Álgebra Linear
Teoria

Transferência USP

www.transferenciausp.com.br

ÍNDICE

CAPÍTULO 1: SISTEMAS LINEARES E MATRIZES

1.1. Apresentação

Álgebra Linear é o ramo da Matemática que estuda vetores, espaços vetoriais, transformações lineares e sistemas de equações lineares. Espaços vetoriais são um tema central na matemática moderna; assim, a Álgebra Linear é largamente aplicada à álgebra abstrata e análise funcional, possuindo também uma representação concreta em geometria analítica.

A geometria analítica – também chamada geometria de coordenadas – é o estudo da geometria através dos princípios da álgebra. Em geral, é usado o sistema de coordenadas cartesianas para manipular equações para planos, retas, curvas e círculos, geralmente em duas dimensões, mas por vezes também em três ou mais dimensões.

1.2. Sistemas Lineares

Sistemas lineares são sistemas de **m** equações em **n** incógnitas, da forma:

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix}$$

onde os coeficientes a_{ij} e os b_j são números reais. Se algum dos b_i for diferente de zero, o sistema é não-homogêneo; caso contrário, é um sistema homogêneo.

Uma solução do sistema acima é um conjunto ordenado de n números reais $u_1, u_2, \ldots, u_n$, que, quando permutados com as respectivas incógnitas, verificam as **m** identidades:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_j = b_i \qquad\qquad 1 \le i \le m$$

Denota-se um conjunto ordenado de **n** números reais por $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, denominado n-upla de números reais. O conjunto de todas as possíveis n-uplas de números reais é denotado por R^n. Assim:

$$R^n = \{(u_1, \cdots, u_n) \mid u_1, \cdots, u_n \in R\}$$

A questão inicial para um dado sistema é a determinação se o mesmo possui alguma(s) solução(ões) e determiná-las todas, caso existam. A relação entre o número de equações e o número de incógnitas permite três possíveis situações:

1) **Sistema Possível e Indeterminado (SPI):** número de incógnitas maior do que o de equações; possui infinitas soluções possíveis e cada variável podem podem ser alternadamente representadas em função das demais.

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 5$$

$$\left(\frac{5 - u_2 + u_3}{2}, u_2, u_3\right) \quad u_2, u_3 \in R \qquad \text{ou}$$

$$\left(u_1, 5 - 2u_1 + u_3, u_3\right) \quad u_1, u_3 \in R \qquad \text{ou}$$

$$\left(u_1, u_2, 5 - 2u_1 - u_2\right) \quad u_1, u_2 \in R$$

2) Sistema Impossível (SI): número de incógnitas menor do que o de equações; não possui solução.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 2 \\ 3x_1 &= 1 \\ 3x_2 &= 1 \end{aligned}$$

3) Sistema Possível e Determinado (SPD): número de incógnitas igual ao de equações; possui uma única solução determinada.

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 8 \\ 3x_1 + x_2 &= 5 \end{aligned}\right\} \quad (1, 2)$$

Todo sistema homogêneo, mesmo SI, possuirá a solução trivial (0 , . . . , 0).

Dado um sistema linear, o seu conjunto solução pode ser igualmente determinado (ou descrito) por inúmeros outros sistemas de equações, denominados sistemas equivalentes. Por exemplo, os sistemas a seguir são equivalentes entre si, pois produzem o mesmo conjunto solução:

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 2 \\ \\ x_1 - x_2 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 &= 4 \\ \\ 7x_1 - x_2 &= 8 \\ 3x_1 + x_2 &= 4 \end{aligned}\right\} S = \{(1, 1)\}$$

Pela equivalência de sistemas, podem-se aplicar operações elementares às suas equações, a fim de simplificá-las e facilitar sua resolução: permutar suas equações (alterar sua ordem), multiplicá-las por um múltiplo não-nulo e/ou adicioná-las entre si.

$$\begin{matrix} x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 \end{matrix} \sim \begin{matrix} x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ -4x_2 + 7x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 \end{matrix} \sim \begin{matrix} x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ -4x_2 + 7x_3 = -1 \\ -2x_2 + 5x_3 = 3 \end{matrix} \sim \begin{matrix} x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ -4x_2 + 7x_3 = -1 \\ 3x_3 = 7 \end{matrix}$$

A última forma equivalente do sistema inicial é denominada sistema escalonado e, pela resolução sucessiva de sua última linha e aplicação do resultado na linha imediatamente acima, pode-se calcular sua solução de forma mais simples.

$$\begin{matrix} x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ -4x_2 + 7x_3 = -1 \\ 3x_3 = 7 \end{matrix} \sim \begin{matrix} x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ -4x_2 + 7x_3 = -1 \\ x_3 = 7/3 \end{matrix} \sim \begin{matrix} x_1 + x_2 - 14/3 = 1 \\ -4x_2 + 49/3 = -1 \\ x_3 = 7/3 \end{matrix} \sim \begin{matrix} x_1 + x_2 = 17/3 \\ x_2 = 13/3 \\ x_3 = 7/3 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{matrix} x_1 + 13/3 = 17/3 \\ x_2 = 13/3 \\ x_3 = 7/3 \end{matrix} \sim \begin{matrix} x_1 = 4/3 \\ x_2 = 13/3 \\ x_3 = 7/3 \end{matrix} \qquad S = \{(4/3, 13/3, 7/3)\}$$

1.3. Matrizes

Um sistema de **m** equações e **n** incógnitas pode ser reescrito na forma de uma matriz $m \times n$ (m linhas por n colunas) dos coeficientes a_{ij}:

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix} \quad \rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

As variáveis x_j podem ser reescritas como uma n-upla vertical (matriz transporta da horizontal) e os coeficientes b_i como uma m-upla vertical, portanto o sistema assume a forma:

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^t \qquad b = (b_1, b_2, \cdots, b_m)^t$$

$$A \cdot x = b \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

As operações de adição e multiplicação por número real que foram definidas para $M_{m,n}(R)$ possuem as seguintes propriedades:

A1) Associatividade: $A + (B + C) = (A + B) + C \quad , \quad \forall A, B, C \in M_{m,n}(R)$

A2) Comutatividade: $A + B = B + A \quad , \quad \forall A, B \in M_{m,n}(R)$

A3) Elemento Neutro: $0 + A = A \quad , \quad \forall A, 0 \in M_{m,n}(R)$

A4) Existência de Oposto: $A - A = 0 \quad , \quad \forall A, 0 \in M_{m,n}(R)$

M1) Associatividade: $\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha \cdot \beta) \cdot A \quad , \quad \forall A \in M_{m,n}(R) \text{ e } \forall \alpha, \beta \in R$

M2) Distributividade: $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B \quad , \quad \forall A, B \in M_{m,n}(R) \text{ e } \forall \alpha \in R$

M3) Distributividade: $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A \quad , \quad \forall A \in M_{m,n}(R) \text{ e } \forall \alpha, \beta \in R$

M4) Elemento Neutro: $1 \cdot A = A \quad , \quad \forall A \in M_{m,n}(R)$

A operação de produto de matrizes em $M_n(R)$ possui as seguintes propriedades:

AL1) Associatividade: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C \quad , \quad \forall A, B, C \in M_n(R)$

AL2) Associatividade: $\alpha \cdot (A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B \quad , \quad \forall A, B \in M_n(R) \text{ e } \forall \alpha \in R$

AL3) Distributividade: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \quad , \quad \forall A, B, C \in M_n(R)$

AL4) Distributividade: $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A \quad , \quad \forall A, B, C \in M_n(R)$

AL5) Elemento Neutro: $I \cdot A = A \cdot I = A \quad , \quad \forall A, I \in M_n(R)$

A matriz nula 0 e a matriz identidade I possuem as seguintes representações:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

A transposição de uma matriz implica na permuta de seus elementos a_{ij} para as posições a_{ji}:, transformando uma matriz $M_{m,n}$ em $M_{n,m}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} \end{pmatrix}$$

A transposição de matrizes também apresenta algumas propriedades:

1) $(A+B)^t = A^t + B^t \quad , \quad \forall A, B \in M_{m,n}(R)$

2) $(\alpha \cdot A)^t = \alpha \cdot A^t \quad , \quad \forall A \in M_{m,n}(R) \text{ e } \forall \alpha \in R$

3) $(A^t)^t = A \quad , \quad \forall A \in M_{m,n}(R)$

4) $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t \quad , \quad \forall A, B \in M_{m,n}(R)$

1.4. Inversão de Matrizes pelo Método de Gauss

Uma matriz $A \in M_n(R)$ é inversível se existir uma matriz $A^{-1} \in M_n(R)$ tal que $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$. Se A for inversível, o sistema $A \cdot x = b$ possui solução única (SPD).

Para determinar a matriz inversa de A, deve-se posicionar a matriz A à esquerda da matriz identidade I e escaloná-las simultaneamente até que se torne a matriz identidade; a antiga matriz I será, então, a matriz desejada A^{-1}. Se a matriz A não se tornar I, ela não é inversível.

Este método é conhecido como método de Gauss:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -7 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -7 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -7 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -7 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 2/3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 16/3 & -10/3 & 14/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 2/3 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 5/3 & -2/3 & 4/3 \\ 0 & 1 & 0 & 4/3 & -5/6 & 7/6 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 2/3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 1 & 0 & 4/3 & -5/6 & 7/6 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 2/3 \end{array}\right] \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 & 1/6 \\ 4/3 & -5/6 & 7/6 \\ 1/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

1.5. Determinantes

O determinante de uma matriz quadrada é uma função que associa cada matriz a um escalar, resultante dos coeficientes a_{ij} da matriz. Para que o sistema de equações representado pela matriz possua solução única (SPD) é necessário que seu determinante seja diferente de 0.

O cálculo do determinante de uma matriz 1 x 1 é igual ao valor de seu único elemento.

O cálculo do determinante de uma matriz 2 x 2 é simples, bastando multiplicar os coeficientes da diagonal que desce à direita e subtrair o produto dos coeficientes da diagonal que desce à esquerda:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det A = |A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot (-3) = 7$$

Para uma matriz 3 x 3, o procedimento é similar ao da matriz 2 x 2:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 10 \\ -1 & 1 & 10 \\ 0 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$
$$\det A = 1 \cdot 1 \cdot 10 + 3 \cdot 10 \cdot 0 + 10 \cdot (-1) \cdot 2 - 10 \cdot 1 \cdot 0 - 1 \cdot 10 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) \cdot 10 = 10 + 0 - 20 + 0 - 20 + 30$$
$$\det A = 0$$

Ou pode-se recorrer à Regra de Sarrus para facilitar o cálculo, somando os produtos dos coeficientes das 3 diagonais que descem à direita – repetindo as duas primeiras colunas ao lado da matriz original para facilitar o procedimento – e subtraindo os produtos dos coeficientes das 3 diagonais que descem à esquerda:

$$\begin{array}{cc|ccc|cc} & & 1 & 3 & 10 & 1 & 3 & \\ & & -1 & 1 & 10 & -1 & 1 & \\ & & 0 & 2 & 10 & 0 & 2 & \\ 0 & -20 & 30 & & & 10 & 0 & -20 \end{array}$$

det A = | A | = 0 –20 + 30 + 10 + 0 – 20 =0

Para matrizes a partir de 4 x 4, pode-se reduzir sucessivamente sua ordem da matriz até atingir a ordem 3, escolhendo quatro cofatores – que multiplicarão os quatro determinantes formados por matrizes que excluíram a respectiva linha e coluna às quais pertencem – bastando calcular os determinantes das matrizes de ordem 3 criadas e somá-los ao final:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

escolhendo a_{11} , a_{12} , a_{13} e a_{14} como cofatores.

$$\left| A \right| = a_{11} \cdot \det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} + a_{21} \cdot \det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} + a_{31} \cdot \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} + a_{41} \cdot \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

Este procedimento é infinitamente recursivo, porém a dificuldade em aplicá-lo também aumenta aceleradamente, tornando impraticável o cálculo manual em matrizes acima da ordem 5.

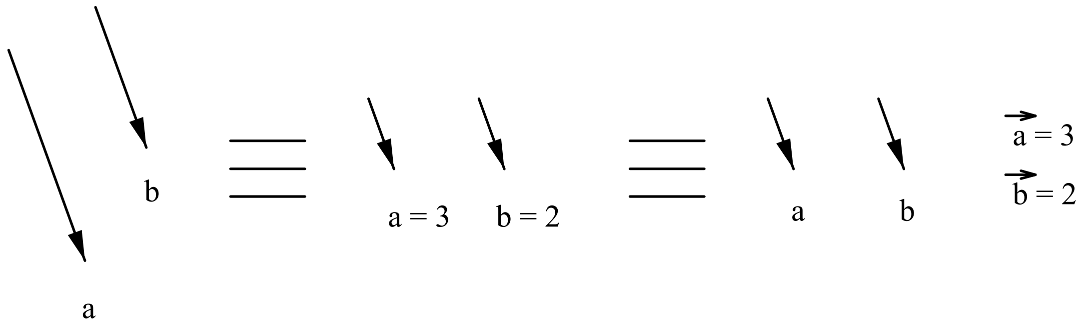
Se uma linha ou coluna inteira da matriz for nula, o determinante necessariamente será nulo.

CAPÍTULO 2: VETORES, RETAS E PLANOS

2.1. Vetores

Muitas grandezas físicas (como velocidade, força, deslocamento e impulso), para serem completamente identificadas, necessitam da orientação de direção e sentido conjuntamente à magnitude de sua intensidade. Estas grandezas são chamadas grandezas vetoriais ou vetores.

Geometricamente, vetores são representados por segmentos (de retas) orientados no plano ou no espaço. Um vetor é representado por uma seta que possui a direção em que se desenvolve e aponta para o sentido da ação. Pode ser desenhado em proporção a uma escala definida ou ser meramente ilustrativo, representado por uma seta acompanhada pelo valor numérico da intensidade (ou uma incógnita que represente a intensidade na forma literal).



Como se pode observar, os vetores devem ser nomeados por letras (a, b, c,...) ou pelos seus pontos inicial e final (AB, ponto inicial precede o final) e podem ser representados por notação matemática acompanhada por seu símbolo característico: uma seta sobreposta à letra, por exemplo $\vec{a}$ ou $\vec{AB}$. Para fins de simplificação de notação, a seta sobre a letra ou par de pontos pode ser abolida ou transformada em um traço ($\overline{AB}$).

No estudo aqui pretendido, o sistema de coordenadas adotado será o sistema de coordenadas cartesianas, estabelecido por três eixos coordenados ortogonais entre si (x , y , z) e a representação de vetores neste sistema dá-se pelas intensidades (projeções) do vetor em cada eixo, agrupadas em ordem (x , y , z) no interior de um "parênteses": $\vec{a} = (2,0,-3)$; $\vec{CD} = (1,1,2)$; $u = (u_1, u_2, u_3)$.

O comprimento (ou módulo) ou norma de um vetor é igual à distância entre os dois pontos que une e pode ser calculado pela aplicação do Teorema de Pitágoras para esta distância:

$$u = (u_1, u_2, u_3) \Rightarrow \|u\| = \sqrt{u_1^{\,2} + u_2^{\,2} + u_3^{\,2}}$$

$$\left.\begin{array}{l} A = (1,2,1) \\ B = (2,-2,0) \end{array}\right\} \quad AB = (2-1, -2-2, 0-1) = (1,-4,-1)$$

$$\|AB\| = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+16+1} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

Um vetor é denominado unitário quando seu módulo é igual a 1.

Diversas operações podem ser aplicadas aos vetores. Por exemplo, para o par de vetores $u=(u_1,u_2,u_3)$ e $v=(v_1,v_2,v_3)$ e o número real λ:

a) **Soma:** $u+v=(u_1+v_1,u_2+v_2,u_3+v_3)$

b) Subtração ou diferença: $u-v=(u_1-v_1,u_2-v_2,u_3-v_3)$

c) Multiplicação pelo escalar λ: $\lambda\,u=(\lambda\,u_1,\lambda\,u_2,\lambda\,u_3)$

d) Vetor nulo: $\vec{0}=(0,0,0)$

2.2. Produtos Escalar, Vetorial e Misto

O produto escalar entre dois vetores $u=(u_1,u_2,u_3)$ e $v=(v_1,v_2,v_3)$ é definido da seguinte forma:

$$u\bullet v=u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2+u_3\cdot v_3 \qquad \text{ou} \qquad u\bullet v=\|u_1\|\cdot\|v_1\|\cdot\cos\alpha$$

onde α é o ângulo formado pelos dois vetores

$$\left.\begin{array}{l} r=(-2,3,0) \\ s=(4,1,1) \end{array}\right\}\; r\bullet s=-2\cdot4+3\cdot1+0\cdot1=-8+3+0=-5$$

O produto escalar apresenta as seguintes propriedades:

a) $u\bullet v=v\bullet u$

b) $(u+w)\bullet v=u\bullet v+w\bullet v$

c) $(\lambda u)\bullet v=\lambda(u\bullet v)$

d) $u\bullet u=0$, se e somente se $u=0$

e) $\|u\|^2=u\bullet u$

f) $u\bullet v=0$, se $u\perp v$ (u , v são ortogonais entre si)

O produto escalar pode ser aplicado para determinar a projeção de um vetor sobre outro: projeção ortogonal de um vetor v sobre um vetor u é a componente deste último sobre a direção determinada pelo primeiro vetor, na forma de um novo vetor (paralelo ao vetor v):

$$\pi_u(v)=\left(\frac{u\bullet v}{u\bullet u}\right)\cdot u$$

$$\left.\begin{array}{l} r=(-2,3,0) \\ s=(4,1,1) \end{array}\right\}\; \pi_r(s)=\left(\frac{-2\cdot4+3\cdot1+0\cdot1}{-2\cdot-2+3\cdot3+0\cdot0}\right)\cdot(-2,3,0)=\frac{-5}{10}\cdot(-2,3,0)=(1,-3/2\,,0)$$

O produto vetorial entre dois vetores $u=(u_1,u_2,u_3)$ e $v=(v_1,v_2,v_3)$ é calculado pelo determinante da seguinte matriz:

$$u \wedge v = u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \qquad \text{ou} \qquad u \wedge v = u \times v = \|u_1\| \cdot \|v_1\| \cdot \text{sen}\alpha$$

onde i , j , k são os vetores unitários de cada eixo coordenado (x , y , z)

$$\left.\begin{matrix} a = (1,4,2) \\ b = (3,0,-2) \end{matrix}\right\} \quad a \wedge b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -8i + 6j + 0k - 0i - (-2j) - 12k = -8i + 8j - 12k$$

O produto vetorial apresenta as seguintes propriedades:

a) O vetor resultante $u \wedge v$ é ortogonal aos vetores u , v originais.

b) $u \wedge v = -v \wedge u$ (a inversão na ordem dos vetores inverte o sinal do produto)

c) $u \wedge u = 0$

d) $(u + w) \wedge v = u \wedge v + w \wedge v$

e) $(\lambda u) \wedge v = \lambda(u \wedge v)$

f) $u \wedge v = 0$, se e somente se $u \,//\, v$ (u , v são paralelos entre si)

O módulo do vetor resultante do produto vetorial é numericamente igual à área de um paralelogramo formado pelos dois vetores.

Por exemplo, para o par de vetores $u = (1,2,3)$ e $v = (2,1,1)$, a área do paralelogramo é igual a:

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2i + 6j + k - 3i - j - 4k = -i + 5j - 3k$$

$$\|u \wedge v\| = \sqrt{(-1)^2 + 5^2 + (-3)^2} \Rightarrow \|u \wedge v\| = \sqrt{1 + 25 + 9} = \sqrt{35} \Rightarrow \text{Área} = \sqrt{35}$$

O produto misto entre três vetores $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$ é calculado pelo determinante da seguinte matriz:

$$u \bullet (v \wedge w) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

O produto misto apresenta as seguintes propriedades:

a) $u \bullet (u \wedge v) = u \bullet (v \wedge u) = v \bullet (u \wedge u) = u \bullet (v \wedge v) = 0$

b) $u \bullet (v \wedge w) = w \bullet (u \wedge v) = v \bullet (w \wedge u)$ (troca dos vetores em "sentido horário")

c) $u \bullet (v \wedge w) = -u \bullet (w \wedge v) = v \bullet (w \wedge u) = -v \bullet (u \wedge w) = w \bullet (u \wedge v) = -w \bullet (v \wedge u)$

Os três produtos possuem uma interpretação numérica e geométrica em ordem crescente de complexidade:

- O produto escalar resulta num número puro (escalar).
- O produto vetorial resulta num vetor perpendicular aos dois vetores originais e seu módulo é numericamente igual à área do paralelogramo que seria formado pelos originais (completado por dois vetores paralelos a eles).
- O produto misto resulta num número puro e de módulo numericamente igual ao volume do paralelepípedo formado pelos três vetores originais (um seria o comprimento, outro é a largura e o último, a altura deste sólido geométrico).

2.3. Equações da Reta e do Plano

Uma reta pode ser representada de diversas formas, das quais são mais comuns:

1) A equação vetorial da reta r, que contém o ponto $P = (p_1, p_2, p_3)$ e é paralela ao vetor $v = (v_1, v_2, v_3)$ – vetor diretor da reta – é:

$$X = P + \lambda \cdot v$$

onde λ é um número real

2) A equação paramétrica da mesma reta r é escrita da seguinte forma:

$$x = p_1 + \lambda \cdot v_1 \quad , \quad y = p_2 + \lambda \cdot v_2 \quad , \quad z = p_3 + \lambda \cdot v_3$$

Uma reta pode ser determinada a partir de um par de seus pontos P e Q, bastando que o segmento PQ seja o vetor diretor desta reta: $X = P + \lambda \cdot PQ$.

A interseção de duas retas r , r' ocorre quando há um ponto em comum para ambas. A verificação da interseção pode ser avaliada pelo sistema:

$$\left.\begin{array}{l} r : X = P + \lambda \cdot v \\ r' : X = Q + \sigma \cdot u \end{array}\right\} \quad P + \lambda \cdot v = Q + \sigma \cdot u$$

Se este sistema não possuir solução, as retas não se interceptam; se apresentar uma única solução, as retas se cruzam em um ponto; se apresentar infinitas soluções possíveis, as retas se sobrepõem.

Exemplos:

- As retas $r_1 = (1+\lambda, 2+\lambda, 3+\lambda)$ e $r_2 = (1-\sigma, 1+2\sigma, 5-\sigma)$ interceptam-se?

  $x \rightarrow \quad 1 + \lambda = 1 - \sigma \Rightarrow \lambda = -\sigma$

  $y \rightarrow \quad 2 + \lambda = 1 + 2\sigma \Rightarrow \lambda = -1 + 2\sigma \Rightarrow -\sigma = -1 + 2\sigma \Rightarrow 3\sigma = 1 \Rightarrow \sigma = 1/3$

  $z \rightarrow \quad 3 + \lambda = 5 - \sigma \Rightarrow 3 - 1/3 = 5 - 1/3 \Rightarrow 8/3 \neq 14/3$

  Portanto, o sistema não tem solução e as retas não se cruzam.

- As retas $r_1 = (3+\lambda, 4+\lambda, 3+\lambda)$ e $r_2 = (3-\sigma, 4-2\sigma, 3)$ interceptam-se?

  $x \rightarrow \quad 3+\lambda = 3-\sigma \Rightarrow \lambda = -\sigma$

  $y \rightarrow \quad 4+\lambda = 4-2\sigma \Rightarrow \lambda = -2\sigma \Rightarrow -\sigma = -2\sigma \Rightarrow 3\sigma = 0 \Rightarrow \sigma = 0$

  $z \rightarrow \quad 3+\lambda = 3 \Rightarrow 3+0 = 3 \Rightarrow 3 = 3$

  Portanto, o sistema tem uma única solução. O ponto de cruzamento pode ser determinado ao aplicar o valor de um dos coeficientes (λ e σ) sobre a respectiva equação da reta:

  $I = (3+\lambda, 4+\lambda, 3+\lambda) = (3+0, 4+0, 3+0) = (3,4,3) = (3-0, 4-2\cdot 0, 3) = (3-\sigma, 4-2\sigma, 3)$

Duas retas serão paralelas se seus vetores forem paralelos entre si ($u = \alpha \cdot v$, onde α é número real).

Um plano também apresenta diferentes tipos de equações para representá-lo:

1) A equação vetorial do plano π possui a forma:

$$X = P + \lambda \cdot u + \sigma \cdot v$$

onde $P = (p_1, p_2, p_3)$ é um ponto do plano, $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$ são vetores diretores (paralelos) ao plano π e λ e σ são números reais.

2) A equação paramétrica do mesmo plano apresenta-se como:

$$x = p_1 + \lambda \cdot u_1 + \sigma \cdot v_1 \quad , \quad y = p_2 + \lambda \cdot u_2 + \sigma \cdot v_2 \quad , \quad z = p_3 + \lambda \cdot u_3 + \sigma \cdot v_3$$

3) A equação cartesiana do plano π possui a forma:

$$\pi : a\,x + b\,y + c\,z = d$$

O vetor $n = (a,b,c)$ é o vetor normal de π, ortogonal a qualquer vetor pertencente ou paralelo a π.

Um plano pode ser construído a partir de três pontos, duas retas que se interceptam, duas paralelas entre si ou uma reta e um ponto não contido nela. O procedimento para determiná-lo é o mesmo em qualquer um dos quatro casos: definir um ponto como base e dois vetores paralelos ao plano, calculando o vetor normal a ambos e que fornecerá os coeficientes (a , b , c) do plano.

Por exemplo, a equação cartesiana do plano paralelo aos vetores $u = (1,2,3)$ e $v = (2,1,1)$ e que contém o ponto $A = (1,2,3)$ é:

$$n = u \wedge v = (1,2,3) \wedge (2,1,1) = (i,2j,3k) \wedge (2i,j,k) = 0 + k - j - 4k + 0 + 2i + 6j - 3i + 0 = -i + 5j - 3k$$
$$n = u \wedge v = (-1,5,-3) = (1,-5,3)$$

A inversão do vetor n é possível, pois um plano apresenta dois vetores normais, opostos entre si.

Logo, a equação cartesiana apresentará a forma: $\pi : x - 5y + 3z = d$

O ponto A, aplicado à equação anterior, definirá o valor do coeficiente d:

$\pi : 1 - 5\cdot 2 + 3 \cdot 3 = d \Rightarrow 1 - 10 + 9 = d \Rightarrow d = 0$

Portanto, a equação cartesiana do plano π é: $\pi : x - 5y + 3z = 0$

Uma reta possui também sua descrição em forma cartesiana, porém apenas pode ser expressa em função da interseção de dois planos que a contêm, portanto, será expressa como um par de equações cartesianas de planos.

Por exemplo, r é a reta contida pelos planos $x - y + z = 0$ e $2x - y + 2z = 1$.

2.4. Distâncias entre Pontos, Retas e Planos

Dado um ponto P e uma reta r, a distância do ponto P à reta r é o menor comprimento dos segmentos PR onde R é um ponto qualquer da reta; este comprimento mínimo é atingido quando o vetor PR é ortogonal ao vetor diretor da reta, ou seja, quando seu produto escalar for nulo.

A distância entre um ponto P e uma reta r (cujo vetor diretor é v) pode ser calculada pela seguinte expressão:

$$d_{Pr} = \frac{\|PR \wedge v\|}{\|v\|}$$

onde PR é o vetor formado pelo ponto P dado e por um ponto R qualquer da reta r. A presença do produto vetorial na expressão é coerente com o conceito de distância mínima (ortogonal à reta).

Por exemplo, a distância entre o ponto $P = (1,0,1)$ e a reta $r = (t,2t,3)$ é igual a:

Escolhendo um ponto qualquer da reta ($R \in r$): $R = (0,0,3)$

$$PR = (0,0,3) - (1,0,1) = (-1,0,2)$$

$$r = (t,2t,3) \Rightarrow v = (1,2,0)$$

$$d = \frac{\|(-1,0,2) \wedge (1,2,0)\|}{\|(1,2,0)\|} = \frac{\|(-i,0,2k) \wedge (i,2j,0)\|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2}} = \frac{\|0 - 2k + 0 + 0 + 0 + 0 + 2j - 4i + 0\|}{\sqrt{1+4+0}}$$

$$d = \frac{\|-4i + 2j - 2k\|}{\sqrt{5}} = \frac{\|(-4,2,-2)\|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{(-4)^2 + 2^2 + (-2)^2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{16+4+4}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{24} \cdot \sqrt{5}}{5} = \frac{2\sqrt{30}}{5}$$

A distância entre um ponto e um plano é o menor comprimento dos segmentos PR onde R é um ponto do plano; este comprimento mínimo também é atingido quando o vetor PR é ortogonal ao plano e, conseqüentemente paralelo ao vetor normal deste plano. A projeção do vetor PR sobre o vetor normal n unitário será igual à distância entre P e o plano π:

$$d_{P\pi} = \|(PR \bullet n_{\text{unitário}}) \cdot n_{\text{unitário}}\|$$

Por exemplo, a distância entre o ponto $P = (1,0,1)$ e o plano $\pi : x + 2y - z = 1$ é igual a:

Escolhendo um ponto qualquer do plano ($R \in \pi$): $R = (1,0,0)$

$$PR = (1,0,0) - (1,0,1) = (0,0,-1)$$

$$n = (1,2,-1) \Rightarrow \|n_{\text{unitário}}\| = 1 \Rightarrow n_{\text{unitário}} = \frac{(1,2,-1)}{\|(1,2,-1)\|} = \frac{(1,2,-1)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{(1,2,-1)}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{(1,2,-1)}{\sqrt{6}}$$

$$d = \left\| \left[(0,0,-1) \bullet \left(\frac{(1,2,-1)}{\sqrt{6}} \right) \right] \cdot \left(\frac{(1,2,-1)}{\sqrt{6}} \right) \right\| = \left\| \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \left(\frac{(1,2,-1)}{\sqrt{6}} \right) \right\| = \left\| \frac{(1,2,-1)}{6} \right\| = \frac{1}{6}\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}$$

$$d = \frac{1}{6}\sqrt{1+4+1} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

A distância entre uma reta r e um plano π é a menor das distâncias entre os pontos P da reta r e Q do plano π; obviamente, se a reta e o plano se interceptam a distância é nula.

Seja n um vetor normal ao plano π e v um vetor diretor da reta r. Há duas possibilidades:

1) A reta é paralela ao plano ($n \bullet v = 0$): basta escolher um ponto qualquer da reta (pois as distâncias de todos os pontos ao plano serão iguais) e calcular a distância como a distância de um ponto ao plano (vista anteriormente).

2) A reta não é paralela ao plano ($n \bullet v \neq 0$): a distância é nula, pois os elementos interceptam.

A distância entre dois planos π e ρ é a menor das distâncias entre pontos P de π e Q de ρ. Sejam n e m os vetores normais dos planos π e ρ, respectivamente. Existirão duas possibilidades:

1) Os planos são paralelos entre si: portanto, a distância entre eles será constante e basta escolher um ponto de um deles e calcular sua distância como de ponto a plano.

2) Os planos não são paralelos entre si: portanto, se interceptarão e a distância entre eles será nula.

A distância entre duas retas r e s é a menor das distâncias entre pontos P de r e Q de s; obviamente se elas se interceptarem, a distância é nula.

Sejam $P \in r$ e $Q \in s$ e u e v os vetores diretores das retas r e s, respectivamente. O produto misto entre o vetor PQ e os vetores diretores de ambas as retas será igual à distância entre elas, dividido pelo módulo do vetor normal ao plano formado pelas retas ($n = u \wedge v$):

$$d_{rs} = \frac{|PQ \bullet (u \wedge v)|}{\|u \wedge v\|}$$

Se este produto for nulo, as retas se interceptam e a distância entre elas é nula.

Por exemplo, a distância entre as retas $r = (t, 1+t, 2t)$ e $s = (t, t, 1)$ vale:

Os vetores diretores são $u = (1,1,2)$ e $v = (1,1,0)$, respectivamente.

Escolhendo um ponto $P = (0,1,0) \in R$ e um ponto $Q = (0,0,1) \in R$.

$$PQ = (0,0,1) - (0,1,0) = (0,-1,1)$$

$$d = \frac{|(0,-1,1) \bullet [(1,1,2) \wedge (1,1,0)]|}{\|(1,1,2) \wedge (1,1,0)\|} = \frac{|(0,-1,1) \bullet (-2,2,0)|}{\|(-2,2,0)\|} = \frac{|-2|}{\sqrt{4+4+0}} = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Caso as retas sejam paralelas, basta calcular a distância como entre um ponto (um ponto qualquer, pertencente a uma das retas) e uma reta (a outra reta, que não contém o ponto).

CAPÍTULO 3: ESPAÇOS VETORIAIS

3.1. Espaços e Subespaços Vetoriais

Um espaço vetorial é uma estrutura $(V, +, \cdot)$, formada por um conjunto V de elementos, uma operação + de adição de elementos de V e uma operação . de multiplicação de elementos de V por escalares de um corpo K (conjunto de escalares – números puros), satisfazendo às propriedades ($u, v \in V$ e λ e μ são números reais):

a) Associativa da adição: $(u+v)+w = u+(v+w)$

b) Elemento neutro da adição: $0+u = u$

c) Elemento oposto da adição: $u+(-u) = 0$

d) Comutativa da adição: $u+v = v+u$

e) Associativa da multiplicação: $(\lambda\cdot\mu)\cdot u = \lambda\cdot(\mu\cdot u)$

f) Distributiva da multiplicação: $\lambda\cdot(u+v) = \lambda\cdot u+\lambda\cdot v$

g) Distributiva da multiplicação: $(\lambda+\mu)\cdot u = \lambda\cdot u+\mu\cdot u$

h) Elemento neutro da multiplicação: $1\cdot u = u$

Os espaços vetoriais aqui abordados serão Espaços Vetoriais Euclidianos, que respeitam as propriedades anteriores e incluem uma propriedade adicional, denominada produto interno: produto interno é uma função de dois vetores que satisfaz determinados axiomas (hipóteses admitidas sem necessidade de demonstração); o produto escalar é um caso especial de produto interno.

Exemplos de espaços vetoriais:

- Todo corpo K é um espaço vetorial sobre o próprio corpo K com as operações usuais de adição e multiplicação de K.
- O corpo R dos números reais é um espaço vetorial sobre o corpo Q dos números racionais com as operações de adição e multiplicação de R.
- O conjunto $M_n(K)$ das matrizes quadradas de ordem n com elementos de um corpo K é um espaço vetorial sobre K.
- O conjunto P[K] de todas as funções polinomiais da forma: $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$

  onde $a_i \in K\ (i = 0,1,2,\cdots,n)$ é um espaço vetorial sobre o corpo K.
- O conjunto $F(R) = \{f : R \to R\}$ das funções reais cujo domínio é o conjunto dos números reais é um espaço vetorial sobre R.
- O conjunto $F([a,b],R) = \{f : [a,b] \to R\}$ das funções reais cujo domínio é o intervalo fechado [a , b] é um espaço vetorial sobre R.

Um subespaço vetorial é um subconjunto de um espaço vetorial, não-vazio ($S \neq \{\varnothing\}$) e que contenha, pelo menos, o vetor nulo (0), respeitando as propriedades anteriores de adição e multiplicação; ou seja, um subespaço é um espaço completo em si mesmo, porém contido em um espaço vetorial maior.

Os elementos resultantes das operações de adição e multiplicação dos elementos de S entre si e entre estes e os elementos do corpo K deverão obrigatoriamente pertencer a S; em caso contrário, S não será um subespaço vetorial. Em resumo, isto significa que:

1) Se $u, v \in S$, então $(u+v) \in S$.

2) Se $k \in K$ e $u \in S$, então $(k \cdot u) \in S$.

Um exemplo de subespaço é o corpo Q dos números racionais em relação ao corpo R dos números reais, que é, por sua vez, um subespaço do corpo C dos números complexos.

3.2. Combinação Linear de Vetores

Dada um conjunto de vetores $u = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, uma combinação linear dos vetores de u é um vetor v da forma:

$$v = \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \ldots + \lambda_n \cdot u_n$$

onde λ_1, λ_2, ... , λ_n são números reais

Exemplos:

- O vetor $v = (1,1,4)$ é uma combinação linear dos vetores (i, j, k), pois $v = 1i + 1j + 4k$
- O vetor $v = (1,1,4)$ será também uma combinação linear dos vetores $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (1,1,0)$ e $v_3 = (0,1,1)$, se existirem coeficientes a, b, c, tais que v possa ser "construído" por v_1, v_2, v_3:

  $$\begin{array}{lll} (1,1,4) = a \cdot (1,0,1) + b \cdot (1,1,0) + c \cdot (0,1,1) & & \\ x \rightarrow\ 1 = a + b + 0 \Rightarrow a = -b + 1 & & \Rightarrow a = -(-1) + 1 = 2 \\ y \rightarrow\ 1 = 0 + b + c \Rightarrow c = -b + 1 & & \Rightarrow c = -(-1) + 1 = 2 \\ z \rightarrow\ 4 = a + 0 + c & \Rightarrow 4 = -b + 1 - b + 1 \Rightarrow 2b = 2 - 4 \Rightarrow 2b = -2 \Rightarrow b = -1 & \end{array}$$

  Portanto: $(1,1,4) = 2\,(1,0,1) - 1\,(1,1,0) + 2\,(0,1,1)$ e v é combinação linear de v_1, v_2, v_3.

- O vetor $v = (1,2,3)$ é uma combinação linear dos vetores $(1,1,1)$, $(1,0,1)$, $(2,1,2)$ e $(0,1,0)$?

  $$(1,2,3) = a \cdot (1,1,1) + b \cdot (1,0,1) + c \cdot (2,1,2) + d \cdot (0,1,0)$$

  $$\left.\begin{array}{l} x \rightarrow\ 1 = a + b + 2c + 0 \\ y \rightarrow\ 2 = a + 0 + c + d \\ z \rightarrow\ 3 = a + b + 2c + 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a + b + 2c \quad\ = 1 \\ a \quad\ + c + d = 2 \\ a + b + 2c \quad\ = 3 \end{array} \sim \begin{array}{l} a + b + 2c \quad\ = 1 \\ a \quad\ + c + d = 2 \\ 0 + 0 + 0 \quad\ = 2 \end{array} \sim \begin{array}{r} a + b + 2c \quad\ = 1 \\ a \quad\ + c + d = 2 \\ 0 = 2 \end{array}$$

  Portanto, o sistema não possui solução, o que implica na impossibilidade de "construir" o vetor v a partir da combinação linear dos vetores $(1,1,1)$, $(1,0,1)$, $(2,1,2)$ e $(0,1,0)$.

Um conjunto de vetores $u = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ será denominado gerador de um espaço ou subespaço vetorial se todos os seus vetores puderem ser escritos como combinação linear dos vetores de u.

Para gerar R^2, os vetores não podem ser paralelos entre si.

Para gerar R^3, os vetores não podem ser todos simultaneamente coplanares entre si, o que pode ser verificado pelo produto misto dos vetores $u \bullet (v \wedge w)$: se este produto for nulo, os vetores pertencem a um único plano e não podem gerar um espaço tridimensional (R^3); se for diferente de zero, os três vetores (u , v , w) são possíveis geradores de R^3.

3.3. Dependência e Independência Linear

Os vetores $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ são linearmente dependentes (l.d.) se algum destes vetores pode ser escrito em função dos demais, isto é, algum destes vetores é desnecessário como gerador, pois sua contribuição pode ser compensada pelos demais.

A verificação pode ser averiguada pelo escalonamento de uma matriz (onde os vetores são linhas da mesma) e, no surgimento de linhas completamente nulas, a dependência é confirmada. Ao lado desta matriz, escrevem-se os respectivos vetores iniciais, a fim de acompanhar o processo de escalonamento e obter a relação final entre os vetores.

$$\left|\begin{array}{ccc|c} x_1 & y_1 & z_1 & u_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & u_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & u_3 \end{array}\right|$$

Por exemplo, os vetores $u_1 = (1,2,1)$, $u_2 = (2,3,1)$ e $u_3 = (1,0,-1)$ são linearmente dependentes, pois:

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & u_1 \\ 2 & 3 & 1 & u_2 \\ 1 & 0 & -1 & u_3 \end{array}\right| \sim \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & u_1 \\ 0 & -1 & -1 & -2u_1 + u_2 \\ 0 & -2 & -2 & -u_1 + u_3 \end{array}\right| \sim \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & u_1 \\ 0 & 1 & 1 & 2u_1 - u_2 \\ 0 & 0 & 0 & 3u_1 - 2u_2 + u_3 \end{array}\right|$$

$$0 = 3u_1 - 2u_2 + u_3 \Rightarrow u_3 = -3u_1 + 2u_2$$

Portanto, u_3 pode ser escrito em função de u_1 e u_2 (e é “descartável”), confirmando a dependência linear do trio de vetores.

Os vetores $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ são linearmente independentes (l.i.) se nenhum destes vetores pode ser escrito em função dos demais, isto é, nenhum deles pode ser “compensado” pelos demais.

A verificação da independência linear é a negação da confirmação da dependência: se a matriz anterior resultar em alguma linha nula após o escalonamento, o conjunto é l.d.; se nenhuma linha se anular, o conjunto é l.i.

Duas propriedades ajudam a deduzir a dependência ou independência sem a necessidade de recorrer ao escalonamento da matriz:

a) Se um vetor v pode se escrever como combinação linear dos vetores u_1 , u_2 , u_3 de duas ou mais formas diferentes, então u_1 , u_2 , u_3 são linearmente dependentes.

b) Um conjunto de vetores de R^2 com três ou mais vetores é necessariamente l.d. Um conjunto de vetores de R^3 com quatro ou mais vetores é necessariamente l.d.

3.4. Bases e Coordenadas

Um conjunto $\beta = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ é uma base de um subespaço vetorial S, se β é gerador de S e seus vetores são linearmente independentes. O número de vetores que compõem uma base é igual à dimensão da base e do subespaço ou espaço vetorial gerado por ela.

Exemplo: os vetores $\beta = \{(1,1,1),(1,2,2),(1,3,3),(1,2,1),(2,1,1)\}$ são geradores de R^3? Eles formam uma base de R^3?

Escolhendo três dos vetores β, pode-se afirmar que o conjunto é gerador se não forem coplanares:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 1 - 0 - 2 = -1 \neq 0$$

Portanto, estes três vetores não são coplanares e, conseqüentemente, β é gerador de R^3.

Porém, o fato de β possuir 5 vetores indica claramente que o conjunto é l.d.

Uma base de R^3 poderia ser o conjunto de três vetores l.i. acima verificados:

$$\beta' = \{(1,1,1),(1,2,2),(1,2,1)\}$$

As bases obedecem às seguintes propriedades:

a) Uma base de R^2 sempre possui dois vetores.

b) Uma base de R^3 sempre possui três vetores.

c) Uma base de um plano de R^3 (contendo a origem) sempre possui dois vetores.

d) Uma base de uma reta de R^2 ou R^3 (contendo a origem) sempre possui um vetor.

e) Dois vetores linearmente independentes de R^2 formam uma base de R^2.

f) Três vetores linearmente independentes de R^3 formam uma base de R^3.

g) Dois vetores linearmente independentes de um plano π de R^3 contendo a origem formam uma base de π.

h) Três vetores quaisquer (u , v, w) formam uma base se e somente se $u \bullet (v \cdot w) \neq 0$.

Uma base canônica é uma base na forma: $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} = \{(1,0,\ldots,0),(0,1,\ldots,0),\ldots,(0,0,\ldots,1)\}$

As coordenadas do vetor v na base $\beta = \{u_1, u_2, u_3\}$ são: $(v)_\beta = (x_1, x_2, x_3)$

onde $v = x_1 \cdot u_1 + x_2 \cdot u_2 + x_3 \cdot u_3$

As coordenadas do mesmo vetor na base $\gamma = \{u_2, u_3, u_1\}$ são: $(v)_\gamma = (x_2, x_3, x_1)$

Estas coordenadas mudam de base para base, porém são únicas para cada uma.

3.5. Espaços Vetoriais com Produto Interno

Um produto interno em um espaço vetorial é uma aplicação que possui a seguinte forma:

$$\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to R$$

onde dois vetores (u, v) combinam-se em um escalar $\langle u, v\rangle$, obedecendo às propriedades:

a) $\langle u, u\rangle \geq 0$ para qualquer $u \in V$

b) Se $\langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$

c) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$ para quaisquer $u, v \in V$

d) $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$ para quaisquer $u, v, w \in V$

e) $\langle \lambda \cdot u, v\rangle = \lambda \cdot \langle u, v\rangle = \langle u, \lambda \cdot v\rangle$ para quaisquer $u, v \in V$ e qualquer $\lambda \in R$

O produto interno denominado usual é o produto escalar.

A norma de um vetor u é definida por $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$ e também obedece a algumas propriedades:

a) $\|u\| \geq 0$ para qualquer $u \in V$

b) Se $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$

c) $\|\alpha \cdot u\| = |\alpha| \cdot \|u\|$ para qualquer $u \in V$ e qualquer $\alpha \in R$

d) $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ para quaisquer $u, v \in V$ (desigualdade de Cauchy-Schwartz)

e) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ para quaisquer $u, v \in V$ (desigualdade triangular)

O ângulo entre vetores no produto interno segue a mesma expressão do produto escalar, adaptada para cada produto específico:

$$-1 \leq \cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} \leq 1 \quad \to \quad \pi \geq \theta \geq 0$$

O cálculo do produto interno dependerá da expressão específica em cada caso e pode assumir a forma de uma função polinomial, um produto escalar modificado ou mesmo uma integral definida num intervalo.

Exemplos: Calcule $\|x^2 - x + 2\|$ em relação aos seguintes produtos internos:

- $\langle p, q\rangle = p(-1) \cdot q(-1) + p(0) \cdot q(0) + p(1) \cdot q(1) + p(2) \cdot q(2)$

  $\langle p, p\rangle = p(-1) \cdot p(-1) + p(0) \cdot p(0) + p(1) \cdot p(1) + p(2) \cdot p(2)$

  $\langle p, p\rangle = p^2(-1) + p^2(0) + p^2(1) + p^2(2)$

$$\|p\| = \sqrt{\langle p,p\rangle} \Rightarrow \|p\| = \sqrt{p^2(-1)+p^2(0)+p^2(1)+p^2(2)}$$

$$\|p\|^2 = p^2(-1)+p^2(0)+p^2(1)+p^2(2)$$

$$\left\|x^2-x+2\right\|^2 = ((-1)^2-(-1)+2)^2+(0^2-0+2)^2+(1^2-1+2)^2+(2^2-2+2)^2$$

$$\left\|x^2-x+2\right\|^2 = (1+1+2)^2+(0-0+2)^2+(1-1+2)^2+(4-2+2)^2$$

$$\left\|x^2-x+2\right\|^2 = 4^2+2^2+2^2+4^2 \Rightarrow \left\|x^2-x+2\right\|^2 = 16+4+4+16$$

$$\left\|x^2-x+2\right\|^2 = 40 \Rightarrow \left\|x^2-x+2\right\| = \sqrt{40} \Rightarrow \left\|x^2-x+2\right\| = 2\sqrt{10}$$

- $\langle p\,,q\rangle = \int_0^1 p(t)\cdot q(t)\,dt$

$$\langle p,p\rangle = \int_0^1 p(t)\cdot p(t)\,dt = \int_0^1 p^2(t)\,dt$$

$$\|p\| = \sqrt{\langle p\,,p\rangle} \Rightarrow \|p\|^2 = \int_0^1 p^2(t)\,dt$$

$$\left\|x^2-x+2\right\|^2 = \int_0^1 (t^2-t+2)^2 dt = \int_0^1 (t^4+t^2+4-2t^3-4t+4t^2)\,dt$$

$$\left\|x^2-x+2\right\|^2 = \int_0^1 (t^4-2t^3+5t^2-4t+4)\,dt = \left.\left(\frac{t^5}{5}-2\frac{t^4}{4}+5\frac{t^3}{3}-4\frac{t^2}{2}+4t\right)\right|_0^1$$

$$\left\|x^2-x+2\right\|^2 = \frac{1^5}{5}-2\frac{1^4}{4}+5\frac{1^3}{3}-2\cdot 1^2+4\cdot 1-\left(\frac{0^5}{5}-2\frac{0^4}{4}+5\frac{0^3}{3}-2\cdot 0^2+4\cdot 0\right)$$

$$\left\|x^2-x+2\right\|^2 = \frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{5}{3}-2+4 \Rightarrow \left\|x^2-x+2\right\|^2 = \frac{101}{30} \Rightarrow \left\|x^2-x+2\right\| = \sqrt{\frac{101}{30}}$$

3.6. Método de Ortogonalização de Gram-Schmidt

O método de Gram-Schmidt serve para ortogonalizar bases de um subespaço, isto é, convertê-las para vetores que sejam todos ortogonais entre si. Para converter esta base ortogonal para uma base ortonormal – onde todos os vetores da base possuem norma unitária ($\|u_n = 1\|$) – bastar dividi-los pelas suas respectivas normas.

Dado um espaço vetorial V com produto interno próprio e gerado por uma base $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$. Existirá uma outra base $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ ortonormal, tal que $[u_1, u_2, \ldots, u_n] = [w_1, w_2, \ldots, w_n]$.

O processo é recursivo, bastando copiar o primeiro vetor da base e subtrair as projeções do produto interno nos seguintes em relação aos vetores já ortogonalizados.

$$v_1 = u_1$$

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} \cdot v_1$$

$$v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} \cdot v_1 - \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} \cdot v_2$$

....

$$v_n = u_n - \frac{\langle u_n, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} \cdot v_1 - \frac{\langle u_n, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} \cdot v_2 - \frac{\langle u_n, v_3 \rangle}{\|v_3\|^2} \cdot v_3 - \ldots - - \frac{\langle u_n, v_{n-1} \rangle}{\|v_{n-1}\|^2} \cdot v_{n-1}$$

Para ortonormalizar a base, basta dividir estes vetores ortogonais por suas respectivas normas:

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} \quad , \quad w_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} \quad , \quad w_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} \quad , \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad , \quad w_n = \frac{v_n}{\|v_n\|}$$

Por exemplo, uma base ortonormal para o subespaço $S = [(0,1,1), (-1,0,2)] \subset R^3$, com produto interno usual (produto escalar), é:

$$v_1 = (0,1,1)$$

$$v_2 = (-1,0,2) - \frac{(-1,0,2) \bullet (0,1,1)}{\|(0,1,1)\|^2} \cdot (0,1,1) = (-1,0,2) - \frac{-1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1}{\left(\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2}\right)^2} \cdot (0,1,1)$$

$$v_2 = (-1,0,2) - \frac{0 + 0 + 2}{0 + 1 + 1} \cdot (0,1,1) = (-1,0,2) - \frac{2}{2} \cdot (0,1,1) = (-1,0,2) - 1 \cdot (0,1,1) \Rightarrow v_2 = (-1,-1,1)$$

$\{v_1, v_2\}$ é uma base ortogonal de $S = [(0,1,1), (-1,0,2)] \subset R^3$

$$w_1 = \frac{(0,1,1)}{\|(0,1,1)\|} = \frac{(0,1,1)}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{(0,1,1)}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(0,1,1)$$

$$w_1 = \frac{(-1,-1,1)}{\|(-1,-1,1)\|} = \frac{(-1,-1,1)}{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{(-1,-1,1)}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}(-1,-1,1)$$

$\{w_1, w_2\}$ é uma base ortogonal de $S = [(0,1,1), (-1,0,2)] \subset R^3$

CAPÍTULO 4: TRANSFORMAÇÕES LINEARES

4.1. Transformação Linear

Uma transformação linear (também denominada operador linear se o domínio e contra-domínio coincidem) é uma função entre dois vetores ou espaços vetoriais que preserva as operações de adição vetorial e multiplicação escalar:

1) $T(u+v) = T(u) + T(v)$ para todo par de vetores u e v de R^n.

2) $T(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot T(u)$ para todo vetor u de R^n e todo número real λ.

A verificação da condição $T(0) = 0 \Rightarrow T(0+0) = T(2 \cdot 0) = 2 \cdot T(0) = 0$ é uma condição necessária para que a transformação seja linear, porém não é suficiente. Uma transformação que obedeça apenas à $T(0) = 0$ pode não ser linear.

Exemplos:

- $T : R \to R$, $T(x) = x^2$ obedece à $T(0) = 0^2 = 0$, porém não confirma a operação de adição escalar e, portanto, não será uma transformação linear.

  $T(x+y) = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \neq x^2 + y^2 = T(x) + T(y)$

- $T : R^2 \to R^2$, $T(x,y) = (x+2, y+1)$ não é linear, pois $T(0,0) = (2,1) \neq (0,0)$

A soma de duas transformações lineares também é uma transformação linear:

$$T + S : R^n \to R^m \text{ , } (T+S)(u) = T(u) + S(u)$$

O núcleo $\ker(T)$ de uma transformação linear $T : V \to W$ é o conjunto formado por todos os vetores $v \in V$ que satisfazem $T(v) = 0$.

Por exemplo, o núcleo da transformação $T(x,y,z) = (2x - z, y + 2z, x + y + 3z/2)$ é igual a: $\ker(T) = \{(x,y,z) \mid x = -y/4 = z/2\}$.

A imagem do conjunto V pela transformação T também é um subespaço vetorial:

$$im(T(V)) = \{w \text{ tal que existe } v \in V \text{ tal que } w = T(v)\}$$

A soma das dimensões do núcleo e da imagem é igual a dimensão do subespaço vetorial:

$$\dim(\ker(T)) + \dim(im(T)) = \dim(V)$$

Exemplos de transformações lineares:

- Transformação nula: $T(u) = 0$ para todo vetor u.
- Transformação identidade: $T(u) = u$ para todo vetor u.
- Transformações de escala: $T(u) = \lambda \cdot u$ para todo vetor u, onde $\lambda \in R$.

- Transformações de cisalhamento: $V : R^2 \to R^2$, $V(x, y) = (x, \alpha \cdot x + y)$ (vertical)

  $H : R^2 \to R^2$, $H(x, y) = (x + \alpha \cdot y, y)$ (horizontal)

- Projeção ortogonal em um vetor u: $P(v) = \left(\dfrac{v \bullet u}{u \bullet u}\right) \cdot u$

- Reflexões em torno dos eixos coordenados X e Y:

  $R(x, y) = (x, -y)$, $S(x, y) = (-x, y)$

- Reflexão na origem: $T(x, y) = (-x, -y)$

- Produto escalar: $T(v) = v \bullet u$

- Produto vetorial: $T(v) = v \wedge u$

- Rotação de ângulo θ (anti-horário): $R_\theta(x, y) = (x \cos\theta - y\,\text{sen}\,\theta, x\,\text{sen}\,\theta + y \cos\theta)$

Toda transformação linear apresentará uma das seguintes formas:

1) $T : R^2 \to R$, $T(x, y) = a\,x + b\,y$

2) $T : R^3 \to R$, $T(x, y, z) = a\,x + b\,y + c\,z$

3) $T : R^3 \to R^2$, $T(x, y, z) = (a\,x + b\,y + c\,z, d\,x + e\,y + f\,z)$

4) $T : R^2 \to R^3$, $T(x, y) = (a\,x + b\,y, c\,x + d\,y, e\,x + f\,y)$

onde a, b, c, d, e, f são números reais.

4.2. Matriz de uma Transformação Linear

Duas transformações lineares S e T são escritas na forma:

$S : R^2 \to R^2$, $T(x, y) = (a_1x + a_2y, b_1x + b_2y)$

$T : R^3 \to R^3$, $T(x, y, z) = (a_1x + a_2y + a_3z, b_1x + b_2y + b_3z, c_1x + c_2y + c_3z)$

Sendo que: $S(1,0) = (a_1, b_1)$, $S(0,1) = (a_2, b_2)$

$T(1,0,0) = (a_1, b_1, c_1)$, $T(0,1,0) = (a_2, b_2, c_2)$, $T(0,0,1) = (a_3, b_3, c_3)$

As representações destas transformações na forma matricial serão:

$$[S]\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x + b_1y \\ a_2x + b_2y \end{pmatrix} \qquad [T]\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x + b_1y + c_1z \\ a_2x + b_2y + c_2z \\ a_3x + b_3y + c_3z \end{pmatrix}$$

onde as colunas das matrizes são as imagens dos vetores da base na forma canônica.

Formas matriciais dos exemplos de transformações lineares:

- Transformação nula: $[T]=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- Transformação identidade: $[T]=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- Transformações de escala: $[T]=\begin{pmatrix} \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix}$
- Transformações de cisalhamento: $[V]=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$, $[H]=\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Reflexões em torno dos eixos coordenados X e Y:

$$[R]=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad [S]=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Reflexão na origem: $[T]=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- Rotação de ângulo θ (anti-horário): $[R_\theta]=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Exemplos:

- A matriz da transformação linear $T: R^3 \to R^3$, $T(u) = u \wedge v$, onde $v = (1,1,1)$, é:

$$T(x,y,z) = (x,y,z) \wedge (1,1,1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (y-z, -x+z, x-y)$$

Portanto: $T(1,0,0) = (0,-1,1)$, $T(0,1,0) = (1,0,-1)$, $T(0,0,1) = (-1,1,0)$

A forma matricial de T será: $[T]=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

- A matriz da transformação linear $T: R^3 \to R^3$, $T(u) = (u \bullet v) \cdot w$, onde $v = (1,1,1)$ e $v = (1,2,3)$, é:

$$\left.\begin{aligned} T(1,0,0) &= ((1,0,0) \bullet (1,1,1)) \cdot (1,2,3) = 1 \cdot (1,2,3) = (1,2,3) \\ T(0,1,0) &= ((0,1,0) \bullet (1,1,1)) \cdot (1,2,3) = 1 \cdot (1,2,3) = (1,2,3) \\ T(0,0,1) &= ((0,0,1) \bullet (1,1,1)) \cdot (1,2,3) = 1 \cdot (1,2,3) = (1,2,3) \end{aligned}\right\} \quad [T]=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

4.3. Autovetores e Autovalores

Um vetor não-nulo v é um autovetor de T se existe um número real λ tal que:

$$T\,(v) = \lambda \cdot v$$

λ é o autovalor associado ao autovetor v.

Observe que se v é um autovetor, então $\sigma \cdot v \; (\sigma \neq 0)$, também é um autovetor com o mesmo autovalor associado:

$$T\,(\sigma \cdot v) = \sigma \cdot T\,(v) = \sigma \cdot \lambda \cdot v = \lambda \cdot (\sigma \cdot v)$$

A transformação linear $(T - \lambda \cdot I)(v) = 0$ não é inversível, portanto seu determinante será nulo:

$$\det\,(\, T - \lambda \cdot I\,) = 0$$

O cálculo de autovetores e autovalores é um processo paralelo: primeiro determinam-se os autovalores (possíveis) e a seguir os autovetores (associados ao autovalor).

Por exemplo, T é uma transformação linear de R^3 e, conseqüentemente, $[\,T - \lambda \cdot I\,]$ será uma matriz 3 x 3; seu determinante será igual a:

$$\det\,(\, T - \lambda \cdot I\,) = -\lambda^3 + a_1\lambda^2 - a_2\lambda + a_3 = 0$$

onde $a_3 = \det\,(T)$

Portanto, como o determinante resultou num polinômio de grau 3, existe pelo menos uma raiz real, correspondente a um autovalor. Se houver três raízes distintas, haverá três autovalores, cada um associado a um autovetor.

O polinômio gerado é denominado polinômio característico ($p\,(\lambda)$) de T e cada uma de suas raízes será um autovalor da transformação linear T.

Por exemplo, os autovalores e autovetores da transformação linear T são:

$$[\,T\,] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det\,(T - \lambda \cdot I) = 0 \Rightarrow \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ -2 & 3-\lambda & -1 \\ -6 & 6 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda) \cdot \left[(3-\lambda) \cdot (-\lambda)\right] + 0 + 12 + 6 \cdot (1-\lambda) - 6 \cdot (3-\lambda) + 0 = 0$$

$$(1-\lambda) \cdot (-3\lambda + \lambda^2) + 12 + 6 - 6\lambda - 18 + 6\lambda = 0 \Rightarrow -3\lambda + 3\lambda^2 + \lambda^2 - \lambda^3 = 0$$

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda = 0 \Rightarrow \lambda \cdot (\lambda^2 - 4\lambda + 3) = 0 \Rightarrow \lambda \cdot (\lambda - 1) \cdot (\lambda - 3) = 0 \Rightarrow p(\lambda) = \lambda \cdot (\lambda - 1) \cdot (\lambda - 3)$$

Portanto, os autovalores de T são 0, 1, 3.

Os autovetores associados a cada autovalor serão obtidos pela substituição de cada autovalor e resolução dos sistemas resultantes:

$\lambda = 0$

$$(T - \lambda \cdot I) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-0 & 0 & -1 \\ -2 & 3-0 & -1 \\ -6 & 6 & 0-0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ -2x + 3y - z = 0 \\ -6x + 6y = 0 \end{cases}$$

$x = y = z \quad \rightarrow \quad (t, t, t)$

$\lambda = 1$

$$(T - \lambda \cdot I) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-1 & 0 & -1 \\ -2 & 3-1 & -1 \\ -6 & 6 & 0-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -6 & 6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -z = 0 \\ -2x + 2y - z = 0 \\ -6x + 6y - z = 0 \end{cases}$$

$x = y \; ; z = 0 \quad \rightarrow \quad (t, t, 0)$

$\lambda = 3$

$$(T - \lambda \cdot I) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-3 & 0 & -1 \\ -2 & 3-3 & -1 \\ -6 & 6 & 0-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -6 & 6 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x - z = 0 \\ -2x - z = 0 \\ -6x + 6y - 3z = 0 \end{cases}$$

$x = -2z \; ; y = 0 \quad \rightarrow \quad (t, 0, -2t)$

Estes autovetores podem ser organizados em colunas de uma nova matriz (aplicada adiante no tópico sobre mudança de base):

$$M = \begin{pmatrix} t & t & t \\ t & t & 0 \\ t & 0 & -2t \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

4.4. Diagonalização

Os autovalores de uma matriz de transformação linear formam uma matriz diagonal, equivalente à matriz original:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Caso haja multiplicidade de alguns destes autovalores, os mesmos se repetirão tantas vezes quanto for o valor da multiplicidade de cada um.

A matriz dos autovalores servirá como matriz de mudança de base de uma transformação linear dada para sua forma diagonal.

Por exemplo, a forma diagonal D da matriz da transformação linear T será:

$$[T] = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \det(T - \lambda \cdot I) = 0 \Rightarrow \det\left(\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 36\lambda + 32 = 0 \Rightarrow p(\lambda) = -(t-2)^2 \cdot (t-8)$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1' & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

4.5. Mudança de Base

Dada uma base $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de R^3 e uma transformação linear T tal que:

$T(v_1) = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + a_{31}v_3$

$T(v_2) = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + a_{32}v_3$

$T(v_3) = a_{13}v_1 + a_{23}v_2 + a_{33}v_3$

A matriz de T na base β será: $[T]_\beta = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Um vetor w com coordenadas (a , b , c) na base β será escrito como:

$$(w)_\beta = (a,b,c) \quad \rightarrow \quad w = a\,v_1 + b\,v_2 + c\,v_3$$

Aplicando a transformação linear T sobre o vetor w, expresso em coordenadas da base β, obtém-se a matriz da transformação T na base β:

$$(T(w))_\beta = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot a_{11} + b \cdot a_{12} + c \cdot a_{13} \\ a \cdot a_{21} + b \cdot a_{22} + c \cdot a_{23} \\ a \cdot a_{31} + b \cdot a_{32} + c \cdot a_{33} \end{pmatrix}$$

Para que uma transformação linear T em uma base β ($[T]_\beta$) possa ser convertida para uma transformação linear equivalente em outra base ($[T]_\gamma$ na base γ, por exemplo).

Tal matriz é formada por duas matrizes uma matriz M e sua inversa M^{-1}, assumindo a forma:

$$[T]_\gamma = M \cdot [T]_\beta \cdot M^{-1} = [I]_{\beta,\gamma} \cdot [T]_\beta \cdot [I]_{\gamma,\beta}$$

onde a transformação na base β é convertida para a transformação equivalente na base γ.

A mudança de base deve buscar a conversão da matriz conhecida em uma matriz diagonal equivalente, a partir de seus autovalores, determinando também seus autovetores. A matriz formada pelos autovetores será, então, a matriz M – se a matriz diagonalizada for aquela já conhecida $[\,T\,]_\beta$ – ou a inversa M^{-1} – se a matriz diagonalizada for aquela que se deseja conhecer $[\,T\,]_\gamma$:

$$[\,T\,]_\gamma = M \cdot [\,T\,]_\beta \cdot M^{-1} \Leftrightarrow [\,T\,]_\beta = M^{-1} \cdot [\,T\,]_\gamma \cdot M$$

Por exemplo, a matriz de mudança de base de T na base β para a base canônica será:

$\beta = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$

$T(1,1,0) = (2,2,0)$, $T(0,1,1) = (0,-1,-1)$, $T(1,0,1) = (3,0,3)$

Os vetores de β são autovetores pois todos obedecem à relação $T(v) = \lambda \cdot v$:

$T(1,1,0) = (2,2,0) = 2 \cdot (1,1,0) \Rightarrow \lambda = 2$

$T(0,1,1) = (0,-1,-1) = -1 \cdot (0,1,1) \Rightarrow \lambda = -1$

$T(1,0,1) = (3,0,3) = 3 \cdot (1,0,1) \Rightarrow \lambda = 3$

Os autovalores são –1, 2 e 3, portanto, a forma diagonalizada de $[\,T\,]_\beta$ é:

$$[\,T\,]_\beta = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Neste caso, a matriz formada pelos autovetores será M:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sua inversa M^{-1} (método de Gauss) completará o par de mudança da base β para a base canônica:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Portanto, a transformação linear na base canônica será:

$$[\,T\,]_{can} = M \cdot [\,T\,]_\beta \cdot M^{-1} = M \cdot D \cdot M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[\,T\,]_{can} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

CAPÍTULO 5: OPERADORES SEMISIMPLES

5.1. Números Complexos

Os números complexos são uma extensão C do conjunto dos números reais R, tal que:

$$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$$

Esta classe de números denota uma quantidade abstrata que pode ser aplicada em cálculos e possuir significados na Física.

Expressões na forma $x^2 = -1$ não possuem solução no conjunto R ($S = \varnothing$) e são consideradas como impossíveis neste conjunto.

Porém, o conjunto dos complexos permite a sua resolução através da aplicação de um artifício matemático denominado unidade imaginária i. A unidade imaginária estende as propriedades aritméticas e algébricas dos números reais aos números complexos, com alguns ajustes de notação e de operação de i. Seu valor é igual a:

$$i^2 = -1 \Leftrightarrow i = \sqrt{-1}$$

Os números complexos são representados por dois termos, um para a parte real **a** do número e outro, a parte imaginária **b** (acompanhado da unidade i), na forma cartesiana ou retangular:

$$z = a + b \cdot i$$

onde $a, b \in R$

Todo número complexo apresenta um conjugado, na forma: $\overline{z} = z^* = a - b \cdot i$.

O valor absoluto ou módulo de z é igual a: $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

A soma entre dois complexos deve ser efetuada apenas entre termos reais e entre termos imaginários, sem combinação entre uma parcela e outra:

$$z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (bi + di)$$

O produto obedece à propriedade distributiva da multiplicação, atentando para as inversões de sinal provocadas pela relação $i^2 = -1$:

$$z \cdot w = (a + b\,i) \cdot (c + d\,i) = ac + bc\,i + ad\,i + bd\,i^2 = ac + (ad + bc)\,i - bd = (ac - bd) + (ad + bc)\,i$$

O inverso multiplicativo pode ser útil para a "racionalização" do denominador de frações, multiplicando numerador e denominador pelo conjugado do denominador:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + b\,i} = \frac{1}{a + b\,i} \cdot \frac{a - b\,i}{a - b\,i} = \frac{a - b\,i}{a^2 - b^2 i^2} = \frac{a - b\,i}{a^2 + b^2} \quad (\text{para } z \neq 0)$$

Deve-se observar que, caso um número complexo seja uma das raízes de um sistema de equações, necessariamente seu conjugado também será uma das outras raízes do sistema, ou seja, obrigatoriamente o par complexo-conjugado sempre será parte das raízes de uma equação em que um dos dois esteja presente.

Por exemplo, qual é o conjunto solução da equação $x^2 - 2x + 2 = 0$?

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$
$$\Delta = \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2} = \sqrt{4-8} = \sqrt{-4}$$

A equação não possui raízes reais e, portanto, seu cálculo é impossível no domínio do conjunto R. Porém, no domínio dos números complexos, há soluções possíveis:

$$\Delta = \sqrt{-4}$$
$$i^2 = -1 \Rightarrow \Delta = \sqrt{4i^2} = \pm 2i$$
$$x = \frac{-(-2) \pm 2i}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$$

Obedecendo à definição de presença simultânea do complexo e seu conjugado como raízes de uma mesma equação e/ou sistema de equações.

5.2. Espaços Vetoriais e Transformações Lineares Complexas

Um espaço vetorial com domínio e/ou contra-domínio contidos no conjunto dos números complexos não difere dos espaços vetoriais reais, à exceção das características particulares dos números imaginários.

As propriedades e conceitos dos espaços vetoriais e transformações lineares presentes sobre os números reais continuarão válidas no conjunto C.

Por exemplo, uma transformação linear complexa apresentará a forma:

$$R : C \to C \quad , \quad R(w) = z_0 \cdot w = (a + b\,i) \cdot w$$

A base canônica para o conjunto C é $Can = \{1, i\}$, portanto, a matriz da transformação linear R será:

$$R(1) = (a + b\,i) \cdot 1 = a + b\,i \qquad , \qquad R(i) = (a + bi) \cdot i = a\,i + b\,i^2 = -b + a\,i$$

$$[\,R\,]_{can} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

Conseqüentemente, a matriz de mudança de base assumirá a forma:

$$[\,R\,]_{can} = \phi \cdot R(w) \cdot \phi^{-1} \Leftrightarrow R(w) = \phi^{-1} \cdot R(w) \cdot \phi^{-1}$$

5.3. Operadores Semisimples

Uma matriz de transformação linear $T : R^n \to R^n$ é diagonalizável se e somente se todas as raízes do polinômio característico de T são reais.

Se a transformação for $T : C^n \to C^n$, os conceitos de autovalor e autovetor são igualmente aplicáveis: um número complexo é dito autovalor de T se existir um vetor não-nulo $\phi \in C\ n$ tal que:

$$T(\phi) = \lambda \cdot \phi$$

Analogamente ao conjunto dos reais, define-se também o polinômio característico de T:

$$p_T(X) = \det([\,T\,]_B - X \cdot I)$$

onde B é uma base qualquer de C^n

Para a base canônica, uma transformação linear em números reais apresenta a forma:

$$T(x_1,\ldots,x_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot x_j \,, \ldots , \sum_{j=1}^{n} a_{nj} \cdot x_j \right)$$

Para os números complexos, pode-se associar a transformação T ao seu complexificado:

$$T^c\,(z_1,\ldots,z_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot z_j \,, \ldots , \sum_{j=1}^{n} a_{nj} \cdot z_j \right)$$

A matriz T na base canônica para os números reais é idêntica à matriz para os números complexos:

$$[\,T\,]_{can} = [\,T^c\,]_{can}$$

Por exemplo, o complexificado da transformação $T: R^2 \to R^2 \quad , \quad T(x,y) = (x-y, x+y)$ será:

$$T: C^2 \to C^2 \quad , \quad T(z_1,z_2) = (z_1 - z_2, z_1 + z_2)$$

$$[\,T\,]_{can} = [\,T^c\,]_{can} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

O polinômio característico de T é $p_T(X) = \det(1-X)^2 + 1$, que não possui raízes reais em R, portanto, não possuirá autovalores nem autovetores. Porém, utilizando o complexificado T^c, pode-se obter seu polinômio característico (o mesmo de T) e seus autovalores:

$$\lambda_1 = 1 + i \qquad , \qquad \lambda_2 = 1 - i = \overline{\lambda_1}$$

Portanto, a transformação T^c é diagonalizável.

Quando uma transformação T^c é diagonalizável, a transformação linear é denominada semisimples ou operador semisimples quando o domínio e o contra-domínio coincidem.

Álgebra Linear
Exercícios

Transferência USP

www.transferenciausp.com.br

ÍNDICE

CAPÍTULO 1: SISTEMAS LINEARES E MATRIZES

1.2. Sistemas Lineares

Exercício 1.1: Resolva os seguintes sistemas de equações lineares:

a) $\begin{cases} x+2y=1 \\ x+3y=0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 4x+5y=1 \\ 12x+15y=0 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x+y=1 \\ 3x-y=2 \\ x-y=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2a+2b+3c=1 \\ a+2b+c=0 \\ a-b+c=0 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 4x+10y+10z=0 \\ x+3y+4z=0 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} 2x+3y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x+2y+2z+3w=3 \\ x+y+z+w=1 \\ 3x+3y+3z+2w=2 \end{cases}$ **h)** $\begin{cases} x+z+2w=0 \\ 2x+3z+3w=0 \\ y+2w=2 \\ x+2z+w=0 \end{cases}$ **i)** $\begin{cases} y_1+y_3+2y_4=0 \\ y_1+2y_2+y_3+y_4=1 \\ y_2+2y_4=8 \\ y_1+2y_3+y_4=0 \end{cases}$

Exercício 1.2: Discuta, em função dos parâmetros α e β, os seguintes sistemas de equações lineares:

a) $\begin{cases} x+4y+3z=10 \\ 2x+7y-2z=10 \\ x+5y+\alpha z=\beta \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x+y+z=-6\beta \\ \alpha x+3y+2z=2\beta \\ 2x+y+(\alpha+1)z=4 \end{cases}$

1.3. Matrizes

Exercício 1.3: Sempre que possível calcule:

a) $2\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}+3\cdot\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ **e)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ **f)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **h)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **i)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 30 & 4 \\ 2 & 10 \\ 2 & 20 \end{bmatrix}$

1.4. Inversão de Matrizes pelo Método de Gauss

Exercício 1.4: Sempre que possível, calcule a inversa de cada uma das seguintes matrizes:

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ **d)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **f)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ **g)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **h)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

1.5. Determinantes

Exercício 1.5: Calcule o determinante de cada uma das seguintes matrizes:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **e)** $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ **f)** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

CAPÍTULO 2: VETORES, RETAS E PLANOS

2.3. Equações da Reta e do Plano

Exercício 2.1: Obtenha as equações paramétricas e cartesianas das retas que contém os pontos:

a) A = (2 , 3 , 4) e B = (5 , 6 , 7):

b) A = (–3 , 1 , 2) e B = (6 , 0 , –2):

c) A = (2 , 5 , 1) e B=(3 , 5 , 1):

Exercício 2.2: Determine uma equação cartesiana para cada uma das retas de R^3:

a) r é a reta de R^3 que passa pelos pontos (1 , 1 , 1) e (1, 0 , 1):

b) r é a reta de R^3 que passa pelo ponto (1 , 0, 2) e tem a direção do vetor (1 , 1 , 0):

c) r é a reta de R^3 que passa pelo ponto (1 , 3 ,−1) e é ortogonal aos vetores (1 , 2 , 1) e (1 , 0 , 1):

Exercício 2.3: Determine uma equação cartesiana para cada um dos planos de R^3:

a) α é o plano de R^3 que passa pelos pontos (1 , 1 , 1) , (1 , 0 , 1) e (1 , 0 , 0):

b) α é o plano de R^3 que passa pelo ponto (1 , 0 , 2) e é paralelo ao plano que passa por (0 , 0 , 0), (1 , 1 , 0) e (1 , −1 , 0):

c) α é o plano de R^3 que passa pelo ponto (1 , 3,−1) e é ortogonal ao vetor (1 , 0, −2):

Exercício 2.4: Seja r_1 a reta de R^3 que passa pelos pontos (1 , 1 , 1) e (1 , 0 , 1), e r_2 a reta de R^3 que passa pelos pontos (2 , 5 , 1) e (0 , 5 , 1). Determine a intersecção destas retas:

Exercício 2.5: Determine as equações cartesiana e paramétrica do plano α que passa pelo ponto (1 , –3 , 2) e é ortogonal à reta $r = \{(1-t, 2t-3, 2+t), t \in R\}$:

Exercício 2.6: Seja r a reta de R^3 que passa pelos pontos (2 , −1 , 3) e (4 , −5 , 5), e α o plano de R^3 que passa pelos pontos (1 , 0 , 0), (2 , 1 , 1) e (1 , 1 , 2) . Determine a intersecção da reta r com o plano α:

2.4. Distâncias entre Pontos, Retas e Planos

Exercício 2.7: Considere a reta r que passa por (1 , 0 , 1) e por (0 , 1 , 1). Calcule a distância do ponto (2 , 1 , 2) à reta r:

Exercício 2.8: Ache o ponto P do conjunto $\{(x, y, z) \in R^3 \mid (x, y, z) = (1+2t, t, 1-t), t \in R\}$ que está mais próximo do ponto $Q = (-1,0,0)$, e determine a distância entre eles:

Exercício 2.9: As retas a seguir possuem um ponto em comum?

a) Retas $r_1 = \{(x, y, z) = (1,1,7) + t \cdot (0,1,2), t \in R\}$ e $r_2 = \{(x, y, z) = (0,4,5) + s \cdot (-1,5,2), s \in R\}$:

b) Retas $r_1 = \{(x, y, z) = (1,1,7) + t \cdot (0,1,2), t \in R\}$ e $r_3 = \{(x, y, z) = s \cdot (-1,5,2), s \in R\}$:

Exercício 2.10: Considere as retas r_1 de equações paramétricas $x = 1 + t$, $y = 1 + 2t$, $z = 1 + 2t$ ($t \in R$) e r_2 cujas equações cartesianas são $y - z = 0$, $2x - y = 2$.

a) Calcule a distância entre as retas r_1 e r_2:

b) Determine, se possível, um ponto P da reta r_2 tal que a distância entre P e r_1 seja 1/3:

Exercício 2.11: Encontre o ponto do plano definido por $x + 2y + 3z = 6$ mais próximo do ponto (1 , 3 , 0) e calcule a distância entre o ponto e o plano:

Exercício 2.12: Calcule a distância entre os planos:

a) $3x + y - 5z = 4$ e $3x + y - 5z = 2$:

b) $2x - 4y + z = -12$ e $2x - 4y + z = 1$:

CAPÍTULO 3: ESPAÇOS VETORIAIS

3.2. Combinação Linear de Vetores

Exercício 3.1: Considere em R^2 o conjunto $S = \{(1,1),(2,2)\}$

a) O vetor $(-5,-5)$ é combinação linear dos vetores S?

b) O vetor $(1,0)$ é combinação linear dos vetores S?

c) O conjunto S gera R^2?

d) Determine a forma geral dos vetores $(a,b) \in S$:

Exercício 3.2: Considere em R^3 o conjunto $S = \{(1,1,1),(0,1,1),(1,2,2)\}$

a) O vetor $(2,3,3)$ é combinação linear dos vetores S?

b) O vetor $(0,0,1)$ é combinação linear dos vetores S?

c) O conjunto S gera R^3?

d) Determine a forma geral dos vetores $(a,b,c) \in S$:

Exercício 3.3: Decida quais dos seguintes conjuntos geram R^3:

a) $\{(1,3,3),(4,6,4),(-2,0,2),(3,3,1)\}$

b) $\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$

c) $\{(1,4,2),(0,0,0),(-1,-3,-1),(0,1,1)\}$

Exercício 3.4: Calcule o único valor de a que faz com que $S = \{(1,1,1),(1,0,1),(0,2,0),(3,2,a)\}$ não seja um conjunto gerador de R^3:

Exercício 3.5: Considere em P_2 (espaço dos polinômios com grau ≤ 2) o conjunto $S = \{1+t, 1-t^2)\}$:

a) O vetor t + t2 é combinação linear dos vetores de S?

b) O vetor t não é combinação linear dos vetores de S?

c) O conjunto S gera P2?

d) Determine a forma geral dos vetores $p(t) \in S$:

Exercício 3.6: Mostre que os polinômios $p_1(t) = 1 + 2t - t^2$, $p_2(t) = 3 + t^2$, $p_3(t) = 5 + 4t - t^2$, $p_4(t) = -2 + 2t - t^2$ geram P_2:

3.3. Dependência e Independência Linear

Exercício 3.7: Decida quais dos seguintes conjuntos são linearmente independentes:

a) Em R^3, $\{(1,1,1),(1,2,1)\}$

b) Em R^3, $\{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$

c) Em R^3, $\{(1,1,2),(1,2,1),(3,1,1)\}$

d) Em R^4, $\{(0,1,0,1),(1,0,1,0),(2,3,2,3)\}$

e) Em R^4, $\{(0,1,0,1),(1,0,1,0),(2,0,1,3),(0,0,0,0)\}$

f) Em R^4, $\{(1,1,0,0),(1,0,1,0),(0,0,1,1),(0,1,0,1)\}$

g) Em R^4, $\{(1,0,-1,0),(4,0,-3,1),(2,0,-1,1)\}$

Exercício 3.8: Calcule o único valor de a que faz com que os vetores de R^4 $v_1 = (1,0,0,2)$, $v_2 = (1,0,1,0)$, $v_3 = (2,0,1,a)$ sejam linearmente dependentes

3.4. Bases e Coordenadas

Exercício 3.9: Determine quais dos seguintes conjuntos são bases:

a) Em R^2, $\{(1,1),(0,3)\}$

b) Em R^2, $\{(1,0),(0,3),(2,5)\}$

c) Em R^3, $\{(1,1,1)(1,0,1),(1,1,0)\}$

d) Em R^3, $\{(1,1,1),(1,0,1),(1,2,1)\}$

e) Em R^3, $\{(3,0,0),(1,1,0),(2,2,2),(1,3,5)\}$

f) Em R^4, $\{(1,0,1,0),(1,1,0,0),(0,0,1,0),(2,1,-1,0)\}$

g) Em R^4, $\{(1,3,0,0),(1,1,3,1),(2,2,3,2),(2,3,3,2),(2,4,1,2)\}$

h) Em R^4, $\{(2,0,0,2),(1,1,0,0),(0,0,2,3),(1,2,1,2)\}$

i) Em R^4, $\{(2,0,0,2),(1,1,0,0),(1,2,1,2)\}$

Exercício 3.10: Seja $B = \{v_1, v_2\}$ a base de R^2 constituída pelos vetores $v_1 = (1,0)$ e $v_2 = (1,1)$:

a) Qual é o vetor de R^2 que nesta base tem coordenadas (2 , 2)?

b) Calcule as coordenadas do vetor (3 , 5) nesta base:

Exercício 3.11: Seja $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ o subconjunto de P_2 constituído por $v_1 = 1 + t$, $v_2 = 1 + 2t$ e $v_3 = t^2$:

a) O conjunto B é uma base de P_2?

b) Qual é o polinômio que nesta base tem coordenadas $(1, 3, -2)$?

c) Calcule as coordenadas do vetor $2 + 2t - t^2$ nesta base:

Exercício 3.12: Calcule uma base e a dimensão de cada um dos seguintes subespaços lineares:

a) $S = \{(x, y) \in R^2 : x + y = 0\}$

b) $S = \{(x, y, z) \in R^3 : x + y + 2z = 0\}$

c) $S = \{(x, y, z) \in R^3 : x + y + z = 0 \text{ e } x + y + 2z = 0\}$

d) $S = \{(x, y, z, w) \in R^4 : x + y + z + w = 0 \text{ e } x + y + 2z = 0\}$

e) $S = \{(1,-1,1), (1,1,3), (0,1,1)\}$

f) $S = \{(1,4,-2,3), (3,6,0,3), (3,4,2,1)\}$

3.5. Espaços Vetoriais com Produto Interno

Exercício 3.13: Considere em R^2 o produto interno definido por: $\langle x , y \rangle = 4x_1y_1 + 9x_2y_2$

a) Calcule $\|x\|$ para qualquer vetor $x = x_1, x_2 \in R^2$:

b) Calcule o ângulo formado pelos vetores $v_1 = (1/2, 0)$ e $v_2 = (0, 1/3)$:

Exercício 3.14: Considere em R^2 o produto interno: $\langle x , y \rangle = x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 2x_2y_2$

a) Calcule $\|x\|$ para qualquer vetor $x = (x_1, x_2) \in R^2$:

b) Calcule o ângulo determinado pelos vetores $v_1 = (1,0)$ e $v_2 = (1,1)$:

Exercício 3.15: Considere em R^3 o produto interno definido por:

$$\langle x, y\rangle = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

a) Calcule $\|x\|$ para qualquer vetor $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$:

b) Considere os vetores $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (-1,1,0)$ e $v_3 = (0,0,1)$. Calcule os ângulos determinados pelos vetores v_1 e v_2 , v_1 e v_3 , v_2 e v_3:

Exercício 3.16: Considere em P_2 o produto interno definido por:

$$\langle p(t), q(t)\rangle = p(-1)\cdot q(-1) + p(0)\cdot q(0) + p(1)\cdot q(1)$$

a) Calcule $\|p(t)\|$ para um qualquer polinômio $p(t) \in P_2$:

b) Mostre que os polinômios $p_1(t) = 1 - t^2$, $p_2(t) = \frac{t}{2} + \frac{t^2}{2}$ e $p_3(t) = -\frac{t}{2} + \frac{t^2}{2}$ constituem uma base ortonormal de P_2:

c) Calcule as coordenadas do polinômio $p(t) = 1$ nesta base:

3.6. Método de Ortogonalização de Gram-Schmidt

Exercício 3.17: Em R^4, com o produto interno usual, considere o subespaço

$$U = \{(x, y, z, w) \in R^4 : x - y + z - w = 0\}$$

a) Calcule uma base ortonormal para U:

b) Calcule a projeção ortogonal de (1, 0, 1, 0) sobre U:

c) Qual é a distância de (1, 0, 1, 0) a U?

Exercício 3.18: Em R^4, com o produto interno usual, considere o subespaço

$$U = \{(x, y, z, w) \in R^4 : x - y + z = y - z + w = 0\}$$

a) Calcule uma base ortonormal para U:

b) Calcule a projeção ortogonal de (0, 0, 1, 0) sobre U:

c) Qual é a distância de (0, 0, 1, 0) a U?

CAPÍTULO 4: TRANSFORMAÇÕES LINEARES

4.2. Matriz de uma Transformação Linear

Exercício 4.1: Considere a transformação linear $T: R^2 \to R^2$, $T(x, y) = (2x + y, x + 2y)$. Calcule a representação matricial de T na base $B = \{v_1, v_2\}$ quando:

a) $v_1 = (1,0)$, $v_2 = (0,1)$

b) $v_1 = (0,2)$, $v_2 = (2,0)$

c) $v_1 = (1,1)$, $v_2 = (1,2)$

Exercício 4.2: Considere a transformação linear $T: R^3 \to R^3$, $T(x, y, z) = (x + y, x + z, y + z)$. Calcule a representação matricial de T na base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ quando:

a) $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0,1,0)$, $v_3 = (0,0,1)$

b) $v_1 = (0,2,0)$, $v_2 = (0,0,2)$, $v_3 = (2,0,0)$

c) $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (1,1,0)$, $v_3 = (1,1,1)$

Exercício 4.3: Para $T: R^2 \to R^2$ na base canônica de R^2, calcule $T(x, y)$:

$$[T] = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Exercício 4.4: Para $T: R^3 \to R^3$ na base $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (1,1,0)$, $v_3 = (1,1,1)$, calcule $T(x, y, z)$:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

4.3. Autovetores e Autovalores

Exercício 4.5: Seja $T: R^2 \to R^2$ a transformação linear definida por $T(x,y) = (x+2y, 2x+y)$. Considerando os vetores $v_1 = (2,1)$, $v_2 = (-1,1)$, $v_3 = (2,3)$ e $v_4 = (4,4)$:

a) Quais destes vetores são autovetores de T?

b) Quais são os autovalores de T?

Exercício 4.6: Seja $T: R^3 \to R^3$ a transformação linear definida por $T(x,y,z) = (0, y+3z, 3y+z)$. Considerando os vetores $v_1 = (2,1,1)$, $v_2 = (0,-1,1)$, $v_3 = (1,0,0)$, $v_4 = (-1,1,3)$ e $v_5 = (0,3,3)$:

a) Quais destes vetores são autovetores de T?

b) Quais são os autovalores de T?

Exercício 4.7: Seja $T: R^2 \to R^2$ a transformação linear definida por $T(x,y) = (x+2y, 3y)$:

a) Calcule o polinômio característico de T:

b) Calcule os autovalores e autovetores de T:

c) Determine uma base de R^2 constituída por autovetores de T:

Exercício 4.8: Seja $T: R^3 \to R^3$ a transformação linear definida por $T(x,y,z) = (y+z, 2y+z, y+2z)$:

a) Calcule o polinômio característico de T:

b) Calcule os autovalores e autovetores de T:

c) Determine uma base de R^3 constituída por autovetores de T:

4.5. Mudança de Base

Exercício 4.9: Seja $T: R^2 \to R^2$ a transformação linear que na base canônica de R^2:

$$[T] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Calcule mediante uma matriz de mudança de base apropriada:

a) A representação matricial de T na base $v_1 = (0,2)$, $v_2 = (2,0)$:

b) A representação matricial de T na base $v_1 = (1,1)$, $v_2 = (1,2)$:

Exercício 4.10: Seja $T: R^3 \to R^3$ a transformação linear que na base canônica de R^3:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcule mediante uma matriz de mudança de base apropriada:

a) A representação matricial de T na base $v_1 = (0,2,0)$, $v_2 = (0,0,2)$, $v_2 = (2,0,0)$:

b) A representação matricial de T na base $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (1,1,0)$, $v_2 = (1,1,1)$:

Exercício 4.11: Calcule bases para o núcleo e para a imagem das seguintes transformações:

a) $T: R^2 \to R^2$, $T(x, y) = (2x + y, 2x + y)$

b) $T: R^2 \to R^2$, $T(x, y) = (x + y, x - y)$

c) $T: R^3 \to R^3$, $T(x, y, z) = (x + y + z, 2x + 2y + 2z, y - z)$

d) $T: R^3 \to R^3$, $T(x, y, z) = (x + 2y - z, 2x + 4y - 2z, -x - 2y + z)$

e) $T: R^3 \to R^3$, $T(x, y, z) = (x - z, x + 2z, y + 3z)$

f) $T: R^3 \to R^2$, $T(x, y, z) = (x - z, y + z)$

g) $T: R^3 \to R^2$, $T(x, y, z) = (2x + y - 3z, -6x - 3y + 9z)$

h) $T: R^2 \to R^3$, $T(x, y) = (x + y, x - y, x)$

i) $T: R^2 \to R^3$, $T(x, y) = (2x + y, 4x + 2y, 0)$

Exercício 4.12: Seja $T: R^2 \to R^2$ a transformação linear na base canônica de R^2 representada pela matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Determine uma matriz de mudança de base S e uma matriz diagonal D tais que $D = S^{-1} \cdot A \cdot S$:

Exercício 4.13: Seja $T: R^3 \to R^3$ a transformação linear na base canônica de R^3 representada pela matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \\ 3 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

Determine uma matriz de mudança de base S e uma matriz diagonal D tais que $D = S^{-1} \cdot A \cdot S$:

CAPÍTULO 5: OPERADORES SEMISIMPLES

5.3. Operadores Semisimples

Exercício 5.1: Seja $R : C \to C$ o operador linear tal que:

$$[R]_{can} = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \text{onde Can} = \{1 , i\}$$

Encontre uma expressão para R(z):

Exercício 5.2: Considere o operador linear $T : R^2 \to R^2$ cuja matriz na base canônica de R^2 é:

$$[T] = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Este operador é semisimples?

Exercício 5.3: Considere o operador $T : R^3 \to R^3$ cuja matriz na base canônica é:

$$[T] = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

a) Encontre uma base B do R^3 na qual a matriz de T esteja na forma semisimples:

b) Exiba $[T]_B$ e encontre uma matriz N tal que $[T]_B = N^{-1} \cdot A \cdot N$:

Exercício 5.4: Considere o operador $T : R^4 \to R^4$ cuja matriz na base canônica é:

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

e cujo polinômio característico é $p_T(X) = (X^2 + 1)^2$.

a) Prove que o operador T é semisimples:

b) Encontre uma base B do R^4 na qual a matriz de T esteja na forma semisimples e exiba $[T]_B$:

Exercício 5.5: Determine os valores de $a \in R$ para os quais o operador linear $T : R^3 \to R^3$ cuja matriz na base canônica é:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & a \end{bmatrix}$$

a) seja diagonalizável:

b) seja semisimples:

Exercício 5.6: Considere o operador linear $T : R^3 \to R^3$ cuja matriz na base canônica é:

$$[T]_{can} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 15 \\ 1 & 0 & -17 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

a) Exiba uma base B do R^3 onde $[T]_B$ esteja na forma semi-simples:

b) Exiba uma matriz M tal que $[T]_B = M \cdot [T]_{can} \cdot M^{-1}$:

ANEXO: PROVAS DE ANOS ANTERIORES

Prova de Transferência de 2006

Questão 1: Em E^3 considere o sistema de coordenadas $\Sigma = (0, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, onde $\|\vec{e_1}\| = 1$, $\|\vec{e_2}\| = \|\vec{e_3}\| = 2$, $\vec{e_1}$ é ortogonal a $\vec{e_3}$ e a $\vec{e_2}$ e o ângulo entre $\vec{e_2}$ e $\vec{e_3}$ é $\pi/3$.

a) Encontre a equação vetorial do plano $\pi : x - y + z = 1$:

b) Ache uma equação da reta que passa pelo ponto $A = (1,0,1)$ e é perpendicular ao plano π:

c) Calcule a área do triângulo OBC, onde O é a origem de Σ, e onde B e C são, respectivamente, os pontos de encontro de π com os eixos coordenados Oy e Oz:

Resposta: $(x, y, z) = (0,-1,0) + \lambda(1,1,0) + \mu(0,1,1)$; $(x, y, z) = (1,0,1) + \lambda(2,-1,1)$; $A_{OBC} = \sqrt{3}/2$

Questão 2: Seja $T : R^2 \to R^2$ o operador linear cuja matriz em relação à base canônica C do R^2 é:

$$[\,T\,]_C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$$

a) Encontre uma base do núcleo de T e uma base da imagem de T:

b) Encontre uma base B de R^2 tal que:

$$[\,T\,]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

c) Encontre uma matriz M tal que $[\,T\,]_B = M \cdot [\,T\,]_C \cdot M^{-1}$:

Resposta: $\ker(T) = [(2,-1)]$; $\operatorname{im}(T) = [(1,-3)]$; $B = ((2,-1),(1,-3))$; $M = \begin{bmatrix} 3/5 & 1/5 \\ -1/5 & -2/5 \end{bmatrix}$

Questão 3: Considere o operador linear $T : R^3 \to R^3$: cuja matriz na base canônica C do R^3 é:

$$[\,T\,]_C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Mostre que T é um operador semisimples:

b) Ache uma base B de R^3 onde $[\,T\,]_B$ esteja na forma semisimples:

c) Exiba $[T]_B$:

Resposta: $B = ((1,0,0), (0,5,0), (5,0,-5))$; $[T]_B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$