y_i \cdot m_i)}{\sum m_i} \quad z_G = \frac{\sum (z_i \cdot m_i)}{\sum m_i}$$



O centro de gravidade ou baricentro serve como “sinônimo” para o centro de massa: a ponderação de massas do último deve ser substituída pela ponderação de pesos ($P = m \cdot g$). Ambos coincidirão com o centro geométrico do corpo ou conjunto de corpos apenas quando a massa específica (densidade) for uniforme (homogênea) em todos os pontos.

Por ser calculado pela média ponderada dos baricentros das figuras e sólidos decompostos do corpo, o baricentro necessariamente se posicionará na região entre estes baricentros individuais.



Corpos com um eixo de simetria possuirão o baricentro sobre este eixo, facilitando a determinação deste centro em polígonos regulares e formas complexas, porém simétricas. Se existirem dois ou mais eixos de simetria, o centro estará no cruzamento destes eixos. A ocorrência de furos nos corpos deve ser considerada pela subtração das respectivas áreas na ponderação do baricentro.

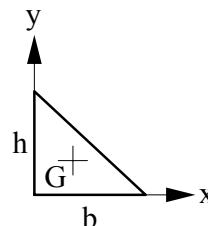
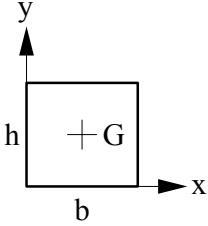
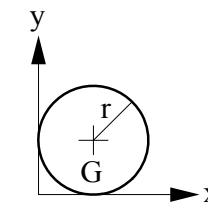
Em corpos delgados (de espessura desprezível), o baricentro pode ser calculado apenas em duas dimensões, substituídas as massas pelas áreas geométricas das figuras que compõem o corpo.

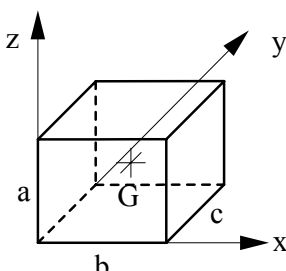
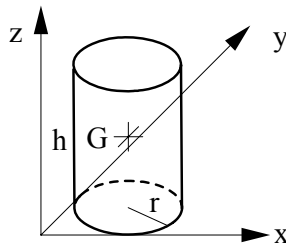
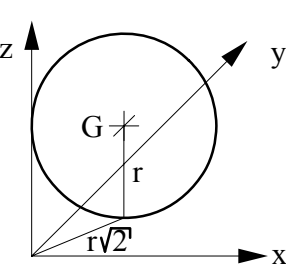
$$x_G = \frac{\sum (x_i \cdot A_i)}{\sum A_i} \quad y_G = \frac{\sum (y_i \cdot A_i)}{\sum A_i}$$

Corpos sólidos (espessos) obrigam à determinação das coordenadas do baricentro nas três dimensões, a partir dos volumes de seus elementos decompostos.

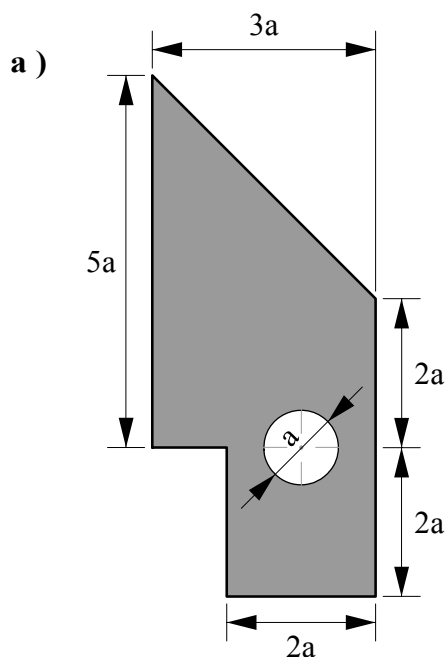
$$x_G = \frac{\sum (x_i \cdot V_i)}{\sum V_i} \quad y_G = \frac{\sum (y_i \cdot V_i)}{\sum V_i} \quad z_G = \frac{\sum (z_i \cdot V_i)}{\sum V_i}$$

As tabelas a seguir apresentam as figuras planas e os sólidos mais freqüentes em problemas que envolvam a determinação do baricentro de corpos complexos ou conjuntos de corpos simples:

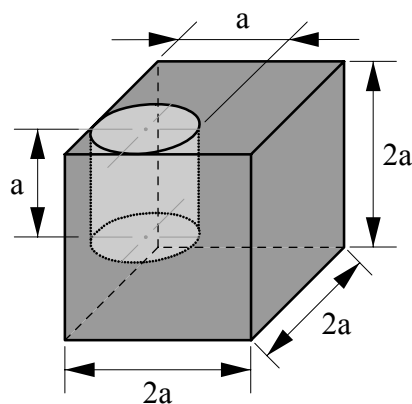
Figura	Abcissa (X_G)	Ordenada (Y_G)	Área
Triângulo Retângulo 	$\frac{b}{3}$	$\frac{h}{3}$	$\frac{b \cdot h}{2}$
Retângulo / Quadrado 	$\frac{b}{2}$	$\frac{h}{2}$	$b \cdot h$
Círculo 	r	r	πr^2

Sólido	Abcissa (X_G)	Ordenada (Y_G)	Cota (Z_G)	Volume
Paralelepípedo ou Cubo 	$\frac{a}{2}$	$\frac{b}{2}$	$\frac{c}{2}$	$a \cdot b \cdot c$
Cilindro 	r	r	$\frac{h}{2}$	$\frac{\pi r^2 \cdot h}{2}$
Esfera 	r	r	r	$\frac{4\pi r^3}{3}$

Exemplo: Determinar os baricentros da placa e do bloco apresentados a seguir:



b)



a)

$$x_G = \frac{x_1 \cdot A_1 + x_2 \cdot A_2 + x_3 \cdot A_3 + x_4 \cdot (-A_4)}{A_1 + A_2 + A_3 - A_4}$$

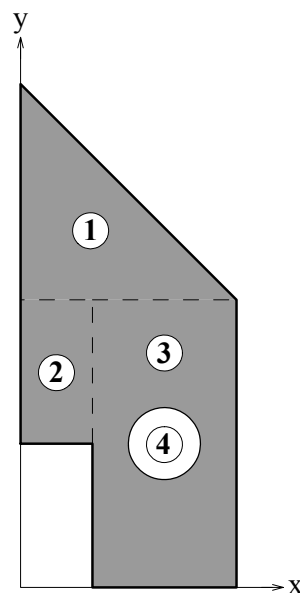
$$x_G = \frac{a \cdot \left(\frac{3a \cdot 3a}{2} \right) + \frac{a}{2} \cdot (a \cdot 2a) + 2a \cdot (2a \cdot 4a) + 2a \cdot \left(-\frac{\pi a^2}{4} \right)}{\frac{3a \cdot 3a}{2} + a \cdot 2a + 2a \cdot 4a - \frac{\pi a^2}{4}}$$

$$x_G = \frac{\frac{9a^3}{2} + a^3 + 16a^3 - \frac{\pi a^3}{2}}{\frac{9a^2}{2} + 2a^2 + 8a^2 - \frac{\pi a^2}{4}} \Rightarrow x_G = \frac{\frac{43a^3}{2} - \frac{\pi a^3}{2}}{\frac{29a^2}{2} - \frac{\pi a^2}{4}} \Rightarrow x_G = 2a \cdot \frac{(43 - \pi)}{(58 - \pi)}$$

$$y_G = \frac{y_1 \cdot A_1 + y_2 \cdot A_2 + y_3 \cdot A_3 + y_4 \cdot (-A_4)}{A_1 + A_2 + A_3 - A_4}$$

$$y_G = \frac{5a \cdot \left(\frac{3a \cdot 3a}{2} \right) + 3a \cdot (a \cdot 2a) + 2a \cdot (2a \cdot 4a) + 2a \cdot \left(-\frac{\pi a^2}{4} \right)}{\frac{3a \cdot 3a}{2} + a \cdot 2a + 2a \cdot 4a - \frac{\pi a^2}{4}}$$

$$y_G = \frac{\frac{45a^3}{2} + 6a^3 + 16a^3 - \frac{\pi a^3}{2}}{\frac{9a^2}{2} + 2a^2 + 8a^2 - \frac{\pi a^2}{4}} \Rightarrow y_G = \frac{\frac{89a^3}{2} - \frac{\pi a^3}{2}}{\frac{29a^2}{2} - \frac{\pi a^2}{4}} \Rightarrow y_G = 2a \cdot \frac{(89 - \pi)}{(58 - \pi)}$$



b)

$$x_G = \frac{x_1 \cdot V_1 + x_2 \cdot (-V_2)}{V_1 - V_2}$$

$$x_G = \frac{a \cdot (2a \cdot 2a \cdot 2a) + \frac{a}{2} \cdot \left(-\frac{\pi a^2 \cdot a}{4} \right)}{2a \cdot 2a \cdot 2a - \frac{\pi a^2 \cdot a}{4}} \Rightarrow x_G = \frac{8a^4 - \frac{\pi a^4}{8}}{8a^3 - \frac{\pi a^3}{4}}$$

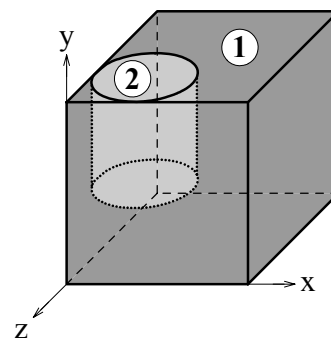
$$x_G = \frac{a}{2} \cdot \frac{(64 - \pi)}{(32 - \pi)}$$

$$y_G = \frac{y_1 \cdot V_1 + y_2 \cdot (-V_2)}{V_1 - V_2}$$

$$y_G = \frac{a \cdot (2a \cdot 2a \cdot 2a) + \frac{3a}{2} \cdot \left(-\frac{\pi a^2 \cdot a}{4} \right)}{2a \cdot 2a \cdot 2a - \frac{\pi a^2 \cdot a}{4}} \Rightarrow y_G = \frac{8a^4 - \frac{3\pi a^4}{8}}{8a^3 - \frac{\pi a^3}{4}} \Rightarrow y_G = \frac{a}{2} \cdot \frac{(64 - 3\pi)}{(32 - \pi)}$$

$$z_G = \frac{-z_1 \cdot V_1 - z_2 \cdot (-V_2)}{V_1 - V_2}$$

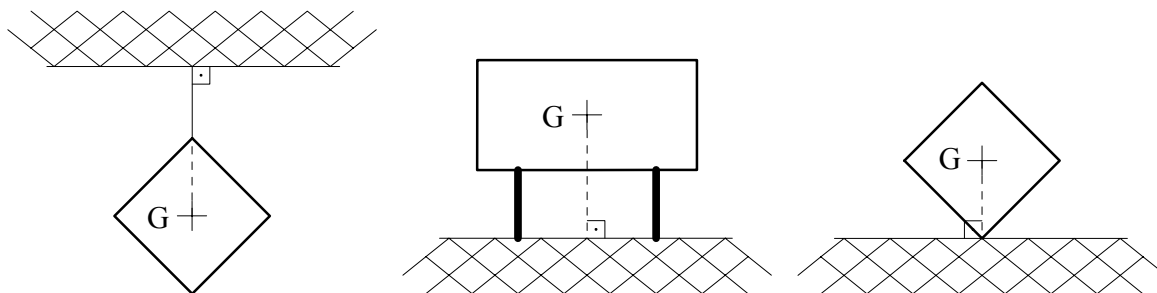
$$z_G = \frac{-a \cdot (2a \cdot 2a \cdot 2a) - \frac{a}{2} \cdot \left(-\frac{\pi a^2 \cdot a}{4} \right)}{2a \cdot 2a \cdot 2a - \frac{\pi a^2 \cdot a}{4}} \Rightarrow z_G = \frac{-8a^4 + \frac{\pi a^4}{8}}{8a^3 - \frac{\pi a^3}{4}} \Rightarrow z_G = \frac{a}{2} \cdot \frac{(-64 + \pi)}{(32 - \pi)} = -\frac{a}{2} \cdot \frac{(64 - \pi)}{(32 - \pi)}$$



2.9. Equilíbrio do Baricentro

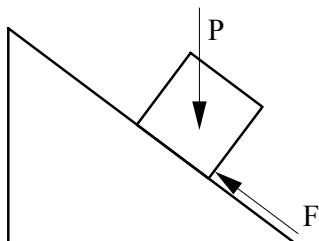
Os corpos equilibram-se naturalmente a partir de seus baricentros (desde que não estejam vinculados) quando depositados no chão ou pendurados no teto por um fio, que lhes permita girar e balançar livremente.

Se a posição inicial não for estável e equilibrada (hipostática), o baricentro sempre buscará uma posição em que se alinhe verticalmente em relação ao ponto de apoio ou no espaço entre apoios, sendo tanto mais estável o repouso quanto maior a distância entre os apoios e o número deles (uma cadeira de quatro pernas é mais estável do que uma de três).

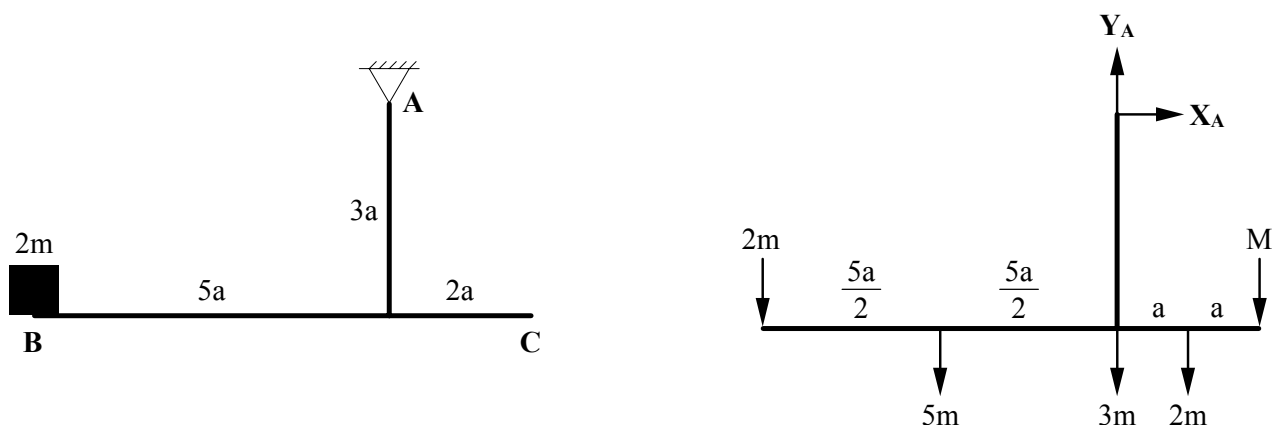


Qualquer mínimo desvio em relação à posição de equilíbrio levará o corpo a tombar ou balançar, devido ao momento gerado pelo peso próprio do corpo, aplicado em um braço igual ao desvio do alinhamento. Esta tendência em buscar a estabilidade também pode ser observada no movimento de um pêndulo, que tende a oscilar eternamente em torno da posição de alinhamento vertical.

Em situações onde o equilíbrio estático não ocorre espontaneamente, o equilíbrio apenas pode ser atingido através de uma força externa, exatamente suficiente para anular os efeitos da força peso, equilibrando o corpo em repouso (por exemplo, o atrito em um corpo sobre plano inclinado).



Exemplo: A barra em T possui massa $10m$, uniformemente distribuída em toda a sua extensão. A barra é articulada em A e um corpo de massa $2m$ é apoiado em B. Qual o valor da massa M que, apoiada em C, equilibra o segmento BC exatamente na posição horizontal?



$$M_z = 0 \Rightarrow M_{ZA} = 0$$

$$2m \cdot g \cdot 5a + 5m \cdot g \cdot \frac{5a}{2} + 3m \cdot g \cdot 0 - 2m \cdot g \cdot a - M \cdot g \cdot 2a = 0$$

$$10mga + \frac{25mga}{2} - 2mga - 2Mga = 0 \Rightarrow 2M = \frac{41m}{2} \Rightarrow M = \frac{41m}{4}$$

\Rightarrow EXERCÍCIOS 2.12 , 2.13 e 2.14

CAPÍTULO 3: CINEMÁTICA

3.1. Apresentação

A Cinemática aborda o estudo das velocidades e acelerações decorrentes do movimento dos corpos, sem se preocupar ainda com as relações de causa e efeito entre forças e movimento.

A nomenclatura, conceitos e representações da Estática permanecem válidos (corpos rígidos, sistema de coordenadas cartesianas, representação algébrica e vetorial, etc), porém as aqui estruturas e corpos estaticamente instáveis (hipoestáticos) serão o foco do estudo cinemático.

Mais uma vez, o estudo se concentrará nos corpos rígidos, mais completos em seus conceitos, simplificando-o quando tratar de pontos materiais (como a ausência de rotação em torno de si mesmos, por exemplo).

Três grandezas são fundamentais na Cinemática: a posição \vec{x} (distância orientada da origem do sistema de coordenadas ao ponto), a velocidade \vec{v} e a aceleração \vec{a} de cada ponto do corpo.

A rigidez dos corpos mais uma vez simplifica o estudo: as distâncias e posições relativas entre pontos de um mesmo corpo se mantêm constantes, embora possam variar suas posições em relação a um sistema de coordenadas fixo (independente do movimento).

Na ocorrência de rotação, três grandezas similares às anteriores serão incluídas: o ângulo θ (em relação aos eixos coordenados), a velocidade angular $\vec{\omega}$ e a aceleração angular $\vec{\alpha}$.

Usualmente, o movimento será expresso em função dos deslocamentos (diferença entre posição final e inicial, Δx e $\Delta \theta$) em lugar das posições, desobrigando ao conhecimento prévio das posições originais.

Estas grandezas relacionam-se por derivação: a velocidade é a derivada temporal da posição e a aceleração é a derivada temporal da velocidade.

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{dx}{dt} & \vec{a} &= \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \\ \vec{\omega} &= \frac{d\theta}{dt} & \vec{\alpha} &= \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}\end{aligned}$$

Em geral, as derivadas anteriores não podem ser aplicadas diretamente em vetores. Apenas movimentos afirmados no enunciado como constantes na velocidade angular ou na velocidade linear podem admitir derivada nula na respectiva aceleração.

As velocidades e acelerações são vetores aplicados, que não podem ser deslizados livremente pelo corpo, portanto, não é válido o Princípio da Transmissibilidade da Estática.

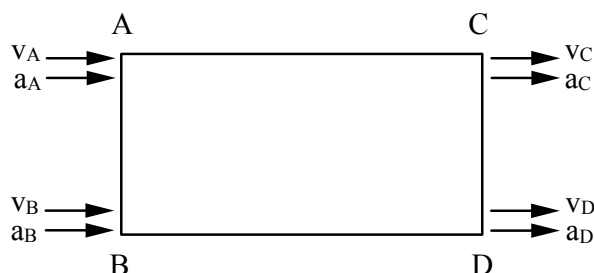
3.2. Movimento Plano Geral

Qualquer movimento, cuja trajetória se desenvolva apenas num plano (movimento bidimensional), pode ser descrito por um movimento de translação e/ou um movimento de rotação.

- 1) Translação: as velocidades e acelerações em todos os pontos do corpo variam conjuntamente, idênticas entre si em todos os instantes, conservada a orientação aos eixos de coordenadas.

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B = \vec{v}_C = \vec{v}_D$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B = \vec{a}_C = \vec{a}_D$$



Os movimentos retilíneos, uniforme e uniformemente variado, são exemplos deste tipo de movimento, cujas equações básicas são:

MRU: $x = x_0 + v_0 \cdot t$ $v = v_0$ $a = 0$

MRUV: $x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$ $v = v_0 + a \cdot t$ $a = a_0$

$$v^2 = v_0^2 + 2a \cdot \Delta x$$

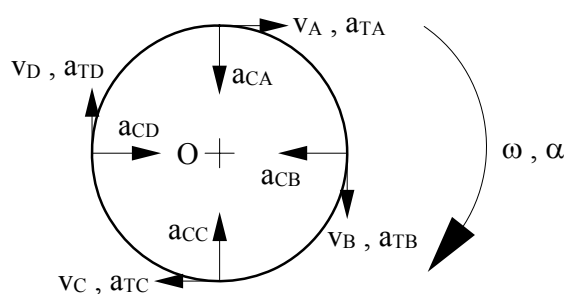
- 2) Rotação: ocorre quando o corpo gira em torno de um ponto ou eixo, que pode ou não pertencer ao corpo.

As velocidades e acelerações aumentam proporcionalmente ao aumento da distância (ou raio) ao centro do giro, sendo nulas neste centro.

Pontos a um mesmo raio do centro possuem os mesmos módulos (mesma intensidade) da velocidade e aceleração, porém a direção e sentido variam de acordo com a posição instantânea de cada ponto.

$$|v_A| = |v_B| = |v_C| = |v_D|$$

$$|a_A| = |a_B| = |a_C| = |a_D|$$



A velocidade dos pontos muda constantemente de direção, acompanhando a circunferência desenvolvida pelo movimento, possuindo apenas a componente tangencial (perpendicular ao raio), o que obedece à Primeira Lei de Newton (tendência a um movimento retilíneo de inércia, o que significa tendência ao “escape” tangencial dos pontos, no corpo em rotação).

A aceleração também sofre mudanças de direção, porém, instantaneamente, ela pode ser decomposta em duas componentes: uma tangencial e outra centrípeta (apontando para o centro de giro). Esta segunda componente é a responsável pela manutenção do movimento circular e, caso não existisse, o corpo desenvolveria um movimento retilíneo. Um exemplo de aceleração centrípeta é a gravidade da Terra sobre a Lua, que a mantém em rotação em torno do planeta.

A velocidade angular (ou vetor de rotação) e a aceleração angular determinam as intensidades das velocidades e acelerações lineares dos pontos, proporcionais às suas distâncias (raios) ao centro:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{\omega} \wedge \vec{r} & |\vec{v}| &= |\vec{\omega}| \cdot r \\ \vec{a}_t &= \vec{\alpha} \wedge \vec{r} & |\vec{a}_t| &= |\vec{v}| \cdot \dot{} = |\vec{\alpha}| \cdot r \\ \vec{a}_c &= \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) & |\vec{a}_c| &= \frac{|\vec{v}|^2}{r} = |\vec{\omega}|^2 \cdot r \\ \vec{a} &= \vec{a}_c + \vec{a}_t = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) + \vec{\alpha} \wedge \vec{r} & |\vec{a}| &= \sqrt{(a_c)^2 + (a_t)^2}\end{aligned}$$

Os dois tipos mais comuns de movimentos circulares, o uniforme e o uniformemente variado, possuem equações análogas às dos movimentos retilíneos:

$$\begin{aligned}\text{MCU:} \quad \theta &= \theta_0 + \omega_0 \cdot t & \omega &= \omega_0 & \alpha &= 0 \\ \text{MCUV:} \quad \theta &= \theta_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{\alpha \cdot t^2}{2} & \omega &= \omega_0 + \alpha \cdot t & \alpha &= \alpha_0 \\ \omega^2 &= \omega_0^2 + 2\alpha \cdot \Delta\theta\end{aligned}$$

As velocidades e acelerações angulares devem ser expressas em radianos (rad/s, rad/s²).

Lembrar: Transformação de graus decimais para radianos: $\theta_R = \frac{\pi}{180} \theta_G$

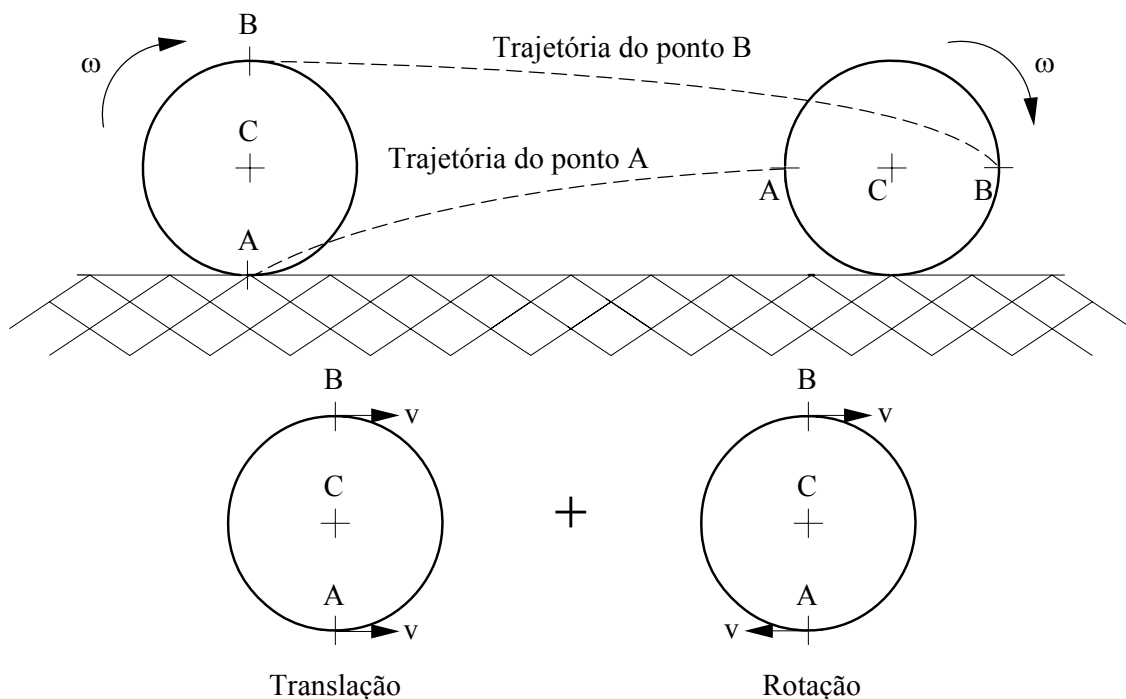
Perímetro de uma circunferência em metros: $P = 2\pi r$

Distância percorrida sobre a circunferência em metros: $x = (2\pi n + \theta_R) \cdot r$

onde n é o número de voltas completas e θ é o ângulo restante da atual volta.

Um ponto material pode girar em torno de outro ponto, porém não há sentido físico na rotação deste ponto em torno de si mesmo, pois ele não possui dimensões.

Qualquer movimento plano pode ser decomposto em uma rotação e/ou uma translação (não importando a ordem da decomposição), pois o deslocamento, a velocidade e a aceleração do movimento completo serão idênticos aos da sobreposição dos dois movimentos “puros”.



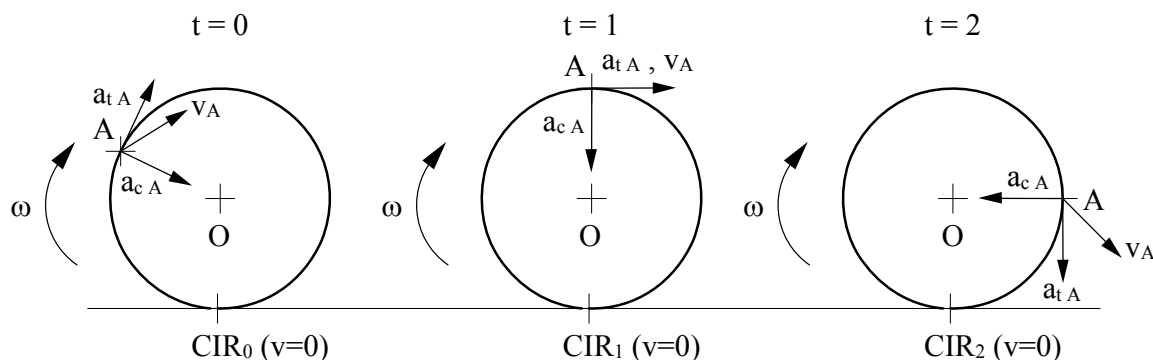
3.3. Centro Instantâneo de Rotação

Os movimentos puros de translação ou de rotação são geralmente de simples resolução. A complexidade cresce quando ambos ocorrem simultaneamente, pois a trajetória dos pontos do corpo se apresenta como uma parábola cíclica, definida pelas acelerações presentes.

Um elemento presente em qualquer movimento circular (e que facilita muito o estudo do mesmo) é o centro instantâneo de rotação (CIR): o CIR é o ponto que atua como centro efetivo do movimento do corpo, porém apenas instantaneamente, transferindo-se para outro ponto no momento seguinte. Apesar de sempre se referir a um corpo, o CIR não pertence obrigatoriamente ao mesmo e pode estar fora do corpo estudado.

Se o movimento geral for observado num instante de tempo, o movimento parabólico dos pontos se assemelhará a um movimento circular puro em torno do CIR, que possuirá velocidade nula (porém, a aceleração não será nula na maioria dos casos).

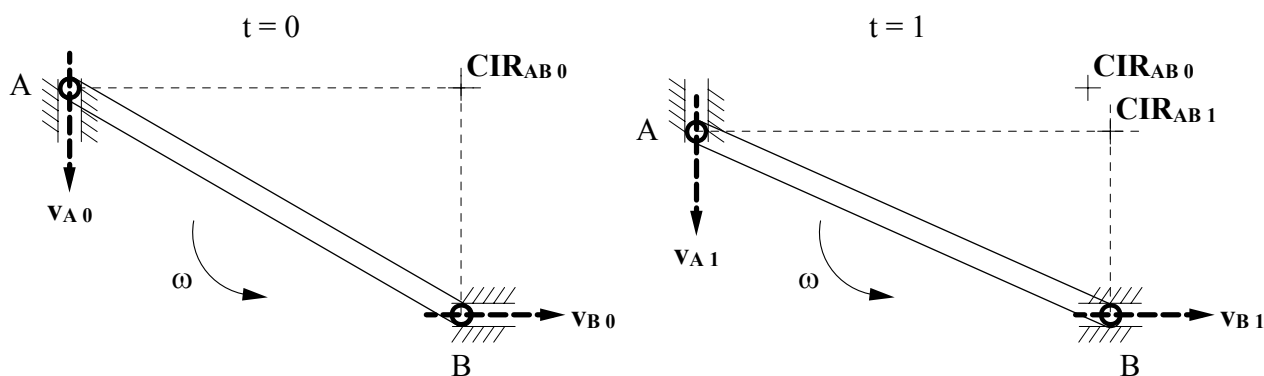
No exemplo de uma roda (ou outro corpo circular, como esferas, discos, anéis, etc) girando sobre o chão (ou sobre outra superfície imóvel, como paredes, o teto, barras imóveis, etc), o CIR será sempre o ponto de contato com o chão e, portanto, todos os pontos periféricos da roda se revezarão como CIR ao longo do movimento.



Note que a velocidade tangencial do ponto A (e de todos os demais pontos da roda) não é perpendicular ao centro geométrico da roda (ponto O): ela é perpendicular ao CIR no contato com o chão em cada instante.

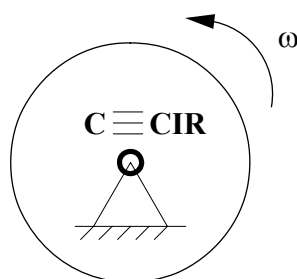
As acelerações centrípeta e tangencial permanecem relacionadas ao centro da roda (O), porém também sofrem os efeitos da sobreposição entre translação e rotação.

A determinação gráfica do CIR em um dado instante (conhecidas as direções das velocidades em pelo menos dois pontos) consiste em traçar retas perpendiculares aos vetores destas velocidades. Não é necessário conhecer o valor das velocidades nem seu sentido correto, apenas suas direções.

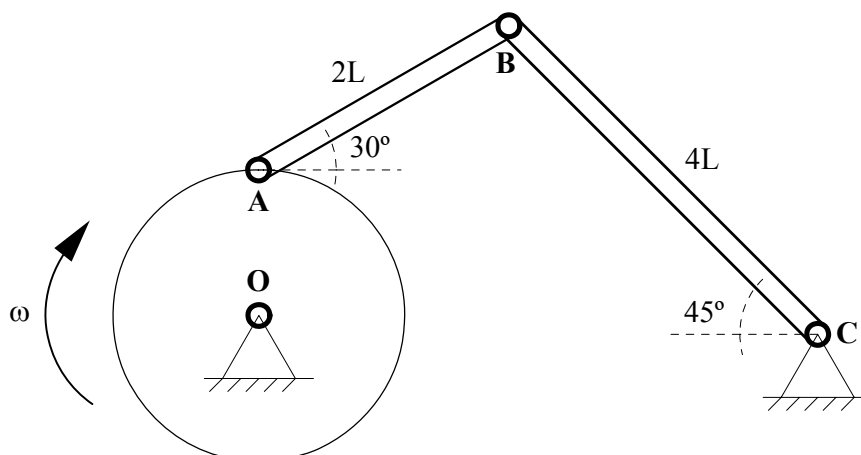


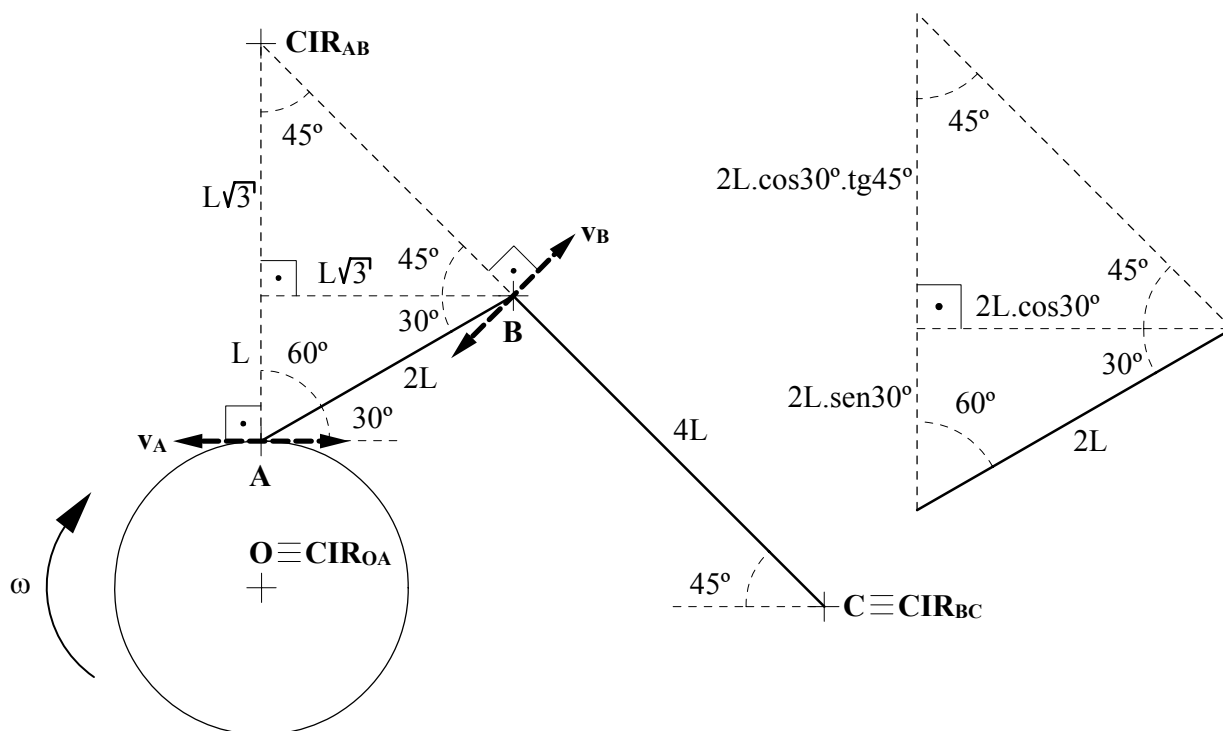
É importante notar que o CIR não é um local fixo no espaço, ocupado sucessivamente por diversos pontos. Ele pode se mover, sendo necessário determiná-lo a cada instante em que se deseja conhecer as velocidades e acelerações do corpo.

Quando o centro de rotação é fixo (por ser vinculado a um apoio, por exemplo), o CIR deverá coincidir permanentemente com ele e, neste caso, a aceleração do mesmo será nula ($a_{CIR} = 0$).



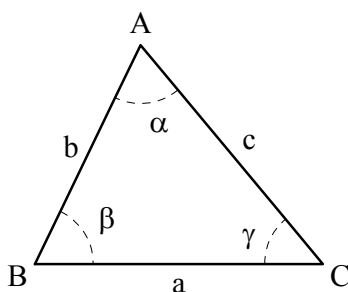
Exemplo: Sabendo-se que o disco gira com rotação horária e impõe movimento às barras articuladas AB e BC, determinar graficamente os CIRs de cada elemento do conjunto:



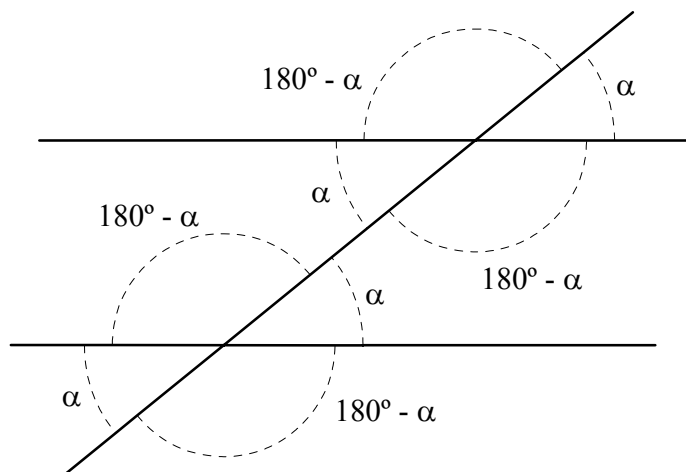


Determinar graficamente o CIR não se restringe apenas a traçá-lo num desenho: também é obrigatório determinar sua posição, através das distâncias em relação a outros pontos conhecidos.

Lembrar: Teorema dos 180° de um Triângulo: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$



(a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a 180°)



(ângulos opostos são idênticos entre si)

3.4. Equações do Movimento

A rotação e translação possuem equações próprias para a determinação das velocidades e acelerações dos pontos do corpo:

1) Translação: $\vec{v}_A = \text{cte}$ $\vec{a}_A = \text{cte}$

As expressões da translação são muito simples, pela própria característica do movimento conjunto de todos os pontos entre si.

2) Rotação: $\vec{v}_A = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_A$ $\vec{a}_A = \underbrace{\vec{\alpha} \wedge \vec{r}_A}_{\text{aceleração tangencial}} + \underbrace{\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_A)}_{\text{aceleração centrípeta}}$

A velocidade e a aceleração na rotação são produtos vetoriais, obedecendo, portanto, às regras deste tipo de produto. A aceleração centrípeta deve ser calculada inicialmente pela parcela interior aos parênteses e este resultado sofrerá novo produto vetorial, o que inverterá seu sinal e apontará para o centro, resultado coerente com o que se espera fisicamente para esta aceleração.

Entretanto, a absoluta maioria dos movimentos não consiste apenas em translação ou rotação puras, portanto, as equações anteriores não podem ser aplicadas diretamente nestes problemas.

Analogamente à fórmula de mudança de pólo dos momentos (da Estática), é possível determinar a velocidade e aceleração de um ponto a partir dos valores destas grandezas em outro ponto e da distância que os separa.

Para esta transposição, há duas expressões, uma para a velocidade e outra para a aceleração, que agregam a sobreposição dos movimentos de rotação e translação:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{BA} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (\vec{B} - \vec{A})$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \wedge \vec{r}_{BA} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_{BA}) = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \wedge (\vec{B} - \vec{A}) + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge (\vec{B} - \vec{A}))$$

Porém, por nem sempre ser fornecido um ponto de velocidade e/ou aceleração conhecidas, a utilidade do CIR é justificada: por ser um ponto de velocidade nula (no instante considerado), ele é uma boa referência para o cálculo de outros pontos, por não desenvolver translação, restando apenas o termo decorrente da rotação. É importante lembrar que, ao contrário de sua velocidade, a aceleração do CIR não é previamente conhecida (somente será nula se o CIR for um ponto fixo).

A chave para a resolução de problemas cinemáticos é a escolha de pontos convenientes como referência para os pontos desejados no enunciado, com atenção especial ao CIR e a outros pontos com restrições simplificadoras.

A derivada $\frac{d}{dt} \vec{v}_p = \vec{a}_p$ não é aplicável diretamente sobre a maioria dos problemas, pois, a derivada da velocidade tangencial calcula apenas a componente tangencial da aceleração, porém, não obtém a parcela centrípeta da aceleração total.

Para que se possa derivar uma grandeza cinemática em outra (velocidade linear para aceleração linear ou velocidade angular para aceleração angular), é necessário que o movimento possa ser descrito totalmente em função do ângulo θ (referente à rotação), onde todas as demais grandezas sejam funções deste ângulo ou apresentem-se como constantes em módulo.

A aceleração linear de pontos que desenvolvam movimentos exclusivamente translatórios (como o baricentro de um disco, por exemplo) também pode ser obtida por derivação da velocidade linear, desde que esta esteja expressa em função do ângulo de rotação (ou da velocidade angular $\omega = \dot{\theta}$).

Lembrar: Para $\vec{\omega} = +\dot{\theta} \vec{k}$, ou seja, rotação anti-horária:

$$\text{Derivadas básicas:} \quad \frac{d(\sin \theta)}{d\theta} = \cos \theta \quad \frac{d(\cos \theta)}{d\theta} = -\sin \theta$$

$$\text{Regra da cadeia:} \quad \frac{d(f(\theta))}{dt} = \frac{d(f(\theta))}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \cdot \frac{d(f(\theta))}{d\theta} = \omega \frac{d(f(\theta))}{d\theta}$$

$$\text{Derivada de produto:} \quad \frac{d(f(\theta) \cdot g(\theta))}{d\theta} = \frac{d(f(\theta))}{d\theta} \cdot g(\theta) + f(\theta) \cdot \frac{d(g(\theta))}{d\theta}$$

$$\text{Derivada de divisão:} \quad \frac{d\left(\frac{f(\theta)}{g(\theta)}\right)}{d\theta} = \frac{\left[\frac{d(f(\theta))}{d\theta} \cdot g(\theta) - f(\theta) \cdot \frac{d(g(\theta))}{d\theta}\right]}{g^2(\theta)}$$

Derivadas mais comuns:

$$\frac{d(\sin \theta)}{dt} = \dot{\theta} \cos \theta = \omega \cos \theta \quad \frac{d(\cos \theta)}{dt} = -\dot{\theta} \sin \theta = -\omega \sin \theta$$

$$\frac{d(\operatorname{tg} \theta)}{dt} = \frac{d\left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta}\right)}{dt} = \frac{\omega}{\cos^2 \theta} \quad \frac{d(\cot \theta)}{dt} = \frac{d\left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta}\right)}{dt} = -\frac{\omega}{\sin^2 \theta}$$

$$\frac{d(\sec \theta)}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{\cos \theta}\right)}{dt} = \omega \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \quad \frac{d(\csc \theta)}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{\sin \theta}\right)}{dt} = -\omega \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta}$$

$$\frac{d(\sin^2 \theta)}{dt} = 2\omega \sin \theta \cos \theta \quad \frac{d(\cos^2 \theta)}{dt} = -2\omega \sin \theta \cos \theta$$

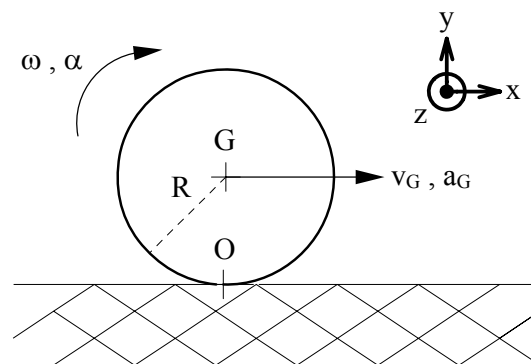
A dificuldade em parametrizar alguns movimentos em função de um ângulo, juntamente à presença de dados suficientes, torna desaconselhável a derivação na maioria dos problemas.

Um tipo de movimento bastante freqüente é o de uma roda rolando (sem escorregar) sobre uma superfície retilínea, onde o baricentro (ponto G) apresenta apenas movimento translatório (retilíneo)

e a aceleração e velocidade possuem sempre a mesma direção ($\vec{a}_G = \vec{v}_G$). Para um conhecido par de velocidade e aceleração angulares, pode-se determinar a velocidade e aceleração do baricentro da roda (ou de qualquer outro corpo circular em rolamento):

$$\vec{v}_G = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (\vec{G} - \vec{O}) \Rightarrow \vec{v}_G = 0 + \vec{\omega} \vec{k} \wedge (R \vec{j}) = -\omega R \vec{i}$$

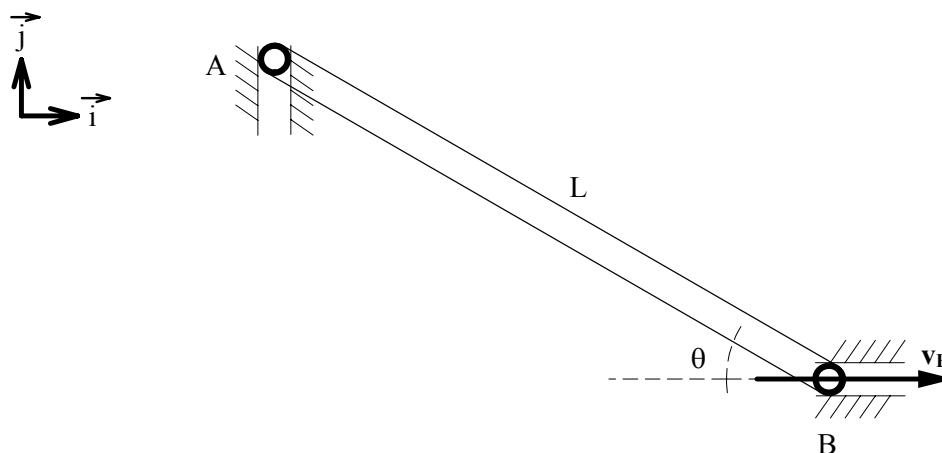
$$\vec{a}_G = \dot{\vec{v}}_G \Rightarrow \vec{a}_G = \dot{\omega} R \vec{i} \Rightarrow \vec{a}_G = -\alpha R \vec{i}$$

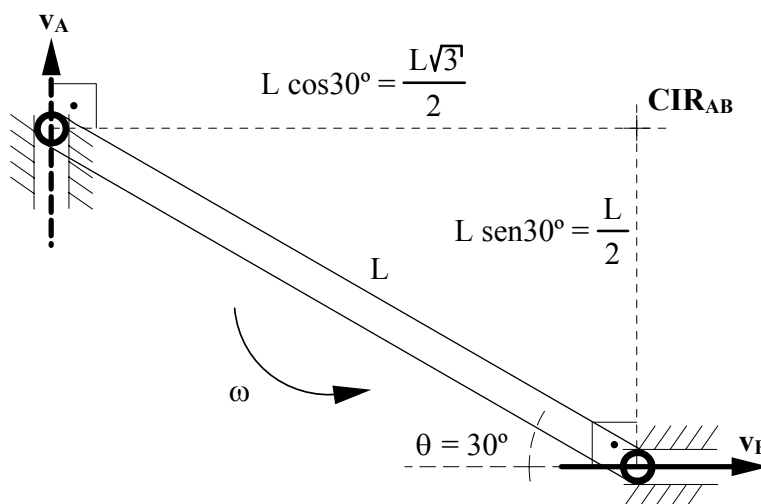


Como se pode notar pelas expressões anteriores, a velocidade e aceleração lineares devem apresentar sinais opostos ao das respectivas grandezas angulares. Na figura, para a velocidade e aceleração angulares negativas ($-\omega \vec{k}$, $-\alpha \vec{k}$, isto é, rotação horária), o deslocamento do disco será para a direita, com velocidade e aceleração do baricentro positivas ($v_G \vec{i}$, $a_G \vec{i}$, para a direita). Esta “inversão” só é observada quando o eixo x está orientado como paralelo à superfície de rolamento.

Grandezas Angulares	Grandezas Lineares
$-\omega \vec{k}$	$\vec{v}_G = +\omega R \vec{i}$
$-\alpha \vec{k}$	$\vec{a}_G = -\alpha R \vec{i}$
$+\omega \vec{k}$	$\vec{v}_G = -\omega R \vec{i}$
$+\alpha \vec{k}$	$\vec{a}_G = -\alpha R \vec{i}$

Exemplo: A barra desliza pelos anéis nas extremidades A e B, que permitem apenas deslocamentos axiais (vertical para o ponto A e horizontal para o ponto B). Sabendo-se que a velocidade do ponto B é constante ($\vec{v}_B = v \vec{i}$), para o instante em que $\theta = 30^\circ$, determinar graficamente o CIR da barra e calcular a velocidade e aceleração do ponto A:





$$\vec{v}_B = \vec{v}_{CIR} + \vec{\omega}_{AB} \wedge (\vec{B} - \vec{CIR})$$

$$\vec{v}_i = 0 + \omega_{AB} \vec{k} \wedge (-L \sin \theta \vec{j}) \Rightarrow \vec{v}_i = \omega_{AB} L \sin \theta \vec{i} \Rightarrow \omega_{AB} = \frac{v}{L \sin \theta} \Rightarrow \vec{\omega}_{AB} = \frac{v}{L \sin \theta} \vec{k}$$

$$\text{Para } \theta = 30^\circ: \quad \vec{\omega}_{AB} = \frac{2v}{L} \vec{k}$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{CIR} + \vec{\omega}_{AB} \wedge (\vec{A} - \vec{CIR}) \Rightarrow \vec{v}_A = 0 + \frac{v}{L \sin \theta} \vec{k} \wedge (-L \cos \theta \vec{i}) \Rightarrow \vec{v}_A = -\frac{v \cos \theta}{\sin \theta} \vec{j} = -\frac{v}{\tan \theta} \vec{j}$$

$$\text{Para } \theta = 30^\circ: \quad \vec{v}_A = -\frac{3v}{\sqrt{3}} \vec{j} \Rightarrow \vec{v}_A = -\sqrt{3} v \vec{j}$$

$$\vec{a}_A = \dot{\vec{v}}_A = -v \frac{\dot{\theta}}{\sin^2 \theta} \vec{j} \Rightarrow \vec{a}_A = -v \frac{\omega_{AB}}{\sin^2 \theta} \vec{j} \Rightarrow \vec{a}_A = -\frac{v}{\sin^2 \theta} \cdot \frac{v}{L \sin \theta} \vec{j} \Rightarrow \vec{a}_A = -\frac{v^2}{L \sin^3 \theta} \vec{j}$$

$$\text{Para } \theta = 30^\circ: \quad \vec{a}_A = -\frac{8v^2}{L} \vec{j}$$

Alternativa para o cálculo de \vec{v}_A e \vec{a}_A :

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{CIR} + \vec{\omega}_{AB} \wedge (\vec{B} - \vec{CIR}) \Rightarrow \vec{v}_i = 0 + \omega_{AB} \vec{k} \wedge \left(-\frac{L}{2} \vec{j} \right) \Rightarrow \vec{v}_i = \frac{\omega_{AB} L}{2} \vec{i}$$

$$\omega_{AB} = \frac{2v}{L} \Rightarrow \vec{\omega}_{AB} = \frac{2v}{L} \vec{k}$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{CIR} + \vec{\omega}_{AB} \wedge (\vec{A} - \vec{CIR}) \Rightarrow \vec{v}_A = 0 + \frac{2v}{L} \vec{k} \wedge \left(-\frac{\sqrt{3}L}{2} \vec{i} \right) \Rightarrow \vec{v}_A = -\sqrt{3} v \vec{j}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \alpha_{AB} \vec{k} \wedge (\vec{B} - \vec{A}) + \omega_{AB} \vec{k} \wedge (\omega_{AB} \vec{k} \wedge (\vec{B} - \vec{A}))$$

$$0 = \vec{a}_A \cdot \vec{j} + \alpha_{AB} \vec{k} \wedge \frac{L}{2} (\sqrt{3} \vec{i} - \vec{j}) + \frac{2v}{L} \vec{k} \wedge \left(\frac{2v}{L} \vec{k} \wedge \frac{L}{2} (\sqrt{3} \vec{i} - \vec{j}) \right)$$

$$\vec{a}_A \cdot \vec{j} + \frac{\alpha_{AB} L}{2} (\vec{i} + \sqrt{3} \vec{j}) + \frac{2v}{L} \vec{k} \wedge v (\vec{i} + \sqrt{3} \vec{j}) = 0$$

$$\vec{a}_A \cdot \vec{j} + \frac{\alpha_{AB} L}{2} (\vec{i} + \sqrt{3} \vec{j}) + \frac{2v^2}{L} (-\sqrt{3} \vec{i} + \vec{j}) = 0$$

Separando as componentes em cada direção:

$$\vec{i} \rightarrow \frac{\alpha_{AB} L}{2} \vec{i} - \frac{2\sqrt{3} v^2}{L} \vec{i} = 0 \Rightarrow \alpha_{AB} = \frac{4\sqrt{3} v^2}{L^2} \Rightarrow \alpha_{AB} = \frac{4\sqrt{3} v^2}{L^2} \vec{k}$$

$$\vec{j} \rightarrow \vec{a}_A \cdot \vec{j} + \frac{\sqrt{3} \alpha_{AB} L}{2} \vec{j} + \frac{2v^2}{L} \vec{j} = 0 \Rightarrow \vec{a}_A + \sqrt{3} \cdot \frac{4\sqrt{3} v^2}{L^2} \cdot \frac{L}{2} + \frac{2v^2}{L} = 0 \Rightarrow \vec{a}_A + \frac{6v^2}{L} + \frac{2v^2}{L} = 0$$

$$\vec{a}_A + \frac{8v^2}{L} = 0 \Rightarrow \vec{a}_A = -\frac{8v^2}{L} \Rightarrow \vec{a}_A = -\frac{8v^2}{L} \vec{j}$$

A primeira forma de resolução descreveu a velocidade do ponto A em função do ângulo θ , cuja derivada é a própria velocidade angular ω_{AB} , para obter a aceleração do ponto A, em função de θ . Substituiu-se o valor do ângulo nas expressões para obter os valores de v_A e a_A para $\theta = 30^\circ$.

A segunda forma de resolução evitou a manipulação de derivadas e tratou das grandezas no instante em que $\theta = 30^\circ$. Porém, esta alternativa obrigou à equação de transposição de acelerações entre pontos para determinar a_A , separando-a em suas componentes nas direções dos eixos x e y.

Alguns detalhes presentes no exemplo anterior merecem atenção:

- a)** A velocidade e a aceleração do ponto A claramente devem possuir componentes apenas na direção do eixo y (\vec{j}) e a velocidade do ponto B foi imposta na direção do eixo x (\vec{i}), sem aceleração por ser enunciada como constante. Ao longo da resolução do problema, estas conclusões devem ser utilizadas e sempre confirmadas pelas expressões em que participam.

Por exemplo, se a expressão para o cálculo de v_A resultasse num componente \vec{i} ou $\vec{i} + \vec{j}$, significaria que houve erro na resolução ou que não há resposta para o problema (o movimento não é possível).

- b)** Grandezas com componentes em ambas as direções (inclinadas em relação aos eixos cartesianos) devem obter respostas que obedeçam à proporção entre componentes em x e y.

Por exemplo, se um ponto P possuir velocidade com direção inclinada a 45° em relação aos eixos x e y, a resposta deve possuir a forma $\vec{v}_P = \pm v (\vec{i} + \vec{j})$, para qualquer valor de v .

- c) O sentido adotado inicialmente para as velocidades e acelerações (lineares ou angulares) pode ser comprovado ou negado na solução das equações: se o resultado for positivo, o sentido inicialmente adotado está correto; se o resultado for negativo, o sentido deverá ser invertido.

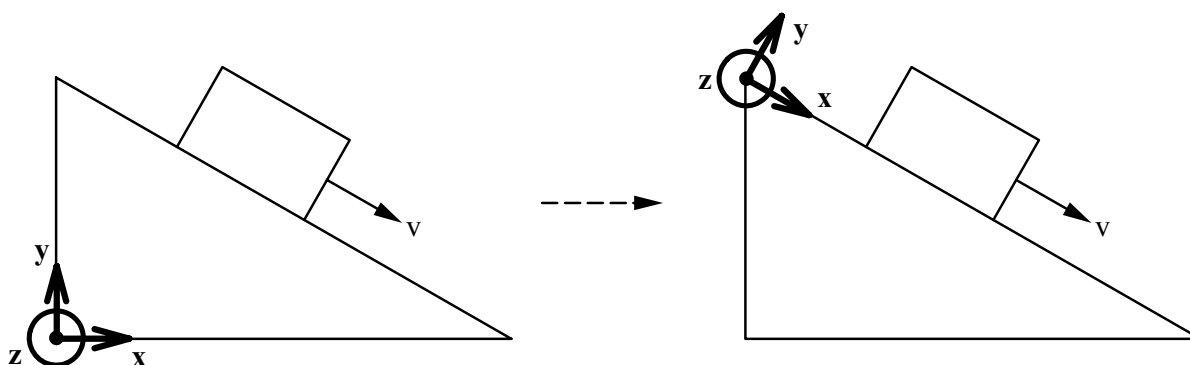
Este tipo de inversão ocorreu no sentido da velocidade do ponto A, inicialmente arbitrado para cima ($+\vec{j}$) e depois negado, o que determina o sentido de v_A como negativo ($-\vec{j}$).

A coerência das particularidades anteriores não garante o acerto do resultado, mas serve como identificação de erros comuns e facilmente identificáveis.

⇒ **EXERCÍCIOS 3.1 , 3.2 , 3.3 , 3.4 , 3.5 , 3.6 , 3.7 e 3.8**

3.5. Referenciais Fixos e Móveis

Em alguns problemas, os conjuntos de corpos com movimentos dependentes entre si (como os articulados entre si ou os que se apóiam uns sobre os outros) podem se tornar de difícil equacionamento.



Em situações onde existam movimentos internos de alguns corpos em relação ao movimento absoluto do conjunto, a adoção de referenciais móveis solidários aos corpos em movimento pode auxiliar bastante na resolução do problema. O referencial móvel se vincula ao movimento relativo entre corpos e à referência de um deles a um observador externo fixo.

Alguns exemplos da aplicação desta decomposição em referenciais são:

- a) Um malabarista lança bolas para o ar enquanto anda: qual a velocidade absoluta das bolas?

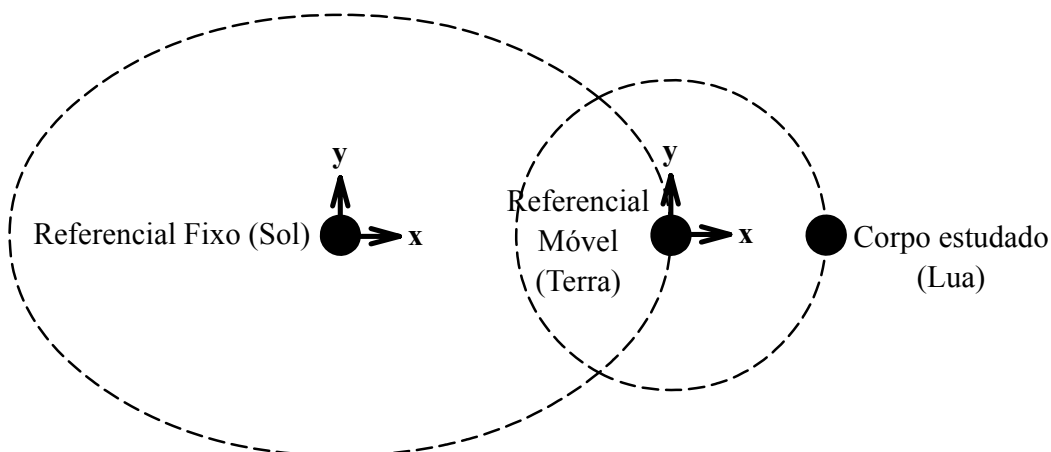
A velocidade poderia ser medida diretamente a partir de um único referencial fixo ou a partir da soma de dois referenciais: um fixo, o qual mede a velocidade do homem, e um móvel, solidário ao malabarista e que mede apenas a velocidade das bolas em relação ao homem.

- b) Uma pessoa andando dentro de um trem em movimento: qual a sua velocidade absoluta?

Pode-se medir a velocidade absoluta do homem em relação a um referencial fixo fora do trem ou medir a velocidade do homem em relação ao trem e somá-la à velocidade do veículo.

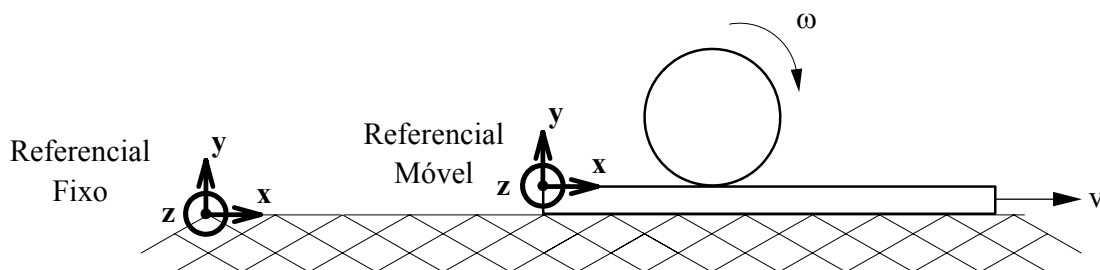
- c) A Lua em rotação em torno da Terra enquanto o planeta se move em “translação” (na realidade, trata-se de uma rotação elíptica) ao redor do Sol: qual a velocidade da Lua em relação ao Sol?

Pode-se medir a velocidade diretamente com um referencial único no Sol ou medir a velocidade da Terra a partir do Sol e somar à da Lua a partir de um referencial solidário ao planeta.



No movimento de arrastamento, o conjunto é tratado como um corpo único, mesmo se os corpos “secundários” não estiverem vinculados ao corpo principal ou ainda se forem articulados; ou seja, os pontos do corpo principal e dos demais poderão ser considerados todos como pontos de um mesmo corpo, com rotação e translação conjuntas.

Assim como o referencial fixo, a origem dos eixos do referencial móvel não precisa ser um ponto do conjunto, mas deve desenvolver um movimento solidário ao corpo cujo movimento relativo deseja representar e, portanto, costuma ser um ponto do corpo principal (que impõe o movimento de arrastamento aos demais).



3.6. Aceleração de Coriolis

A soma das acelerações em relação ao referencial fixo e ao referencial móvel apenas é direta em referenciais inerciais (em repouso ou sob velocidade retilínea constante). Um referencial fixo em rotação (de arrastamento) não é inercial, pois há aceleração centrípeta e, portanto, não é possível a soma direta das acelerações em relação a cada referencial ($\vec{a}_{\text{absoluta}} \neq [\vec{a}_{\text{arrastamento}} + \vec{a}_{\text{relativa}}]$).

A aceleração de Coriolis é um termo empírico que serve à correção do desvio desta soma em relação ao fenômeno físico real.

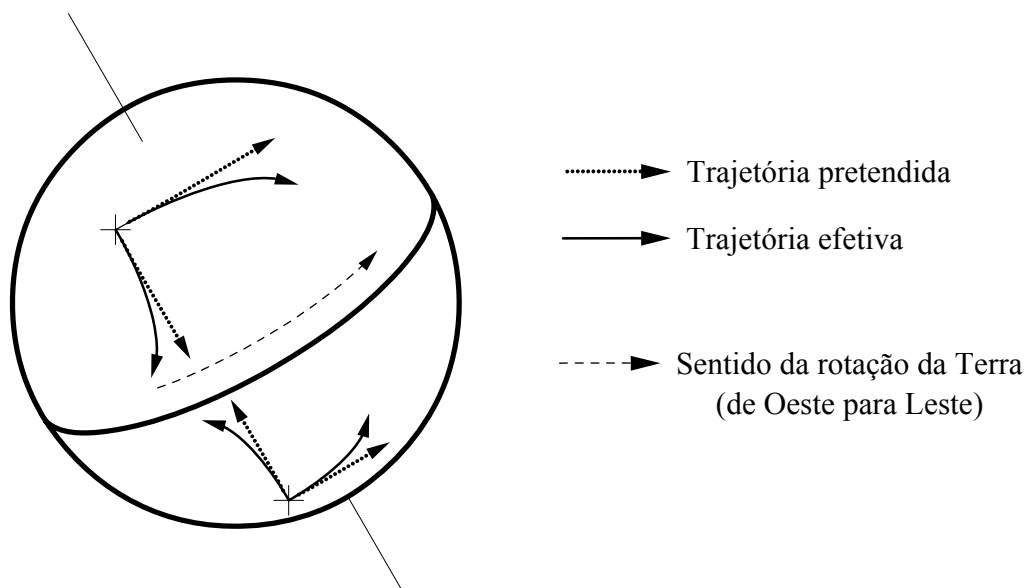
A aceleração de Coriolis gera a Força de Coriolis, uma força de inércia (“virtual”) similar à Força Centrífuga. Pela Mecânica Newtoniana, estas forças inerciais não existem, porém, servem como “fator corretivo” das equações inerciais aplicadas em sistemas não-inerciais.

Um outro exemplo de força inercial é a comparação dos diferentes fenômenos percebidos por passageiros de um ônibus e um observador externo quando o veículo freia:

- Para o observador em um referencial inercial em repouso: o ônibus pára e os passageiros continuam a ir para frente, justificado pelo Princípio da Inércia atuando sobre eles em decorrência de uma aceleração negativa (frenagem do veículo).
- Para os passageiros em um referencial não-inercial (negativamente acelerado): eles “sentem uma força que os impulsiona para frente” (força de inércia), que efetivamente não existe, porém representa a impressão dos passageiros a partir do seu referencial.

Um exemplo comumente citado para ilustrar a aceleração de Coriolis é o escoamento da água por um ralo, que apresentaria rotação anti-horária no hemisfério Norte e horária no Sul. O conceito está correto, porém, o efeito da aceleração de Coriolis é desprezível perante o de outras forças (mesmo a aceleração de Coriolis sob uma rotação a 3600 km/h, seria 66 vezes menor do que a aceleração da gravidade) e o exemplo do ralo não será comprovado em todas as situações.

Apenas em deslocamentos sob grandes velocidades e/ou distâncias, como ciclones, correntes marítimas, aviões e mísseis de longo alcance sofrem efeito significativo desta aceleração. A intensidade da aceleração de Coriolis é máxima nos pólos e nula no Equador, variando gradualmente ao longo da distância entre estes extremos.



Como consequência da aceleração de Coriolis, no Hemisfério Norte, as massas de ar, projéteis e aeronaves sofrem um aparente desvio da trajetória retilínea para a direita; no Hemisfério Sul, o efeito é oposto: o desvio percebido aponta para a esquerda. Estes desvios serão tão maiores quanto maior a velocidade desenvolvida e/ou a distância percorrida.

A aceleração de Coriolis possui uma equação determinada empiricamente:

$$\vec{a}_{\text{coriolis}} = 2 \vec{\omega}_{\text{arrastamento}} \wedge \vec{v}_{\text{relativa}}$$

Como se pode notar, a aceleração de Coriolis (ou complementar) é o produto vetorial entre a rotação de arrastamento e a velocidade relativa do ponto estudado. Se um destes dois termos não estiver presente, esta aceleração é nula.

3.7. Composição de Referenciais

As parcelas calculadas a partir de cada referencial devem ser sobrepostas da seguinte forma:

- 1) Velocidades: a soma é direta, entre a parcela relativa (em relação ao referencial móvel) e a parcela de arrastamento (em relação ao referencial fixo).

$$\vec{v}_{\text{absoluta}} = \vec{v}_{\text{arrastamento}} + \vec{v}_{\text{relativa}}$$

- 2) Acelerações: a soma das parcelas de cada referencial não é direta na ocorrência de rotação global (de arrastamento) simultaneamente a um movimento relativo de translação, pois há necessidade de correção através da aceleração de Coriolis ou complementar

$$(\vec{a}_{\text{coriolis}} = 2 \vec{\omega}_{\text{arrastamento}} \wedge \vec{v}_{\text{relativa}}).$$

A expressão da aceleração absoluta será:

$$\vec{a}_{\text{absoluta}} = \vec{a}_{\text{arrastamento}} + \vec{a}_{\text{relativa}} + \vec{a}_{\text{coriolis}} = \vec{a}_{\text{arrastamento}} + \vec{a}_{\text{relativa}} + (2 \vec{\omega}_{\text{arrastamento}} \wedge \vec{v}_{\text{relativa}})$$

Caso não exista rotação global e/ou a velocidade relativa for nula, a aceleração de Coriolis resultará também nula, portanto será nula em movimentos globais puramente translatórios.

A decomposição da rotação nas parcelas relativa e de arrastamento também é possível, embora menos útil em suas aplicações:

$$\vec{\omega}_{\text{absoluta}} = \vec{\omega}_{\text{arrastamento}} + \vec{\omega}_{\text{relativa}}$$

As equações do cálculo de velocidades e acelerações de um ponto em relação a outro (de movimento já conhecido) continuam válidas, decompostas em relação aos referenciais fixo e móvel e sob a condição de que todas as acelerações e rotações aplicadas às expressões devem se referir à mesma parcela do movimento (relativo ou de arrastamento):

$$\vec{v}_{B \text{ abs}} = \vec{v}_{A \text{ abs}} + \vec{\omega}_{\text{abs}} \wedge (\vec{B} - \vec{A})$$

$$\vec{a}_{B \text{ abs}} = \vec{a}_{A \text{ abs}} + \vec{\alpha}_{\text{abs}} \wedge (\vec{B} - \vec{A}) + \vec{\omega}_{\text{abs}} \wedge \left(\vec{\omega}_{\text{abs}} \wedge (\vec{B} - \vec{A}) \right)$$

É aconselhável calcular à parte as parcelas, a fim de que o tamanho e complexidade das equações absolutas não cresçam desnecessariamente e cuidar para que não ocorram “duplicações” nos valores das parcelas relativa e de arrastamento.

Não se deve derivar o movimento decomposto em referenciais fixos e móveis, mesmo na forma absoluta, pois a derivada de uma grandeza em relação a diferentes referenciais simultâneos é muito complexa e sujeita a erros de cálculo.

$$\vec{v}_{B \text{ arr}} = \vec{v}_{A \text{ arr}} + \vec{\omega}_{\text{arr}} \wedge (\vec{B} - \vec{A})$$

$$\vec{a}_{B \text{ arr}} = \vec{a}_{A \text{ arr}} + \vec{\alpha}_{\text{arr}} \wedge (\vec{B} - \vec{A}) + \vec{\omega}_{\text{arr}} \wedge \left(\vec{\omega}_{\text{arr}} \wedge (\vec{B} - \vec{A}) \right)$$

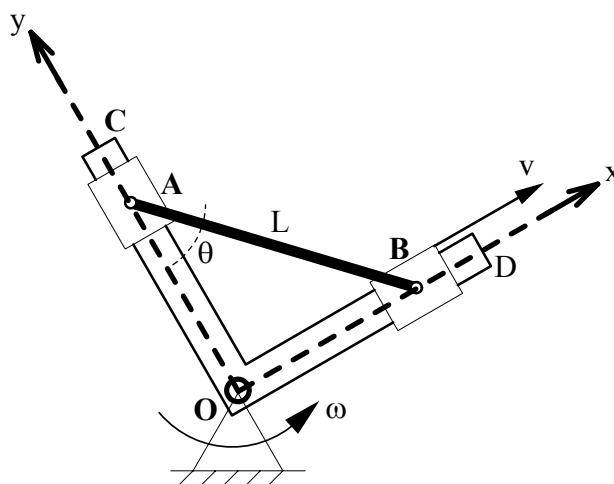
$$\vec{v}_{B \text{ rel}} = \vec{v}_{A \text{ rel}} + \vec{\omega}_{\text{rel}} \wedge (\mathbf{B} - \mathbf{A})$$

$$\vec{a}_{B \text{ rel}} = \vec{a}_{A \text{ rel}} + \vec{\alpha}_{\text{rel}} \wedge (\mathbf{B} - \mathbf{A}) + \vec{\omega}_{\text{rel}} \wedge \left(\vec{\omega}_{\text{rel}} \wedge (\mathbf{B} - \mathbf{A}) \right)$$

A separação do estudo em referenciais fixos e móveis deve sempre facilitar o entendimento e a resolução do problema. Se torná-lo desnecessariamente mais complexo, deve ser evitada e a resolução se limitará apenas ao cálculo do movimento por inteiro.

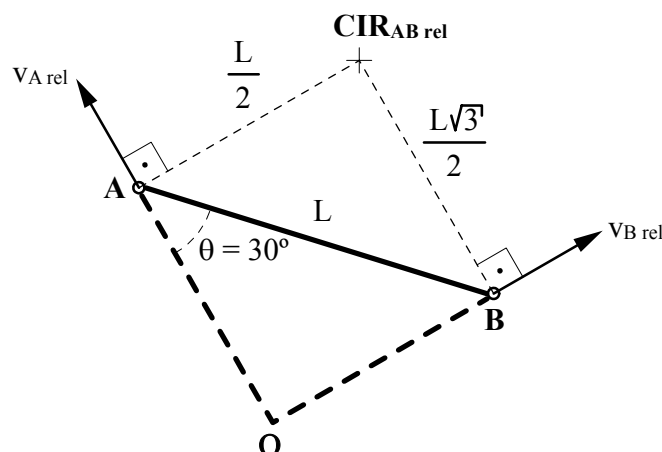
Exemplo: A barra em L gira com velocidade angular constante ($\vec{\omega}_{\text{COD}} = \omega \vec{k}$) em torno do eixo Oz. A barra AB é articulada à barra COD por anéis nas extremidades A e B. O anel da extremidade B desliza sobre o braço OD com velocidade constante ($\vec{v}_B = v \vec{i}$) em relação a OD. Quando $\theta = 30^\circ$, pede-se:

- Calcular $v_{B \text{ rel}}$, $v_{B \text{ arr}}$ e $v_{B \text{ abs}}$;
- Calcular $a_{B \text{ rel}}$, $a_{B \text{ arr}}$, $a_{B \text{ cor}}$ e $a_{B \text{ abs}}$;
- Calcular $\omega_{AB \text{ rel}}$ e $\omega_{AB \text{ abs}}$;
- Calcular $v_{A \text{ rel}}$ e $v_{A \text{ abs}}$;



- Referencial Fixo com origem em O e na posição $\theta = 30^\circ$.

Referencial Móvel com origem em O e solidário à rotação da barra COD, na posição $\theta = 30^\circ$.



$$\vec{v}_{B \text{ rel}} = v \vec{i}$$

$$\vec{\omega}_{AB \text{ arr}} = \vec{\omega}_{COD} \Rightarrow \vec{\omega}_{AB \text{ arr}} = \omega \vec{k}$$

$$\vec{v}_{B \text{ arr}} = \vec{v}_{O \text{ arr}} + \vec{\omega}_{AB \text{ arr}} \wedge (\vec{B} - \vec{O})$$

$$\vec{v}_{B \text{ arr}} = 0 + \omega \vec{k} \wedge \frac{L}{2} \vec{i} \Rightarrow \vec{v}_{B \text{ arr}} = \frac{\omega L}{2} \vec{j}$$

$$\vec{v}_{B \text{ abs}} = \vec{v}_{B \text{ rel}} + \vec{v}_{B \text{ arr}}$$

$$\vec{v}_{B \text{ abs}} = v \vec{i} + \frac{\omega L}{2} \vec{j}$$

b)

$$\vec{a}_{B \text{ rel}} = (\dot{\vec{v}}_{B \text{ rel}}) = 0$$

$$\vec{\alpha}_{AB \text{ arr}} = \vec{\alpha}_{COD} = (\dot{\vec{\omega}}_{COD}) = 0$$

$$\vec{a}_{B \text{ arr}} = \vec{a}_{O \text{ arr}} + \vec{\alpha}_{AB \text{ arr}} \wedge (\vec{B} - \vec{O}) + \vec{\omega}_{AB \text{ arr}} \wedge \left(\vec{\omega}_{AB \text{ arr}} \wedge (\vec{B} - \vec{O}) \right)$$

$$\vec{a}_{B \text{ arr}} = 0 + 0 \wedge \frac{L}{2} \vec{i} + \omega \vec{k} \wedge \left(\omega \vec{k} \wedge \frac{L}{2} \vec{i} \right) \Rightarrow \vec{a}_{B \text{ arr}} = \omega \vec{k} \wedge \frac{\omega L}{2} \vec{j} \Rightarrow \vec{a}_{B \text{ arr}} = -\frac{\omega^2 L}{2} \vec{i}$$

$$\vec{a}_{B \text{ cor}} = 2 \vec{\omega}_{AB \text{ arr}} \wedge \vec{v}_{B \text{ rel}} \Rightarrow \vec{a}_{B \text{ cor}} = 2 \omega \vec{k} \wedge v \vec{i} \Rightarrow \vec{a}_{B \text{ cor}} = 2 \omega v \vec{j}$$

$$\vec{a}_{B \text{ abs}} = \vec{a}_{B \text{ rel}} + \vec{a}_{B \text{ arr}} + \vec{a}_{B \text{ cor}}$$

$$\vec{a}_{B \text{ abs}} = 0 - \frac{\omega^2 L}{2} \vec{i} + 2 \omega v \vec{j} \Rightarrow \vec{a}_{B \text{ abs}} = -\frac{\omega^2 L}{2} \vec{i} + 2 \omega v \vec{j}$$

c)

$$\vec{v}_{B \text{ rel}} = \vec{v}_{CIRAB \text{ rel}} + \vec{\omega}_{AB \text{ rel}} \wedge (\vec{B} - \vec{CIR}_{AB})$$

$$v \vec{i} = 0 + \omega_{AB \text{ rel}} \vec{k} \wedge \left(-\frac{L\sqrt{3}}{2} \vec{j} \right) \Rightarrow v \vec{i} = \frac{\omega_{AB \text{ rel}} L\sqrt{3}}{2} \vec{i} \Rightarrow \omega_{AB \text{ rel}} = \frac{2v}{L\sqrt{3}} \Rightarrow \vec{\omega}_{AB \text{ rel}} = \frac{2\sqrt{3}v}{3L} \vec{k}$$

$$\vec{\omega}_{AB \text{ abs}} = \vec{\omega}_{AB \text{ rel}} + \vec{\omega}_{AB \text{ arr}}$$

$$\vec{\omega}_{AB \text{ abs}} = \frac{2\sqrt{3}v}{3L} \vec{k} + \omega \vec{k} \Rightarrow \vec{\omega}_{AB \text{ abs}} = \left(\frac{2\sqrt{3}v}{3L} + \omega \right) \vec{k}$$

d)

$$\vec{v}_{A \text{ rel}} = \vec{v}_{B \text{ rel}} + \vec{\omega}_{AB \text{ rel}} \wedge (\vec{A} - \vec{B})$$

$$\vec{v}_{A \text{ rel}} = v \vec{i} + \frac{2\sqrt{3}v}{3L} \vec{k} \wedge \frac{L}{2} (-\vec{i} + \sqrt{3} \vec{j}) \Rightarrow \vec{v}_{A \text{ rel}} = v \vec{i} - \frac{\sqrt{3}v}{3} \vec{j} - v \vec{i} \Rightarrow \vec{v}_{A \text{ rel}} = -\frac{\sqrt{3}v}{3} \vec{j}$$

$$\vec{v}_{A \text{ abs}} = \vec{v}_{B \text{ abs}} + \vec{\omega}_{AB \text{ abs}} \wedge (\vec{A} - \vec{B})$$

$$\vec{v}_{A \text{ abs}} = v \vec{i} + \frac{\omega L}{2} \vec{j} + \left(\frac{2\sqrt{3}v}{3L} + \omega \right) \vec{k} \wedge \frac{L}{2} (-\vec{i} + \sqrt{3} \vec{j})$$

$$\vec{v}_{A \text{ abs}} = v \vec{i} + \frac{\omega L}{2} \vec{j} - \frac{\sqrt{3}v}{3} \vec{j} - \frac{\omega L}{2} \vec{j} - v \vec{i} - \frac{\sqrt{3}\omega L}{2} \vec{i} \Rightarrow \vec{v}_{A \text{ abs}} = -\frac{\sqrt{3}\omega L}{2} \vec{i} - \frac{\sqrt{3}v}{3} \vec{j}$$

Alternativa para o cálculo de $\vec{v}_{A \text{ abs}}$:

$$\vec{v}_{A \text{ arr}} = \vec{v}_{O \text{ arr}} + \vec{\omega}_{AB \text{ arr}} \wedge (\vec{A} - \vec{O})$$

$$\vec{v}_{A \text{ arr}} = 0 + \omega \vec{k} \wedge \frac{L\sqrt{3}}{2} \vec{j} \Rightarrow \vec{v}_{A \text{ arr}} = -\frac{\sqrt{3}\omega L}{2} \vec{i}$$

$$\vec{v}_{A \text{ abs}} = \vec{v}_{A \text{ rel}} + \vec{v}_{A \text{ arr}} \Rightarrow \vec{v}_{A \text{ abs}} = -\frac{\sqrt{3}\omega L}{2} \vec{i} - \frac{\sqrt{3}v}{3} \vec{j}$$

Deve-se notar que a solução não precisa ser descrita em função de θ (exceto se for exigido no enunciado), desenvolvendo a solução para apenas para um determinado instante (quando $\theta = 30^\circ$).

\Rightarrow **EXERCÍCIOS 3.9 , 3.10 , 3.11 , 3.12 , 3.13 e 3.14**

CAPÍTULO 4: DINÂMICA

4.1. Apresentação

A Dinâmica apóia-se totalmente na Cinemática, complementando-a com a inserção das ações externas presentes no problema, estabelecendo relações de causa e efeito entre as forças e momentos atuantes e as velocidades e as acelerações desenvolvidas no movimento dos corpos.

É a divisão mais complexa das três abordadas na Mecânica dos Corpos Rígidos, por combinar os elementos vistos anteriormente na Estática (forças e momentos) àqueles estudados na Cinemática (velocidades, acelerações e rotações).

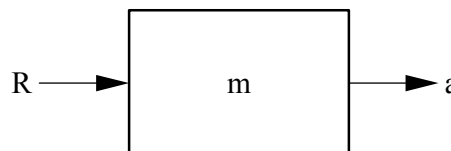
Apenas movimentos planos serão abordados, visto que a complexidade dos problemas tridimensionais encontra-se além do estudo aqui pretendido. Corpos tridimensionais simétricos em relação ao plano do movimento também podem ser estudados como movimentos planos, sendo válidos todos os conceitos e equações apresentadas adiante.

4.2. Princípio Fundamental da Dinâmica

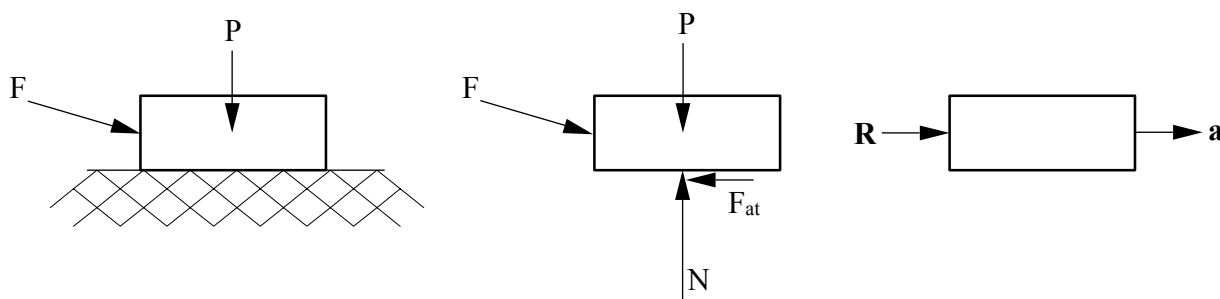
A Segunda Lei de Newton, também conhecida como Princípio Fundamental da Dinâmica, afirma que: “A resultante das forças que agem num corpo é igual ao produto da massa deste corpo pela aceleração que o mesmo desenvolve”. Esta Lei constitui a base da Dinâmica, desde que aplicada sobre um referencial inercial (em repouso ou em movimento retilíneo uniforme).

Na ausência de restrições, a força resultante produzirá um movimento retilíneo uniformemente acelerado, sendo tanto mais difícil parar ou alterar o movimento (maior inércia) quanto maior for a massa deste corpo (conforme o conceito da Primeira Lei de Newton).

$$\vec{R} = m \cdot \vec{a}$$

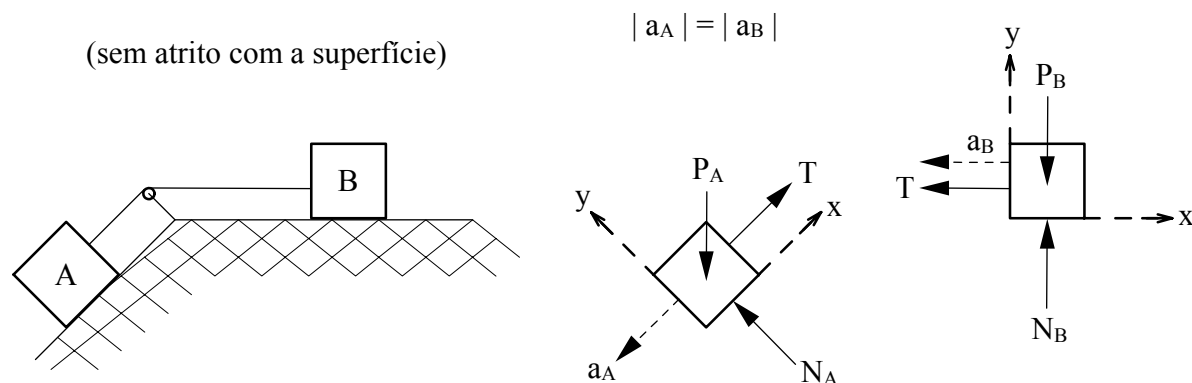


Os diagramas de corpo livre, idênticos aos vistos na Estática, novamente facilitam a resolução ao dividir o problema em problemas menores, consideradas as interações existentes entre os corpos e superfícies pelo princípio de ação e reação (Terceira Lei de Newton).



Como os vetores da força resultante e da aceleração possuirão sempre a mesma direção e sentido, pode-se abdicar da notação vetorial (descrição do problema e da solução em função dos versores \hat{i} , \hat{j} , \hat{k}) e apenas utilizar as componentes cartesianas das forças e acelerações presentes, com a devida atenção na decomposição dos vetores.

Pode-se, inclusive, adotar referenciais fixos próprios para cada corpo de um conjunto, pois o movimento individual de cada um deverá obedecer à sua “resultante particular”. Deve-se compatibilizar as forças internas do conjunto (na figura a seguir, a tração T do fio) e as acelerações e deslocamentos solidários entre os corpos ($|a_A| = |a_B|$), transformadas as componentes cartesianas de um referencial individual para outro.



A divisão do conjunto em referenciais fixos e móveis não é facilmente aplicável na Dinâmica, pois é impraticável decompor forças de acordo com as acelerações de arrastamento, relativa e de Coriolis em movimentos com rotação. A adoção de referenciais relativos apenas é vantajosa em problemas puramente translacionais (aqueles tratados no Teorema do Movimento do Baricentro).

Como auxílio ao Princípio Fundamental da Dinâmica, alguns teoremas apóiam-se em métodos particulares para a abordagem dos problemas, sendo realmente úteis em situações específicas.

Serão apresentados três teoremas e suas respectivas aplicações: Teorema do Movimento do Baricentro (TMB), Teorema do Momento Angular (TMA) e Teorema da Energia Cinética (TEC).

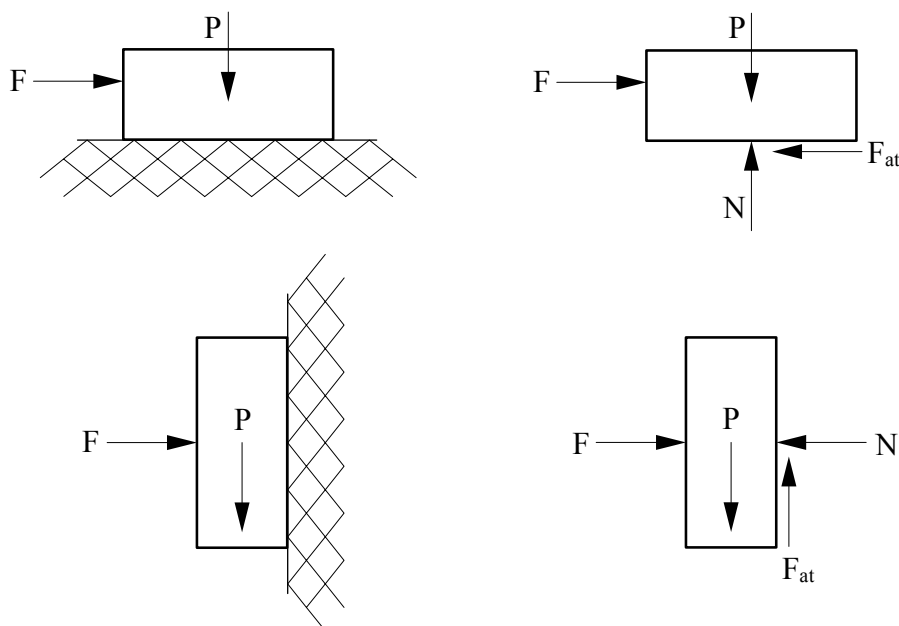
4.3. Atrito

O atrito é um fenômeno que surge no contato entre dois corpos ou entre um sólido e o meio que o envolve (água ou ar). O atrito sólido seco é aquele em que apenas corpos e superfícies sólidas participam, sem a presença de lubrificantes entre eles e sem a imersão em meio fluido (água), desprezado o efeito do atrito aerodinâmico.

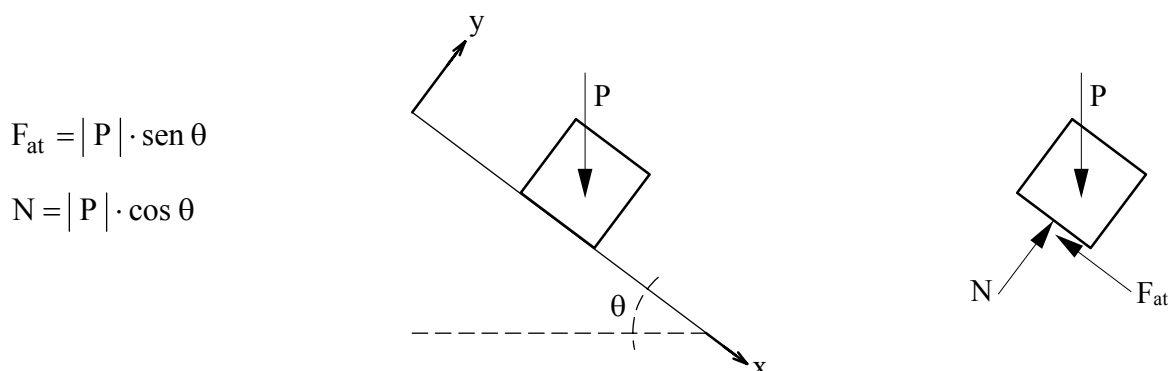
A força de atrito é a uma força de contato que se opõe ao movimento relativo entre os corpos (ou entre o corpo e a superfície), geralmente atuando como força resistente, embora possa se apresentar como força motriz em determinadas situações. Possui sempre direção tangencial ao movimento relativo dos corpos no ponto ou superfície de contato.

Para que o atrito ocorra, são necessários dois tipos de forças (ou uma só força que possua componentes nas duas direções):

- 1) Uma força que mantenha o contato entre os corpos ou entre o corpo e uma superfície de apoio (chão, paredes, planos inclinados, etc), sendo perpendicular à superfície de contato. A normal possuirá mesma direção e intensidade (porém, sentido oposto) da resultante das forças (ou componentes) verticais, equilibrando-a.
- 2) Uma força tangencial (ou paralela) ao ponto de contato, que movimente ou tente movimentar um corpo em relação ao outro (ou um corpo sobre uma superfície). A força de atrito possui mesma intensidade e direção, porém sentido oposto, da resultante das forças tangenciais.



No plano inclinado, as forças presentes devem ser decompostas em suas componentes normal e tangencial, relativas à inclinação do plano.



$$F_{at} = |P| \cdot \sin \theta$$

$$N = |P| \cdot \cos \theta$$

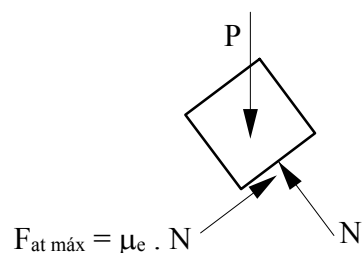
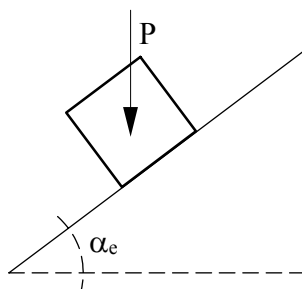
O atrito é variável e pode comportar-se de duas maneiras:

- Atrito estático:** assume a mesma intensidade (e sentido oposto) da resultante tangencial e se adapta sempre para anulá-la, variando de zero até um valor máximo ($|F_{at}|_{\text{máx}} = \mu_e \cdot |N|$), que não retém mais o movimento e desfaz o repouso.
- Atrito cinético:** possui valor constante ($|F_{at}| = \mu_c \cdot |N|$) e é um pouco menor do que o atrito estático máximo, opondo-se ao movimento relativo entre o corpo e a superfície de contato.

Um parâmetro muito importante sobre este fenômeno é o coeficiente de atrito (μ), que representa as características do contato (como rugosidade do material e lubrificação da superfície) por meio de um valor adimensional.

O coeficiente de atrito é igual à tangente do máximo ângulo que ainda permite atrito estático sobre um determinado plano inclinado, onde um corpo colocado sobre o mesmo encontra-se na iminência de sair do repouso para o movimento.

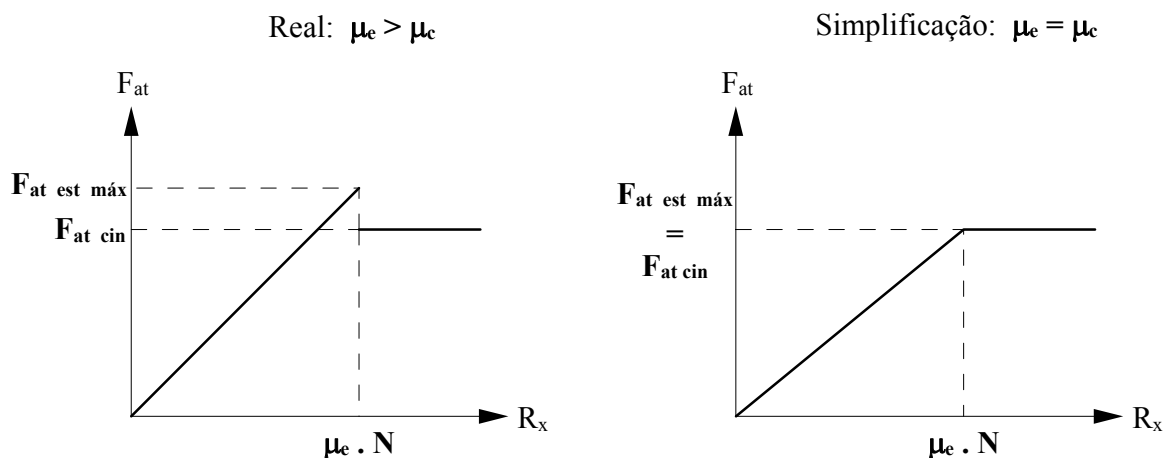
$$\mu = \operatorname{tg} \alpha_e$$



Para um ângulo α qualquer do plano inclinado, três situações podem ocorrer:

- 1) Se $\alpha < \alpha_e$, o corpo permanece em repouso, sendo a força de atrito exatamente de mesma intensidade da resultante das forças tangenciais ($F_{\text{at}} = -R_x$).
- 2) Se $\alpha = \alpha_e$, o corpo está na iminência do movimento, sob atrito estático máximo ($F_{\text{at}} = -\mu_e \cdot N$).
- 3) Se $\alpha > \alpha_e$, ele estará em movimento e o atrito será constante ($F_{\text{at}} = -\mu_c \cdot N$).

A permuta entre os coeficientes estático e cinético (μ_e e μ_c) ocorre na transição entre o repouso e o limiar do início movimento. Usualmente, são adotados como iguais entre si devido à pequena diferença entre eles:

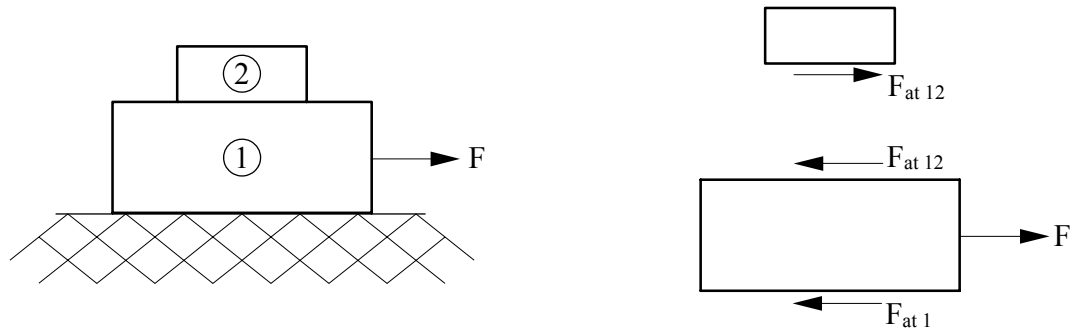


O conceito geral sobre o atrito leva à intuição de que sempre se trata de uma força resistente, que se opõe ao movimento ou à tendência de movimento.

Esta noção é parcialmente correta: o atrito é sempre oposto ao movimento, porém oposto ao movimento relativo na superfície de contato e não ao movimento global do corpo ou conjunto de corpos. Em algumas situações, a força de atrito poderá ser motriz, ou seja, apontar para a direção do movimento global.

Um exemplo desta afirmação é o ato de andar: o corpo se desloca todo para frente, porém o pé “empurra” o chão para trás, gerando uma força de atrito para frente, ou seja, uma força motriz ao movimento global.

Outro exemplo pode ser observado nos blocos (que atiram entre si e em relação ao chão) a seguir:



O diagrama de corpo livre demonstra que o bloco menor é impulsionado para frente pelo atrito contra o bloco maior, embora somente o bloco maior receba diretamente a força externa.

Se o atrito tivesse direção contrária ao movimento global (ao invés de ser contrária ao movimento relativo do contato entre os corpos), o bloco menor seria empurrado para trás, desprendendo-se do bloco maior e sendo lançado para trás, oposto ao movimento global imposto pela força F .

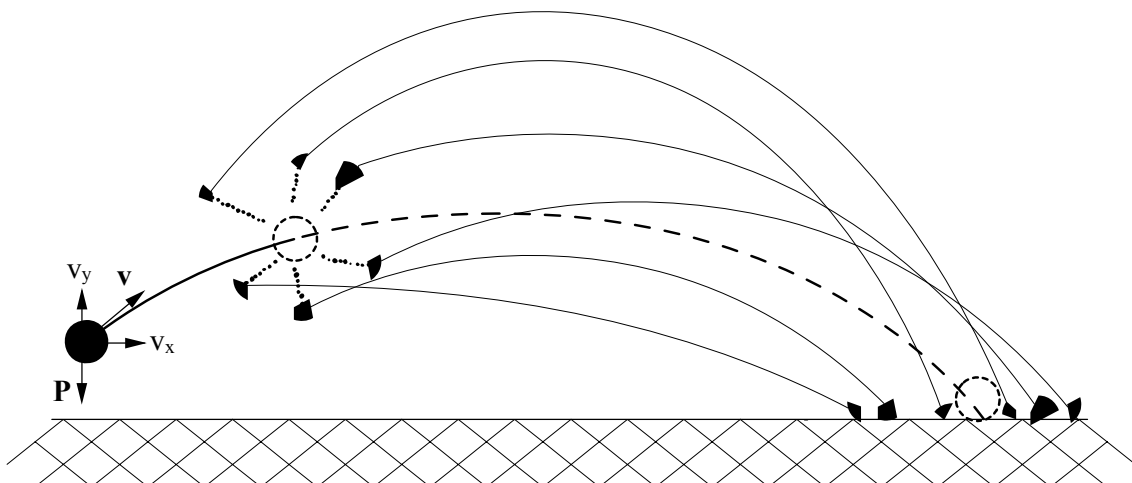
Outras considerações relevantes sobre o atrito aplicam-se ao rolamento de discos e corpos circulares, onde o fenômeno do atrito interfere de forma distinta nos movimentos de escorregamento e rolamento destes corpos, explicadas no específico tópico adiante.

4.4. Teorema do Movimento do Baricentro

O Teorema do Movimento do Baricentro afirma que um conjunto de corpos se movimenta de forma coerente ao movimento do seu baricentro, mesmo quando não são ligados fisicamente entre si.

Um exemplo comum deste teorema é o lançamento de uma granada que explode em pleno ar, ao analisar o movimento que seus fragmentos descrevem após a separação. A granada íntegra desenvolveria um movimento parabólico, típico da balística, e poderia ser considerada como um ponto material concentrado em seu baricentro, onde a única força atuante seria seu peso e a componente horizontal da velocidade inicial do lançamento se conservaria (o atrito do ar é suposto como desprezível).

Ao explodir no ar, os fragmentos se afastam do baricentro da granada original, porém a posição, velocidade e aceleração globais se mantêm idênticas às da granada sem explosão, calculadas a partir das médias ponderadas das massas dos fragmentos. Portanto, o movimento do baricentro da granada se “conserva” no movimento global de seus fragmentos e pode ser estudado como uma forma mais sintética de representar o conjunto de seus fragmentos.

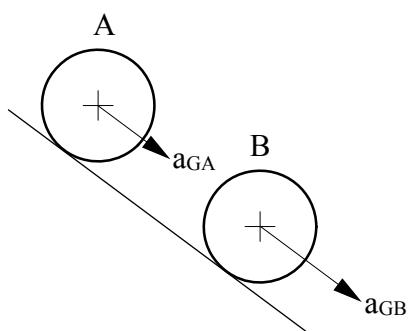


O movimento do baricentro pode representar o movimento do corpo ou conjunto de corpos, concentrada toda a massa neste ponto e aplicada a resultante das forças sobre o mesmo:

$$\vec{R} = \sum m_i \cdot \vec{a}_G$$

O TMB é muito útil em problemas onde apenas translações estão presentes, porém é deficiente ao lidar com rotações, pois não considera a parcela do movimento que decorre do giro do corpo.

A rotação dos corpos em torno do baricentro do conjunto não influi na trajetória do movimento baricêntrico, porém a velocidade e aceleração do baricentro não podem ser calculadas diretamente por este teorema, pois o trabalho produzido pela força resultante é compartilhado pelos movimentos translacional e rotacional, o que diminui a aceleração e velocidade linear de um corpo em rolamento em relação ao movimento de escorregamento (sem rolar) do mesmo corpo.



O disco A rola sem escorregar (translação e rotação com CIR).

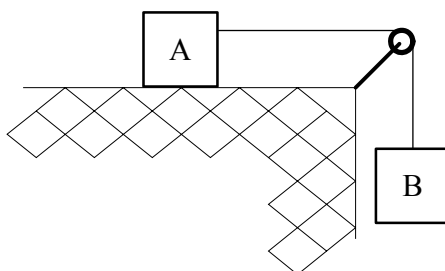
O disco B escorrega sem rolar (translação pura, sem atrito).

$$a_{GB} > a_{GA}$$

Os problemas puramente translacionais não costumam apresentar maior dificuldade, bastando o traçado do diagrama de corpo livre e a análise das componentes da resultante, muito similar às equações de equilíbrio da Estática, aplicado o Princípio Fundamental da Dinâmica.

$$R_x = \sum m \cdot a_{Gx} \quad R_y = \sum m \cdot a_{Gy}$$

Exemplo: Sabendo-se que os corpos possuem massa m , não há atrito na superfície e o fio é ideal (inextensível e sem massa), calcule a aceleração dos blocos e a força de tração no fio:



Bloco A:

$$R_{Ax} = m_A \cdot a_{Ax} \Rightarrow T = m \cdot a_A$$

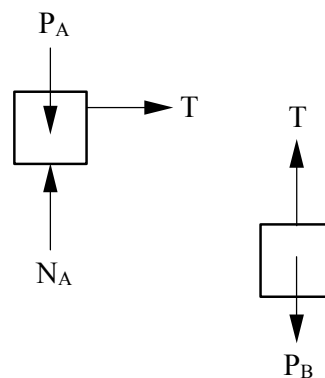
$$R_{Ay} = m_A \cdot a_{Ay} \Rightarrow N_A - P_A = 0 \Rightarrow N_A = mg$$

Bloco B:

$$R_{Bx} = m_B \cdot a_{Bx} \Rightarrow 0 = 0$$

$$R_{By} = m_B \cdot a_{By} \Rightarrow T - P_B = m \cdot (-a_B)$$

$$m \cdot a_A - mg = -m \cdot a_B \Rightarrow a_A - g = -a_B \Rightarrow a_A = g - a_B$$



Como o fio é inextensível, os blocos A e B devem ter a mesma aceleração, em módulo: $|a_A| = |a_B|$

$$a_A = g - a_B \Rightarrow a_A = g - a_A \Rightarrow 2a_A = g \Rightarrow a_A = \frac{g}{2} \Rightarrow \vec{a}_A = \frac{g}{2} \vec{i}$$

$$a_B = a_A = \frac{g}{2} \Rightarrow \vec{a}_B = -\frac{g}{2} \vec{j}$$

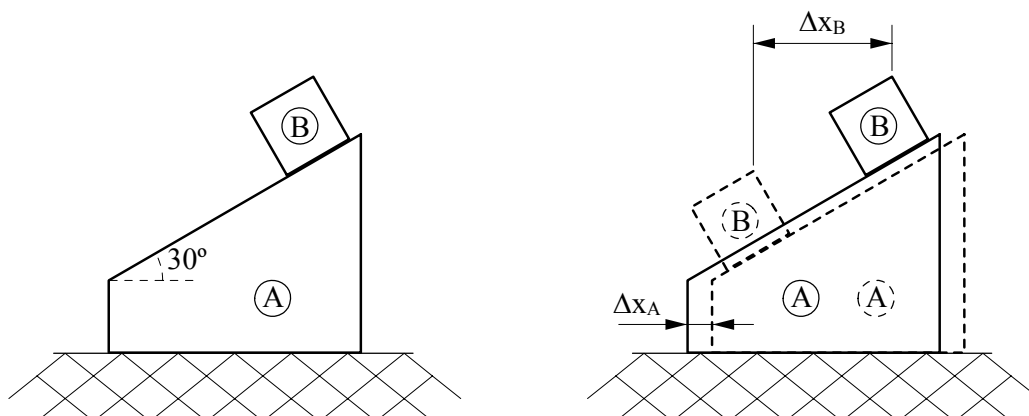
$$T = m \cdot a_A \Rightarrow T = \frac{mg}{2}$$

O TMB é aplicável em problemas que envolvam o escorregamento (translação) entre dois corpos sem atrito, sobre os quais se deseja conhecer as acelerações e/ou suas posições. É uma situação em que a decomposição do problema em referenciais fixos e móveis é claramente vantajosa e pode-se aplicar a equação de composição da aceleração absoluta (simplificada para translação pura – sem a aceleração de Coriolis):

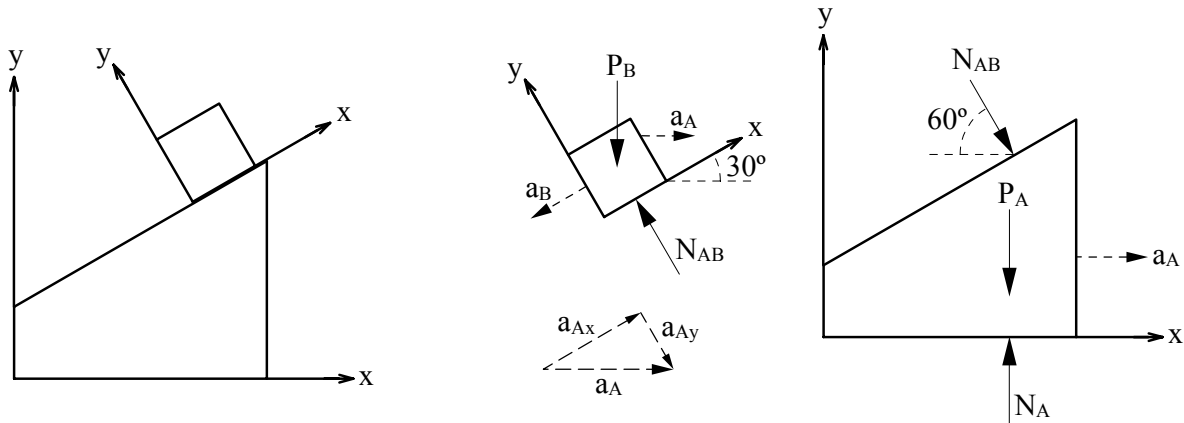
$$\vec{R} = m \cdot \vec{a}_{abs} = m \cdot (\vec{a}_{arr} + \vec{a}_{rel})$$

Exemplo: Os blocos A e B podem deslizar sem atrito entre si e em relação ao chão. As únicas forças externas presentes são os pesos de cada bloco, de massa $2m$ e m , respectivamente. Supondo-os em repouso na situação inicial, pede-se:

- Determinar a aceleração de cada bloco e as reações entre os blocos e com o chão;
- Qual o valor do deslocamento Δx_A do bloco A em função do deslocamento Δx_B do bloco B:



- a) A decomposição em dois referenciais – um fixo, preso à posição inicial do bloco A, e outro móvel, solidário ao bloco B – obriga à inserção das forças internas presentes entre os dois referenciais (neste exemplo, o par ação-reação da normal N_{AB} entre os blocos).



Bloco A:

$$R_{Ax} = m_A \cdot a_{Ax} \Rightarrow N_{AB} \cdot \cos 60^\circ = 2m \cdot a_A \Rightarrow \frac{N_{AB}}{2} = 2ma_A \Rightarrow N_{AB} = 4ma_A$$

$$R_{Ay} = m_A \cdot a_{Ay} \Rightarrow N_A - P_A - N_{AB} \cdot \sin 60^\circ = 2m \cdot 0$$

$$N_A - 2mg - 4ma_A \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow N_A - 2mg - 2\sqrt{3}ma_A = 0 \Rightarrow N_A = 2mg + 2\sqrt{3}ma_A$$

Bloco B:

$$\vec{a}_{Babs} = \vec{a}_{Brel} + \vec{a}_{Barr} \Rightarrow \vec{a}_{Babs} = -\vec{a}_{Brel} \vec{i} + a_{Ax} \vec{i} - a_{Ay} \vec{j}$$

$$\vec{a}_{Babs} = -\vec{a}_{Brel} \vec{i} + a_A \cdot \cos 30^\circ \vec{i} - a_A \cdot \sin 30^\circ \vec{j} \Rightarrow \vec{a}_{Babs} = -\vec{a}_{Brel} \vec{i} + \frac{\sqrt{3}a_A}{2} \vec{i} - \frac{a_A}{2} \vec{j}$$

$$R_{Bx} = m_B \cdot a_{Bx} \Rightarrow -P_B \cdot \sin 30^\circ = m \cdot (-a_{Brel} + a_{Ax}) \Rightarrow -\frac{mg}{2} = m \cdot \left(-a_{Brel} + \frac{\sqrt{3}a_A}{2} \right)$$

$$-\frac{g}{2} = -a_{Brel} + \frac{\sqrt{3}a_A}{2} \Rightarrow a_{Brel} = \frac{\sqrt{3}a_A}{2} + \frac{g}{2}$$

$$R_{By} = m_B \cdot a_{By} \Rightarrow -P_B \cdot \cos 30^\circ + N_{AB} = m \cdot (-a_{Ay}) \Rightarrow -\frac{\sqrt{3}mg}{2} + 4ma_A = -\frac{ma_A}{2}$$

$$-\sqrt{3}g + 8a_A = -a_A \Rightarrow 9a_A = \sqrt{3}g \Rightarrow a_A = \frac{\sqrt{3}g}{9} \Rightarrow \vec{a}_A = \frac{\sqrt{3}g}{9} \vec{i}$$

$$a_{Brel} = \frac{\sqrt{3}a_A}{2} + \frac{g}{2} \Rightarrow a_{Brel} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}g}{9} + \frac{g}{2} \Rightarrow a_{Brel} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}g}{9} + \frac{g}{2} \Rightarrow a_{Brel} = \frac{g}{6} + \frac{g}{2} \Rightarrow a_{Brel} = \frac{2g}{3}$$

$$\vec{a}_{Babs} = -\vec{a}_{Brel} \vec{i} + \frac{\sqrt{3}a_A}{2} \vec{i} - \frac{a_A}{2} \vec{j} \Rightarrow \vec{a}_{Babs} = -\frac{2g}{3} \vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}g}{9} \vec{i} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}g}{9} \vec{j}$$

$$\vec{a}_{Babs} = -\frac{2g}{3} \vec{i} + \frac{g}{6} \vec{i} - \frac{\sqrt{3}g}{18} \vec{j} \Rightarrow \vec{a}_{Babs} = -\frac{g}{2} \vec{i} - \frac{\sqrt{3}g}{18} \vec{j}$$

$$N_{AB} = 4 m a_A \Rightarrow N_{AB} = 4 m \cdot \frac{\sqrt{3} g}{9} \Rightarrow N_{AB} = \frac{4\sqrt{3} m g}{9}$$

$$N_A = 2 m g + 2\sqrt{3} m a_A \Rightarrow N_A = 2 m g + 2\sqrt{3} m \cdot \frac{\sqrt{3} g}{9} \Rightarrow N_A = 2 m g + \frac{2 m g}{3} \Rightarrow N_A = \frac{8 m g}{3}$$

- b) As forças externas (os pesos dos blocos, P_A e P_B) são exclusivamente verticais, portanto, a aceleração (do baricentro G do conjunto) será nula na direção x ($a_{Gx} = 0$).

Conseqüentemente, a velocidade inicial do baricentro na direção x se conservará com seu valor nulo ($v_{Gx} = 0$) do repouso.

Finalmente, conclui-se que a posição inicial do baricentro na direção x deverá se conservar ($x_{G \text{ inicial}} = x_{G \text{ final}}$) e o bloco A deverá se mover para a direita, compensando o movimento do bloco B (para a esquerda).

$$x_{G \text{ inicial}} = \frac{x_{Ci} \cdot m_A + x_{Di} \cdot m_B}{m_A + m_B}$$

$$x_{Gi} = \frac{x_{Ci} \cdot 2m + x_{Di} \cdot m}{2m + m}$$

$$x_{Gi} = \frac{2m x_{Ci} + m x_{Di}}{3m}$$

$$x_{G \text{ final}} = \frac{x_{Cf} \cdot m_A + x_{Df} \cdot m_B}{m_A + m_B}$$

$$x_{Gf} = \frac{(x_{Ci} + \Delta x_A) \cdot 2m + (x_{Di} + \Delta x_A - \Delta x_B) \cdot m}{2m + m}$$

$$x_{Gf} = \frac{2m x_{Ci} + 2m \Delta x_A + m x_{Di} + m \Delta x_A - m \Delta x_B}{3m}$$

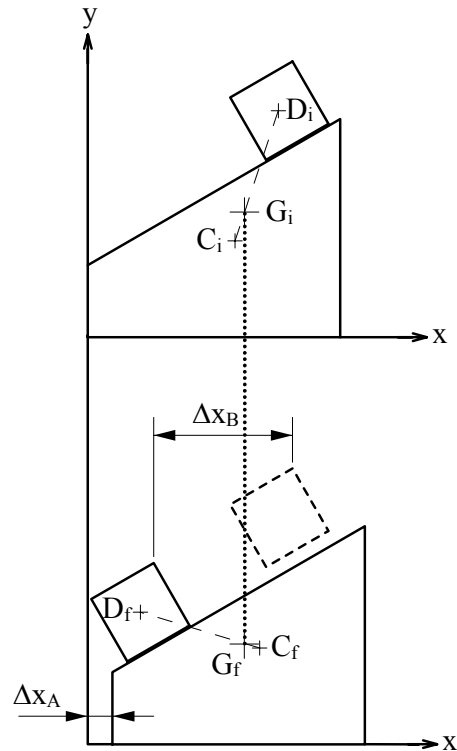
$$x_{G \text{ inicial}} = x_{G \text{ final}}$$

$$\frac{2m x_{Ci} + m x_{Di}}{3m} = \frac{2m x_{Ci} + 2m \Delta x_A + m x_{Di} + m \Delta x_A - m \Delta x_B}{3m}$$

$$2m x_{Ci} + m x_{Di} = 2m x_{Ci} + 2m \Delta x_A + m x_{Di} + m \Delta x_A - m \Delta x_B \Rightarrow 0 = 2m \Delta x_A + m \Delta x_A - m \Delta x_B$$

$$3m \Delta x_A = m \Delta x_B \Rightarrow \Delta x_A = \frac{\Delta x_B}{3}$$

\Rightarrow EXERCÍCIOS 4.1 e 4.2



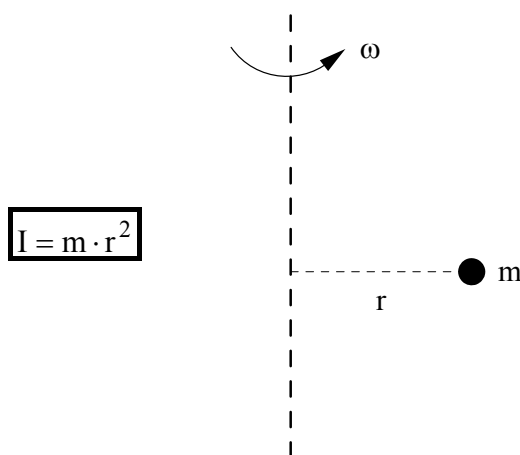
4.5. Momento de Inércia

O momento de inércia é a tendência de um corpo em impedir ou manter um movimento de giro. É análogo à inércia das forças, mas, como seu próprio nome indica, o momento de inércia é a inércia dos binários e momentos, também denominados como torques na Dinâmica.

Quanto maior o momento de inércia de um corpo, maior será o esforço para rodá-lo ou tombá-lo, porém também será mais difícil interromper seu giro.

O momento de inércia sempre se refere a um eixo, seja o eixo de rotação ou qualquer outro eixo em que se deseje seu valor (o CIR, por exemplo). Sua representação mais simples é um ponto material ligado fisicamente a um eixo de rotação.

Em relação ao eixo considerado, o momento de inércia de um ponto vale:



A fórmula anterior indica que a distância ao eixo possui maior efeito (do que a massa do corpo) sobre o valor do momento de inércia.

Em corpos rígidos, a massa específica (densidade) de seus pontos deve ser considerada no cálculo do momento de inércia, na forma de uma integral sobre a fórmula anterior. Não haverá necessidade do cálculo desta integral, pois o estudo se concentrará apenas em figuras e sólidos geométricos de densidade homogênea.

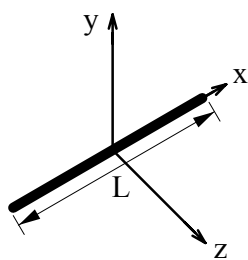
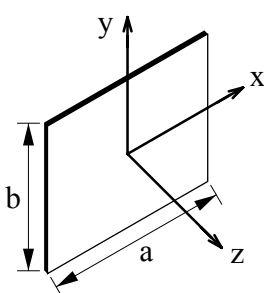
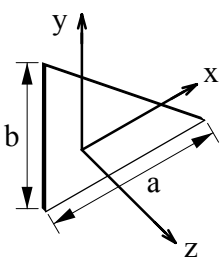
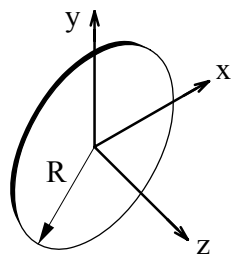
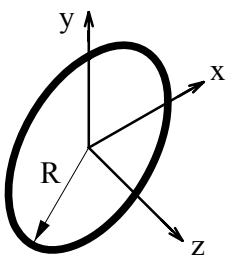
Os corpos rígidos possuem três momentos de inércia principais, um para cada eixo coordenado (I_x , I_y e I_z):

$$I_x = \sum (m_i \cdot r_{xi}^2) \quad I_y = \sum (m_i \cdot r_{yi}^2) \quad I_z = \sum (m_i \cdot r_{zi}^2)$$

Quanto ao momento de inércia, os corpos podem se dividir em delgados ou maciços:

- 1) Corpos delgados são aqueles que apresentam espessura desprezível e podem ser considerados como figuras planas bidimensionais (placas), cujo momento de inércia é função de suas áreas.
- 2) Corpos maciços são os que corpos tridimensionais, com medidas relevantes nas três dimensões, cujo momento de inércia é dependente de seu volume.

A tabela a seguir apresenta os momentos de inércia baricêntricos (ou seja, em relação aos eixos posicionados no respectivo baricentro de cada figura) dos principais corpos delgados:

Corpo	Momentos de Inércia	Massa
Barra (Haste) 	$I_{xG} = 0$ $I_{yG} = I_{zG} = \frac{m \cdot L^2}{12}$	$\rho \cdot L$
Placa Retangular ou Quadrada 	$I_{xG} = \frac{m \cdot b^2}{12}$ $I_{yG} = \frac{m \cdot a^2}{12}$ $I_{zG} = \frac{m \cdot (a^2 + b^2)}{12}$	$\rho \cdot a \cdot b$
Placa Triangular (Triângulo Retângulo) 	$I_{xG} = \frac{m \cdot b^2}{36}$ $I_{yG} = \frac{m \cdot a^2}{36}$ $I_{zG} = \frac{m \cdot (a^2 + b^2)}{36}$	$\rho \cdot \frac{a \cdot b}{2}$
Disco (Roda) 	$I_{xG} = I_{yG} = \frac{m \cdot R^2}{4}$ $I_{zG} = \frac{m \cdot R^2}{2}$	$\rho \cdot \pi r^2$
Anel Fino (Raios interno e externo próximos) 	$I_{xG} = I_{yG} = \frac{m \cdot R^2}{2}$ $I_{zG} = m \cdot R^2$	$\rho \cdot 2\pi r$

Como se pode notar pela tabela, o eixo z foi adotado como sendo perpendicular ao plano das figuras. Esta é uma convenção usual, embora não obrigatória, pois é comum referenciar um movimento plano aos eixos (x, y) o que obriga os vetores de rotação a serem paralelos ao eixo z . Se o eixo x ou y for adotado como perpendicular ao movimento (e paralelo ao eixo das rotações), deve-se permutar as respectivas fórmulas dos momentos de inércia entre si.

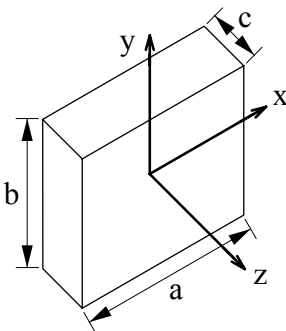
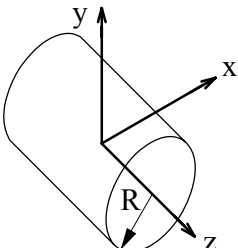
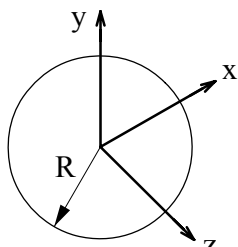
Em figuras planas com rotação em torno do eixo z , o momento de inércia I_z também é chamado de momento polar de inércia J_z e representa a soma dos momentos de inércia em x e y :

$$I_z = J_z = I_x + I_y$$

A única exceção à relação do momento polar ocorre na barra (ou haste): por ser unidimensional (só possui comprimento), o momento polar é idêntico ao momento de inércia do outro eixo perpendicular à barra (no caso, o eixo y).

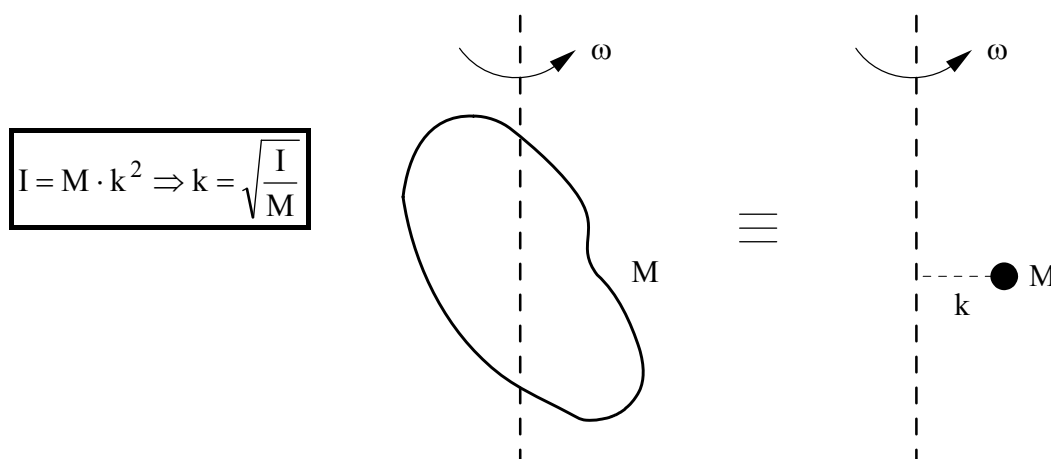
O momento polar é muito útil nos teoremas que estudam rotações (TMA e TEC), pois estes exigem apenas o momento de inércia do eixo de rotação (no caso, o eixo z), sem necessidade de aplicar I_x e I_y nas equações. Portanto, as orientações dos eixos (x, y) não importam para o valor do momento polar, que será constante para qualquer par $(I_x + I_y)$.

A tabela a seguir, apresenta os momentos de inércia baricêntricos dos principais corpos maciços:

Corpo	Momentos de Inércia	Massa
Paralelepípedo ou Cubo 	$I_{xG} = \frac{m \cdot (b^2 + c^2)}{12}$ $I_{yG} = \frac{m \cdot (a^2 + c^2)}{12}$ $I_{zG} = \frac{m \cdot (a^2 + b^2)}{12}$	$\rho \cdot a \cdot b \cdot c$
Cilindro 	$I_{xG} = I_{yG} = \frac{m \cdot (3R^2 + L^2)}{12}$ $I_{zG} = \frac{m \cdot R^2}{2}$	$\rho \cdot \pi r^2 \cdot L$
Esfera 	$I_{xG} = I_{yG} = I_{zG} = \frac{2m \cdot R^2}{5}$	$\rho \cdot \frac{4\pi r^3}{3}$

Nota-se (no cilindro e no paralelepípedo) que o momento de inércia I_z é idêntico ao valor do momento I_z da respectiva figura plana (disco e placa retangular). Isto ocorre porque o momento de inércia em relação a cada um dos três eixos coordenados se refere apenas às dimensões do corpo nas outras duas coordenadas, e, portanto, não importa a espessura (dimensões em z).

Todos os corpos possuem um parâmetro denominado raio de giração (k), equivalente à distância (ao eixo considerado) de um ponto material de mesma massa do corpo que produz o mesmo valor do momento de inércia:

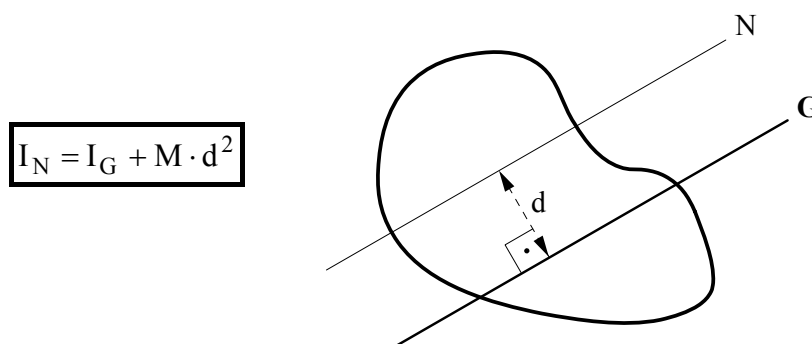


A composição de corpos a partir dos sólidos geométricos básicos é similar à composição do baricentro de corpos complexos.

A diferença se apresenta na obrigatoriedade de obedecer à translação de eixos dos momentos de inércia individuais para o novo eixo baricêntrico, conforme o Teorema dos Eixos Paralelos (também chamado de Teorema de Steiner).

O Teorema dos Eixos Paralelos exige que os momentos de inércia de novos eixos (paralelos ao eixo conhecido, mesmo que não orientado conforme os eixos cartesianos) sejam referenciados ao valor deste momento sobre o eixo do baricentro.

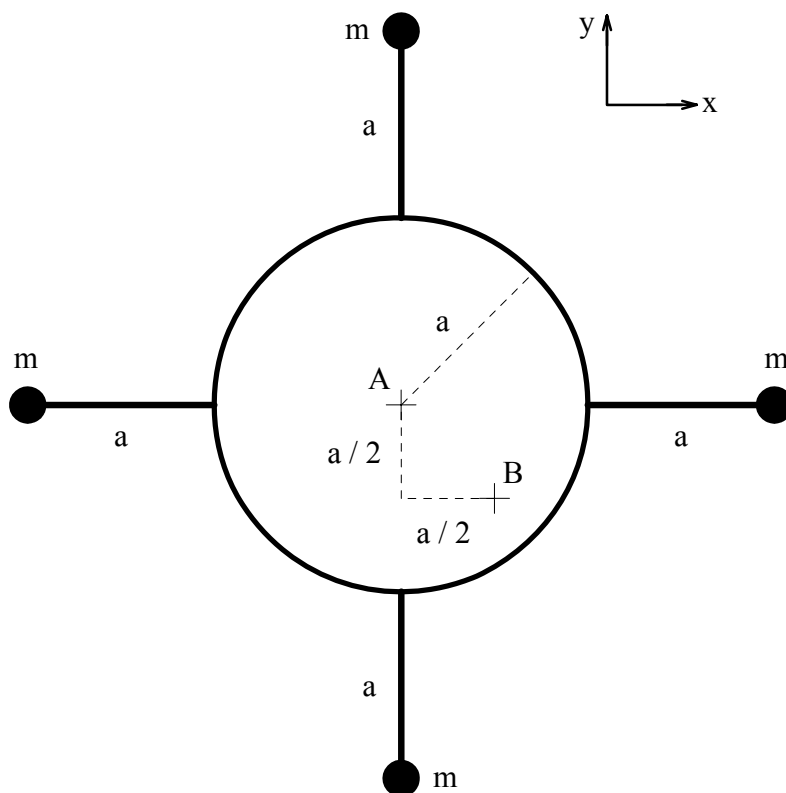
Para um eixo qualquer N , a uma distância perpendicular d do eixo (paralelo) que passa pelo baricentro G , a fórmula da translação de eixos é:



$$I_N = I_G + M \cdot d^2$$

Para compor o momento de inércia de um corpo a partir de sua divisão em sólidos geométricos conhecidos, basta calcular os momentos de inércia individuais e transladá-los ao ponto desejado, somando-os entre si ou subtraindo-os (se forem furos ou cortes).

Exemplo: O disco de massa $2m$ suporta quatro massas concentradas m , ligadas ao disco por quatro barras de massa $\frac{3m}{2}$. Qual o momento de inércia J_z do conjunto em relação ao ponto A? E em relação ao ponto B?



$$J_{ZA} = J_{Z1} + m_1 \cdot d_1^2 + 4 \cdot J_{Z2} + 4 \cdot m_2 \cdot d_2^2 + 4 \cdot J_{Z3} + 4 \cdot m_3 \cdot d_3^2$$

$$J_{ZA} = \frac{m_1 \cdot R^2}{2} + m_1 \cdot d_1^2 + 4 \cdot \frac{m_2 \cdot L^2}{12} + 4 \cdot m_2 \cdot d_2^2 + 4 \cdot 0 + 4 \cdot m_3 \cdot d_3^2$$

$$J_{ZA} = \frac{2m \cdot a^2}{2} + 2m \cdot 0^2 + 4 \cdot \frac{\frac{3m}{2} \cdot a^2}{12} + 4 \cdot \frac{3m}{2} \cdot \left(a + \frac{a}{2}\right)^2 + 4 \cdot 0 + 4 \cdot m \cdot (a + a)^2$$

$$J_{ZA} = ma^2 + 0 + \frac{ma^2}{2} + \frac{27ma^2}{2} + 0 + 16ma^2$$

$$J_{ZA} = 31ma^2$$

$$J_{ZB} = J_{ZA} + m_{\text{total}} \cdot d_{AB}^2$$

$$J_{ZB} = 31ma^2 + \left(2m + 4 \cdot \frac{3m}{2} + 4 \cdot m\right) \cdot (\sqrt{2}a)^2$$

$$J_{ZB} = 31ma^2 + 12m \cdot 2a^2$$

$$J_{ZB} = 55ma^2$$

4.6. Teorema do Momento Angular

A quantidade de movimento de um corpo (ou ponto material) é uma grandeza vetorial relacionada à energia cinética deste corpo, cujo valor se mantém constante num sistema sem forças externas. Sua derivada é a resultante é a força resultante do sistema:

$$\vec{L} = m \cdot \vec{v} \qquad \dot{\vec{L}} = m \cdot \vec{a} = \vec{F}$$

O momento angular é o momento gerado pelo vetor da quantidade de movimento do corpo em relação a um ponto e sua derivada é o momento (binário) aplicado do corpo em relação a um ponto:

$$\boxed{\vec{H} = \vec{r} \wedge (m \cdot \vec{v})} \qquad \dot{\vec{H}} = \vec{r} \wedge (m \cdot \vec{a}) = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{M}$$

O momento angular do corpo varia de acordo com o ponto considerado, usualmente referenciado ao baricentro (rotações baricêntricas) ou ao CIR (rotações não-baricêntricas).

Analogamente à Primeira Lei de Newton (Princípio da Inércia), o Teorema do Momento Angular afirma que o momento angular de um corpo se conservará na ausência de momentos externos:

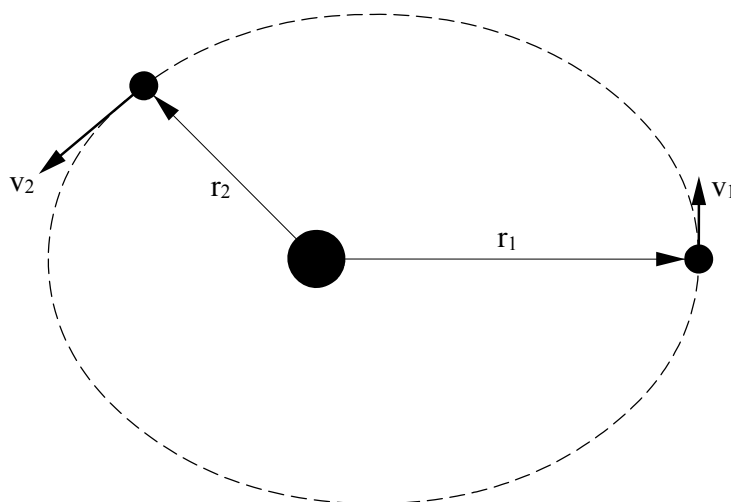
$$R_{\text{ext}} = 0 \Rightarrow v = \text{cte} \qquad M_{\text{ext}} = 0 \Rightarrow H = \text{cte}$$

Pontos materiais não apresentam momento angular baricêntrico, pois não podem girar em torno de si mesmos, e, portanto, apenas possuem momento angular em relação a outro ponto.

A conservação do momento angular em pontos materiais pode ser observada no movimento planetário em torno do Sol:

$$\vec{r}_1 \wedge (m \cdot \vec{v}_1) = \vec{r}_2 \wedge (m \cdot \vec{v}_2)$$

$$|\vec{r}_1| \cdot |\vec{v}_1| = |\vec{r}_2| \cdot |\vec{v}_2|$$



Apesar da presença da força de atração gravitacional, que aponta para o centro do Sol, esta força não altera o momento angular do sistema pois não gera momento (o braço deste momento é nulo).

A órbita da Terra em torno do Sol é elíptica (muito próxima da circular), com a distância do planeta à estrela variando muito pouco ao longo do ano (menos de 2%). A conservação do momento angular implica em velocidades tangenciais maiores para raios menores e vice-versa: o planeta aumenta sua velocidade quando se aproxima do Sol, reduzindo-a à medida em que se afasta.

Quando um corpo rígido gira em torno de seu baricentro, possui momento angular equivalente à soma dos momentos angulares de todos os seus pontos. Lembrando que a velocidade de um ponto sob rotação pura pode ser calculada por $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$, o momento angular baricêntrico vale:

$$\vec{H}_G = \sum_{i=0}^a \left(\vec{r}_i \wedge (m_i \cdot \vec{v}_i) \right) = \sum_{i=0}^a \left(m_i \cdot \vec{r}_i \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i) \right) = \sum_{i=0}^a (m_i \omega_i r_i^2)$$

Lembrando que o momento de inércia baricêntrico de um corpo vale $I_{zG} = \sum_{i=0}^a (m_i \cdot r_i^2)$ e que a

velocidade angular ω_i é igual para todos os pontos do corpo, o momento angular baricêntrico de um corpo pode ser resumido como:

$$\vec{H}_G = I_{zG} \cdot \vec{\omega}$$

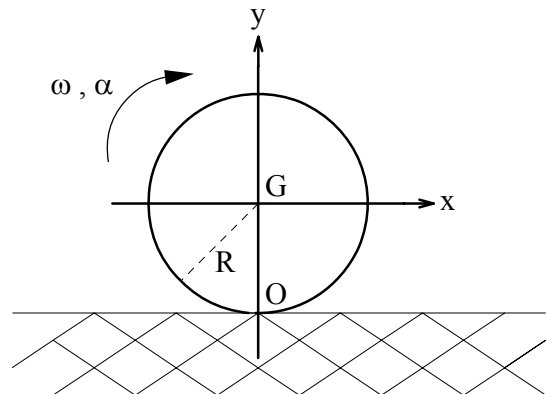
Portanto, por ser o momento do mesmo corpo igual à derivada de H_G ($\vec{M}_G = \dot{\vec{H}}_G$), o momento sobre G pode ser relacionado à aceleração angular do corpo:

$$\vec{M}_G = I_{zG} \cdot \vec{\alpha}$$

Se a rotação se desenvolver em torno de outro ponto (CIR), será necessária uma translação de eixos ($I_{zO} = I_{zG} + m \cdot R^2$) e a fórmula mantém a relação entre seus termos para este ponto:

$$\vec{H}_O = I_{zO} \cdot \vec{\omega}$$

$$\vec{M}_O = I_{zO} \cdot \vec{\alpha}$$

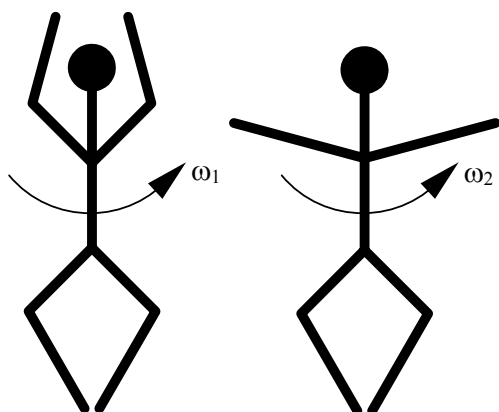


Tal como o movimento de rotação de um ponto (órbita terrestre), na ausência de momentos externos, a velocidade angular deverá compensar as variações do momento de inércia do corpo, conservando o momento angular durante todo o movimento ($M_{ext} = 0 \Rightarrow H = cte$), portanto corpos com maior momento de inércia desenvolverão menor aceleração angular e vice-versa, para um mesmo momento atuante (ou produzido pela resultante).

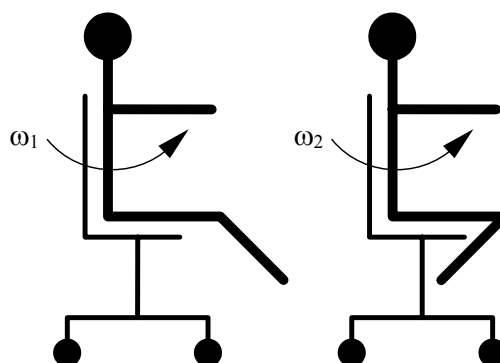
Dois exemplos da conservação do momento angular no movimento de um corpo são:

- Uma bailarina que gira em torno de si mesma com momento angular constante, aumentando sua velocidade angular quando aproxima os braços do corpo e diminuindo-a quando os abre.
- O segundo exemplo pode ser experimentado em uma cadeira com rodinhas: é possível “controlar” a velocidade de giro da cadeira, diminuindo a rotação ao esticar as pernas (maior momento de inércia) e aumentando a velocidade ao dobrá-las (menor momento de inércia).

$$I_1 < I_2 \Leftrightarrow \omega_1 > \omega_2$$



$$I_1 > I_2 \Leftrightarrow \omega_1 < \omega_2$$



O TMA está para a rotação assim como o TMB está para a translação e ambos se complementam na resolução de problemas: o TMA calcula o momento e o TMB as componentes da força resultante.

É possível reescrever as três equações de equilíbrio da Estática, agora adaptadas à Dinâmica:

Estática

$$R_x = 0$$

$$R_y = 0$$

$$M_G = 0$$

Dinâmica

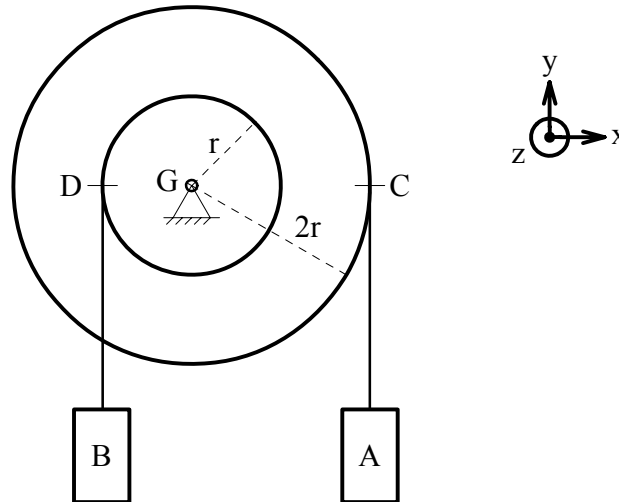
$$\left. \begin{array}{l} R_x = m \cdot a_{Gx} \\ R_y = m \cdot a_{Gy} \end{array} \right\} \text{ TMB}$$

$$M_G = I_G \cdot \alpha \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} R_x = m \cdot a_{Gx} \\ R_y = m \cdot a_{Gy} \end{array}} \right\} \text{ TMA}$$

A tabela a seguir apresenta a comparação entre as grandezas da translação e da rotação:

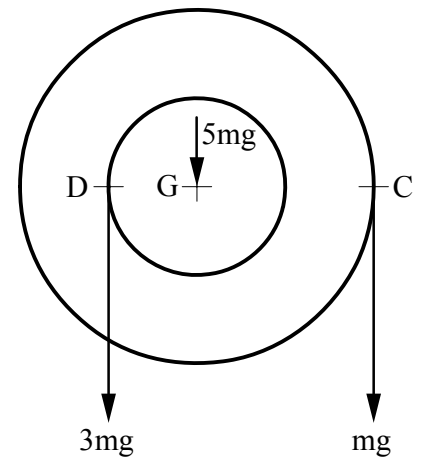
Translação		Rotação	
Aceleração	$a = \frac{dv}{dt}$	Aceleração Angular	$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$
Inércia	m	Momento de Inércia	I
Quantidade de Movimento	$L = m \cdot v$	Momento Angular	$H = I \cdot \omega$
Força	$F = \frac{dL}{dt} = m \cdot \frac{dv}{dt} = m \cdot a$	Momento (Torque)	$M = \frac{dH}{dt} = I \cdot \frac{d\omega}{dt} = I \cdot \alpha$
Energia Cinética	$E_{cin} = \frac{m \cdot v^2}{2}$	Energia Cinética	$E_{cin} = \frac{I \cdot \omega^2}{2}$
Trabalho	$\tau = F \cdot s$	Trabalho	$\tau = M \cdot \theta$
Potência	$W = F \cdot \frac{ds}{dt} = F \cdot v$	Potência	$W = M \cdot \frac{d\theta}{dt} = M \cdot \omega$
Teorema do Movimento do Baricentro (TMB)		Teorema do Momento Angular (TMA)	

Exemplo: A polia dupla possui massa $5m$ e raio de giração $\frac{3r}{2}$. Sobre ela, penduram-se dois corpos A e B, respectivamente de massas m e $3m$, nos pontos C e D conforme a figura. O conjunto é solto do repouso. Qual a aceleração angular da polia e quais as acelerações dos corpos A e B:



Sentido do giro:

$$\begin{aligned}\vec{M}_G &= r_A \vec{i} \wedge (-m_A g \vec{j}) - r_B \vec{i} \wedge (-m_B g \vec{j}) \\ \vec{M}_G &= 2r \vec{i} \wedge (-m g \vec{j}) - r \vec{i} \wedge (-3m g \vec{j}) \\ \vec{M}_G &= -2m g r \vec{k} + 3m g r \vec{k} \Rightarrow \vec{M}_G = m g r \vec{k}\end{aligned}$$



Portanto, a rotação desenvolvida será anti-horária ($+\vec{k}$).

$$I_{z\text{polia}} = m \cdot k^2 \Rightarrow I_{z\text{polia}} = 5m \cdot \left(\frac{3r}{2}\right)^2 \Rightarrow I_{z\text{polia}} = 5m \cdot \frac{9r^2}{4} \Rightarrow I_{z\text{polia}} = \frac{45mr^2}{4}$$

$$I_{zG} = I_{z\text{polia}} + m_A \cdot r_A^2 + m_B \cdot r_B^2 \Rightarrow I_{zG} = \frac{45mr^2}{4} + m \cdot (2r)^2 + 3m \cdot r^2$$

$$I_{zG} = \frac{45mr^2}{4} + 4mr^2 + 3mr^2 \Rightarrow I_{zG} = \frac{73mr^2}{4}$$

$$\vec{M}_G = I_{zG} \cdot \vec{\alpha} \Rightarrow m g r \vec{k} = \frac{73mr^2}{4} \cdot \vec{\alpha} \Rightarrow \vec{\alpha} = \frac{4m g r}{73mr^2} \Rightarrow \vec{\alpha} = \frac{4g}{73r} \vec{k}$$

$$\vec{a}_C = \vec{a}_G + \vec{\alpha} \wedge (\vec{C} - \vec{G}) + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge (\vec{C} - \vec{G})) \Rightarrow \vec{a}_C = 0 + \frac{4g}{73r} \vec{k} \wedge 2r \vec{i} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge 2r \vec{i})$$

$$\vec{a}_C = \frac{8g}{73} \vec{j} - 2\omega^2 r \vec{i}$$

$$\vec{a}_D = \vec{a}_G + \vec{\alpha} \wedge (D - G) + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge (D - G)) \Rightarrow \vec{a}_C = 0 + \frac{4g}{73r} \vec{k} \wedge (-r \vec{i}) + \vec{\omega} \vec{k} \wedge (\vec{\omega} \vec{k} \wedge (-r \vec{i}))$$

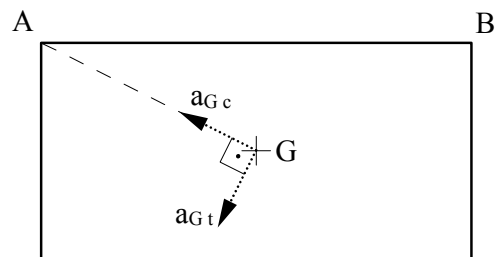
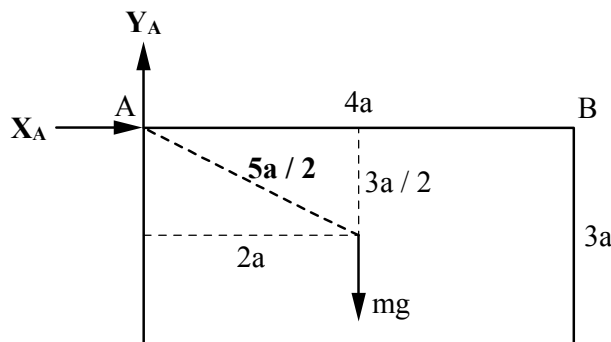
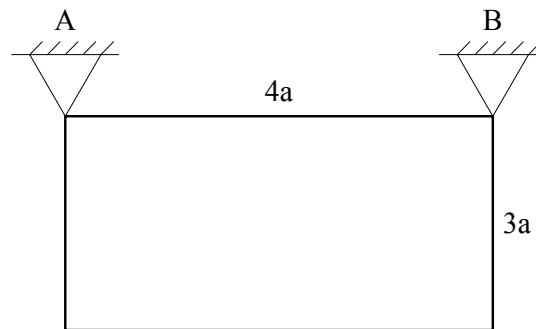
$$\vec{a}_D = -\frac{4g}{73} \vec{j} + 2\omega^2 r \vec{i}$$

Os corpos A e B desenvolvem movimentos apenas de translação vertical, portanto, apenas possuem esta parcela de aceleração tangencial ($\pm \vec{j}$) dos pontos C e D.

$$\vec{a}_A = \vec{a}_C \cdot \vec{j} = \frac{8g}{73} \vec{j}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_D \cdot \vec{j} = -\frac{4g}{73} \vec{j}$$

Exemplo: A placa retangular de massa m é sustentada por dois apoios fixos em A e B. Em determinado instante, o apoio B se rompe. Qual a aceleração angular sofrida pela placa e quais as reações no apoio A imediatamente após o rompimento de B?



$$J_{ZA} = J_{ZG} + m \cdot d_{AG}^2 \Rightarrow J_{ZA} = \frac{m \cdot ((4a)^2 + (3a)^2)}{12} + m \cdot \left(\frac{5a}{2}\right)^2$$

$$J_{ZA} = \frac{m \cdot (16a^2 + 9a^2)}{12} + \frac{25ma^2}{4} \Rightarrow J_{ZA} = \frac{25ma^2}{12} + \frac{25ma^2}{4} \Rightarrow J_{ZA} = \frac{25ma^2}{3}$$

$$\vec{M}_A = J_{ZA} \cdot \vec{\alpha} \Rightarrow -mg \cdot 2a \vec{k} = \frac{25ma^2}{3} \cdot \vec{\alpha} \vec{k} \Rightarrow \alpha = -\frac{6mga}{25ma^2} \Rightarrow \alpha = -\frac{6g}{25a} \Rightarrow \vec{\alpha} = -\frac{6g}{25a} \vec{k}$$

$$\vec{a}_G = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \wedge (G - A) + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge (G - A))$$

$$\vec{a}_G = 0 - \frac{6g}{25a} \vec{k} \wedge \left(2a \vec{i} - \frac{3a}{2} \vec{j}\right) + \vec{\omega} \vec{k} \wedge \left(\vec{\omega} \vec{k} \wedge \left(2a \vec{i} - \frac{3a}{2} \vec{j}\right)\right)$$

$$\vec{a}_G = -\frac{12g}{25}\vec{j} - \frac{9g}{25}\vec{i} + \omega^2 a \left(-2\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j} \right)$$

Como o instante considerado é imediatamente após o rompimento de B ($t = 0$), a velocidade angular ainda é nula ($\omega = 0$) e o termo $\omega^2 a \left(-2\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j} \right)$ (da aceleração centrípeta) será nulo:

$$\vec{a}_G = -\frac{9g}{25}\vec{i} - \frac{12g}{25}\vec{j}$$

$$R_{xG} = m \cdot a_{Gx} \Rightarrow X_A = m \cdot \left(-\frac{9g}{25} \right) \Rightarrow X_A = -\frac{9mg}{25}$$

$$R_{yG} = m \cdot a_{Gy} \Rightarrow Y_A - mg = m \cdot \left(-\frac{12g}{25} \right) \Rightarrow Y_A = -\frac{12mg}{25} + mg \Rightarrow Y_A = \frac{13mg}{25}$$

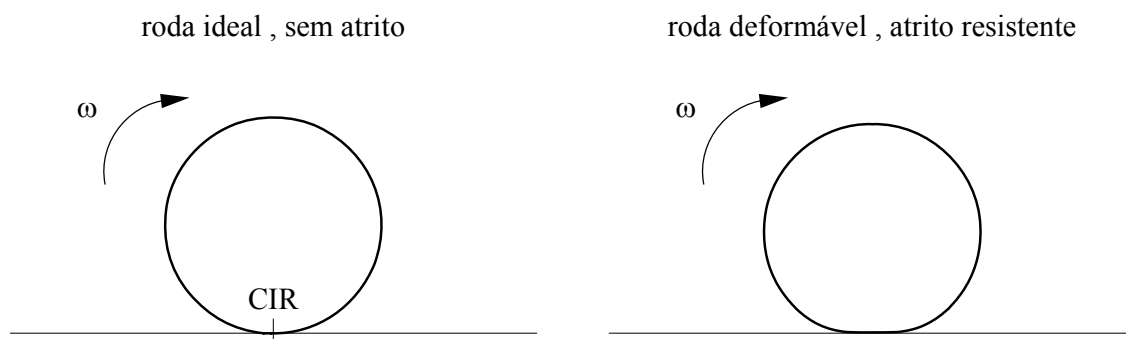
\Rightarrow **EXERCÍCIOS 4.3 , 4.4 , 4.5 , 4.6 , 4.7 e 4.8**

4.7. Rolamento x Escorregamento

O rolamento de um corpo só é possível devido à presença de uma força de atrito estático no contato, provocando velocidade instantânea nula ($\vec{v}_{CIR} = 0$), aderência do corpo à superfície e impulso do mesmo para frente, ao invés de permanecer “patinando” em rotação no mesmo lugar.

A vantagem da roda como sistema de transporte é consequência de suas características particulares, que tornam muito mais fácil a movimentação de cargas sobre elas do que simplesmente arrastadas. Numa roda ideal (perfeitamente circular, indeformável e de giro não-excêntrico), o atrito com a superfície de rolagem é mínimo, pois apenas um único ponto entra em contato com a superfície.

Porém, as imperfeições geométricas da roda e as excentricidades dos apoios (eixos de transmissão de forças e torque), além da deformação inevitável (quando a roda se apóia na superfície, ambas sofrem deformação), diminuem a eficiência das forças no transporte.



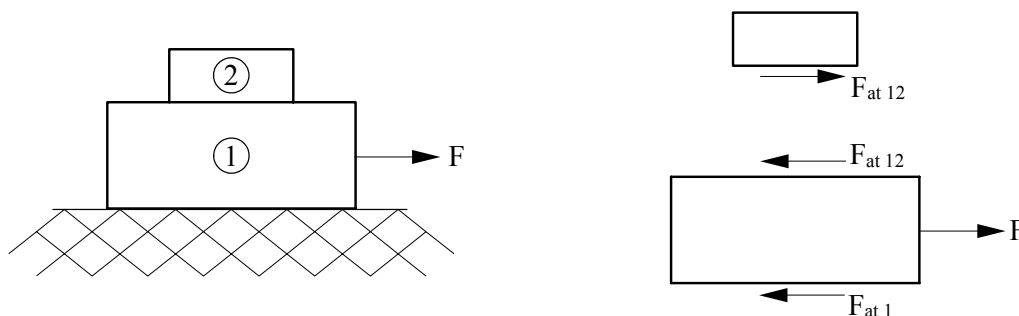
Todas as considerações deste tópico se aplicam a qualquer corpo circular (esferas, anéis, cilindros, etc) em rotação sobre uma superfície, adaptadas conforme o momento de inércia do corpo.

A definição mais precisa do atrito descreve-o como uma força de oposição ao movimento relativo (ou tendência de movimento) no contato entre corpos ou entre o corpo e a superfície que o apóia.

Como demonstrado no exemplo do atrito entre dois blocos, os corpos estavam submetidos apenas a uma força que tentava arrastá-los.

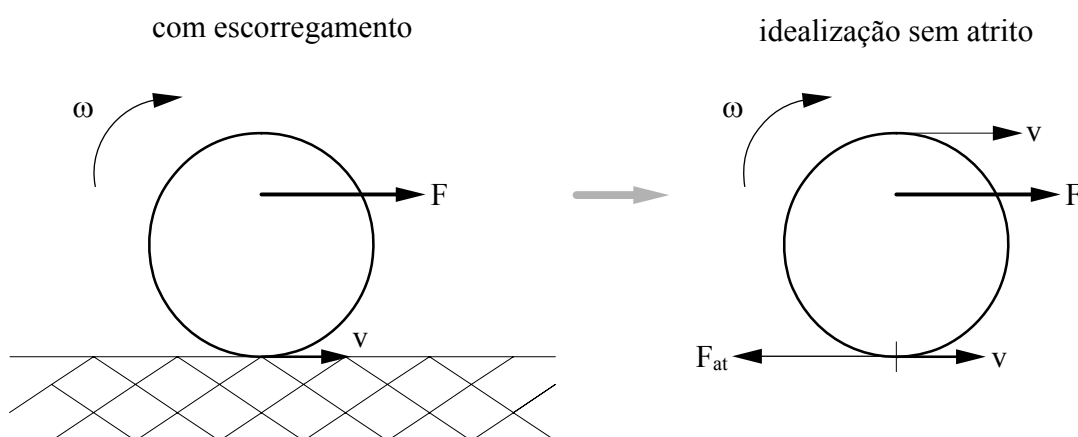
O procedimento adotado para determinar os movimentos relativos nos contatos (e impedidos pelo atrito estático) consistia na idealização do problema nas mesmas condições, porém subtraído o efeito do atrito (imaginar as superfícies de contato como perfeitamente lisas).

O movimento “livre” (sem atrito) indica o sentido do movimento relativo e, conseqüentemente, o sentido oposto para o atrito na situação real (com atrito).

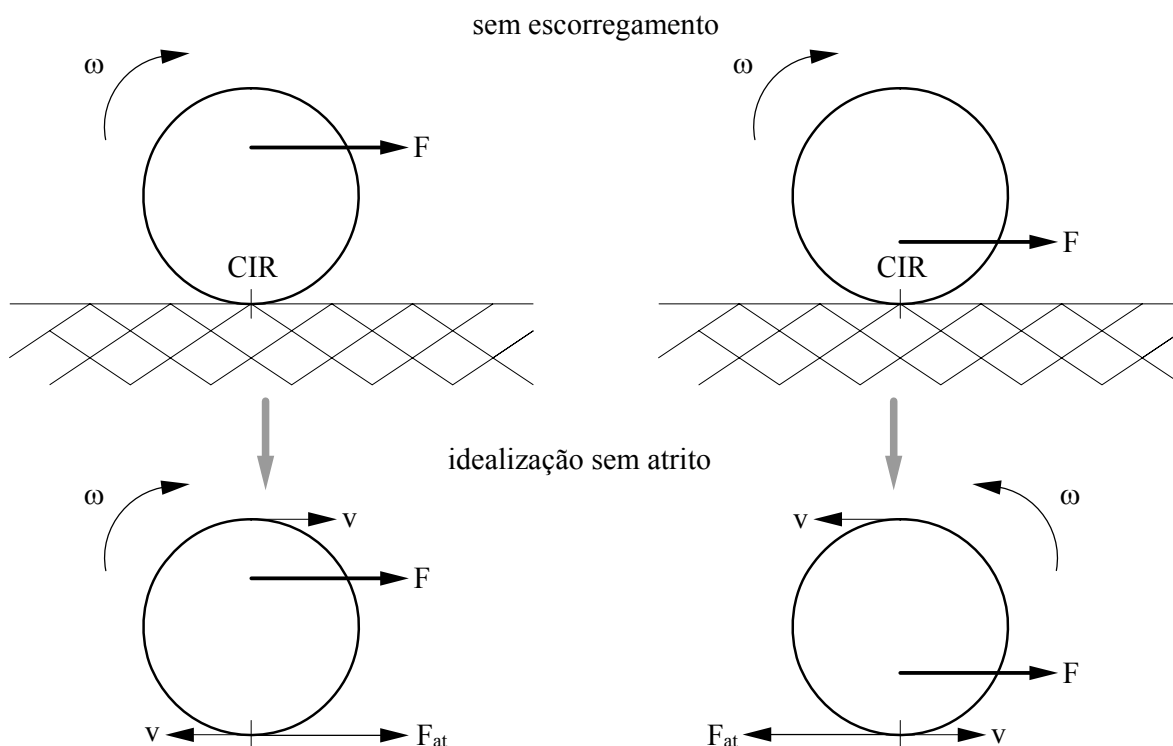


Em alguns casos (como no bloco 2 do exemplo), o atrito não é resistente, podendo servir como força motriz, ou seja, que “auxilia” o movimento na direção da força externa aplicada.

Se o corpo apresentar escorregamento, mesmo com rotação, o atrito já sofreu transição de estático para cinético (constante, $F_{at} = \mu_c \cdot N$) e o sentido do atrito será contrário ao movimento de escorregamento no contato; não haverá CIR neste contato, pois a velocidade deste ponto não será nula e as acelerações do baricentro e angular do disco não serão diretamente proporcionais entre si ($a_G \neq -r \alpha$).



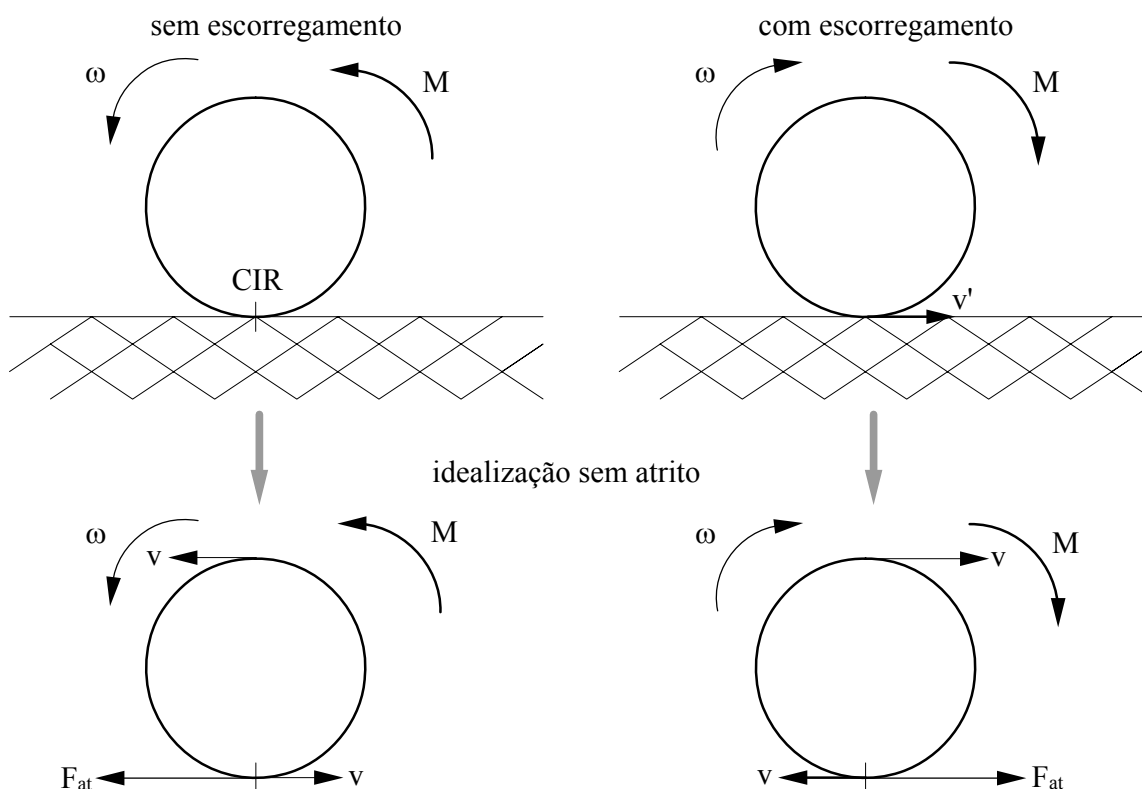
Enquanto a determinação do atrito cinético no escorregamento é simples, o rolamento sem escorregamento (e conseqüentemente sob atrito estático, $F_{at} \leq \mu_e \cdot N$) sofre influência da combinação de outros parâmetros, como o peso do corpo, o coeficiente de atrito, a força aplicada e a altura do ponto de aplicação ao CIR, sendo que o valor deste último pode alterar o sentido do atrito.



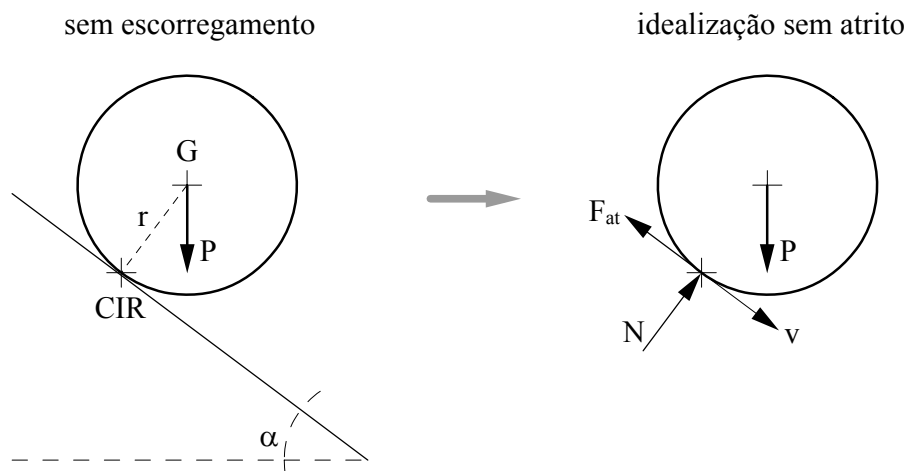
Contrariamente à intuição, a transição entre os dois sentidos de rotação (e do sentido do atrito estático) não ocorre no centro da roda; é função do momento de inércia do corpo circular.

Condições fornecidas pelo enunciado podem simplificar a análise do atrito ao impor condições que estabelecem incontestavelmente o sentido e o valor desta força:

- a)** Binário puro sem resultante: a rotação (na idealização sem atrito) se desenvolverá no mesmo sentido do giro do momento e o atrito será oposto à velocidade tangencial do ponto de contato.



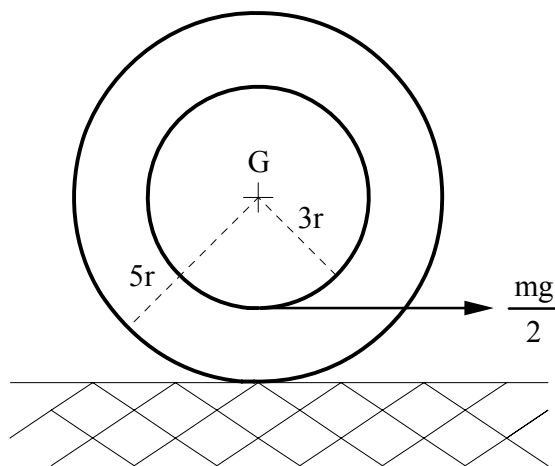
- b) Corpos em planos inclinados apenas sob ação de seus pesos próprios: o atrito será sempre oposto ao movimento de descida do corpo. É dependente de uma imposição de escorregamento ou não do enunciado para determinar se o atrito será cinético ou estático.



- c) Problema enunciado “com escorregamento” ou “sem escorregamento”: pode-se aplicar este dado diretamente na resolução, sem a necessidade de uma análise dinâmica para calcular o atrito, adotando todas as hipóteses inerentes a cada situação:
- c.1. **Sem escorregamento:** atrito estático, presença de CIR e aplicação do TMA no CIR (o que possibilita evitar o cálculo do atrito)
 - c.2. **Com escorregamento:** atrito cinético de valor constante ($\mu_c N$) e sentido oposto ao escorregamento, ausência de CIR e aplicação do TMA no baricentro do corpo.

Exemplo: O disco de massa m e raio de giração $4r$ é puxado por uma força através de um fio, enrolado como em um carretel, conforme a figura. Pede-se:

- a) Supondo rolamento sem escorregamento, qual a aceleração angular do disco e qual a aceleração de seu baricentro?
- b) Supondo rolamento com escorregamento, qual a aceleração angular do disco e qual a aceleração de seu baricentro? (Adotar coeficiente de atrito cinético igual a $1/4$)



- a) Na situação sem escorregamento, o ponto de contato (ponto O) é CIR do movimento e, portanto, o atrito é estático ($0 \leq F_{\text{at}} \leq F_{\text{at,est,máx}}$). Porém, por ser uma situação de TMA não baricêntrico, seu valor não precisa ser determinado (pois não produzirá momento em relação ao ponto O) e pode ser adotado como qualquer um dos dois sentidos.

Outra consequência da ausência de escorregamento é a relação direta entre a aceleração do baricentro e a aceleração angular ($a_G = -5r\alpha$).

$$I_{ZO} = I_{ZG} + m \cdot d_{OG}^2 \Rightarrow I_{ZO} = m \cdot k^2 + m \cdot R^2$$

$$I_{ZO} = m \cdot (4r)^2 + m \cdot (5r)^2 \Rightarrow I_{ZO} = 16mr^2 + 25mr^2$$

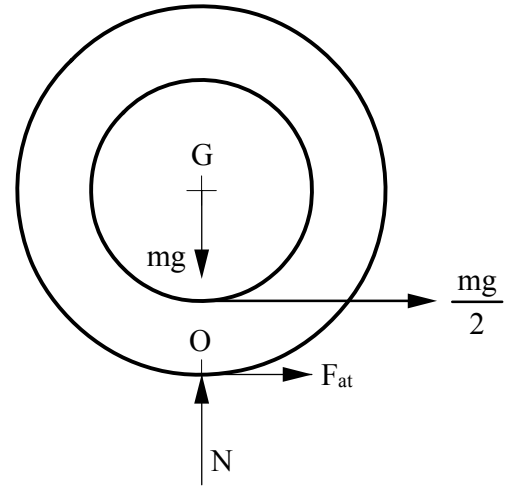
$$I_{ZO} = 41mr^2$$

$$M_O = I_{ZO} \cdot \alpha \Rightarrow -\frac{mg}{2} \cdot 2r = 41mr^2 \cdot \alpha$$

$$-mgr = 41mr^2\alpha \Rightarrow \alpha = -\frac{mgr}{41mr^2}$$

$$\alpha = -\frac{g}{41r} \Rightarrow \vec{\alpha} = -\frac{g}{41r} \vec{k}$$

$$a_G = -5r \cdot \alpha \Rightarrow a_G = -5r \cdot \left(-\frac{g}{41r}\right) \Rightarrow a_G = \frac{5g}{41} \Rightarrow \vec{a}_G = \frac{5g}{41} \vec{k}$$



- b) Na situação com escorregamento, o ponto de contato não é CIR do movimento e, portanto, o atrito é cinético, com valor constante $F_{\text{at}} = \mu_c N$. O sentido do atrito será contrário ao sentido do escorregamento, que ocorre no sentido $+\vec{i}$ (mesma direção da força externa), portanto, o atrito terá sentido $-\vec{i}$.

É uma situação de TMA baricêntrico, portanto, todos os momentos deverão se referir ao baricentro. Porém, na presença de escorregamento, a relação entre a aceleração do baricentro e a aceleração angular não pode ser determinada diretamente ($a_G \neq -5r\alpha$), devendo aplicar o TMB para o cálculo da aceleração a_G .

$$I_{ZG} = m \cdot k^2 \Rightarrow I_{ZO} = m \cdot (4r)^2 \Rightarrow I_{ZO} = 16mr^2$$

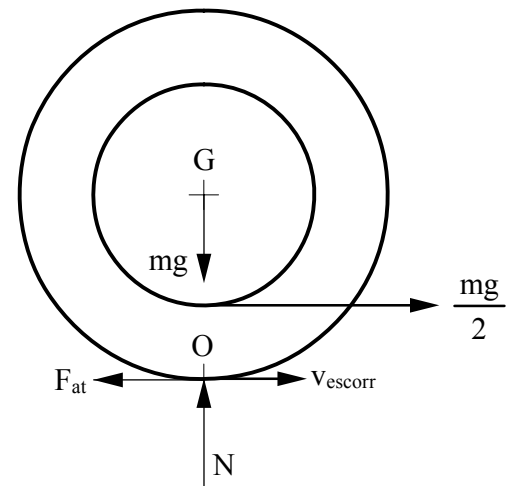
$$R_{yG} = m \cdot a_{Gy} \Rightarrow R_{yG} = 0 \Rightarrow -mg + N = 0 \Rightarrow N = mg$$

$$F_{\text{at}} = \mu_c \cdot N = \frac{1}{4} \cdot mg = \frac{mg}{4}$$

$$R_x = m \cdot a_{Gx} \Rightarrow R_x = m \cdot a_G \Rightarrow \frac{mg}{2} - \frac{mg}{4} = m \cdot a_G$$

$$\frac{mg}{4} = m a_G \Rightarrow a_G = \frac{mg}{4m} \Rightarrow a_G = \frac{g}{4} \Rightarrow \vec{a}_G = \frac{g}{4} \vec{i}$$

$$M_G = I_{ZG} \cdot \alpha \Rightarrow \frac{mg}{2} \cdot 3r - F_{\text{at}} \cdot 5r = 16mr^2 \cdot \alpha$$



$$\frac{3mgr}{2} - \frac{mgr}{4} \cdot 5r = 16mr^2\alpha \Rightarrow \frac{3mgr}{2} - \frac{5mgr}{4} = 16mr^2\alpha$$

$$16mr^2\alpha = \frac{mgr}{4} \Rightarrow \alpha = \frac{mgr}{64mr^2} \Rightarrow \alpha = \frac{g}{64r} \Rightarrow \vec{\alpha} = \frac{g}{64r} \vec{k}$$

Como se pode observar no exemplo anterior, a aceleração do baricentro (a_G) de um mesmo corpo circular (disco, esfera, cilindro, anel, etc) será sempre maior na situação com escorregamento, porém sua aceleração angular (α) será menor, pois a menor aderência à superfície (no escorregamento) diminui a eficiência do giro.

⇒ **EXERCÍCIOS 4.9 e 4.10**

4.8. Teorema da Energia Cinética

O trabalho de uma força é o efeito produzido por ela (ou uma de suas componentes cartesianas) ao longo do deslocamento de um corpo, alterando sua energia mecânica.

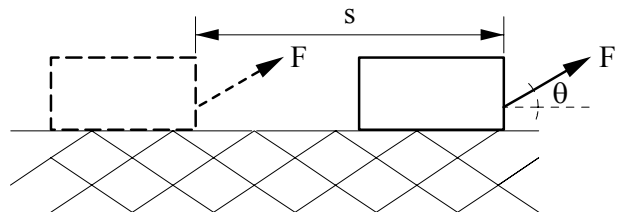
Para que uma força produza trabalho é necessário que haja movimento, com deslocamento na direção desta força ou de uma de suas componentes cartesianas.

Conclui-se que a força de atrito estático não gera trabalho, mesmo que seja o atrito no CIR de um movimento de rolamento sem escorregamento; o mesmo trabalho nulo ocorre na força normal (de contato entre corpos ou entre o corpo e a superfície de apoio), por ser uma força perpendicular ao deslocamento.

Forças internas geram trabalho nulo, pois o trabalho da ação é anulado pelo trabalho da reação.

O trabalho é calculado pelo produto escalar entre força e deslocamento:

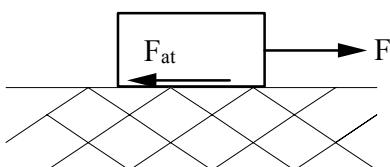
$$\tau = \vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos \theta$$



Embora o deslocamento represente a trajetória nem sempre retilínea do movimento, a relação de produto escalar é válida pois o trabalho é uma grandeza escalar e a relação de paralelismo entre força e deslocamento para geração de trabalho se mantém correta.

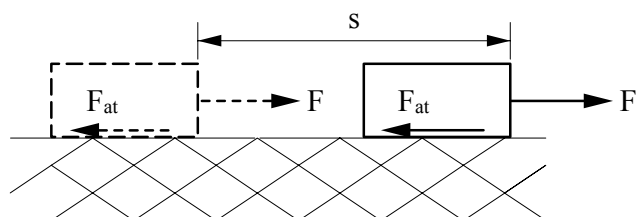
$$\tau = 0$$

em repouso (atrito estático)

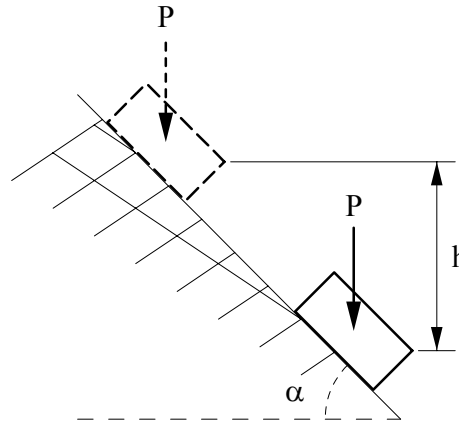


$$\tau = \vec{F} \cdot \vec{s} - \vec{F}_{at} \cdot \vec{s} = (F - F_{at}) \cdot s$$

em movimento (atrito cinético)

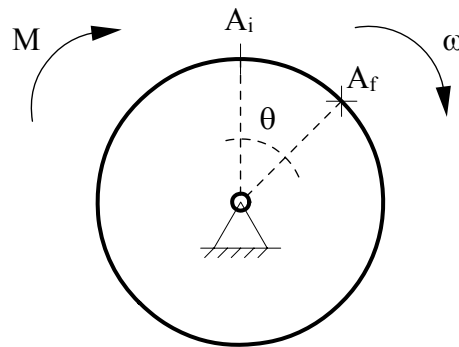


$$\tau = \vec{P} \bullet \vec{s} = P \cdot \sin\alpha \cdot h$$



Momentos (ou binários) aplicados diretamente sobre um corpo também podem gerar trabalho, desde que sejam acompanhados de rotação em um eixo paralelo ao do binário. Se a rotação e o momento não ocorrerem simultaneamente e com a mesma direção, não produzirão trabalho.

$$\tau = |\mathbf{M}| \cdot \theta$$



O trabalho acrescenta (força motriz) ou reduz (força resistente) a energia do sistema, alterando sua velocidade, rotação e/ou posição, sendo mensurados (energia e trabalho) em Joules ($J = N \cdot m$). A taxa de variação temporal (ou derivada) da energia é conhecida como potência $\left(W = \frac{dE}{dt} \right)$.

Uma força é conservativa quando seu trabalho independe da trajetória percorrida entre os pontos inicial e final, sendo afetado apenas pela diferença entre as coordenadas inicial e final.

As posições inicial e final destas forças possuem uma forma de energia denominada energia potencial, que se conserva quando os pontos inicial e final coincidem (ou seja, quando o movimento descreve uma trajetória fechada).

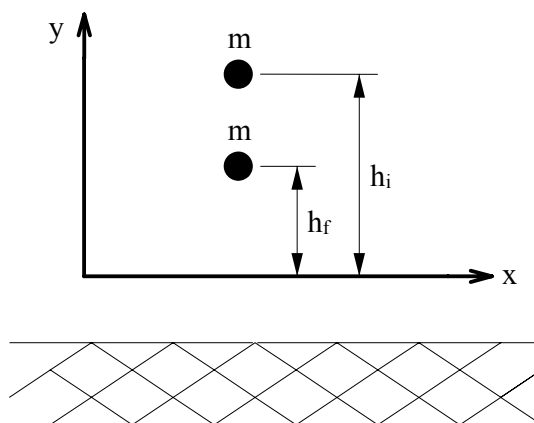
Dois exemplos comuns de forças conservativas são o peso dos corpos e a força elástica de uma mola. Ambos se referem sempre a origens arbitradas, pois a energia potencial que representam é função da posição do elemento (altura do corpo ou distensão da mola). Porém, o trabalho depende somente da variação entre posição final e inicial, medidas a partir da mesma origem fixa.

- a) **Peso dos corpos:** aponta sempre verticalmente para baixo. Soltos em queda livre a uma determinada altura, os corpos cairão na mesma direção e sentido da força peso, portanto seu trabalho é positivo, com origem orientada pelo eixo x horizontal (paralelo ao chão) e pelo eixo y vertical.

$$P = m \cdot g$$

$$\tau = m \cdot g \cdot (h_i - h_f) = m g \Delta h$$

$$E_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot h$$

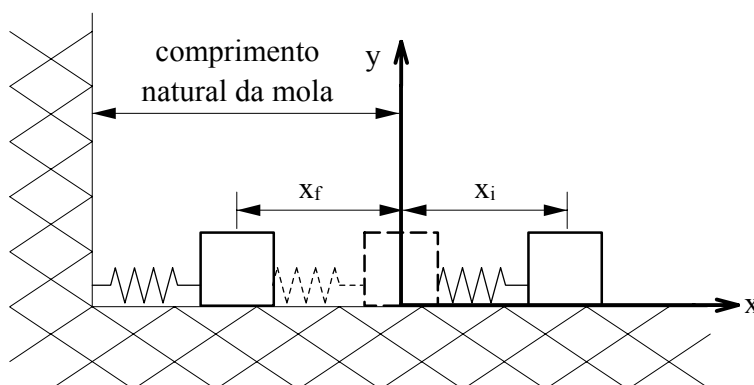


- b) Força elástica de uma mola: sua origem é usualmente adotada na posição de comprimento natural da mola, onde ela não está alongada ou comprimida; seu parâmetro k é a constante elástica da mola (medida em N / m). A força elástica e o trabalho são funções da posição x da mola, o que leva ao trabalho na forma de uma integral, em lugar do produto simples $\tau = F \cdot x$.

$$F = k \cdot x$$

$$\tau = \int F \cdot x = \frac{k \cdot (x_i^2 - x_f^2)}{2}$$

$$E_{\text{pot}} = \frac{k \cdot x^2}{2}$$



Todas as demais forças, onde a trajetória do movimento influi sobre o trabalho gerado, são forças não conservativas. Estas forças geram energia cinética de translação e/ou rotação, que aumenta na mesma proporção em que diminuem as energias potenciais do sistema (e vice-versa).

A energia cinética total é compartilhada entre os movimentos de translação e de rotação, cuja expressão é igual a:

$$E_{\text{cin}} = \underbrace{\frac{m \cdot v_G^2}{2}}_{\text{translação}} + \underbrace{\frac{I_G \cdot \omega^2}{2}}_{\text{rotação}}$$

Uma forma mais compacta de representação da energia cinética de translação + rotação é obtida pela translação do momento de inércia do baricentro para o CIR, onde não há velocidade de translação (instantaneamente, $\vec{v} = 0$) e a mesma energia cinética total do corpo se apresenta apenas como energia de rotação. Esta fórmula só é válida em movimentos onde exista CIR (por exemplo, no rolamento sem escorregamento), ou seja, apenas na ocorrência de atrito estático no contato:

$$E_{\text{cin}} = \frac{m \cdot v_G^2}{2} + \frac{I_G \cdot \omega^2}{2} = \frac{I_{\text{CIR}} \cdot \omega^2}{2}$$

Pontos materiais não apresentam energia cinética de rotação em torno de si mesmos. Poderão, entretanto, apresentar momentos de inércia e energia de rotação se girarem em torno de outro ponto.

O Princípio da Conservação da Energia afirma que a energia nunca é criada ou destruída, apenas se transformando de um tipo para o outro: potencial para cinética, mecânica para térmica e sonora, etc.

O Teorema da Conservação da Energia baseia-se neste Princípio e afirma que a energia mecânica inicial (potencial e cinética) de um sistema é igual à energia final, exceto na presença de trabalho de forças ou momentos externos aplicados sobre o sistema:

$$E_{\text{cin } i} + E_{\text{pot } i} + \tau_{\text{ext}} = E_{\text{cin } f} + E_{\text{pot } f}$$

A expressão completa do Teorema da Conservação da Energia (TCE) é:

$$\frac{m \cdot v_{Gi}^2}{2} + \frac{I_G \cdot \omega_i^2}{2} + m \cdot g \cdot h_i + \frac{k \cdot x_i^2}{2} + F \cdot s + M \cdot \theta = \frac{m \cdot v_{Gf}^2}{2} + \frac{I_G \cdot \omega_f^2}{2} + m \cdot g \cdot h_f + \frac{k \cdot x_f^2}{2}$$

O Teorema da Energia Cinética (TEC) é similar ao TCE, porém se concentra apenas na variação da energia cinética, causada pelo trabalho da resultante das forças externas.

Suas aplicações são praticamente idênticas e geralmente indiferentes, porém o TEC é vantajoso quando a resultante e o deslocamento possuem direção conhecida e seu produto é simples.

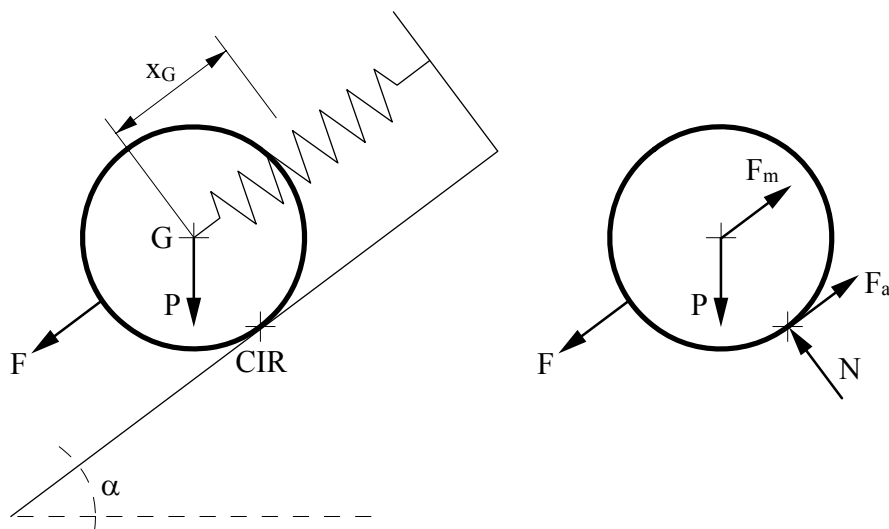
É um pouco mais simples ao tratar indiferentemente forças conservativas e não conservativas, agregadas na resultante. Para adaptar o trabalho da força elástica (por ser uma integral) à expressão do TEC, a posição x deve ser considerada pela metade de seu valor para a força da mola:

$$E_{\text{cin } i} + \tau_R = E_{\text{cin } f}$$

$$\frac{m \cdot v_{Gi}^2}{2} + \frac{I_G \cdot \omega_i^2}{2} + (F - k \cdot \frac{x}{2} + P \cdot \text{sen}\alpha) \cdot x + M \cdot \theta = \frac{m \cdot v_{Gf}^2}{2} + \frac{I_G \cdot \omega_f^2}{2}$$

Se o corpo partir do repouso, sem o trabalho de momentos, sem escorregamento (atrito estático), com relaxamento da mola e o momento de inércia for transladado para o CIR, a expressão anterior se reduz para a seguinte forma:

$$(F - \frac{k x_G}{2} + m g \text{sen}\alpha) x_G = \frac{I_{\text{CIR}} \omega^2}{2}$$



Como se pode notar pelas equações anteriores, o sentido das velocidades e acelerações (lineares ou angulares) não é determinado diretamente pelo TEC, pois as velocidades são elevadas ao quadrado (tornando-se positivas), com perda do sentido dos vetores. Apenas sua intensidade em módulo será conhecida, obrigando ao acréscimo posterior do sentido.

Este teorema é particularmente eficiente quando não há presença de forças externas (apenas conversão de energia cinética em potencial e vice-versa) e sem escorregamento no contato da rotação, porém estas condições podem ser incluídas na forma de trabalhos externos.

As velocidades do baricentro (v_G) e angular (ω) podem ser obtidas em função do deslocamento do baricentro (x_G). Para a determinação de forças que não geram trabalho (reações vinculares, forças de atrito estático e forças normais) ou da aceleração do baricentro (a_G) e a aceleração angular do corpo (α) é necessário recorrer ao TMA e/ou ao TMB.

A obtenção destas acelerações (ambas em função de x_G) exclusivamente pelo TEC só é aconselhável em movimentos planos simples, como o rolamento de discos ou o giro de barras, sem maior complexidade e sem escorregamento (presença de CIR no contato com a superfície).

O procedimento manipula a fórmula do TEC (por derivação) para calcular as acelerações a_G e α . Todas as grandezas das equações estarão representadas apenas em módulo, (a notação $|\cdot|$ será suprimida para maior clareza das expressões):

- a) Supondo um corpo circular em repouso inicial e sob ação de uma única força F (nesta explicação, $\vec{F} = F \vec{i}$), aplicar o TEC em relação ao CIR:

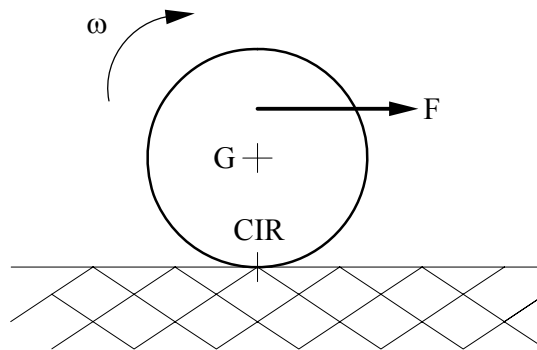
$$E_{\text{cin}} = \tau_R + E_{\text{fin}}$$

$$F \cdot x_G = \frac{m \cdot v_G^2}{2} + \frac{I_G \cdot \omega^2}{2}$$

$$F \cdot x_G = \frac{I_{\text{CIR}} \cdot \omega^2}{2}$$

$$F x_G = (1 + c) \cdot m \cdot R^2 \cdot \frac{\omega^2}{2}$$

$$F x_G = (1 + c) \frac{m R^2 \omega^2}{2}$$



Os momentos de inércia (I_{zG} e I_{zCIR}) anteriores referem-se aos momentos de inércia de corpos circulares genéricos, que sempre assumem as formas: $I_{zG} = c \cdot m \cdot R^2$ e $I_{zCIR} = (1 + c) \cdot m \cdot R^2$.

A variável “c” foi criada apenas para representar um “coeficiente numérico” do momento de inércia próprio da geometria de cada corpo ($1/2$ para discos, 1 para anéis, $2/5$ para esferas).

- b) Isolar o termo da velocidade angular, mantendo a potência ao quadrado:

$$\omega^2 = \frac{2 F x_G}{(1 + c) m R^2}$$

Se ω for desejada, basta efetuar a raiz quadrada. Se v_G for desejada, basta aplicar $v_G = -\omega R$.

$$\omega = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{2 F x_G}{(1+c)m}} \Rightarrow \vec{\omega} = -\frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{2 F x_G}{(1+c)m}} \vec{k} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_G = \sqrt{\frac{2 F x_G}{(1+c)m}} \vec{i}$$

O sentido de ω deve ser adotado pelas relações já conhecidas do rolamento: para o exemplo do disco que rola sem escorregar para a direita ($v_G \vec{i}$), a rotação deve ser horária ($-\omega \vec{k}$).

c) Derivar ω^2 e isolar $\dot{\omega}$:

$$2\omega \cdot \dot{\omega} = \frac{2 F v_G}{(1+c)m R^2} \Rightarrow \dot{\omega} = \alpha = \frac{F v_G}{(1+c)m R^2 \omega}$$

d) Aplicar a relação (em módulo, pois ω “perdeu o sinal” ao ser elevado ao quadrado) entre velocidades linear e angular do rolamento ($|v_G| = \omega R$):

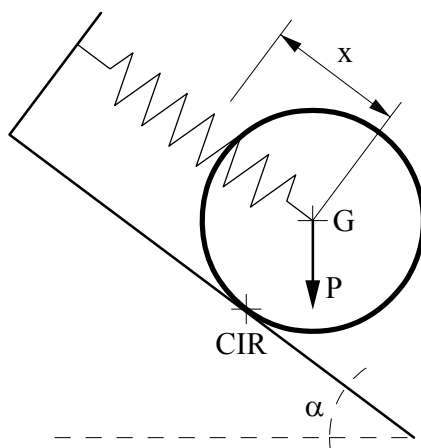
$$\alpha = \frac{F v_G}{(1+c)m R^2 \omega} \Rightarrow \alpha = \frac{F \omega R}{(1+c)m R^2 \omega} \Rightarrow \alpha = \frac{F}{(1+c)m R} \Rightarrow \vec{\alpha} = -\frac{F}{(1+c)m R} \vec{k}$$

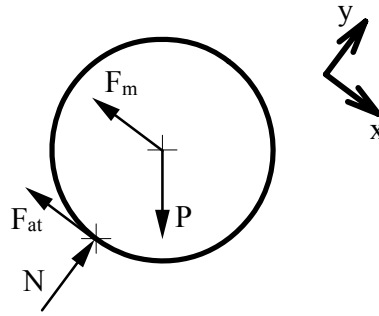
O sentido de α deve ser adotado de forma idêntica ao de ω : para o disco que rola sem escorregar para a direita ($a_G \vec{i}$), a aceleração angular também deve ser horária ($-\alpha \vec{k}$).

e) Aplicar a relação entre velocidades linear e angular do rolamento ($a_G = -\alpha R$):

$$a_G = \frac{F}{(1+c)m R} \cdot R \vec{i} = \frac{F}{(1+c)m} \vec{i}$$

Exemplo: Um disco de massa M e raio R tem seu centro G ligado a uma mola de constante K . O disco é solto do repouso sobre um plano inclinado, na posição $x_G = 0$, para a qual a força da mola é nula. Sabendo-se que não há escorregamento entre o disco e o plano, qual a velocidade e a aceleração do baricentro do disco em função da distância percorrida x_G ?





$$I_{zCIR} = I_{zG} + M \cdot R^2 \Rightarrow I_{zCIR} = \frac{MR^2}{2} + MR^2$$

$$I_{zCIR} = \frac{3MR^2}{2}$$

$$E_{cin i} + \tau_R = E_{cin f}$$

$$0 + (-F_m + P \cdot \text{sen}\alpha) \cdot x_G = \frac{m \cdot v_G^2}{2} + \frac{I_G \cdot \omega^2}{2} \Rightarrow \left(-K \cdot \frac{x_G}{2} + M g \text{sen}\alpha \right) x_G = \frac{I_{CIR} \cdot \omega^2}{2}$$

$$-\frac{K x_G^2}{2} + M g x_G \text{sen}\alpha = \frac{3MR^2}{2} \cdot \frac{\omega^2}{2} \Rightarrow \frac{3MR^2 \omega^2}{4} = -\frac{K x_G^2}{2} + M g x_G \text{sen}\alpha$$

$$\omega^2 = \frac{4}{3MR^2} \left(-\frac{K x_G^2}{2} + M g x_G \text{sen}\alpha \right)$$

O sentido de ω será negativo ($-\omega \vec{k}$) pois o movimento é uma descida e a rotação será horária:

$$\omega = \frac{2}{R} \sqrt{\frac{1}{3M} \left(-\frac{K x_G^2}{2} + M g x_G \text{sen}\alpha \right)} \Rightarrow \vec{\omega} = -\frac{2}{R} \sqrt{\frac{1}{3M} \left(-\frac{K x_G^2}{2} + M g x_G \text{sen}\alpha \right)} \vec{k}$$

Aplicando a relação entre velocidades linear e angular do rolamento ($v_G = -\omega R$):

$$\vec{v}_G = -\omega R \vec{i} \Rightarrow \vec{v}_G = \frac{2}{R} \sqrt{\frac{1}{3M} \left(-\frac{K x_G^2}{2} + M g x_G \text{sen}\alpha \right)} R \vec{i} \Rightarrow \vec{v}_G = 2 \sqrt{\frac{1}{3M} \left(-\frac{K x_G^2}{2} + M g x_G \text{sen}\alpha \right)} \vec{i}$$

$$\omega^2 = \frac{4}{3MR^2} \left(-\frac{K x_G^2}{2} + M g x_G \text{sen}\alpha \right) \Rightarrow 2\omega \dot{\omega} = \frac{4}{3MR^2} \left(-\frac{2K x_G v_G}{2} + M g v_G \text{sen}\alpha \right)$$

$$\dot{\omega} = \alpha = \frac{2}{3MR^2 \omega} (-K x_G v_G + M g v_G \text{sen}\alpha)$$

Aplicando a relação entre velocidades linear e angular do rolamento ($|v_G| = \omega R$):

$$\alpha = \frac{2}{3MR^2 \omega} (-K x_G \omega R + M g \omega R \text{sen}\alpha) \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3MR} (-K x_G + M g \text{sen}\alpha)$$

O sentido de α será negativo ($-\alpha \vec{k}$) pois a aceleração do baricentro possui sentido $+\vec{i}$:

$$\alpha = \frac{2}{3MR}(-K x_G + M g \sin\alpha) \Rightarrow \vec{\alpha} = -\frac{2}{3MR}(-K x_G + M g \sin\alpha)$$

Aplicando a relação entre velocidades linear e angular do rolamento ($a_G = -\alpha R$):

$$\vec{a}_G = \frac{2}{3MR}(-K x_G + M g \sin\alpha) \cdot R \vec{i} \Rightarrow \vec{a}_G = \frac{2}{3M}(-K x_G + M g \sin\alpha) \vec{i}$$

\Rightarrow **EXERCÍCIOS 4.11 , 4.12 , 4.13 e 4.14**

Mecânica Geral
Exercícios

Transferência USP

www.transferenciausp.com.br

ÍNDICE

CAPÍTULO 2: ESTATICA.....	2
2.3. Momentos	2
2.4. Redução de Sistemas de Forças	3
2.6. Vínculos	4
2.7. Diagrama de Corpo Livre	6
2.9. Equilíbrio do Baricentro.....	7
CAPÍTULO 3: CINEMÁTICA.....	9
3.4. Equações do Movimento.....	9
3.8. Composição de Referenciais.....	13
CAPÍTULO 4: DINÂMICA.....	18
4.4. Teorema do Movimento do Baricentro	18
4.6. Teorema do Momento Angular.....	19
4.7. Rolamento x Escorregamento	22
4.4. Teorema da Energia Cinética.....	23
ANEXO: PROVAS DE ANOS ANTERIORES	26
Prova de Transferência de 2002.....	26
Prova de Transferência de 2003	29
Prova de Transferência de 2004.....	32
Prova de Transferência de 2005.....	35
Prova de Transferência de 2006.....	38

CAPÍTULO 2: ESTATICA

2.3. Momentos

Exercício 2.1: Sobre a placa quadrada, de aresta L e espessura desprezível, estão aplicados um binário \vec{M} e as forças $(\vec{F}_1; D)$, $(\vec{F}_2; B)$ e $(\vec{P}; G)$. Pede-se:

- a) Calcular a resultante \vec{R} das forças e o momento \vec{M}_A sobre o ponto A:
- b) Calcular o momento \vec{M}_B sobre o ponto B:

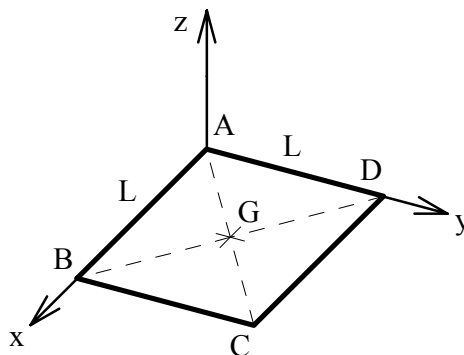
Resposta: $\vec{R} = -\frac{P}{2}\vec{j}$; $\vec{M}_A = \frac{PL}{2}\vec{j}$; $\vec{M}_B = \frac{PL}{2}\vec{j} + \frac{PL}{2}\vec{k}$

$$\vec{M} = \frac{PL}{2}\vec{j}$$

$$\vec{F}_1 = -\frac{P}{2}\vec{j} + \frac{P}{2}\vec{k}$$

$$\vec{F}_2 = \frac{P}{2}\vec{k}$$

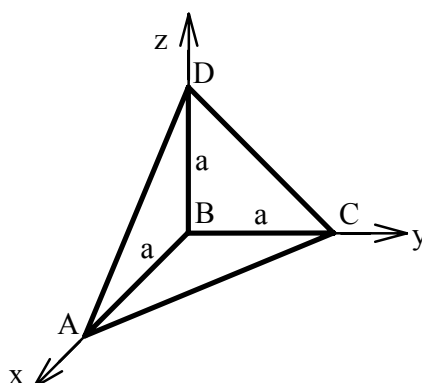
$$\vec{P} = -P\vec{k}$$



Exercício 2.2: A estrutura formada pelas barras AB, BC, BD, AC, AD e CD está submetida às forças $\vec{F}_1 = -F\vec{i}$ e $\vec{F}_2 = -F\vec{j}$, aplicadas em C e em A, e ao momento $\vec{M} = M\vec{k}$. Pede-se:

- a) Calcular a resultante deste sistema de forças:
- b) Calcular o momento do sistema em relação ao ponto B:
- c) Calcular o momento do sistema em relação ao ponto D:

Resposta: $\vec{R} = -F\vec{i} - F\vec{j}$; $\vec{M}_B = M\vec{k}$; $\vec{M}_D = -Fa\vec{i} + Fa\vec{j} + M\vec{k}$

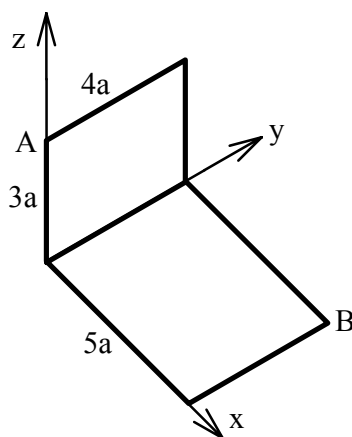


2.4. Redução de Sistemas de Forças

Exercício 2.3: A placa em L está submetida às forças $\vec{F}_1 = (p \vec{i} ; O)$, $\vec{F}_2 = (2p \vec{j} ; A)$ e $\vec{F}_3 = (2p \vec{k} ; B)$. Pede-se:

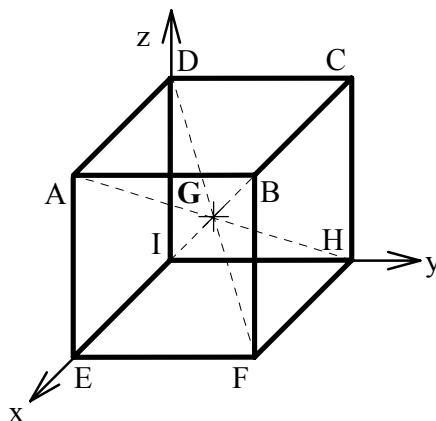
- Calcular a resultante \vec{R} ;
- Calcular o momento sobre o ponto O;
- Verificar se é possível reduzir o sistema a uma única força:

Resposta: $\vec{R} = p \vec{i} + 2p \vec{j} + 2p \vec{k}$; $\vec{M}_O = 2ap \vec{i} - 10ap \vec{j}$; Não é redutível ($I = -18ap^2$)



Exercício 2.4: O cubo de peso $\vec{P} = -2p \vec{k}$ e aresta “a” sofre ação das forças $\vec{F}_1 = 3p \vec{k}$ (aplicada no ponto H) e $\vec{F}_2 = -p \vec{i} - 2p \vec{j}$ (aplicada no ponto I) e do binário $\vec{M} = -3ap \vec{i} + 4ap \vec{j} + ap \vec{k}$. O sistema é redutível a uma única força?

Resposta: Não é redutível ($I = -18ap^2$)

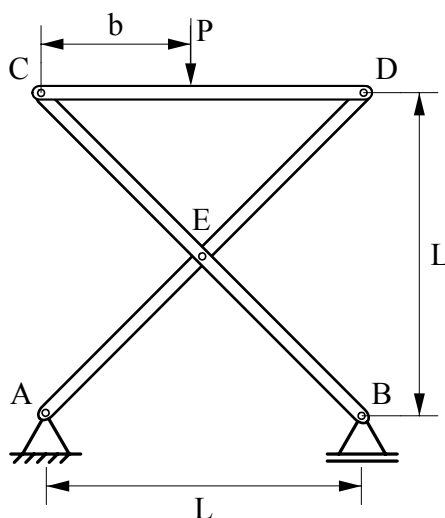


2.6. Vínculos

Exercício 2.5: O sistema de barras AD, DC e CB (de pesos desprezíveis) está unido pelas articulações em C, D e E. O sistema é vinculado externamente pelo apoio fixo em A e pelo apoio móvel em B. Aplica-se a força vertical P à barra CD, a uma distância b da articulação C. Pede-se:

- Calcular as reações vinculares em A e B;
- Qual o valor da distância b para que $Y_A = 4 Y_B$?

Resposta: $X_A = 0$; $Y_A = \frac{P(-b+a)}{a}$; $Y_B = \frac{Pb}{a}$

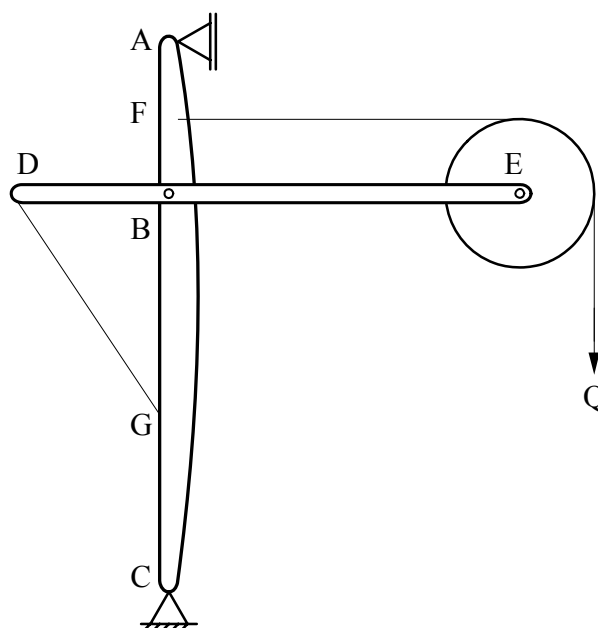


Exercício 2.6: Os elementos da estrutura têm peso desprezível e seus comprimentos são $AF = FB = 2L$; $BG = 6L$; $GC = 5L$; $DB = 4L$; $BE = 10L$. Sabendo-se que AFBGC e DBE são barras, DG é um fio, A é um apoio simples e B, C, E são articulações, calcular as reações vinculares:

Resposta: $X_A = -\frac{4Q}{5}$;

$X_C = \frac{4Q}{5}$;

$Y_C = Q$

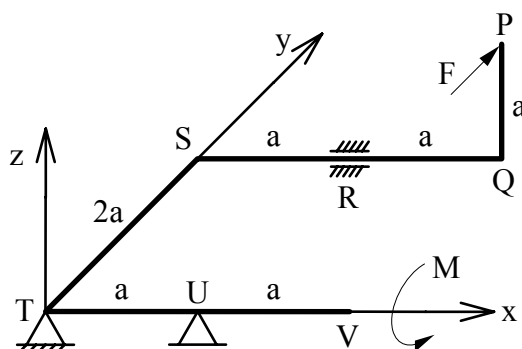


Exercício 2.7: A barra PQRSTUV é vinculada em R por um anel, em T por uma articulação (apoio fixo) e em U por um apoio simples (móvel). Aplicam-se à barra um momento $\vec{M} = M \vec{i}$ e uma força $\vec{F} = (F \vec{j} ; P)$. Calcular as reações vinculares da barra:

Resposta: $R_Y = -2F$; $R_Z = F - \frac{M}{2a}$;

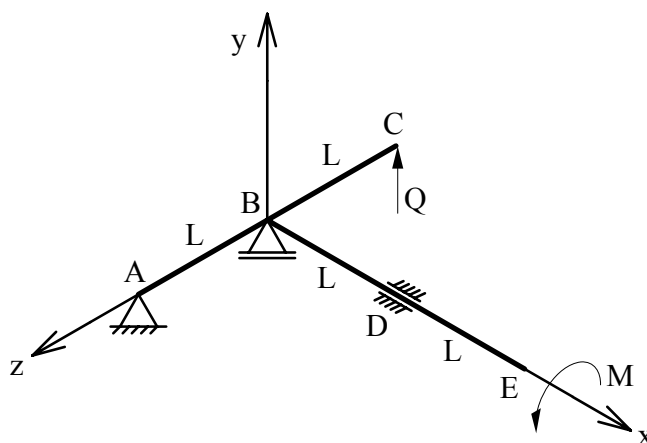
$T_X = 0$; $T_Y = F$; $T_Z = 0$;

$U_Z = -F + \frac{M}{2a}$



Exercício 2.8: A estrutura em T tem peso desprezível e está vinculada por uma articulação em A, por um apoio simples em B e por um anel em D. Para uma força $Q \vec{j}$ aplicada no ponto C e um binário $M \vec{i}$, calcular as reações externas:

Resposta: $X_A = 0$; $Y_A = Q + \frac{M}{L}$; $Z_A = 0$; $Y_B = -2Q - \frac{M}{L}$; $Y_D = Z_D = 0$

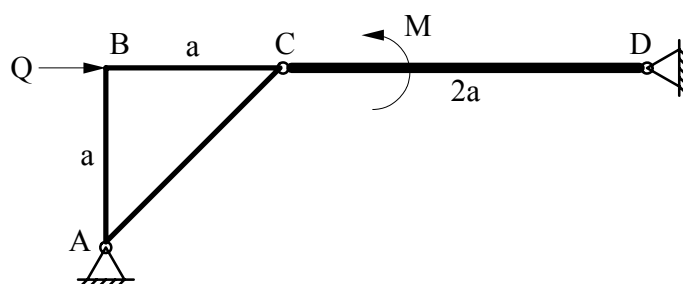


2.7. Diagrama de Corpo Livre

Exercício 2.9: A placa triangular ABC e a barra CD estão unidas pela articulação C. Uma força Q é aplicada em B e um binário de momento M é aplicado à barra CD. Pede-se:

- Desenhar o diagrama de corpo livre da estrutura como um todo e os diagramas individuais da barra e da placa;
- Calcular as reações em A e D;
- Redesenhar o diagrama de corpo livre da estrutura como um todo, substituindo as reações calculadas:

Resposta: $X_A = Y_A = \frac{M}{2a}$; $X_D = -\frac{M}{2a} - Q$; $Y_D = -\frac{M}{2a}$



Exercício 2.10: Os elementos da estrutura têm peso desprezível e seus comprimentos são $AF = FB = 2L$; $BG = 6L$; $GC = 5L$; $DB = 4L$; $BE = 10L$. Sabendo-se que AFBGC e DBE são barras, DG é um fio, A é um apoio simples e B, C, E são articulações, pede-se:

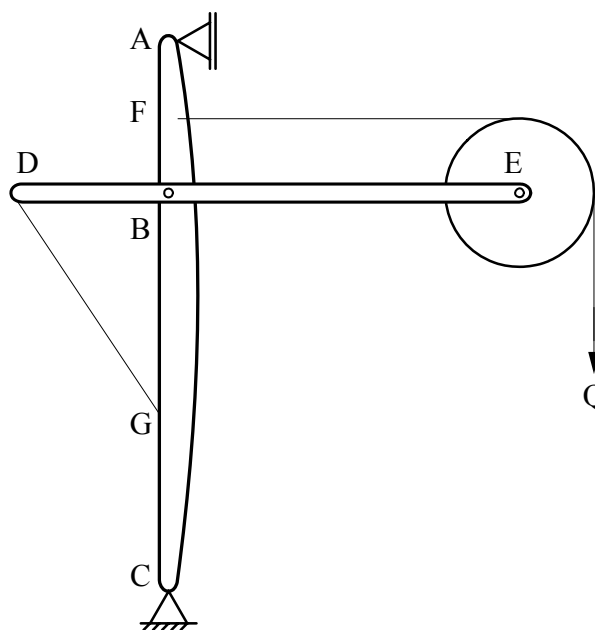
- Calcular as reações na polia, no fio DG e nas barras AC e DE;
- Desenhar o diagrama de corpo livre de cada elemento da estrutura:

Resposta: $X_A = -\frac{4Q}{5}$; $X_B = \frac{2Q}{3}$;

$Y_B = -\frac{7Q}{2}$; $X_C = \frac{4Q}{5}$;

$Y_C = Q$; $X_E = Y_E = Q$

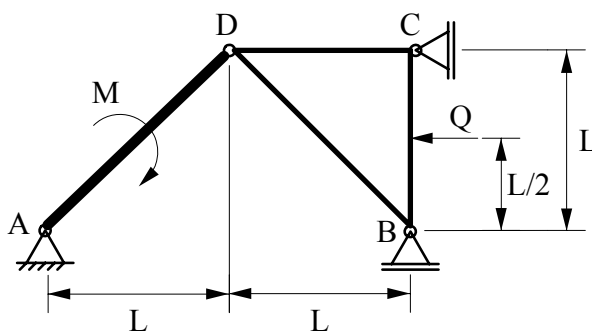
$T_{EF} = Q$; $T_{DG} = \frac{5\sqrt{13}Q}{6}$



Exercício 2.11: O sistema da figura é constituído pela barra AD e pela placa triangular BCD. O sistema é suportado (precariamente) pelas articulações em A e D e pelos apoios simples em B e C.

Aplicam-se a força \vec{Q} à placa e o momento \vec{M} à barra. Qual a relação entre $|\vec{Q}|$ e $|\vec{M}|$ para que a reação em C seja nula?

Resposta: $\frac{Q}{M} = \frac{2}{3L}$



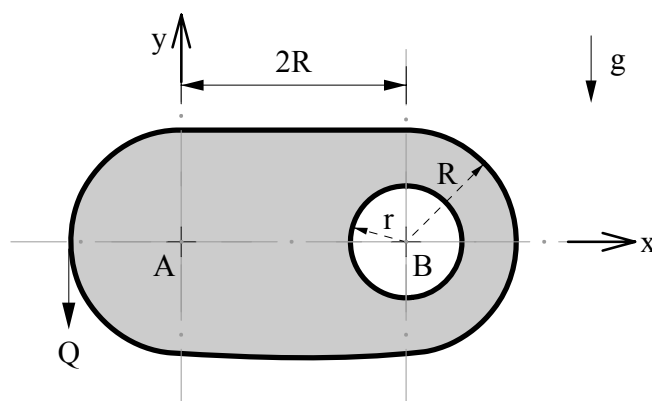
2.9. Equilíbrio do Baricentro

Exercício 2.12: A placa homogênea de peso P é articulada no ponto A e apresenta um furo circular de centro B e raio r . Em função das dimensões indicadas, pede-se:

- Calcular as coordenadas do baricentro da placa;
- Qual a força Q necessária para manter a placa na posição da figura?

Resposta: $x_G = R \left(1 - \frac{\pi r^2}{4R^2 + \pi R^2 - \pi r^2} \right)$; $y_G = 0$;

$$Q = P \left(1 - \frac{\pi r^2}{4R^2 + \pi R^2 - \pi r^2} \right)$$



Exercício 2.13: O móbile é composto por duas peças planas do mesmo material, cuja densidade superficial (em função da área) é γ . A peça maior é um disco circular de raio $2R$ com um furo excêntrico de raio R . O pedaço retirado do furo é pendurado à peça maior através de um fio ideal (inextensível, flexível e de massa desprezível). Pede-se:

a) Mostrar que o móbile encontra-se em equilíbrio:

Supondo que o fio DE seja cortado:

b) Calcular as coordenadas do centro de massa da peça perfurada:

c) Esboçar a posição de equilíbrio sem o pingente:

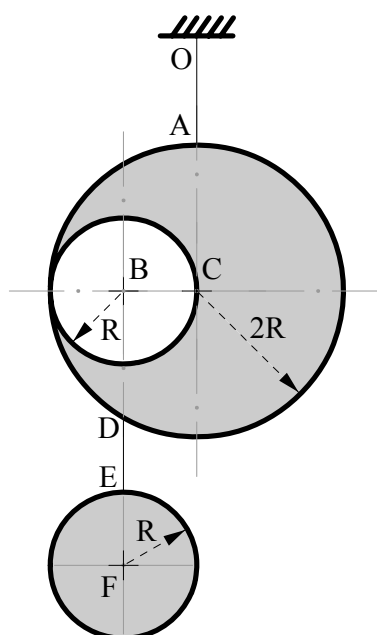
d) Calcular o ângulo de inclinação α da peça perfurada nesta nova posição:

e) Calcular a força de tração no fio OA nas duas condições, antes e depois do corte do fio DE:

Resposta: $x_G' = \frac{R}{3}$; $y_G' = 0$;

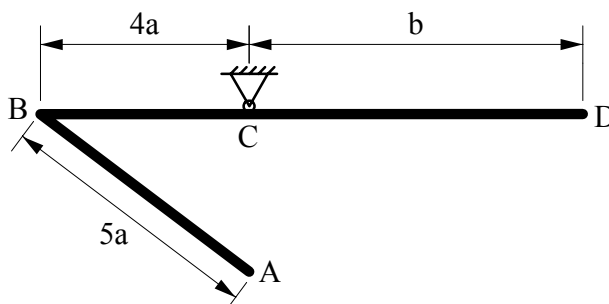
$$\alpha = \arctg\left(\frac{1}{6}\right) ;$$

$$T = 4\pi R^2 \gamma g ; T' = 3\pi R^2 \gamma g$$



Exercício 2.14: Um arame homogêneo ABCD é preso em C por uma articulação. Calcular o comprimento b para que o segmento BD equilibre-se na posição horizontal:

Resposta: $b = 6a$



CAPÍTULO 3: CINEMÁTICA

3.4. Equações do Movimento

Exercício 3.1: O disco de centro A e raio R rola sem escorregar sobre um plano horizontal, com velocidade angular ω constante. A barra CD de comprimento L é articulada em C e D. A luva (anel) em D pode deslizar apenas ao longo da guia vertical OD. Para $\theta = 45^\circ$, pede-se:

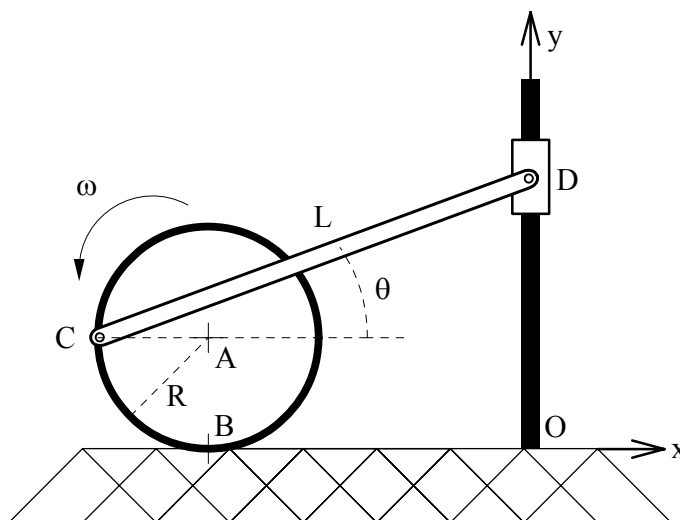
- Calcular a velocidade do ponto C e determinar graficamente o CIR da barra CD;
- Calcular o vetor de rotação $\vec{\Omega}$ da barra CD;
- Calcular a velocidade do ponto D;
- Calcular a aceleração do ponto C;

Resposta: $\vec{v}_C = -\omega R (\vec{i} + \vec{j})$;

$$\vec{\Omega} = -\frac{\sqrt{2} \omega R}{L} \vec{k} ;$$

$$\vec{v}_D = -2 \omega R \vec{j} ;$$

$$\vec{a}_C = \omega^2 R \vec{i}$$



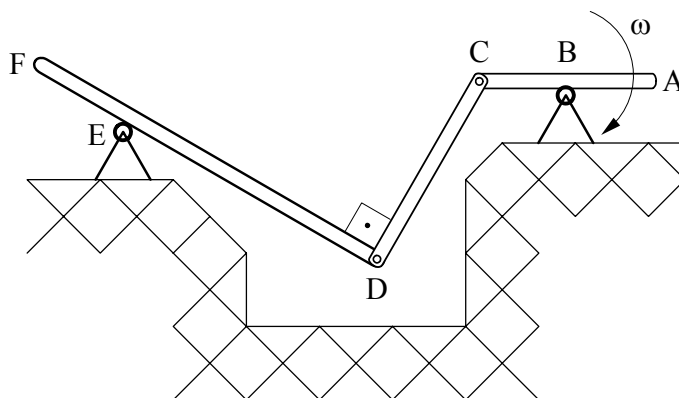
Exercício 3.2: A barra DEF é acionada pelas barras ABC e CD, articuladas entre si (nos pontos C e D) e por apoios fixos (nos pontos B e E). São conhecidas a velocidade angular ω da barra ABC e as dimensões $BC = L$; $CD = 6L$; $DE = 8L$. Pede-se:

- Determinar graficamente o CIR da barra CD;
- Calcular a velocidade angular da barra CD;
- Calcular a velocidade do ponto D;
- Calcular a velocidade angular da barra DEF;

Resposta: $\vec{v}_C = \omega L \vec{j}$; $\omega_{CD} = \frac{\omega}{10} \vec{k}$;

$$\vec{v}_D = \frac{12 \omega L}{25} \vec{i} + \frac{16 \omega L}{25} \vec{j} ;$$

$$\omega_{DEF} = \frac{\omega}{10} \vec{k}$$



Exercício 3.3: O chassi de um tanque de guerra (representado pela barra AB) move-se com velocidade $-v \vec{i}$ constante, com velocidade angular $-\omega_A \vec{k}$ sobre a roda A. A roda de centro B e raio r é ligada à roda A por uma esteira. As rodas não escorregam em relação à esteira, porém a esteira escorrega em relação ao chão. Pede-se:

- Calcular as velocidades \vec{v}_1 , \vec{v}_2 e \vec{v}_3 dos pontos P_1 , P_2 e P_3 :
- Calcular o vetor de rotação $\vec{\omega}_B$ da roda de centro B:
- Calcular a aceleração do ponto P_4 :
- Calcular a posição do CIR da roda de centro A (em relação ao ponto A):

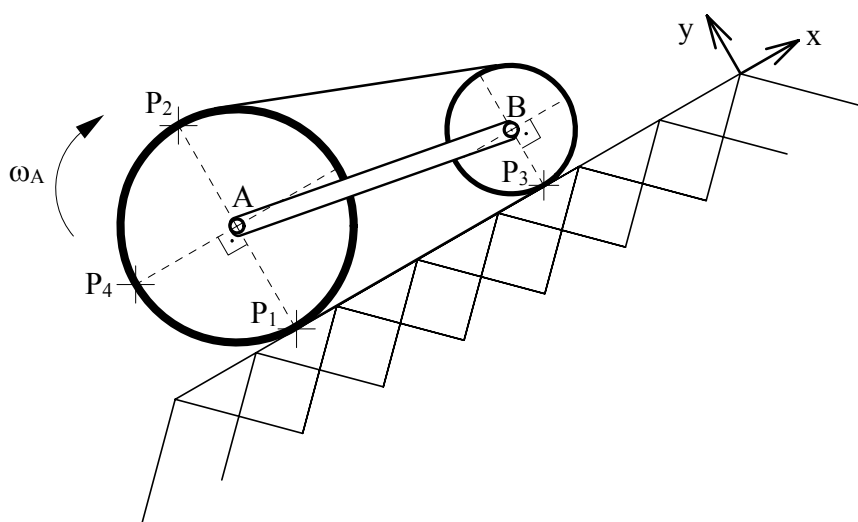
Resposta: $\vec{v}_1 = \vec{v}_3 = (-v - \omega_A R) \vec{i}$;

$$\vec{v}_2 = (-v + \omega_A R) \vec{i} ;$$

$$\vec{\omega}_B = -\frac{\omega_A R}{r} \vec{k} ;$$

$$\vec{a}_4 = \omega_A^2 R \vec{i} ;$$

$$(A - CIR_A) = -\frac{v}{\omega_A} \vec{j}$$



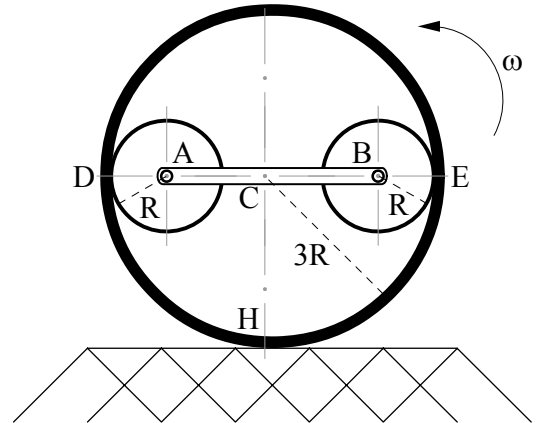
Exercício 3.4: O aro de raio $3R$ e espessura desprezível gira sem escorregar e com vetor de rotação $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$. Os discos de raio R giram sem escorregar em relação ao aro, unidos entre si pela barra AB articulada. Sabendo-se que a barra AB tem movimento de translação pura, pede-se:

- Determinar graficamente o CIR do aro e calcular \vec{v}_E (ponto de contato entre o aro e disco B):
- Determinar graficamente os CIRs dos discos A e B:
- Calcular o vetor de rotação $\vec{\omega}_B$ do disco B:
- Calcular a velocidade de translação \vec{v}_{AB} da barra AB :

Resposta: $\vec{v}_E = 3\omega R(-\vec{i} + \vec{j})$;

$$\vec{\omega}_B = 3\omega R \vec{k} ;$$

$$\vec{v}_{AB} = -3\omega R \vec{i}$$



Exercício 3.5: Os discos de centros A e B têm o mesmo raio r e rolam sem escorregar, externa e internamente à circunferência fixa no chão, de centro O e raio R . O movimento dos discos e da barra AB se desenvolve no plano do sistema móvel, pede-se:

- Determinar graficamente os CIRs dos discos A e B e da barra AB :
- Calcular a velocidade do ponto A, o vetor de rotação $\vec{\Omega}$ da barra AB :
- Calcular a velocidade do ponto B, o vetor de rotação $\vec{\omega}_B$ do disco B:
- Calcular as acelerações dos pontos A e D (contato do disco A):

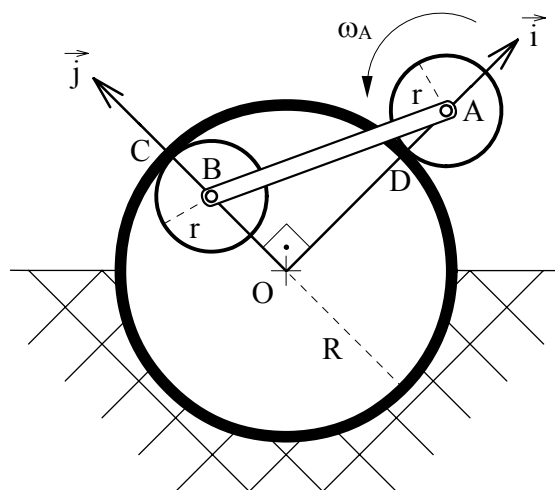
Resposta: $\vec{v}_A = \omega_A r \vec{j}$; $\vec{\Omega} = \frac{\omega_A r}{R+r} \vec{k}$;

$$\vec{v}_B = -\frac{\omega_A r (R-r)}{R+r} \vec{i} ;$$

$$\vec{\omega}_B = -\frac{\omega_A (R-r)}{R+r} \vec{k} ;$$

$$\vec{a}_A = -\frac{\omega_A^2 r^2}{R+r} \vec{i} ;$$

$$\vec{a}_D = -\frac{\omega_A^2 R r}{R+r} \vec{i}$$



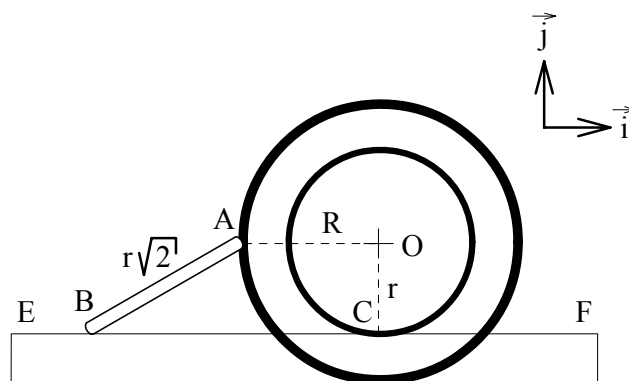
Exercício 3.6: Os discos da figura formam uma roda de trem, que gira sem escorregar sobre o trilho EF. A barra AB tem comprimento $r\sqrt{2}$ e sua extremidade B se arrasta sobre o trilho. Sabendo-se que o ponto O tem velocidade v e aceleração a (ambas em módulo) e que o conjunto se desloca no sentido $+\vec{i}$, pede-se:

- Calcular a velocidade angular da roda;
- Calcular a aceleração do ponto C;
- Calcular a velocidade do ponto A;
- Calcular a velocidade do ponto B e a velocidade angular da barra AB:

Resposta: $\vec{\omega} = -\frac{v}{r}\vec{k}$; $\vec{a}_C = \frac{v^2}{r}\vec{j}$;

$$\vec{v}_A = v\vec{i} + \frac{vR}{r}\vec{j} ;$$

$$\vec{v}_B = v\left(1 + \frac{R}{r}\right)\vec{i} ; \quad \vec{\omega}_{AB} = \frac{vR}{r^2}\vec{k}$$



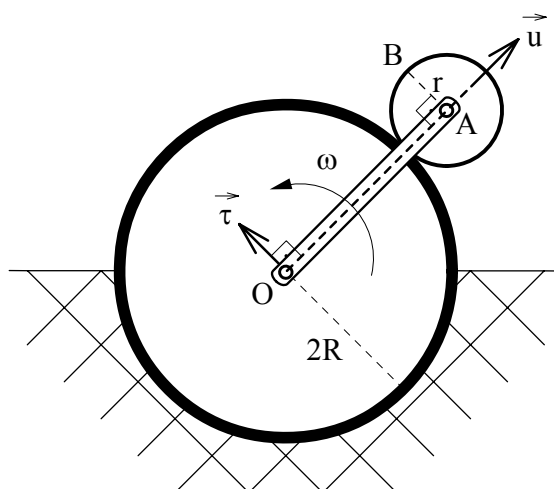
Exercício 3.7: A barra OA gira com velocidade angular constante ω e movimentam o disco A, que rola sem escorregar sobre o disco fixo de centro O. Em função de $(\vec{u}, \vec{\tau}, \vec{k})$, pede-se:

- Determinar graficamente os CIRs da barra OA e do disco A;
- Calcular a velocidade do ponto A;
- Calcular a velocidade angular $\vec{\Omega}$ do disco A;
- Calcular a velocidade e aceleração do ponto B:

Resposta: $\vec{v}_A = 3\omega R\vec{\tau}$; $\vec{\Omega} = 3\omega\vec{k}$;

$$\vec{v}_B = 3\omega R(-\vec{u} + \vec{\tau}) ;$$

$$\vec{a}_B = -3\omega^2 R\vec{u} - 9\omega^2 R\vec{\tau}$$



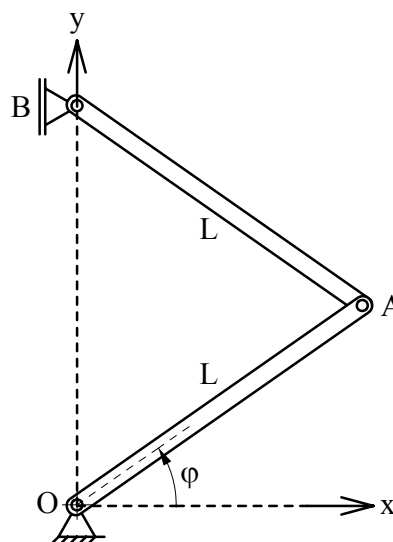
Exercício 3.8: O conjunto articulado no ponto A move-se no plano Oxy: a barra OA gira em torno do ponto O ($\varphi = \omega t$, $\omega > 0$ e constante) e o ponto B desloca-se na direção $+\vec{j}$. Pede-se:

- Determinar graficamente a posição do CIR da barra AB;
- Calcular a velocidade do ponto A;
- Calcular a velocidade angular $\vec{\Omega}$ da barra AB e a velocidade do ponto B;
- Calcular a velocidade \vec{v}_M do ponto médio de AB:

Resposta: $\vec{v}_A = \omega L (-\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j})$;

$$\vec{\Omega} = -\omega \vec{k} ; \vec{v}_B = 2 \omega L \cos \varphi \vec{j} ;$$

$$\vec{v}_M = \frac{\omega L}{2} (-\sin \varphi \vec{i} + 3 \cos \varphi \vec{j}) ;$$



3.8. Composição de Referenciais

Exercício 3.9: Um carretel de centro C rola sem escorregar sobre um carrinho AB que se move horizontalmente com velocidade constante v . Um fio ideal é enrolado no carretel e sua extremidade E possui velocidade absoluta igual a $2v$. Adotando como referencial móvel a barra AB, pede-se:

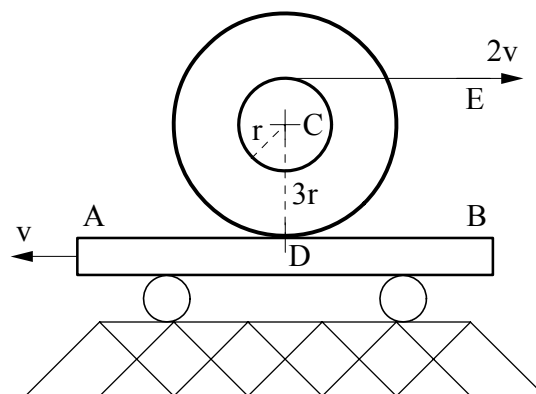
- Calcular as velocidades relativa e absoluta do ponto D;
- Calcular o vetor de rotação absoluta do carretel;
- Calcular as acelerações relativa, de arrastamento, de Coriolis e absoluta do ponto D:

Resposta: $\vec{v}_{Drel} = 0$; $\vec{v}_{Dabs} = -v \vec{i}$;

$$\vec{\omega}_{abs} = -\frac{3v}{4r} \vec{k} ;$$

$$\vec{a}_{Drel} = \frac{27v^2}{16r} \vec{j} ;$$

$$\vec{a}_{Darr} = \vec{a}_{Dcor} = 0 ; \vec{a}_{Dabs} = \frac{27v^2}{16r} \vec{j}$$



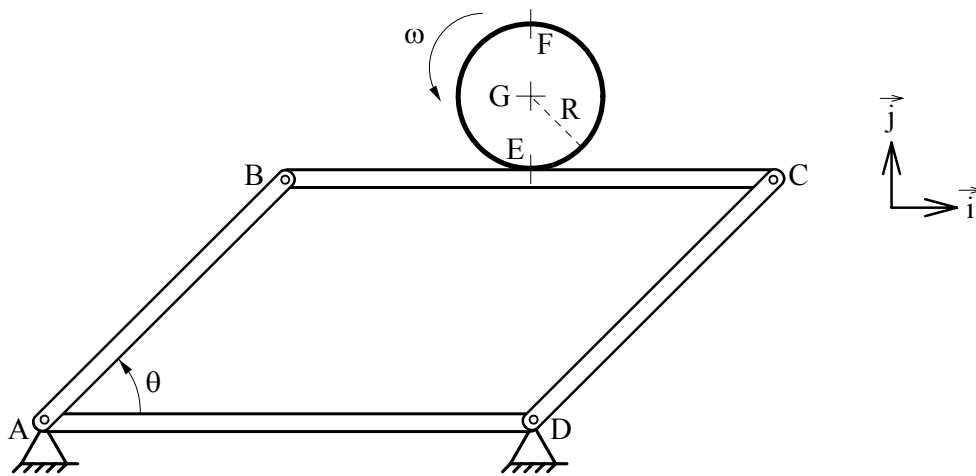
Exercício 3.10: O mecanismo é constituído por quatro barras, com dimensões $AB = CD = L$ e $BC = DA = 2L$, articuladas e contidas no plano Axy . O disco de raio R e centro G rola sem escorregar sobre a barra BC , com velocidade angular ω constante. O ângulo entre as barras AB e DA obedece à relação $\theta = \Omega t$ (Ω é constante). No instante da figura, o ponto E (de contato) está na metade da barra BC e o ponto F está na periferia do disco, alinhado com os pontos E e G . Pede-se:

a) Calcular as velocidades (absoluta) dos pontos E e F :

b) Calcular a aceleração (absoluta) do ponto E :

Resposta: $\vec{v}_E = \Omega L (-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j})$; $\vec{v}_F = (-2\omega R - \Omega L \sin \theta) \vec{i} + \Omega L \cos \theta \vec{j}$;

$$\vec{a}_E = -\Omega^2 L \cos \theta \vec{i} + (-\Omega^2 L \sin \theta + \omega^2 R) \vec{j}$$



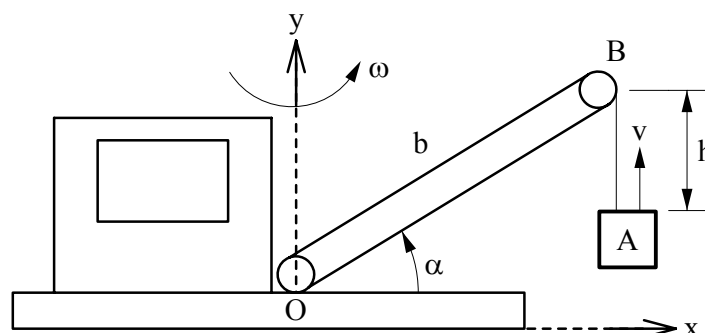
Exercício 3.11: No guindaste representado na figura, a velocidade de suspensão do bloco A é igual a v constante. A cabine e a lança OB giram com velocidade ω constante, em torno do eixo vertical Oy . Supondo AB sempre vertical e sendo a cabine o referencial móvel, pede-se:

a) Calcular a velocidade e aceleração absolutas do ponto A , supondo α constante:

b) Calcular a velocidade absoluta do ponto A , supondo $\dot{\alpha} = \Omega$ constante:

Resposta: $\vec{v}_{A\text{abs}} = v \vec{j} - \omega b \cos \alpha \vec{k}$; $\vec{a}_{A\text{abs}} = -\omega^2 b \cos \alpha \vec{i}$;

$$\vec{v}_{A\text{abs}} = -\Omega b \sin \alpha \vec{i} + (v - \Omega b \cos \alpha) \vec{j} - \omega b \cos \alpha \vec{k}$$



Exercício 3.12: O caminhão de bombeiros avança com velocidade v_C constante. Ao mesmo tempo, sua escada gira em torno de um eixo normal (perpendicular) ao plano da figura e que passa por O, com velocidade angular ω . Um homem sobe a escada com velocidade relativa v_H . Em função de $s, v_H, a_H, v_C, \omega, \alpha$ (todos conhecidos) e adotando a escada como referencial móvel, pede-se:

- a) Calcular $\vec{v}_{H\text{rel}}, \vec{v}_{H\text{arr}}$ e $\vec{v}_{H\text{abs}}$, usando os versores $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$;
- b) Calcular $\vec{v}_{H\text{rel}}, \vec{v}_{H\text{arr}}$ e $\vec{v}_{H\text{abs}}$, usando os versores $(\vec{u}, \vec{\tau}, \vec{k})$;
- c) Calcular $\vec{a}_{H\text{rel}}, \vec{a}_{H\text{arr}}$ e $\vec{a}_{H\text{abs}}$, usando os versores $(\vec{u}, \vec{\tau}, \vec{k})$;

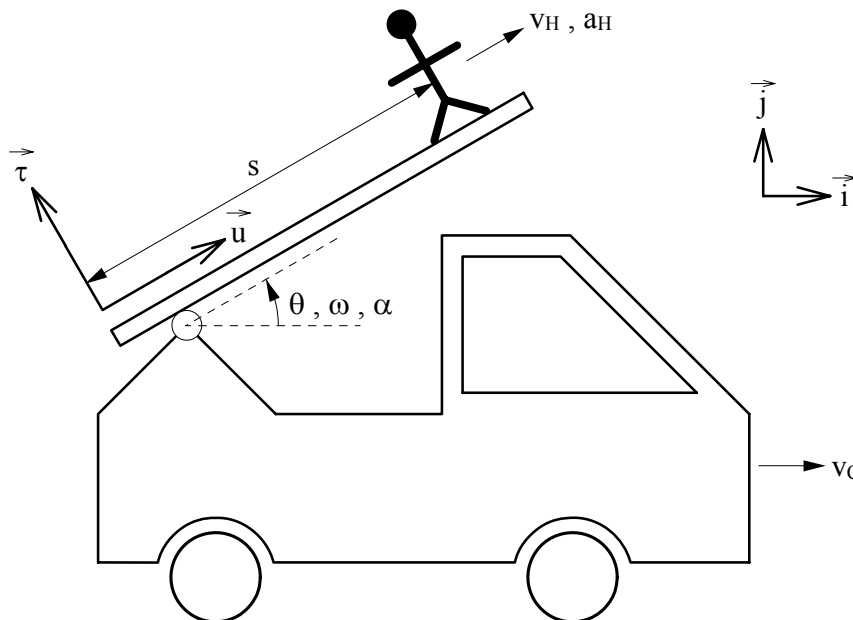
Resposta: $\vec{v}_{H\text{rel}} = v_H (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j})$; $\vec{v}_{H\text{arr}} = (v_C - \omega s \sin \theta) \vec{i} + \omega s \cos \theta \vec{j}$;

$$\vec{v}_{H\text{abs}} = (v_H \cos \theta + v_C - \omega s \sin \theta) \vec{i} + (v_H \sin \theta + \omega s \cos \theta) \vec{j} ;$$

$$\vec{v}_{H\text{rel}} = v_H \vec{u} ; \vec{v}_{H\text{arr}} = v_C \cos \theta \vec{u} + (-v_C \sin \theta + \omega s) \vec{\tau} ;$$

$$\vec{v}_{H\text{abs}} = (v_H + v_C \cos \theta) \vec{u} + (-v_C \sin \theta + \omega s) \vec{\tau} ;$$

$$\vec{a}_{H\text{rel}} = a_H \vec{u} ; \vec{a}_{H\text{arr}} = -\omega^2 s \vec{u} + \alpha s \vec{\tau} ; \vec{a}_{H\text{abs}} = (a_H - \omega^2 s) \vec{u} + (2\omega v_H + \alpha s) \vec{\tau}$$



Exercício 3.13: O quadro está preso em um eixo vertical e gira com velocidade angular $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$ e aceleração angular $\vec{\alpha} = \alpha \vec{k}$. Um cursor P percorre o quadro com velocidade relativa v constante. Adotando o piso como referencial fixo e o quadro como referencial móvel, pede-se:

No instante em que o cursor está na posição I:

- a) Calcular $v_{P\text{rel}}$, $v_{P\text{arr}}$ e $v_{P\text{abs}}$;
 b) Calcular $a_{P\text{rel}}$, $a_{P\text{arr}}$; $a_{P\text{cor}}$ e $a_{P\text{abs}}$:

No instante em que o cursor está na posição II:

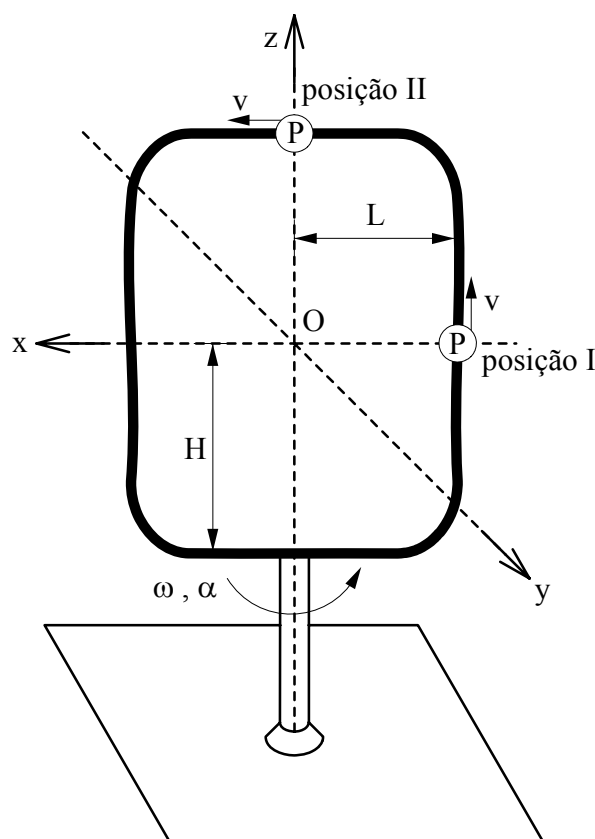
- c) Calcular $v_{P\text{rel}}$, $v_{P\text{arr}}$ e $v_{P\text{abs}}$;
 d) Calcular $a_{P\text{rel}}$, $a_{P\text{arr}}$; $a_{P\text{cor}}$ e $a_{P\text{abs}}$:

Resposta: $\vec{v}_{P\text{rel}}\text{I} = v \vec{k}$; $\vec{v}_{P\text{arr}}\text{I} = -\omega L \vec{j}$; $\vec{v}_{P\text{abs}}\text{I} = -\omega L \vec{j} + v \vec{k}$;

$\vec{a}_{P\text{rel}}\text{I} = \vec{a}_{P\text{cor}}\text{I} = 0$; $\vec{a}_{P\text{arr}}\text{I} = \vec{a}_{P\text{abs}}\text{I} = \omega^2 L \vec{i} - \alpha L \vec{j}$;

$\vec{v}_{P\text{rel}}\text{II} = \vec{v}_{P\text{abs}}\text{II} = v \vec{i}$; $\vec{v}_{P\text{arr}}\text{II} = 0$;

$\vec{a}_{P\text{rel}}\text{II} = \vec{a}_{P\text{arr}}\text{II} = 0$; $\vec{a}_{P\text{cor}}\text{II} = \vec{a}_{P\text{abs}}\text{II} = 2\omega v \vec{j}$



Exercício 3.14: O piso é o referencial fixo e a coluna está fixa neste piso. O disco de raio R e centro O apenas gira com velocidade angular $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$ (ω constante). A barra AB tem comprimento $2L$ e está vinculada em A na periferia do disco e em B no cursor por meio de juntas esféricas (articulações). No instante da figura, a barra é paralela ao eixo Oz e a esfera P encontra-se na sua metade, movendo-se em relação a ela com velocidade v constante. Para este instante, pede-se:

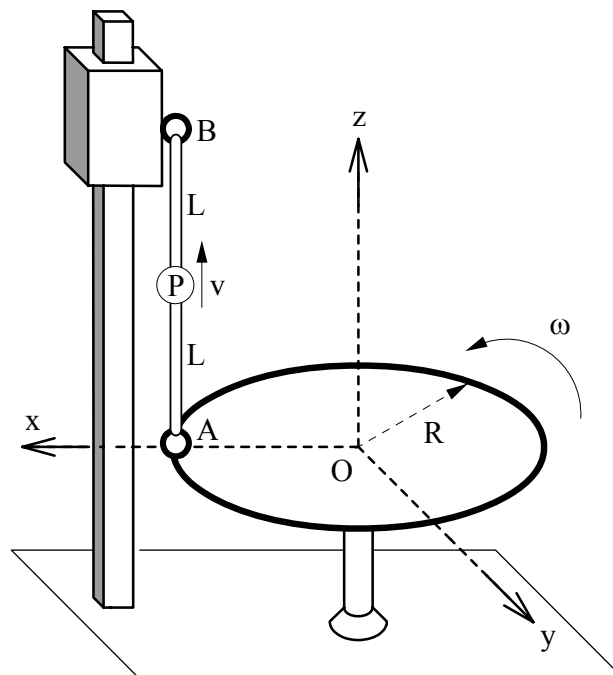
- a) Calcular as velocidades \vec{v}_A e \vec{v}_B e a velocidade angular $\vec{\Omega}$ da barra AB , sabendo que Ω não tem componente na direção vertical ($\vec{\Omega} = \Omega_x \vec{i} + \Omega_y \vec{j}$):
- b) Adotando a barra AB como referencial móvel, calcular as velocidades v_{Prel} , v_{Parr} e v_{Pabs} :
- c) Calcular as acelerações \vec{a}_A e \vec{a}_B e a aceleração angular $\dot{\vec{\Omega}}$:
- d) Calcular as acelerações \vec{a}_{Prel} , \vec{a}_{Parr} e \vec{a}_{Pabs} :

Resposta: $\vec{v}_A = \omega R \vec{j}$; $\vec{v}_B = 0$; $\vec{\Omega} = \frac{\omega R}{2L} \vec{i}$;

$$\vec{v}_{Prel} = v \vec{k} ; \vec{v}_{Parr} = \frac{\omega R}{2} \vec{j} ; \vec{v}_{Pabs} = \frac{\omega R}{2} \vec{j} + v \vec{k} ;$$

$$\vec{a}_A = -\omega^2 R \vec{i} ; \vec{a}_B = -\frac{\omega^2 R^2}{2L} \vec{k} ; \dot{\vec{\Omega}} = \frac{\omega^2 R}{2L} \vec{j} ;$$

$$\vec{a}_{Prel} = 0 ; \vec{a}_{Parr} = -\frac{\omega^2 R}{2} \vec{i} - \frac{\omega^2 R^2}{4L} \vec{k} ; \vec{a}_{Pabs} = -\frac{\omega^2 R}{2} \vec{i} - \frac{\omega R v}{L} \vec{j} - \frac{\omega^2 R^2}{4L} \vec{k}$$

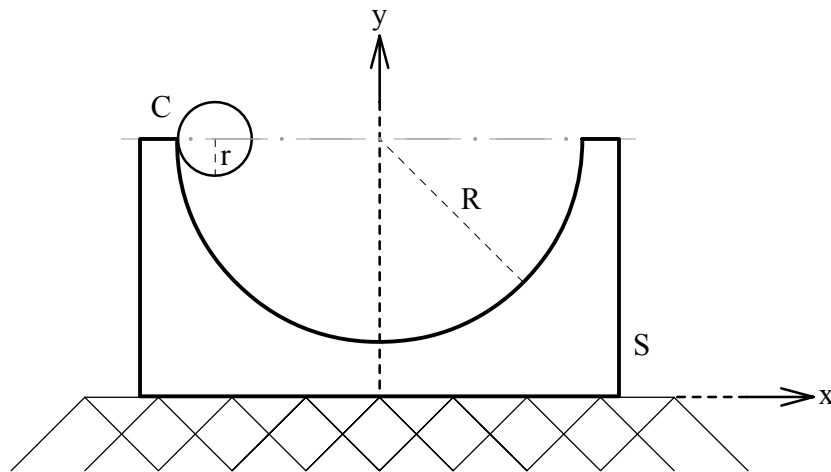


CAPÍTULO 4: DINÂMICA

4.4. Teorema do Movimento do Baricentro

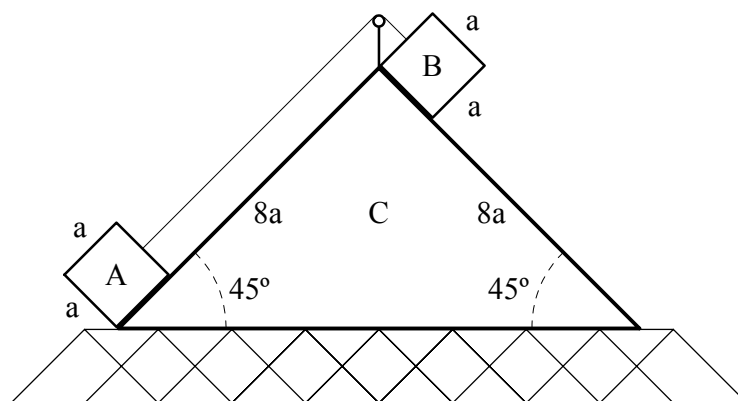
Exercício 4.1: O disco de raio r e massa m rola sem escorregar sobre o bloco S. O bloco S tem massa M e superfície com raio R se apóia sem atrito sobre o plano horizontal. Sabendo-se que o disco parte do repouso na posição C, calcular o valor máximo do deslocamento $|x|$ do bloco S:

Resposta: $|x| = \frac{2m(R-r)}{m+M}$



Exercício 4.2: Dois cubos A e B, respectivamente de massa m e $2m$ e aresta a , estão apoiados sobre o prisma C de massa M . Não há atrito entre o prisma e os cubos e entre o prisma e o chão. Calcular o deslocamento Δx_C do prisma quando o cubo B atinge o chão:

Resposta: $\Delta x_C = -\frac{21\sqrt{2}ma}{2(3m+M)}$



4.6. Teorema do Momento Angular

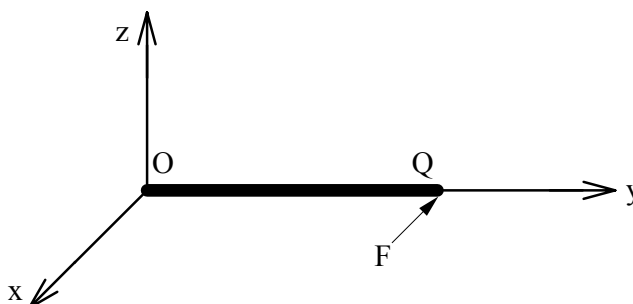
Exercício 4.3: Uma barra OQ homogênea, de massa m e comprimento L , encontra-se em repouso, apoiada sobre o plano horizontal xy , podendo movimentar-se livremente sem atrito. Em um determinado instante, uma força F , ortogonal à barra e paralela ao plano, é aplicada no ponto Q. Para este instante, mostrado na figura, pede-se:

- Calcular a aceleração do baricentro G da barra;
- Calcular a aceleração angular da barra;
- Calcular o ponto P da barra para o qual a aceleração é nula no instante considerado ($t = 0$):

Resposta: $\vec{a}_G = -\frac{F}{m} \vec{i}$;

$$\vec{\alpha} = \frac{6F}{mL} \vec{k} ;$$

$$P\left(0, \frac{L}{3}, 0\right)$$



Exercício 4.4: O carrinho movimenta-se para a direita com aceleração \vec{a} constante. A placa quadrada (homogênea de lado c e massa m) está articulada em A. Pede-se:

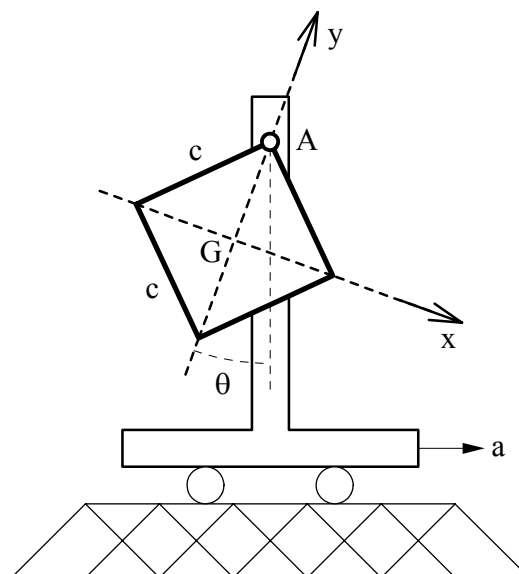
- Calcular J_{zG} e J_{zA} :
- Calcular a aceleração angular $\vec{\alpha}$ da placa em função de J_{zA} :
- Calcular as componentes da reação na articulação A em função de θ , ω e α :

Resposta: $J_{zG} = \frac{mc^2}{6}$; $J_{zA} = \frac{2mc^2}{3}$;

$$\vec{\alpha} = \frac{3\sqrt{2}g \sin \theta}{4c} \vec{k} ;$$

$$X_A = m \left(a \cos \theta - \frac{\sqrt{2}\alpha c}{2} \right) ;$$

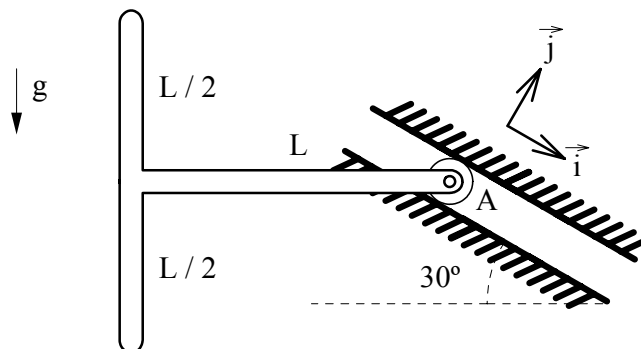
$$Y_A = m \left(a \sin \theta + \frac{\sqrt{2}\omega^2 c}{2} + g \cos \theta \right)$$



Exercício 4.5: O corpo em T e massa M é composto por duas barras homogêneas e idênticas, de comprimento L e soldadas entre si. O corpo move-se apenas no plano vertical e é solto do repouso na posição da figura. Desprezando o atrito do rolete em A, pede-se:

- Calcular o momento de inércia J_{zG} em relação ao baricentro do corpo;
- Calcular a aceleração angular do ponto A no instante em que o corpo é solto:

Resposta: $J_{zG} = \frac{7ML^2}{48}$; $\vec{a}_G = \frac{14g}{109} \vec{i}$



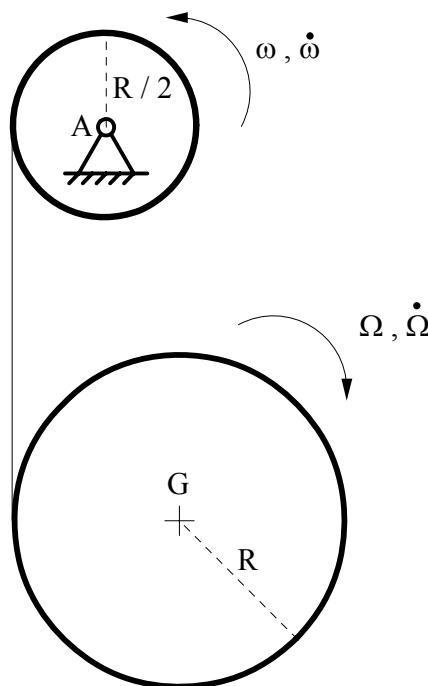
Exercício 4.6: O disco homogêneo A (de massa m e raio $R/2$) conecta-se ao disco G (de massa m e raio R) através de um cabo enrolado nos dois discos. Não ocorre escorregamento entre o cabo e os discos. Supondo que o sistema parte do repouso, calcular as acelerações angulares de cada disco, a aceleração do ponto G e a tração no fio:

Resposta: $\vec{\omega} = \frac{4g}{5R} \vec{k}$;

$\vec{\Omega} = -\frac{2g}{5R} \vec{k}$;

$\vec{a}_G = -\frac{4g}{5} \vec{j}$;

$T = \frac{mg}{5}$



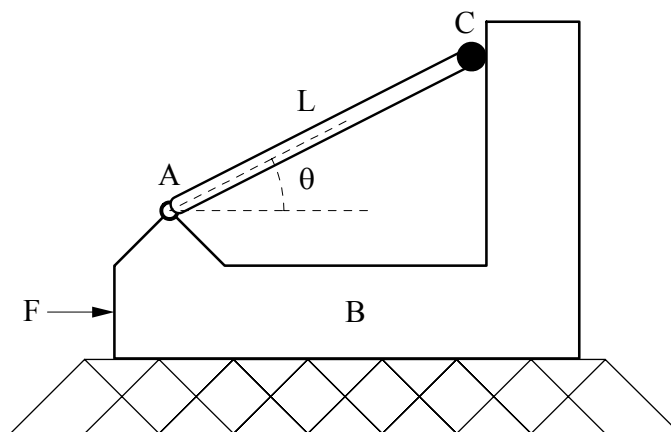
Exercício 4.7: O mecanismo repousa numa superfície horizontal sem atrito e está submetido a uma força F . O bloco B tem massa $4m$. A barra AC, com massa m e comprimento L , possui uma massa concentrada m , fixada na extremidade C. O corpo apóia-se no bloco B (ponto C) sem atrito, formando um ângulo de 30° com a horizontal. Pede-se:

- Calcular o baricentro do corpo composto em relação ao ponto A;
- Calcular a aceleração do ponto A;
- Calcular a máxima força F para que não haja descolamento do corpo em relação ao bloco (força normal no ponto C na iminência de ser anulada, $N = 0$):

Resposta: $(G - A) = \frac{3\sqrt{3}L}{8} \vec{i} + \frac{3L}{8} \vec{j}$;

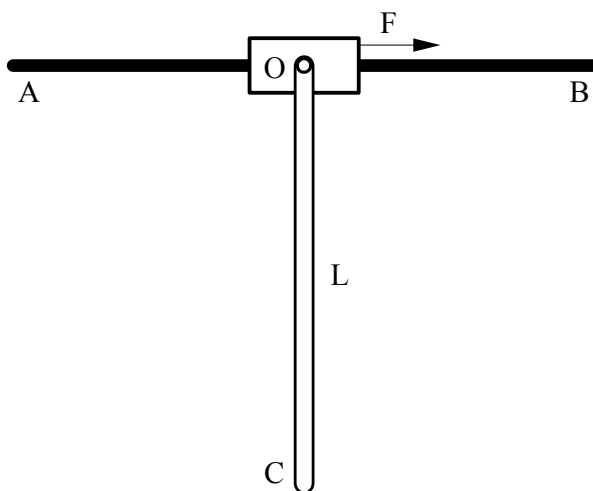
$$\vec{a}_A = \frac{F}{6m} \vec{i} ;$$

$$F = 6\sqrt{3} mg$$



Exercício 4.8: O anel de massa m pode deslizar sem atrito sobre a guia horizontal AB. A barra homogênea OC, de comprimento e massa m , é articulada sem atrito ao anel por meio de um pino perpendicular em O. É aplicada uma força F horizontal ao anel. Sabendo-se que o sistema parte do repouso, com a barra OC na vertical, calcular (para este instante inicial) a aceleração angular da barra, a aceleração do anel e a reação na articulação O:

Resposta: $\vec{\alpha} = -\frac{6F}{5mL} \vec{k}$; $\vec{a}_O = \frac{4F}{5m} \vec{i}$; $\vec{R}_O = \frac{F}{5} \vec{i} + mg \vec{j}$



4.7. Rolamento x Escorregamento

Exercício 4.9: Um cilindro de massa m e raio R desce um plano inclinado de ângulo θ em relação à horizontal. Sabendo-se que o coeficiente de atrito entre o cilindro e o plano é igual a μ , pede-se:

- Supondo que não haja escorregamento, calcular a aceleração do baricentro e a aceleração angular do cilindro;
- Supondo que haja escorregamento, calcular a aceleração do baricentro e a aceleração angular do cilindro;
- Qual o valor do ângulo θ que delimita as condições dos dois itens anteriores?

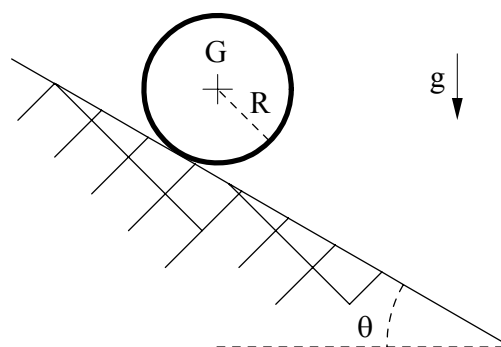
Resposta: $\vec{a}_G = \frac{2g \sin \theta}{3} \vec{i}$;

$$\vec{\alpha} = -\frac{2g \sin \theta}{3R} \vec{k}$$
 ;

$$\vec{a}_G = g(\sin \theta - \mu \cos \theta) \vec{i}$$
 ;

$$\vec{\alpha} = -\frac{2\mu g \cos \theta}{R} \vec{k}$$
 ;

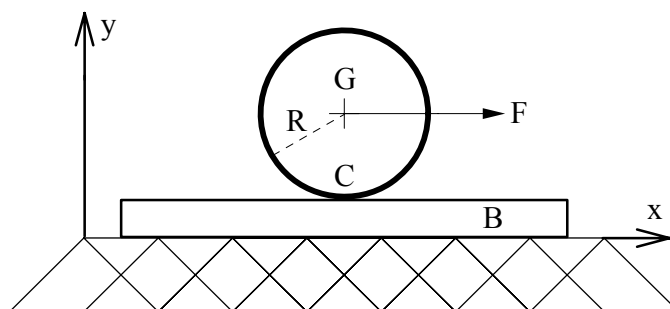
$$\theta = \arctg(3\mu)$$



Exercício 4.10: Um cilindro homogêneo de massa m e raio R rola sem escorregar sobre o bloco B de massa m , sob ação de uma força F aplicada em seu baricentro G. O bloco escorrega sem atrito sobre o plano horizontal. Pede-se:

- Desenhar os diagramas de corpo livre do cilindro e do bloco B;
- Calcular a aceleração angular do cilindro e as acelerações do bloco B e do baricentro G;
- Calcular o mínimo valor do coeficiente de atrito μ para que o cilindro não escorregue em C:

Resposta: $\vec{\omega} = -\frac{F}{2mR} \vec{k}$; $\vec{a}_B = \frac{F}{4m} \vec{i}$; $\vec{a}_G = \frac{3F}{4m} \vec{i}$; $\mu \geq \frac{F}{4mg}$



4.4. Teorema da Energia Cinética

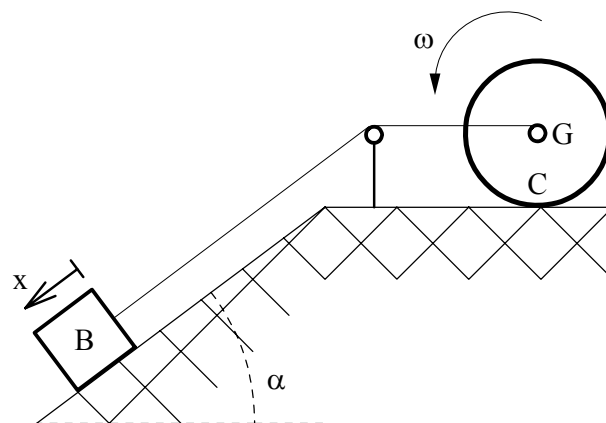
Exercício 4.11: O disco de raio R e massa M rola sem escorregar. Um cabo une o centro do disco G ao bloco B , através de uma polia de massa desprezível. O bloco B de massa m escorrega sobre o plano de inclinação α e coeficiente de atrito μ , partindo do repouso em $x = 0$. Pede-se:

- Calcular a energia cinética do sistema em função da velocidade angular ω do disco;
- Calcular a velocidade angular do disco em função de x ;
- Calcular a aceleração do bloco B :

Resposta: $E_{\text{cin}} = \frac{\omega^2 R^2}{4} (2m + 3M)$;

$$\vec{\omega} = \frac{2}{R} \sqrt{\frac{m g x (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{2m + 3M}} \vec{k} ;$$

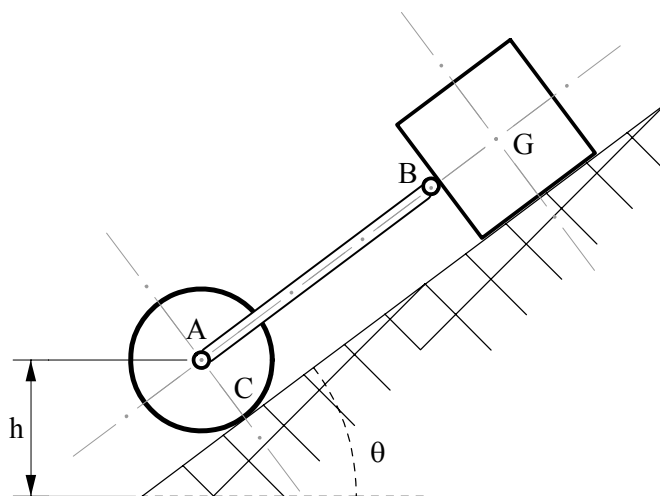
$$\vec{a}_B = \frac{2 m g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{2m + 3M} \vec{i}$$



Exercício 4.12: O disco (de centro A , raio R e massa m) está unido a um bloco (de massa M e baricentro G) por meio da barra AB (rígida, sem peso e bi-articulada). O disco rola sem escorregar e o atrito entre o bloco e o plano é desprezível. Sabendo-se que o sistema parte do repouso, quando a cota do ponto A é h_0 , calcular a velocidade e aceleração angulares do bloco em função de h :

Resposta: $\vec{v}_B = -2 \sqrt{\frac{g(m+M)(h-h_0)}{3m+2M}} \vec{i} ;$

$$\vec{a}_B = -\frac{2 g (m + M) \sin \theta}{3m + 2M} \vec{i}$$



Exercício 4.13: O corpo da figura é composto por uma barra homogênea de massa m e comprimento L , articulada em O e em C , e por um disco homogêneo de raio R e articulado em C . O conjunto é mantido em repouso na posição horizontal por um fio ideal ligado ao disco no ponto B . O fio é cortado. Pede-se:

No instante imediatamente após o corte do fio:

- Calcular as reações da articulação em O ;
- Usando o Teorema do Momento Angular, calcular a aceleração angular α_C do disco:

No instante em que o centro do disco atinge o ponto mais baixo de sua trajetória:

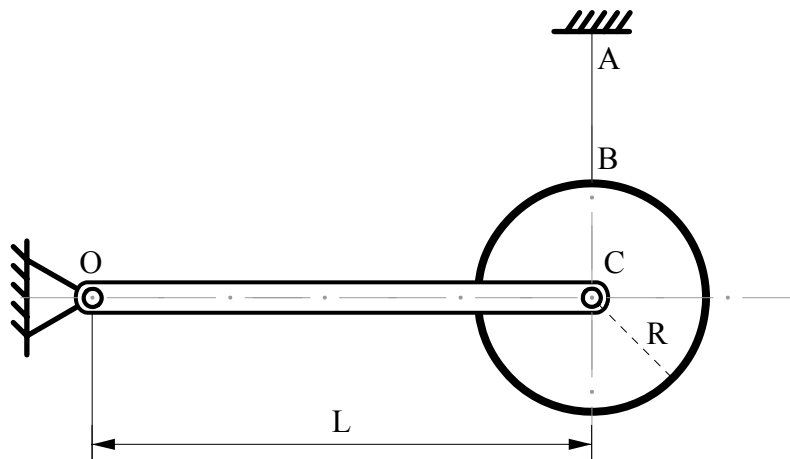
- Usando o Teorema da Energia Cinética, calcular a velocidade angular ω_{OC} da barra;
- Calcular as reações da articulação em O :

Resposta: $X_O = 0$; $Y_O = \frac{5mg}{16}$;

$$\vec{\alpha}_C = 0 ;$$

$$\vec{\omega}_{OC} = -\frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{L}} \vec{k} ;$$

$$X_O = 0 ; Y_O = \frac{43mg}{8}$$



Exercício 4.14: Uma massa concentrada m está presa ao disco (de raio R e massa m) no ponto A . O disco está ligado a uma mola de constante k , através de um fio que se enrola no disco. O conjunto parte do repouso da posição $\theta = 0^\circ$. Sendo a força da mola nula nesta posição. Pede-se:

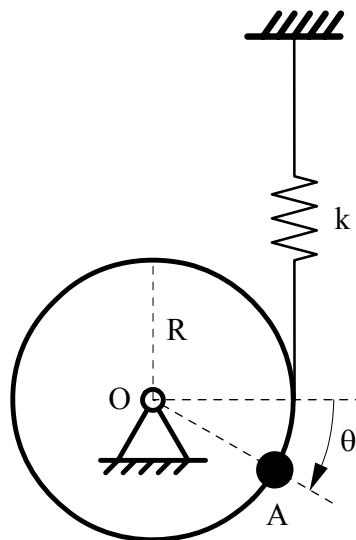
- Calcular a velocidade e aceleração angulares em função de θ ;
- Calcular a aceleração do baricentro G do conjunto em função de ω , α e θ ;
- Calcular as componentes da reação na articulação O em função de ω , α e θ ;

Resposta: $\vec{\omega} = -\sqrt{\frac{4g \sin \theta}{3R} - \frac{2k\theta^2}{3m}} \vec{k}$; $\vec{\alpha} = -\frac{2}{3} \left(\frac{g \cos \theta}{R} - \frac{k\theta}{m} \right) \vec{k}$;

$$\vec{a}_G = \frac{R}{2} \left[\left(-\alpha \sin \theta - \omega^2 \cos \theta \right) \vec{i} + \left(-\alpha \cos \theta + \omega^2 \sin \theta \right) \vec{j} \right] ;$$

$$X_O = -mR(\alpha \sin \theta - \omega^2 \cos \theta) ;$$

$$Y_O = 2mg - kR\theta - mR\alpha \cos \theta + mR\omega^2 \sin \theta$$



ANEXO: PROVAS DE ANOS ANTERIORES

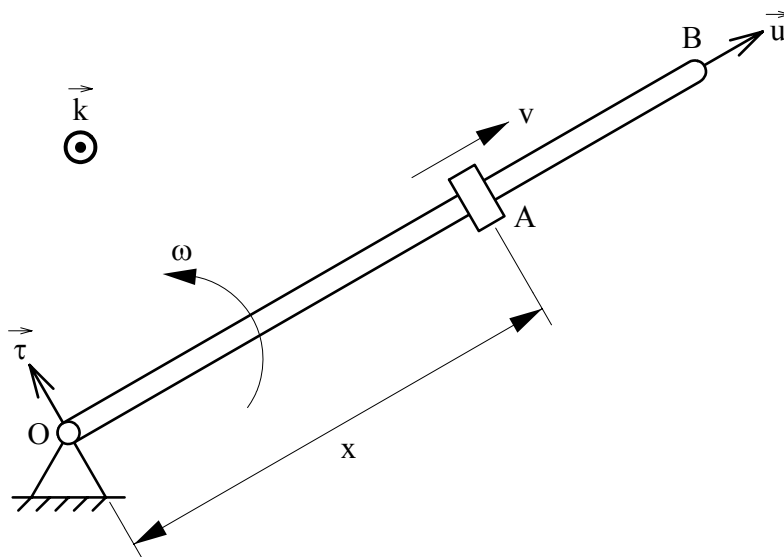
Prova de Transferência de 2002

Questão 10: O anel A move-se sobre a barra OB com velocidade relativa à barra de módulo v constante. A barra OB gira ao redor de um eixo de direção normal ao plano da figura e que passa por O com velocidade angular constante ω . Considerando a barra como referencial móvel, determine para a posição x indicada:

- a) A velocidade relativa, a velocidade de arrastamento e a velocidade absoluta de A, usando os versores $(\vec{u}, \vec{\tau}, \vec{k})$:
- b) A aceleração relativa, a aceleração de arrastamento, a aceleração complementar (Coriolis) e a aceleração absoluta de A, usando os versores $(\vec{u}, \vec{\tau}, \vec{k})$:

Resposta: $\vec{v}_{Arel} = v \vec{u}$; $\vec{v}_{Aarr} = \omega x \vec{\tau}$; $\vec{v}_{Abs} = v \vec{u} + \omega x \vec{\tau}$;

$$\vec{a}_{Arel} = 0$$
 ; $\vec{a}_{Aarr} = -\omega^2 x \vec{u}$; $\vec{a}_{Acor} = 2\omega v \vec{\tau}$; $\vec{a}_{Abs} = -\omega^2 x \vec{u} + 2\omega v \vec{\tau}$



Questão 11: Um binário de momento M é aplicado a um cilindro de raio R e massa m . O coeficiente de atrito entre o cilindro e a superfície é μ e a aceleração da gravidade é g . Considerando que o cilindro parte do repouso, determine a aceleração angular do cilindro ($\dot{\omega}$) para os seguintes casos:

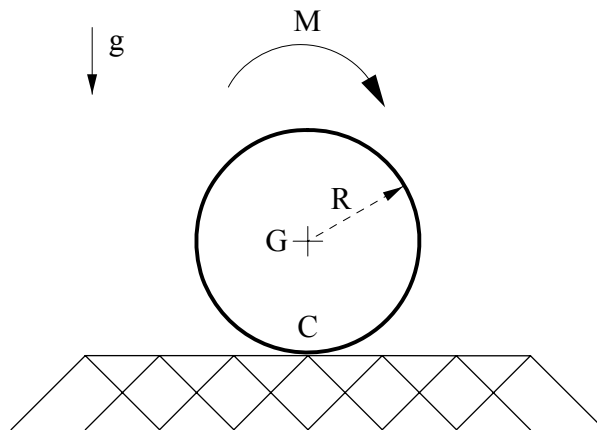
a) O cilindro rola e escorrega:

b) O cilindro rola sem escorregar:

Obs.: Dado o momento de inércia do cilindro com relação a um eixo de direção normal ao plano da figura e que passa pelo seu baricentro G : $J_G = \frac{m R^2}{2}$.

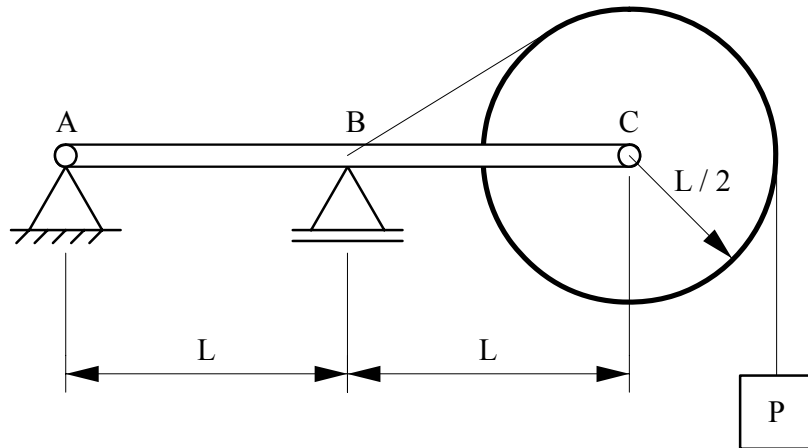
Resposta: $\dot{\omega} = \frac{2(M - \mu m g R)}{m R^2}$;

$$\dot{\omega} = \frac{2 M}{3 m R^2}$$



Questão 12: A polia de raio $L/2$ é ligada à barra ABC de comprimento $2L$, através de uma articulação em C. Um fio flexível e inextensível passa pela polia e tem uma das extremidades presa em B e a outra presa a um bloco de peso P . A estrutura é vinculada por uma articulação em A e por um apoio simples em B. Considerando a barra, a polia e o fio com pesos desprezíveis, determine as reações vinculares em A e B:

Resposta: $X_A = 0$; $Y_A = -\frac{3P}{2}$; $Y_B = \frac{5P}{2}$

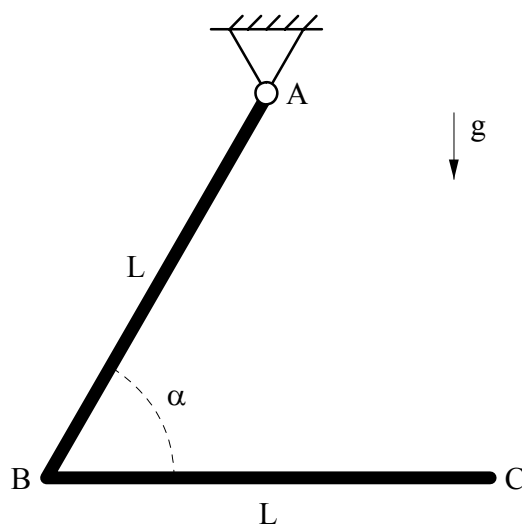


Prova de Transferência de 2003

Questão 13: A barra homogênea ABC de comprimento $2L$ é articulada em A. Determine o valor do ângulo α para que o trecho BC da barra fique paralelo à direção horizontal:

Obs.: Dada a aceleração da gravidade igual a g .

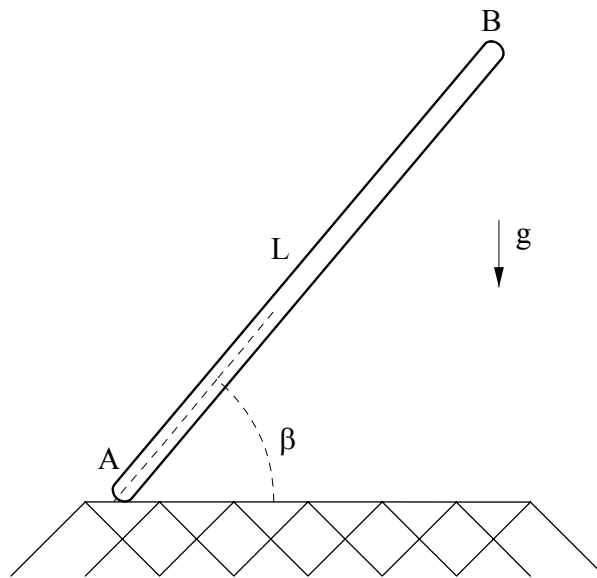
Resposta: $\alpha = \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$



Questão 14: A barra uniforme AB de massa m e comprimento L é liberada do repouso quando $\beta = 60^\circ$. Supondo que o atrito entre a extremidade A e a superfície é suficientemente grande para impedir o escorregamento, determine a aceleração angular da barra logo após ser liberada:

Obs.: Dado a aceleração da gravidade igual a g e o momento de inércia da barra com relação a um eixo de direção normal ao plano da figura e que passa pelo seu baricentro G: $J_G = \frac{mL^2}{12}$.

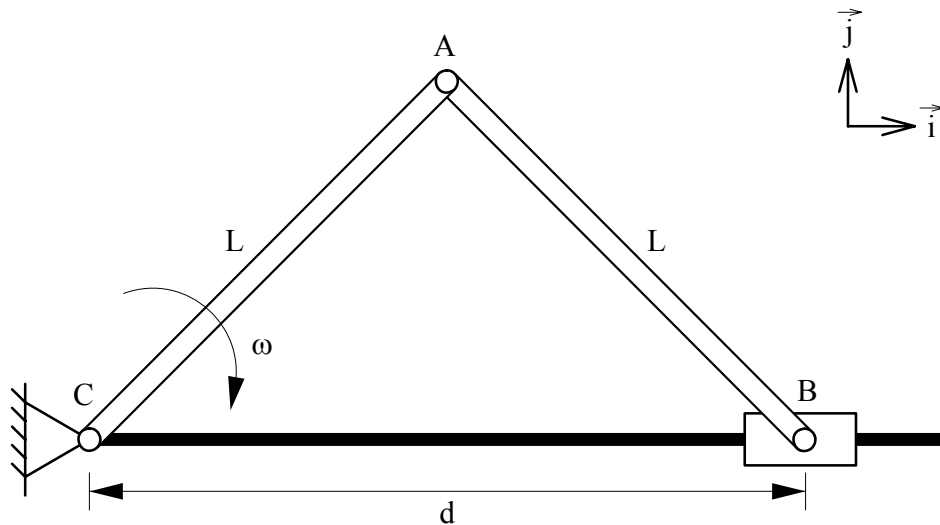
Resposta: $\alpha = -\frac{3g}{4L}$



Questão 15: A extremidade B da barra AB desliza sobre o eixo fixo CB. A barra AB está articulada em A à barra AC que gira com velocidade angular constante ω ao redor da articulação C. As barras AB e AC possuem o mesmo comprimento L . Considere a posição onde a distância BC é $d = \sqrt{2} L$:

- Indicar graficamente o centro instantâneo de rotação da barra AB;
- Determinar a velocidade angular da barra AB:

Resposta: $\vec{\omega}_{AB} = \vec{\omega} \vec{k}$



Prova de Transferência de 2004

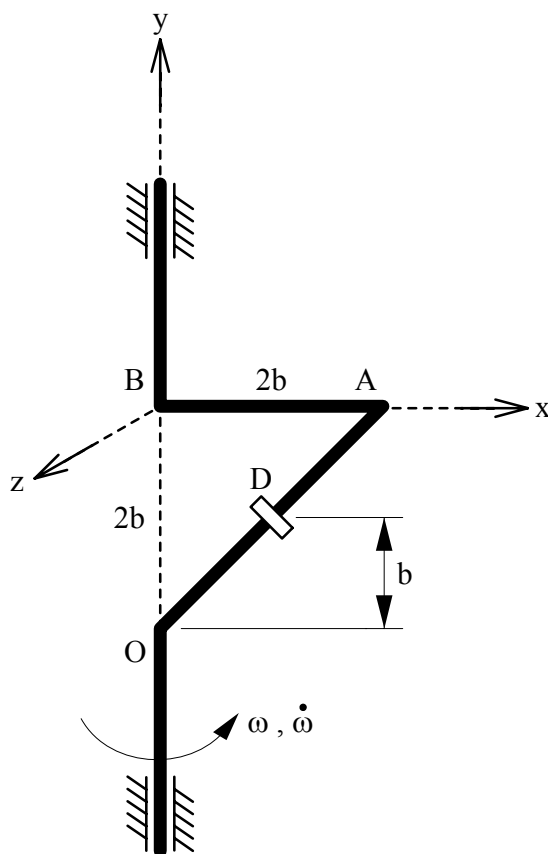
Questão 10: A barra dobrada OAB gira em torno do eixo vertical OB com velocidade e aceleração angulares ω e $\dot{\omega}$, respectivamente, conforme indicado na figura. O anel D desloca-se ao longo da barra, com velocidade v e aceleração \dot{v} relativas à barra, no sentido de O para A. Determine para a posição do anel mostrada na figura:

a) O vetor velocidade absoluta do anel:

b) O vetor aceleração absoluta do anel:

Resposta: $\vec{v}_{D\text{abs}} = \frac{\sqrt{2}v}{2}(\vec{i} + \vec{j}) - \omega b \vec{k}$;

$$\vec{a}_{D\text{abs}} = \left(\frac{\sqrt{2}\dot{v}}{2} - \omega^2 b \right) \vec{i} + \frac{\sqrt{2}\dot{v}}{2} \vec{j} + (-\dot{\omega} b - \sqrt{2}\omega v) \vec{k}$$



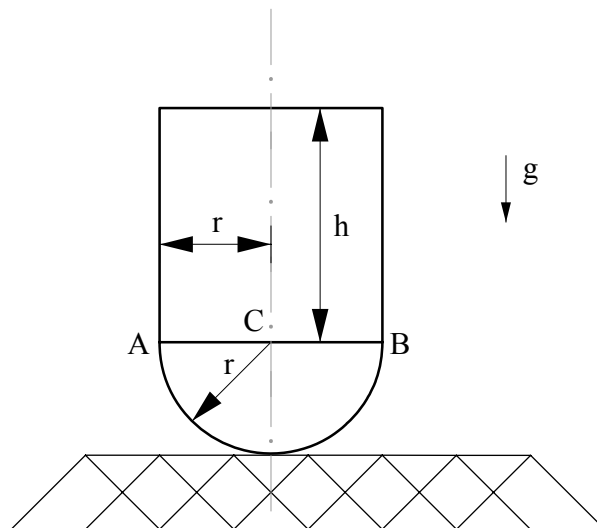
Questão 11: O corpo apresentado na figura é constituído por um cilindro homogêneo de raio r e uma semi-esfera também homogênea de raio r . Os pesos específicos do cilindro e da esfera são iguais. O corpo se apóia sobre um plano horizontal liso conforme a figura. Pede-se:

- Determinar, em função de h e r , a cota vertical do centro de massa (baricentro) do conjunto em relação ao plano horizontal;
- Qual deve ser a posição do baricentro para que o corpo possa permanecer em equilíbrio independentemente da inclinação do eixo de simetria com a vertical?

Obs.: Dada a distância do centro de gravidade da semi-esfera homogênea à sua base igual a $\frac{3r}{8}$.

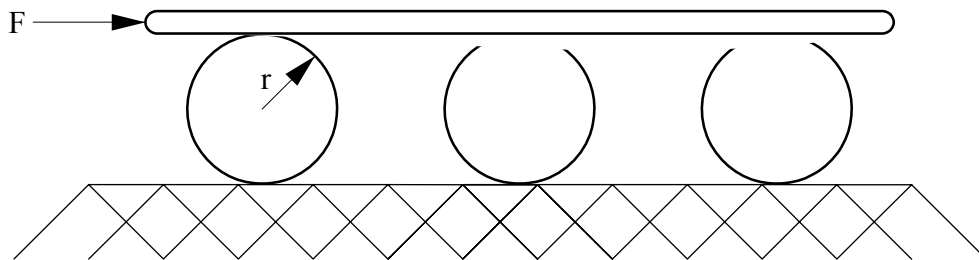
Resposta: $y_G = \frac{\frac{5r^2}{12} + \frac{h^2}{2} + hr}{\frac{2r}{3} + h}$;

O baricentro deve se localizar no ponto C (centro da base da semi-esfera).



Questão 12: Uma barra de massa M apóia-se nos três cilindros de raio r e massa m . Uma força horizontal F atua na barra colocando o sistema em movimento. Não ocorre escorregamento em nenhum contato. Pede-se determinar a aceleração da barra supondo que os cilindros sejam homogêneos com $J_G = \frac{mr^2}{2}$ (momento de inércia de um cilindro em relação ao eixo perpendicular ao plano do problema que passa pelo seu baricentro G):

Resposta: $a_B = \frac{8F}{8M + 9m}$

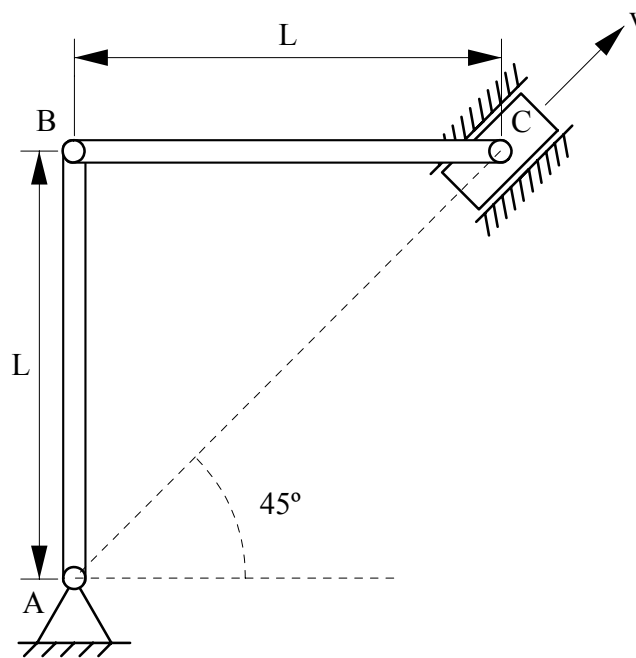


Prova de Transferência de 2005

Questão 10: O bloco deslizando C do mecanismo da figura move-se com uma velocidade constante v . Pede-se determinar, para a posição indicada na figura:

- O CIR (Centro Instantâneo de Rotação) da barra BC, de forma gráfica:
- A velocidade angular da barra BC, ω_{BC} :
- A velocidade do ponto B, v_B :
- A aceleração do ponto B, a_B :

Resposta: $\vec{\omega}_{BC} = \frac{\sqrt{2} v}{2L} \vec{k}$; $\vec{v}_B = \frac{\sqrt{2} v}{2} \vec{i}$; $\vec{a}_B = \frac{v^2}{2L} \vec{i} - \frac{v^2}{2L} \vec{j}$

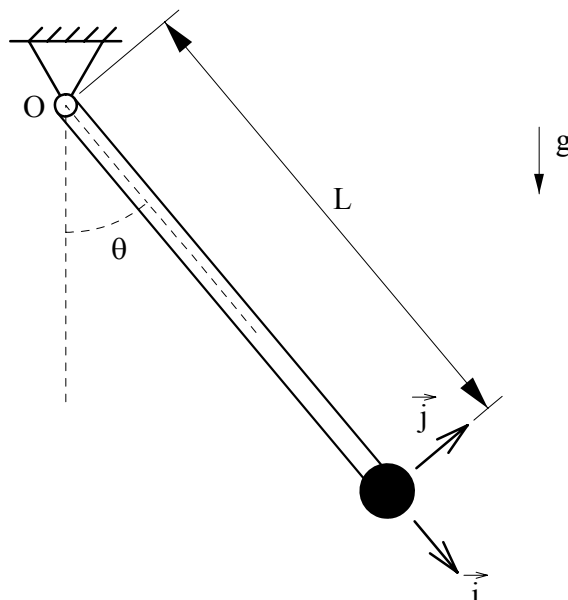


Questão 11: A barra homogênea OA de comprimento L e peso mg, articulada em O, tem em sua extremidade um peso concentrado 2mg. O conjunto parte do repouso na posição horizontal. O momento de inércia da barra em relação ao seu baricentro G é $J_G = \frac{mL^2}{12}$. Pede-se:

- O baricentro do conjunto e o momento de inércia do conjunto em relação a O;
- A velocidade angular e a aceleração angular em função de θ ;
- A aceleração do baricentro do conjunto:

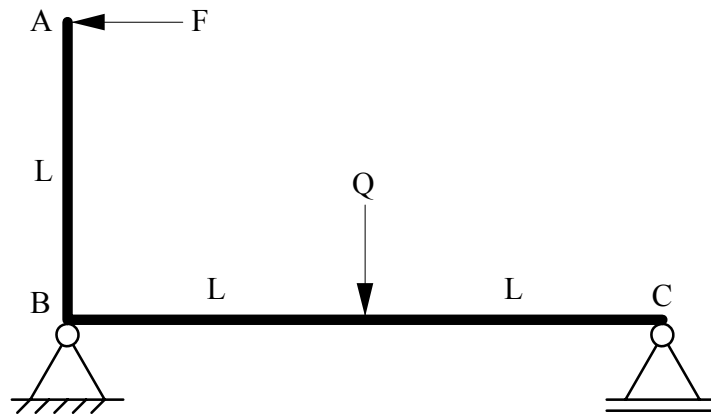
Resposta: $(G - O) = \frac{5L}{6} \vec{i}$; $J_O = \frac{7mL^2}{3}$; $\omega^2 = \frac{15g \cos \theta}{7L}$; $\dot{\omega} = \frac{15g \sin \theta}{14L}$

$$\vec{a}_G = -\frac{25g \cos \theta}{14} \vec{i} - \frac{25g \sin \theta}{28} \vec{j}$$



Questão 12: A barra dobrada homogênea ABC está vinculada por uma articulação em B e por um apoio simples em C, conforme indicado na figura. O trecho AB possui comprimento L e o trecho BC possui comprimento 2L. O peso da barra é desprezível. Calcule as reações vinculares para o carregamento indicado na figura (forças F e Q):

Resposta: $X_B = F$; $Y_B = \frac{Q+F}{2}$; $Y_C = \frac{Q-F}{2}$



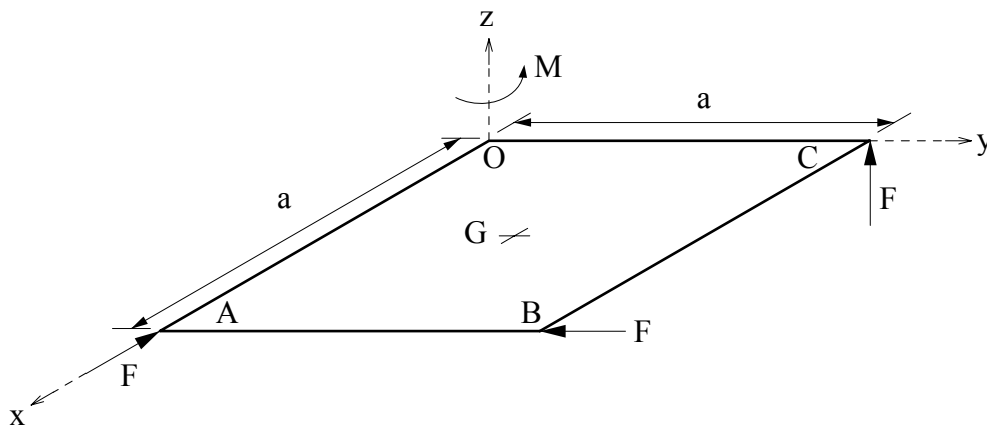
Prova de Transferência de 2006

Questão 13: Dados o sistema de forças e o momento ($\vec{M} = Fa \vec{k}$) aplicados sobre a placa quadrada de peso desprezível e lado a da figura:

- Calcule a resultante do sistema de forças:
- Calcule o momento do sistema de forças em relação ao pólo O:
- Verifique se o sistema de forças é redutível a uma única força:
- Reduza o sistema de forças a uma força aplicada em G e um binário:

Obs.: Os versores \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} são nas direções dos eixos x , y , z respectivamente.

Resposta: $\vec{R} = F(-\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$; $\vec{M}_O = Fa \vec{i}$; Não é redutível ; $\vec{M}_G = \frac{Fa}{2}(\vec{i} + \vec{j})$



Questão 14: Duas esferas homogêneas, externamente idênticas, de igual raio e peso, sendo uma cheia e a outra oca, rolam num plano inclinado. Explique como pode ser identificado utilizando os conceitos da Mecânica, qual é a esfera oca e qual a esfera cheia:

Questão 15: O disco de centro O e raio R rola sem escorregar sobre o plano fixo horizontal, com velocidade angular de módulo ω constante. A barra AB , de comprimento $4R$, é articulada em A no disco e o ponto B escorrega mantendo contato com o plano. Para a posição indicada:

- Indique o CIR (centro instantâneo de rotação) da barra e o CIR do disco:
- Calcule a velocidade vetorial de B :
- Calcule a aceleração vetorial de A :

Resposta: $\vec{v}_B = -2\omega R \vec{i}$; $\vec{a}_A = -\omega^2 R \vec{j}$

