ÍNDICE

CAPÍTULO 1: GEOMETRIA COTADA

1.1. Apresentação

Geometria Cotada é a representação de elementos tridimensionais (espaço 3D) em planos bidimensionais (folha de papel), através de projeções cotadas.

Projeção cotada é uma projeção cilíndrica ortogonal (cilíndrica por ser obtida através de raios de projeção paralelos entre si e ortogonal por ser perpendicular ao plano de projeção), onde apenas são representadas as coordenadas x (abscissa) e y (ordenada), sendo a coordenada z (cota) representada somente pelo seu valor numérico.

A origem do sistema de coordenadas x, y, z é arbitrária e geralmente adotada ou fornecida conforme a conveniência do problema. Num mapa poderia ser o conjunto de um meridiano, um paralelo e o nível do mar, por exemplo.

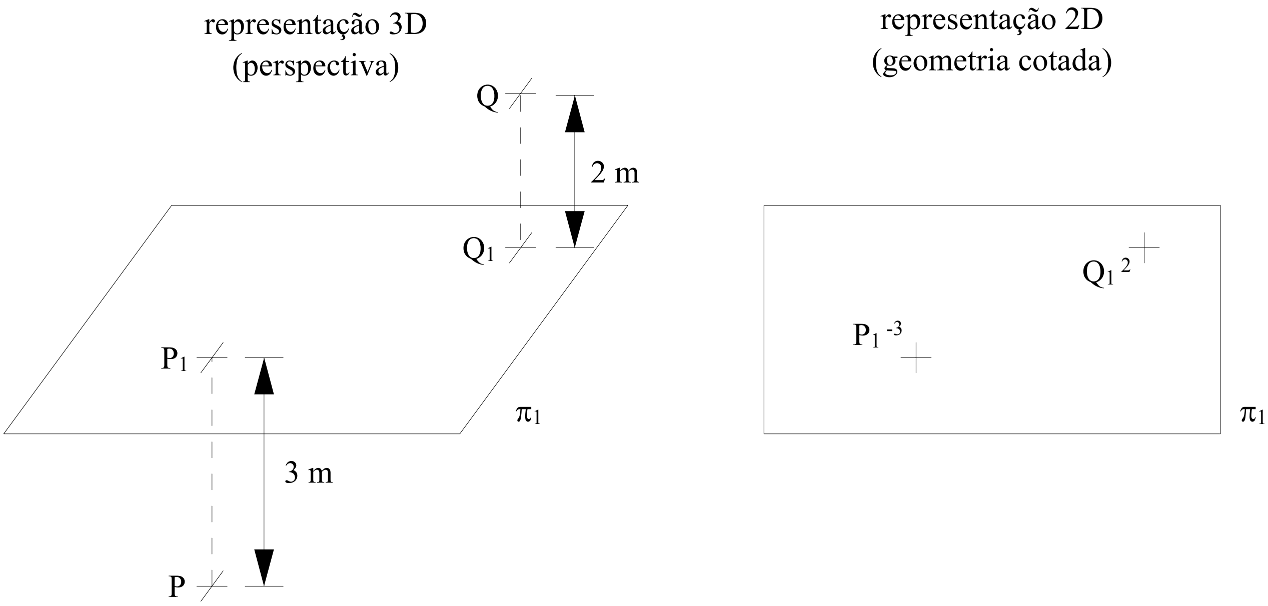
A escala é o fator de redução ou ampliação do desenho em relação ao objeto real. Todos os exemplos e problemas abordados adiante possuirão escalas de redução.

1 : 100

uma unidade na projeção **equivale** a **cem unidades** no objeto real

Unidade de medida é o padrão utilizado para quantificar distâncias, cotas, dimensões, etc. As unidades adotadas serão sempre as unidades do Sistema Internacional, freqüentemente, quilômetros (km), metros (m) ou centímetros (cm).

A origem adotada determina o plano horizontal de projeção, que divide o espaço 3D em dois: acima dele as cotas (alturas) são positivas e abaixo, são negativas. Este plano horizontal é denominado π_1 e tudo nele representado receberá o índice 1.



Conforme apresentado na figura anterior, os pontos no espaço (P e Q) receberam índices 1 (P_1 e Q_1) e são acompanhados por um número sobrescrito, que representa sua cota positiva ou negativa. A cota numérica é sempre necessária, pois não há outra forma para determinar a altura do ponto em relação ao plano π_1.

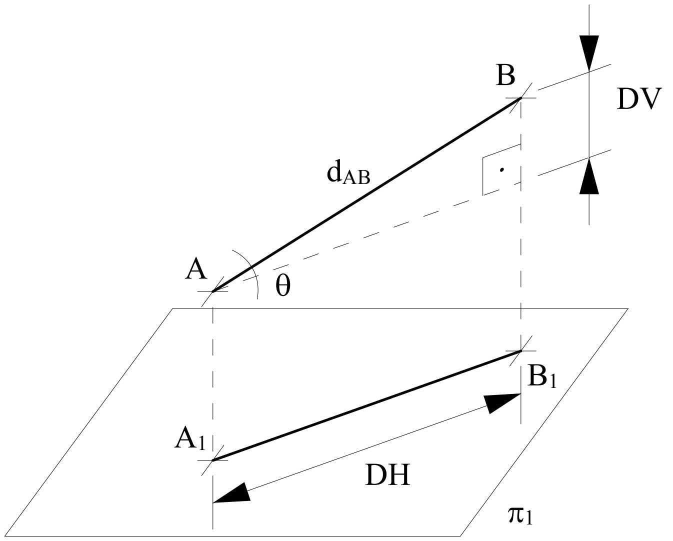
Apenas a abscissa e ordenada podem ser medidas diretamente sobre a projeção, portanto a distância real entre dois pontos também não poderá ser obtida diretamente sobre o desenho da projeção, necessitando ser decomposta em componentes:

1) DH: Distância Horizontal entre pontos. A única que pode ser mensurada sobre o desenho, porém sempre deve ser multiplicada pela escala para obter a distância horizontal do objeto real.

2) DV: Distância Vertical entre pontos. É a diferença entre os valores das cotas numéricas dos pontos e não varia com a escala, pois as cotas são dadas nas unidades reais do objeto.

3) Distância real: é a verdadeira distância entre os pontos. Calculada pela hipotenusa do triângulo formado com DH e DV:

$$\boxed{d_{AB} = \sqrt{(DV)^2 + (DH)^2}}$$



Uma reta possui três parâmetros importantes:

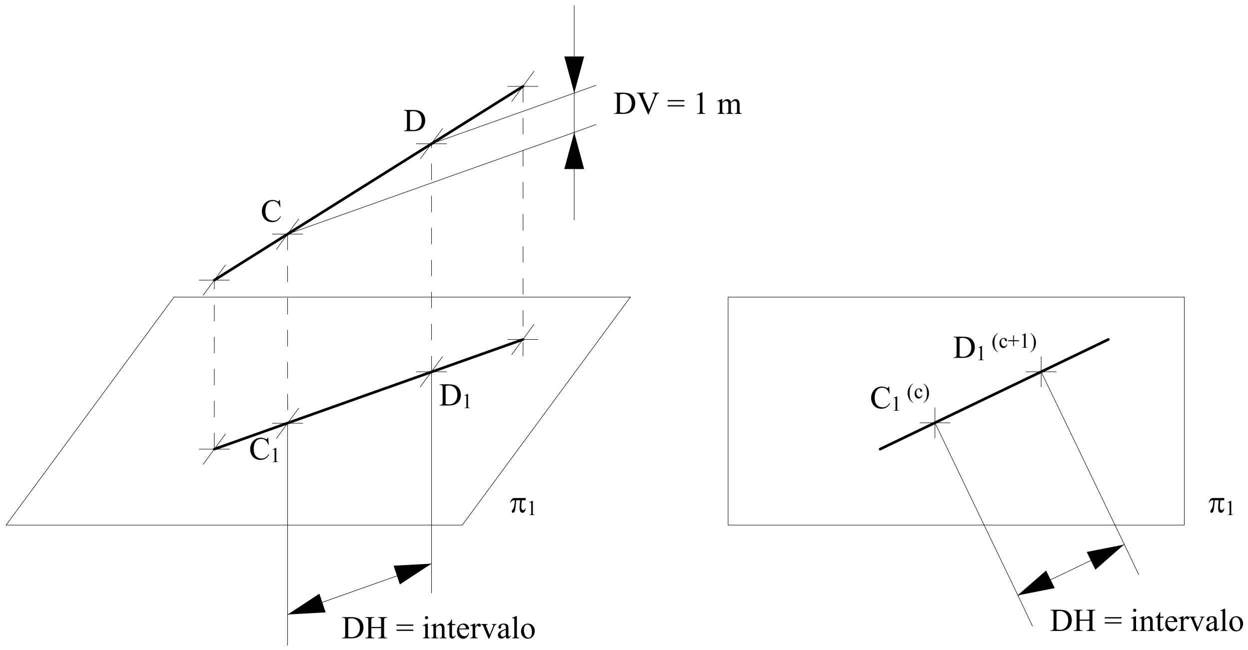
1) Inclinação (θ): é o ângulo formado pela reta real (AB) com o plano de projeção (π_1).

2) Declividade: é a proporção entre as distâncias vertical e horizontal dos pontos, expressa geralmente em porcentagem. É igual à tangente da inclinação da reta:

$$\boxed{p = \frac{DV}{DH} = tg\theta}$$

3) Intervalo: é a distância horizontal na reta que corresponde à variação de cota igual a 1 unidade do real (m, km, cm). É inverso à declividade da reta, porém, ao contrário de p, possui dimensão (m / m):

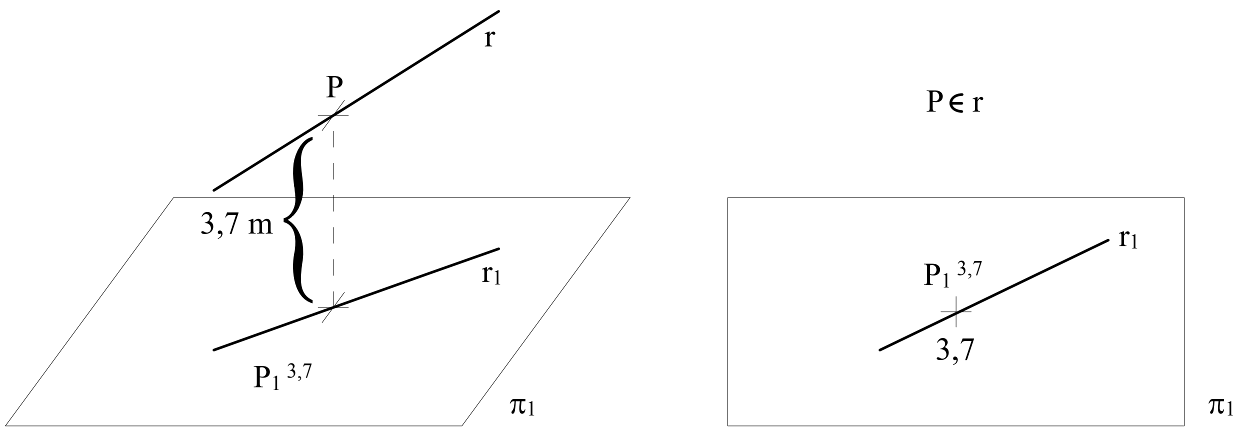
$$\boxed{i = \frac{DH}{DV} = cotg\theta = \frac{1}{p}}$$



Um ponto somente pertencerá a uma reta (ambos representados num mesmo plano de projeção π_1) se forem satisfeitas simultaneamente duas seguintes condições:

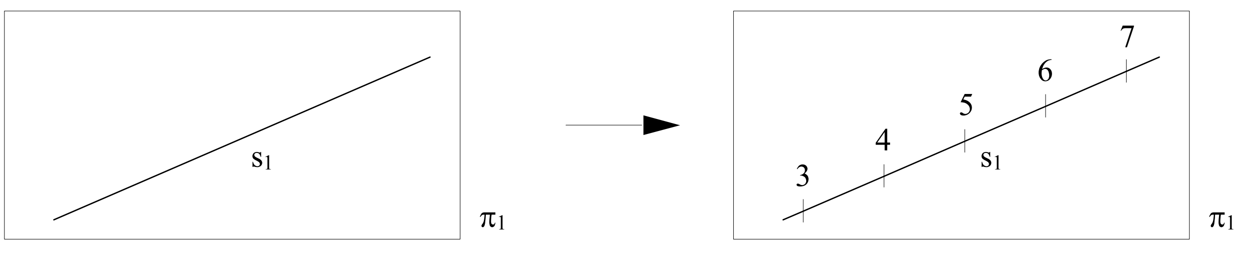
1) A projeção do ponto (por exemplo, P_1) deve pertencer à projeção da reta (por exemplo, r_1).

2) A cota do ponto deve ser a mesma da reta no local da projeção.



1.2. Graduação de Retas

Graduar uma reta é dividi-la em relação aos seus pontos de cotas inteiras, com espaçamentos iguais (de 1 em 1, 2 em 2, 5 em 5, etc.). A graduação é uma etapa intermediária necessária à maioria dos problemas deste capítulo, através de métodos puramente gráficos, sem recorrer a cálculos.



Um método para a graduação é baseado no teorema de Tales, cujo procedimento está descrito a seguir:

a) Traçar uma reta concorrente (em ângulo não muito agudo ou obtuso) a um dos pontos da reta que se deseja graduar. A melhor opção para a interseção é um dos pontos extremos (A ou B).

O ponto de menor cota entre os dois é preferível, pois o sentido crescente das cotas é mais intuitivo na leitura com a régua nos passos seguintes.

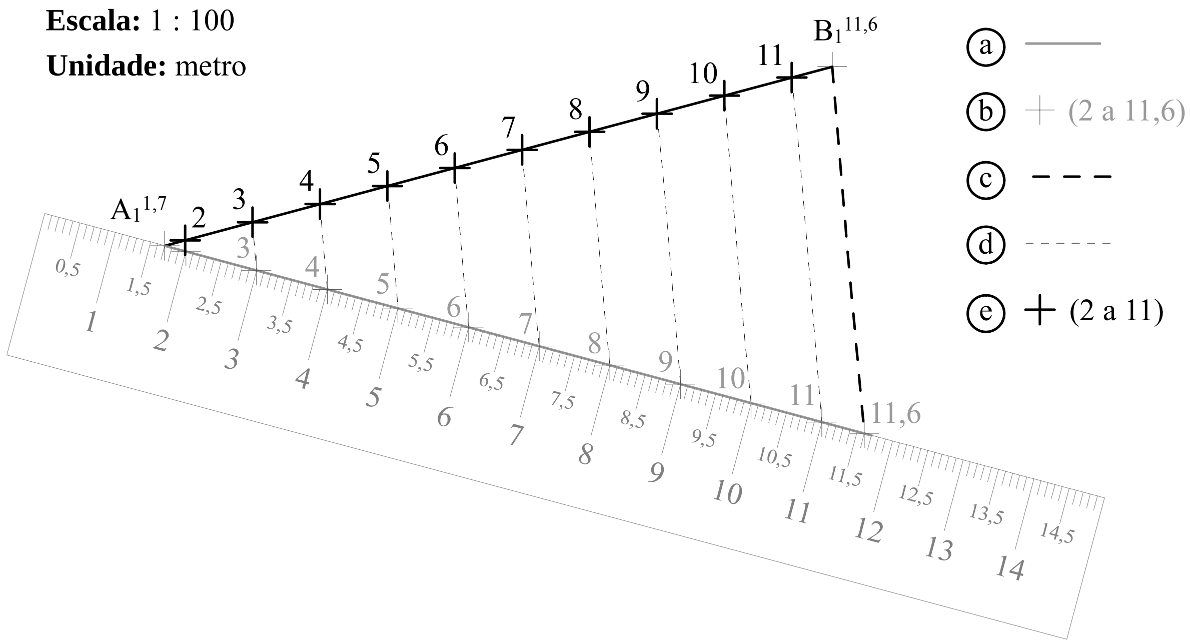
b) Marcar sobre a reta auxiliar os valores dos pontos de cotas inteiras e também a cota do ponto extremo (neste exemplo, o ponto B), com auxílio da régua.

Uma dica para facilitar a marcação é posicionar a escala da régua coincidindo com o ponto de interseção: a marca de 1,7 cm na régua coincide com o ponto A_1 de cota 1,7 m. Se for escolhido o outro extremo (B_1), as cotas a serem marcadas sobre a reta auxiliar serão decrescentes.

c) Ligar o ponto extremo da reta auxiliar (neste caso, 11,6) com o extremo da reta original (B_1).

d) Traçar retas paralelas (à reta de ligação do passo anterior) passando por cada ponto marcado sobre a auxiliar, interceptando a original. Usar esquadro em conjunto com a régua (ou outro esquadro) para garantir o paralelismo das retas.

e) Graduar a reta principal, ou seja, anotar as cotas dos pontos interceptadas no passo anterior, de acordo com seus respectivos valores na reta auxiliar.

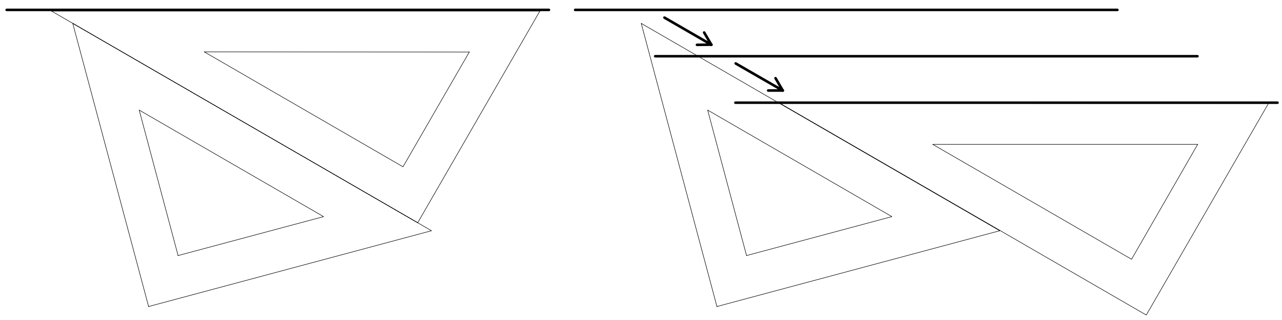


Atenção: Os estilos tracejados e outros tipos de retas apenas serão utilizados por razões didáticas. As retas e demais elementos devem sempre possuir traçados contínuos e diferenciados entre si pela maior nitidez nas retas e pontos principais, sendo as construções auxiliares mais tênues no seu traçado.

A graduação auxilia também na confirmação ou negação da pertinência de um ponto em relação a uma reta, bastando comparar a cota do ponto com a cota da reta, determinada pelas paralelas da graduação. Se iguais, o ponto pertence à reta; se não, não pertence.

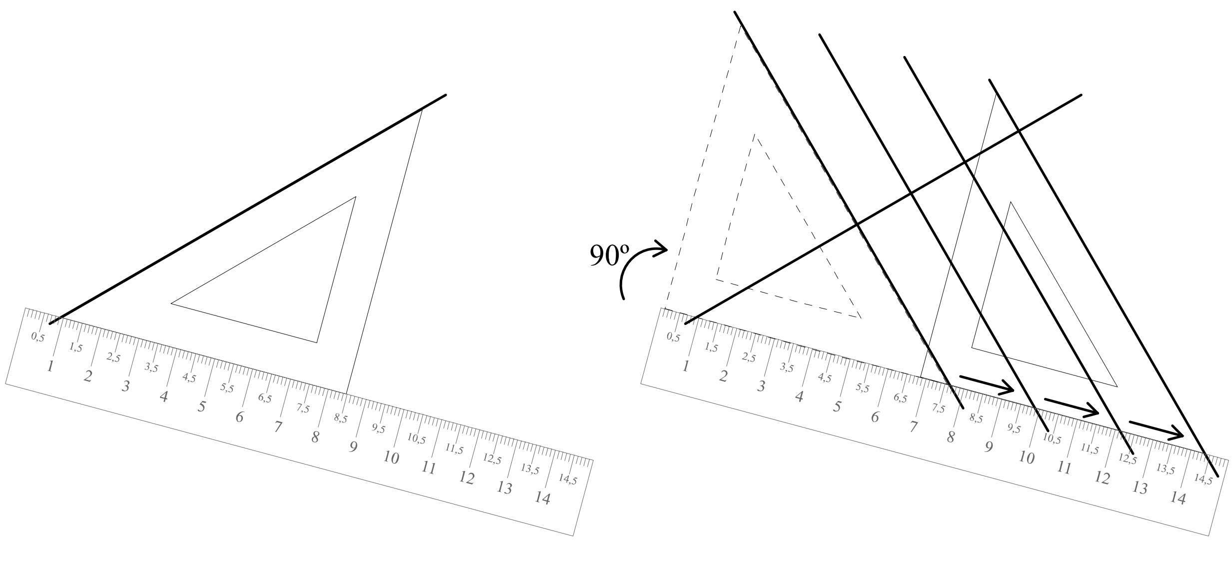
Neste e nos próximos capítulos (à exceção do 3º, sobre Desenho Geométrico), as retas paralelas devem ser construídas com auxílio de um par de esquadros ou de uma régua e um esquadro, a fim de garantir precisão neste paralelismo.

A construção é simples: apóia-se um esquadro sobre a reta (que servirá como base para as paralelas) e apóia-se o outro esquadro (ou a régua) numa das laterais do 1º esquadro, de forma a garantir sua posição. Mantendo firme a posição deste segundo elemento (2º esquadro ou a régua), pode-se deslizar o 1º ao longo de sua aresta, permitindo o traçado de infinitas paralelas ao longo de seu percurso.



Analogamente, o traçado de retas paralelas (em relação a uma outra reta pré-existente) também pode ser construído com o par de esquadros ou régua e esquadro: novamente, apóia-se um esquadro sobre a “reta-base” (pela hipotenusa do esquadro) e firma-se o 2º esquadro ou a régua em sua lateral (por um dos catetos). Com um giro de 90º sobre o esquadro principal, muda-se o cateto apoiado sobre o 2º elemento e obtém-se a inclinação necessária para o traçado de perpendiculares à reta original, bastando agora deslizá-lo para traçá-las.

Note que ambos os esquadros – de 60º (escaleno) e de 45º (isósceles) – são triângulos retângulos. Para este traçado, é imprescindível que a aresta do esquadro apoiada sobre a reta seja a hipotenusa e as arestas apoiadas sobre o 2º elemento sejam os catetos do 1º esquadro.

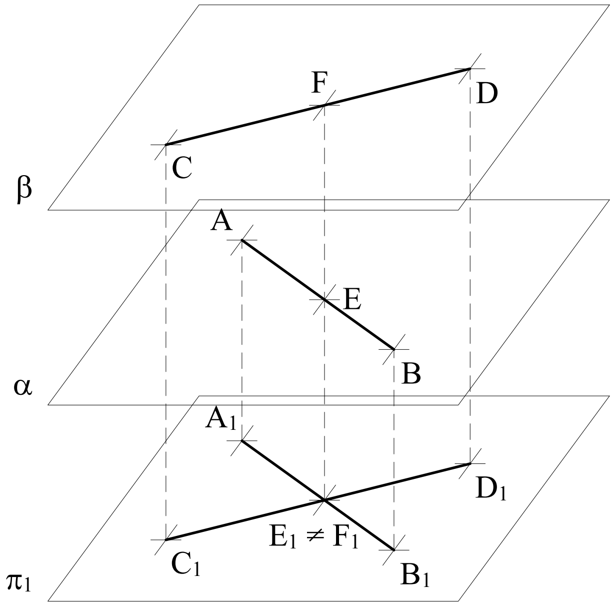


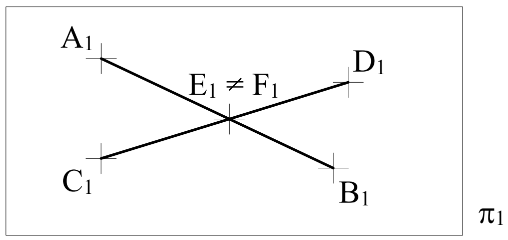
⇒ **EXERCÍCIOS 1.1 e 1.2**

1.3. Concorrência entre Retas

Um problema comum é a determinação da concorrência (interseção) entre retas. Enquanto a relação entre um ponto e uma reta apenas pode apresentar dois estados (o ponto pertence ou não à reta), a interseção de duas retas pode ser uma entre três possibilidades:

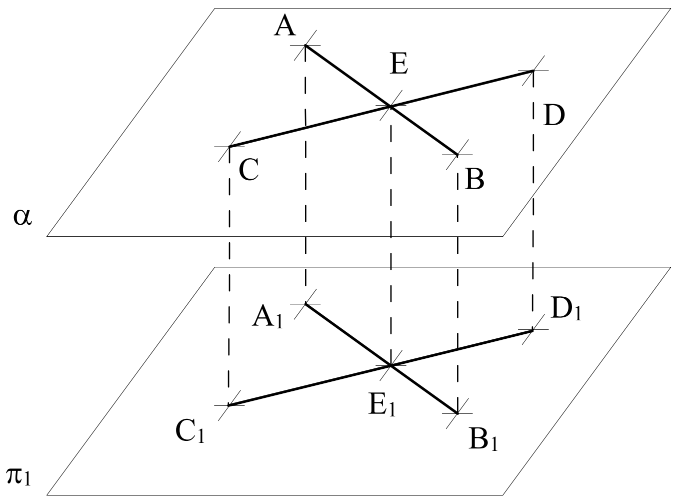
1) Um conjunto vazio (ou "nada") quando as retas não se interceptam em ponto algum, pertencendo a planos distintos.



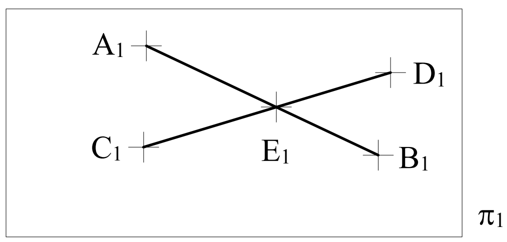


2) Uma única reta, pois ambas coincidem em todas as cotas e nas direções em que estão orientadas, pertencendo aos mesmos planos em todas as direções; para fins práticos, são uma única reta.

3) Apenas um ponto de interseção entre as retas, que pertencerão também a um único mesmo plano, sendo a única situação em que ocorre concorrência, onde as retas apresentam um ponto de cotas idênticas em relação à projeções de cada uma.



$E_1 = A_1B_1 \cap C_1D_1$



As retas são infinitas nas duas direções e sempre podem ser prolongadas para a resolução de um problema, podendo a interseção ocorrer em qualquer de seus pontos.

Há um método gráfico para verificação da concorrência que aplica a graduação de retas e comprova uma propriedade de duas retas concorrentes: juntas elas definem um plano específico e único (pois apenas um plano pode conter simultaneamente duas retas concorrentes).

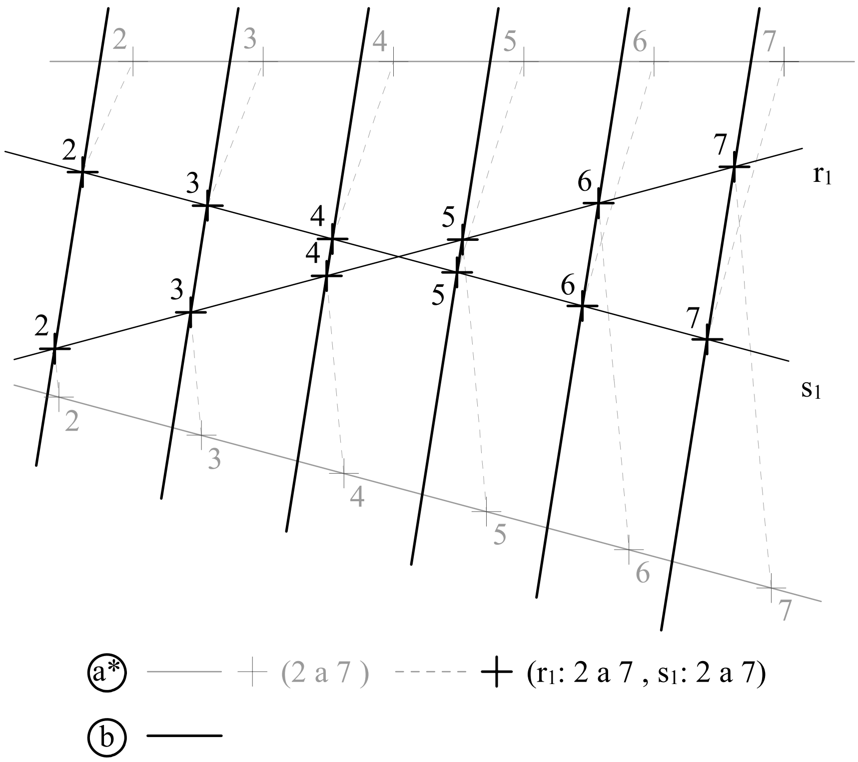
a) ***** Graduar as duas retas (r_1 e s_1) em que se deseja verificar a concorrência, conforme a seqüência de passos descrita anteriormente.

Atenção: O símbolo *, ao lado deste item e de alguns itens das próximas explicações, representará procedimentos já explicados anteriormente, que não serão repetidos.

b) Unir os pontos de mesmo valor, ou seja, de mesma cota (2 e 2, 3 e 3, 4 e 4, etc), formando retas.

Escala: 1 : 100

Unidade: metro



Com estas linhas, é possível a verificação da concorrência, mesmo se o ponto de interseção não fosse distinguível no desenho ou necessitasse de prolongamento das retas para ser atingido:

1) Se as linhas forem paralelas, as retas são concorrentes.

2) Se não forem paralelas, as retas não são concorrentes e não pertencem a um mesmo plano.

Não há possibilidade de algumas destas linhas serem paralelas entre si e outras não e, se assim parecer, indica que houve imprecisão/erros de traçado ou o ângulo formado entre duas linhas adjacentes é tão agudo que é difícil notar visualmente alguma diferença. Uma dica para diluir os erros de imprecisão é traçar apenas as duas linhas dos pontos mais distantes (de cotas 2 e 7, por exemplo), pois o erro será distribuído entre o espaço de cinco linhas ao invés de apenas duas.

Atenção: Não são os pontos das linhas auxiliares (de graduação) de cada reta que devem ser unidos e ter seu paralelismo comparado. São os pontos graduados das retas principais (r_1 e s_1) que sofrer união e comparação das retas resultantes.

⇒ **EXERCÍCIO 1.3**

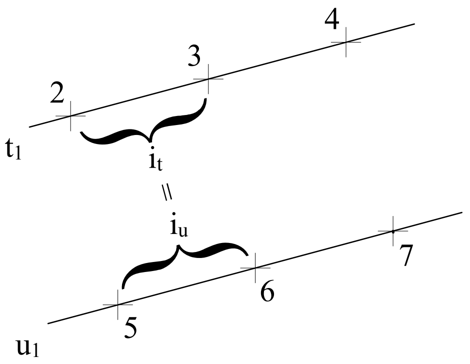
1.4. Retas Paralelas

Duas ou mais retas só são paralelas entre si se três condições forem satisfeitas simultaneamente:

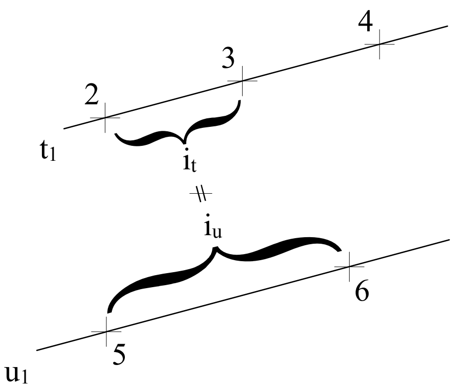
1) As projeções delas em qualquer plano também forem paralelas.

2) Os intervalos de cada uma forem iguais aos das demais.

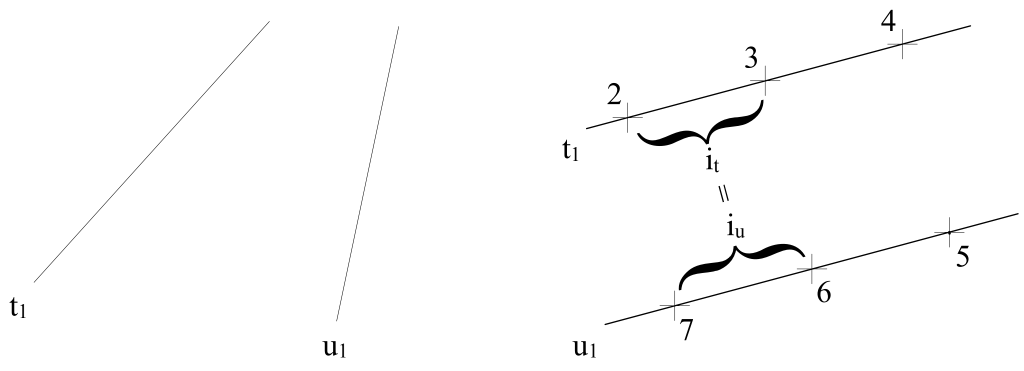
3) O sentido de crescimento das cotas for o mesmo para todas.



t e u são paralelas entre si



t e u não são paralelas entre si



1.5. Planos

Um plano apenas é considerado como definido quando é único e específico. Para tal, não pode apenas ser um dos infinitos planos arbitrários que contêm por uma reta ou ponto isolados no espaço.

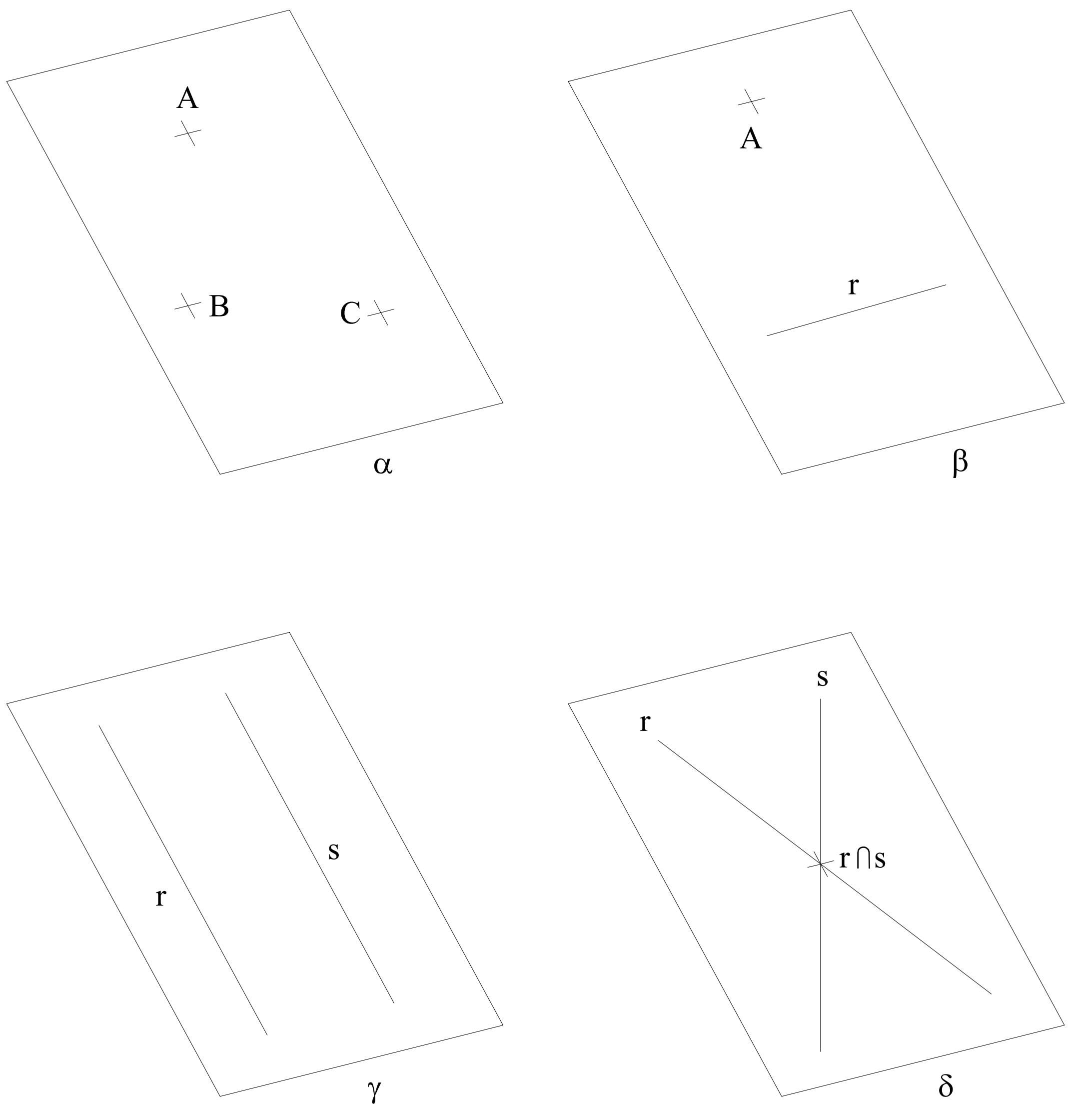
Para definir um plano é necessário que ocorra pelo menos uma entre quatro condições (embora, se mais de uma condição estiver presente, todas devem ser coerentes entre si e pertencerem ao mesmo plano):

1) Três pontos não-colineares, ou seja, não alinhados numa mesma reta no espaço.

2) Uma reta e um ponto que não pertença à mesma, lembrando que a reta é infinita em ambos os sentidos, portanto, o ponto também não pode pertencer ao prolongamento da reta.

3) Duas retas paralelas (suas projeções podem ser coincidentes, mas as retas originais não).

4) Duas retas concorrentes entre si.



1.6. Reta de Maior Declive do Plano

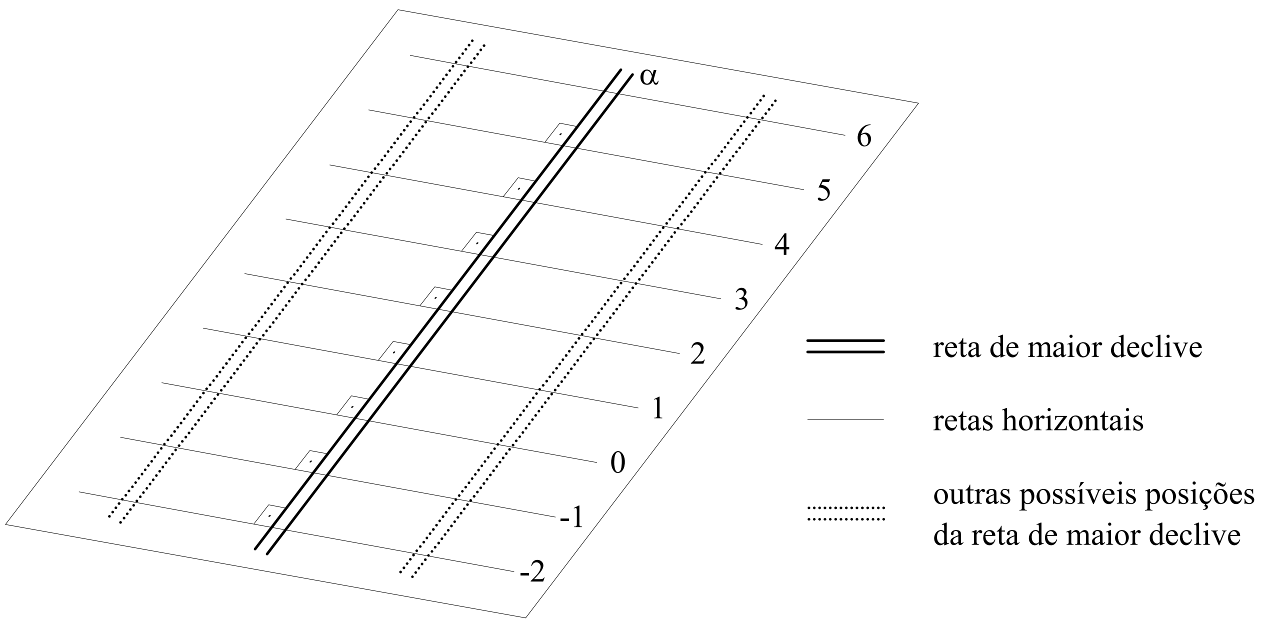
A reta de maior declive do plano é a reta mais inclinada do mesmo, de “menor energia” do plano, ou seja, aquela que define a direção da trajetória dos objetos que escorregassem pelo plano.

A reta de maior declividade é a maneira mais sucinta de representar um plano e, por esta razão, geralmente apenas ela o representa na maioria dos problemas. Diferencia-se das demais retas do desenho por ser representada por duas retas bem próximas entre si.

Desenhar a reta de maior declive dupla, com traços próximos, mas ainda distinguíveis, é uma das convenções avaliadas em Geometria Cotada. Pode-se identificar esta reta pelo nome do plano (α, por exemplo) caso não haja outra identificação prévia (pontos ou retas que originaram o plano).

Quando se denomina reta de maior declive, pode-se ter a falsa impressão de que há apenas “a” reta de maior declive, única e fixa num ponto. Esta impressão não é correta, pois esta reta pode estar em qualquer lugar conveniente para apresentar a direção, declividade e intervalo do plano, porém apenas uma deve ser traçada para representá-lo.

A reta de maior declive é muito útil, pois resume as características do plano (declividade e intervalo) e a medição destes valores sobre a reta de maior declive determina os valores do plano. Portanto, a graduação do plano também se resumirá à graduação de sua reta de maior declive.



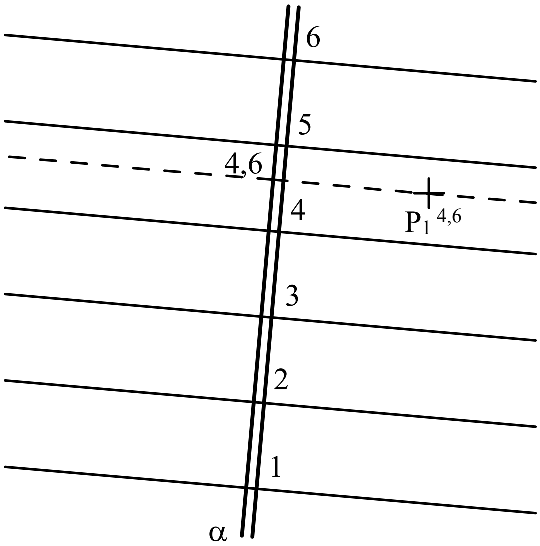
Outra classe de retas relevantes são as retas horizontais do plano, que definem conjuntos de pontos de mesma cota no plano; estas horizontais são perpendiculares à reta de maior declive. Numa comparação com mapas topográficos, elas seriam análogas às curvas de nível do terreno, sendo, porém retilíneas por representarem uma superfície regular (plano).

Esta reta representa a menor distância a percorrer para subir ou descer de uma horizontal a outra do plano, isto é, é a menor distância entre horizontais do plano (distância perpendicular).

⇒ **EXERCÍCIOS 1.4 e 1.5**

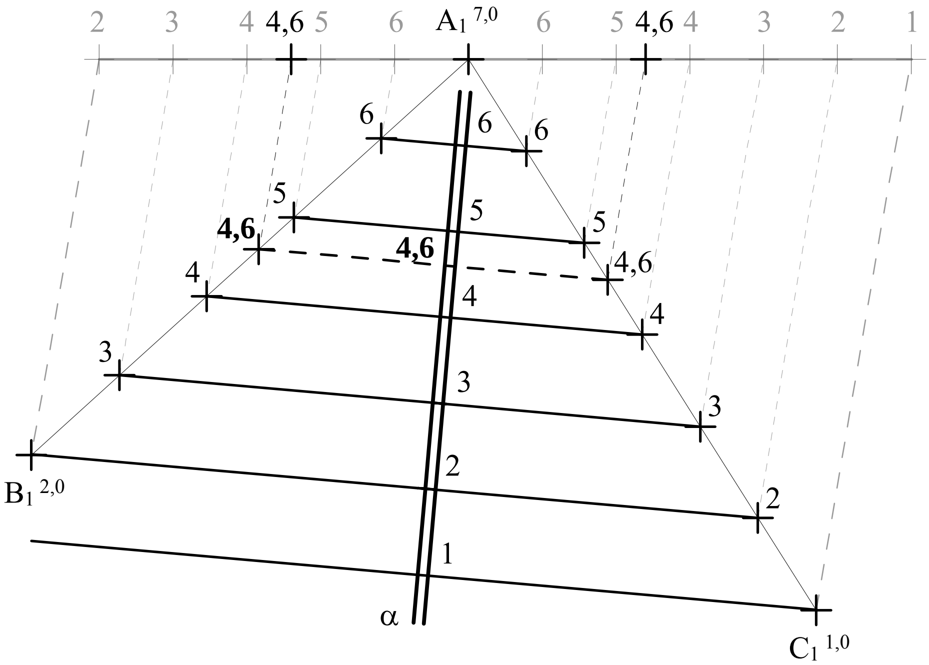
1.7. Pontos e Retas Contidos no Plano

Um ponto apenas pertencerá a um plano se a cota de sua projeção coincidir com a respectiva cota da reta horizontal que passa pelo ponto projetado.



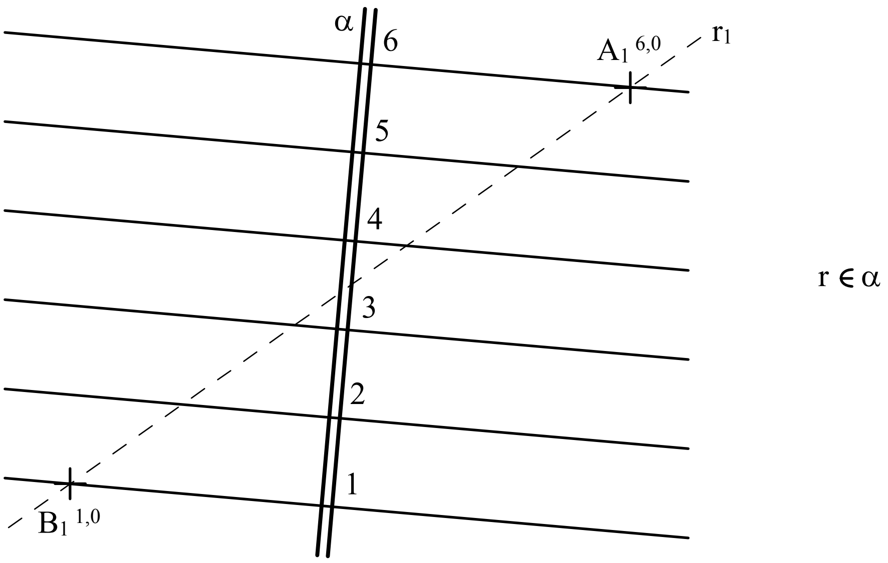
$P \in \alpha$

Se a horizontal que contém o ponto em questão não possuir cota inteira, pode-se interpolá-la. Partindo-se das construções auxiliares (ou seja, das graduações das retas e/ou pontos que formam o plano), pode-se determinar a cota de qualquer horizontal intermediária.



Na situação oposta, em que um ponto é afirmado como pertencente a um determinado plano e pede-se sua cota, o procedimento é idêntico, retornando a cota do ponto pela horizontal que o contém e esta pela graduação das retas de construção do referido plano.

A verificação da pertinência entre uma reta e um plano somente é satisfeita se comprovado que dois pontos quaisquer da mesma reta pertencem ao plano.



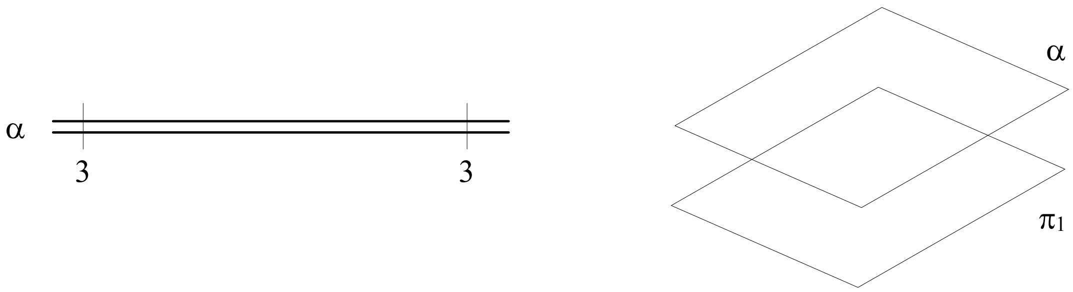
A expressão "a reta se apóia em" significa que alguns de seus pontos interceptam os elementos "de apoio"; se estes elementos forem retas e/ou pontos de um mesmo plano, a reta também estará contida nele.

⇒ **EXERCÍCIOS 1.6 , 1.7 , 1.8 , 1.9 e 1.10**

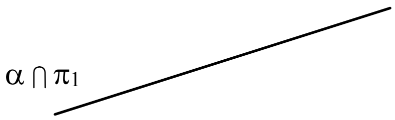
1.8. Posições Relativas entre Planos

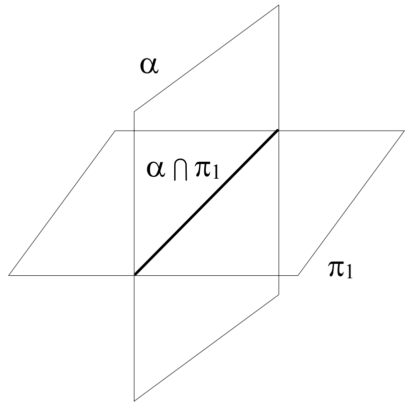
Dois planos podem assumir diversas posições entre si, podendo um deles ser o plano de projeção:

1) Plano paralelo ao plano de projeção.

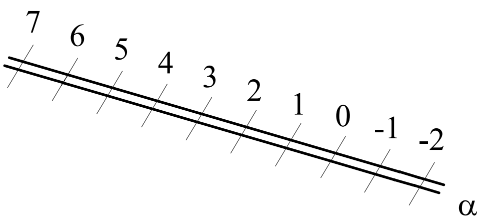


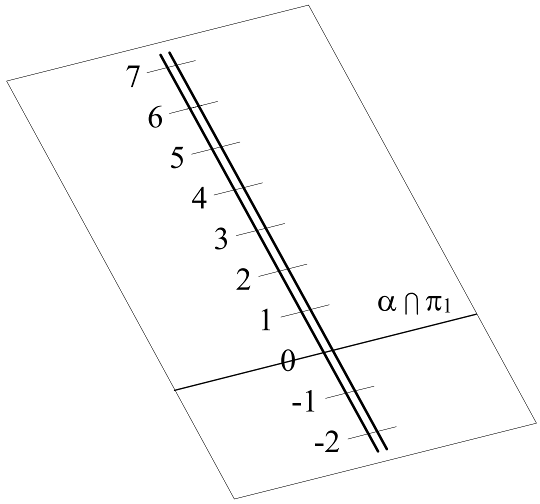
2) Plano vertical, ou seja, perpendicular ao plano de projeção.



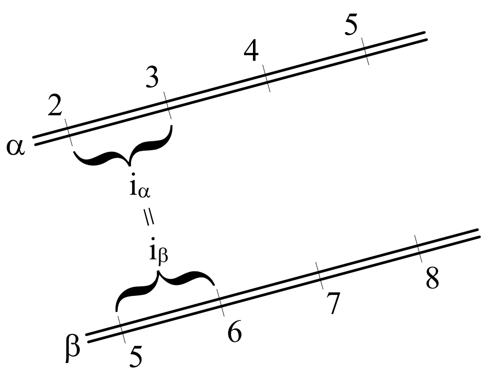


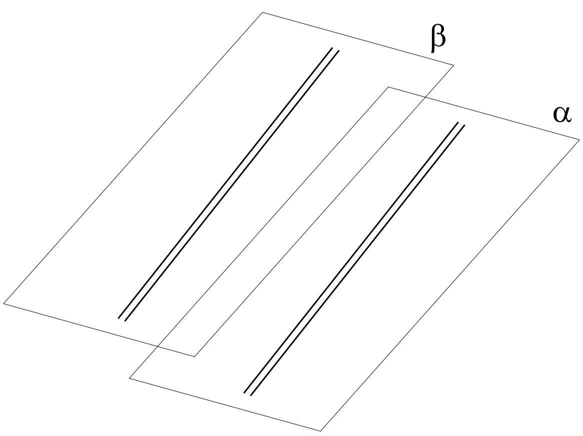
3) Plano concorrente ao de projeção, com inclinação diferente de 90º, o que conduz à reta de maior declive já explicada anteriormente.





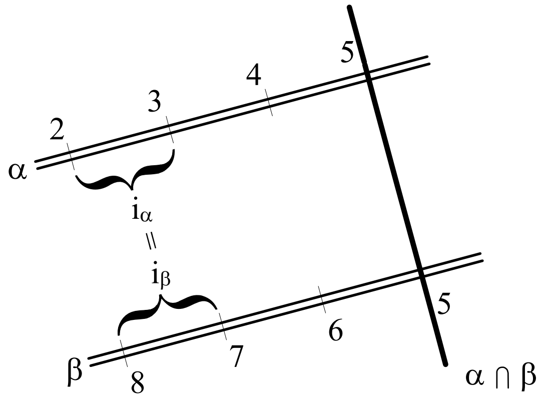
4) Planos paralelos entre si, em que nenhum é o plano de projeção.



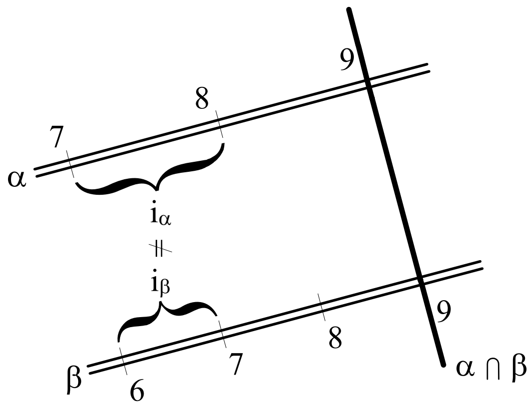


5) Planos concorrentes entre si, em que nenhum é o plano de projeção. A concorrência entre planos pode ser afirmada a partir da ocorrência de uma entre três condições:

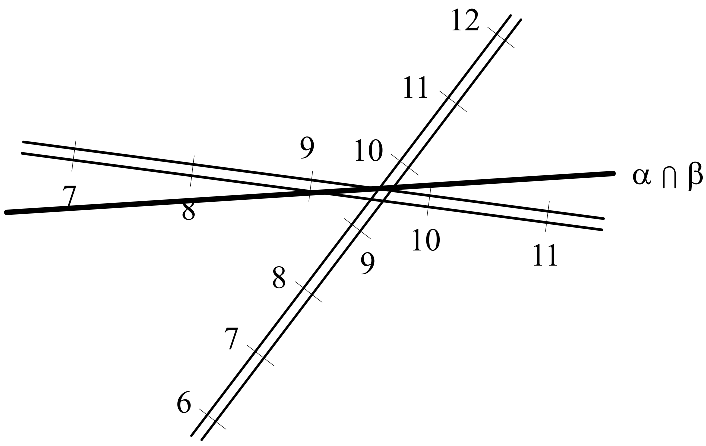
- Retas de maior declive com projeções paralelas entre si, porém com sentido de crescimento oposto das cotas.



- Retas de maior declive com projeções paralelas entre si, porém com intervalos diferentes.



- Retas de maior declive concorrentes entre si, onde o ponto de interseção das projeções possui a mesma cota em ambas as retas e, conseqüentemente, em ambos os planos.



É importante notar uma particularidade decorrente dos planos infinitos: esta concorrência pode ocorrer para qualquer par de retas de maior declive que se cruzem visualmente, sem importar a coincidência de cotas, visto que os planos são infinitos e, se não forem paralelos entre si, necessariamente se interceptarão em algum local do espaço também infinito.

Quando um problema se refere à interseção de retas ou planos, direta ou indiretamente, está sempre questionando a concorrência entre eles, pois, caso a mesma não exista, a solução do problema será um conjunto vazio.

1.9. Interseção entre Planos

Um assunto relacionado à concorrência entre planos é a interseção entre os mesmos, pois, se eles se cruzam, existirão pontos em comum entre os mesmos e estes pontos formarão uma reta de interseção (como, por exemplo, no encontro entre o piso e uma parede de uma sala).

Também há um método gráfico para ajudar no traçado desta reta de interseção e se baseia na própria definição da interseção: pontos em comum aos dois planos e com as mesmas cotas simultaneamente em ambos, além do fato destes pontos se alinharem em uma mesma reta.

A seqüência de passos deste método está descrita a seguir:

a) ***** Traçar as retas de maior declive de cada plano (planos α e β) e graduá-las (caso a graduação não tenha sido previamente fornecida no problema).

b) Traçar as retas horizontais dos planos, lembrando que são perpendiculares às retas de maior declive do respectivo plano ao qual pertencem.

Não confundir a que plano (reta de maior declive) pertencem as horizontais. Cada plano terá suas próprias horizontais, perpendiculares apenas à sua própria reta de maior declive.

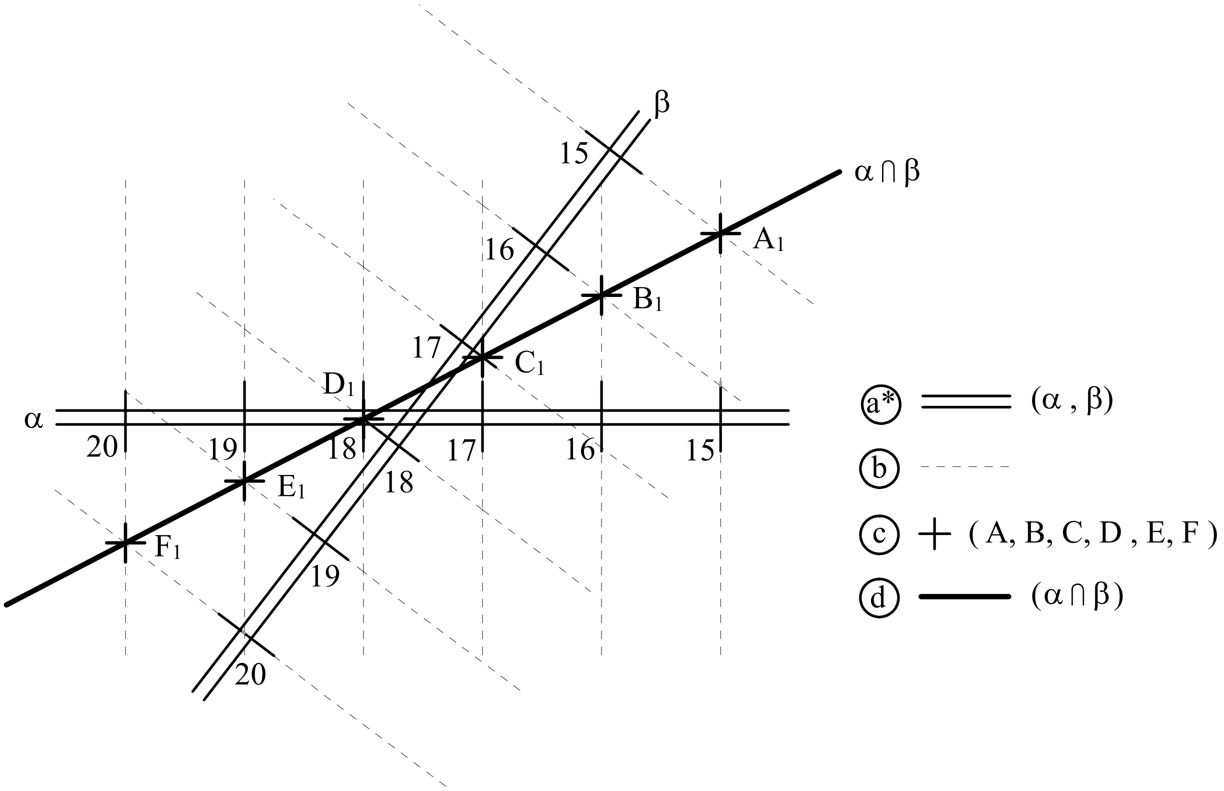
Traçar as horizontais tênues e longas, a fim de não atrapalhar a clareza do desenho e evitar o posterior prolongamento das mesmas.

c) Marcar os pontos de cruzamento (pontos A, B, C, D, E e F) entre cada horizontal de um plano com a respectiva horizontal de mesma cota do outro plano, ou seja, definir os pontos em comum aos dois planos.

d) Unir os diversos pontos entre si, que deverão formar a reta de interseção (reta $\alpha \cap \beta$).

Se todos os pontos não formarem uma reta, há chance de ter ocorrido imprecisão no traçado ao longo do processo ou, se tudo foi bem traçado, os planos não são concorrentes e a solução para sua interseção será um conjunto vazio.

Uma dica, similar àquela sobre o método de concorrência entre retas, é traçar a reta a partir do mínimo necessário, ou seja, apenas a partir dos dois pontos mais extremos, pois a imprecisão de traçado será "diluída" através de um intervalo maior e menos perceptível visualmente.



⇒ **EXERCÍCIOS 1.11 e 1.12**

1.10. Interseção entre Reta e Plano

A interseção entre uma reta e um plano pode ser uma entre três situações:

1) Um conjunto vazio, se a reta for paralela ao plano e, portanto, nunca se interceptarem.

2) A própria reta, se ela pertencer ao plano.

3) Um único ponto, nos demais casos.

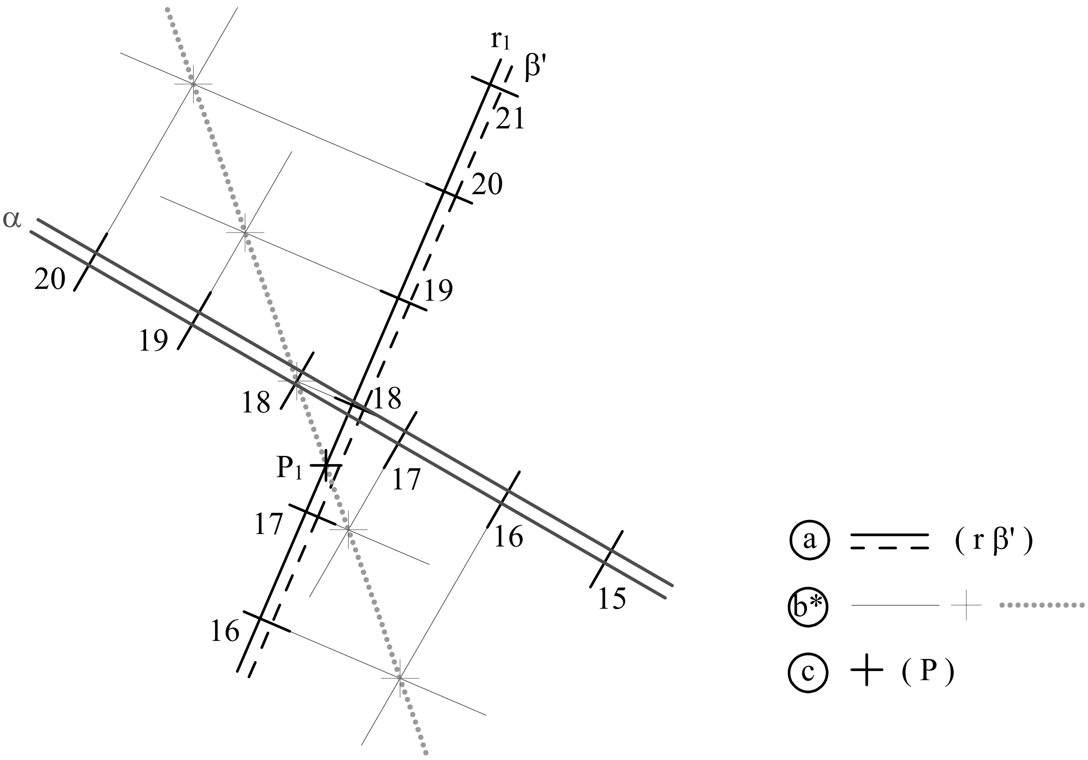
O ponto de interseção entre a reta e o plano pertence à reta de interseção entre este plano e um dos infinitos planos que poderiam conter a reta dada, portanto, pode-se aplicar um método gráfico para descobrir este ponto (nesta explicação, já se pressupõem a reta e o plano graduados):

a) Escolher um plano que contenha a reta dada. Como são infinitos os planos possíveis, escolhe-se o mais simples: aquele cuja reta de maior declive é a reta dada, ou seja, transformá-la em reta de maior declive (plano β').

b) ***** Traçar a reta de interseção entre o plano dado (plano α) e este plano escolhido (β'), conforme o método anterior de interseção entre dois planos.

c) Encontrar o ponto da reta original que também pertence a esta reta de interseção fictícia entre planos (reta α ∩ β').

Este ponto (ponto P) é a única resposta real, sendo todo o restante apenas a construção auxiliar para a resolução do problema.



⇒ **EXERCÍCIOS 1.13 , 1.14 e 1.15**

CAPÍTULO 2: SUPERFÍCIES TOPOGRÁFICAS

2.1. Apresentação

Os conceitos apresentados em Geometria Cotada possuem aplicações práticas muito úteis no mundo real, particularmente quanto à cartografia e engenharia civil.

As superfícies reais dificilmente são próximas aos planos e retas regulares vistos na geometria.

Na absoluta maioria dos casos, são curvas muito irregulares não-representáveis por equações matemáticas.

Esta característica leva à imprecisão inerente das soluções, mas a topografia não requer exatidão milimétrica no estudo de seus problemas, sendo mais do que suficiente à precisão que ela pode fornecer.

2.2. Geometria Cotada x Superfícies Topográficas

Os conceitos anteriormente apresentados na Geometria Cotada possuem correspondência na topografia.

O plano de projeção π_1 torna-se uma altitude de referência (em geral, as cotas se referem ao nível do mar), a folha de papel equivale ao mapa ou carta topográfica, as cotas graduadas e retas horizontais agora são as curvas de nível do terreno.

Para melhor visualizar o que são as curvas de nível, imagine uma montanha, vale de rio ou outro elemento de relevo “fatiado” por diversos planos nas suas cotas inteiras.

Aqui os elementos em cada cota formam curvas fechadas, pois são elementos sólidos no espaço e não mais planos sem espessuras ou retas infinitas. Cada curva é uma curva de nível do terreno e todos os seus pontos possuem a mesma cota indicada.

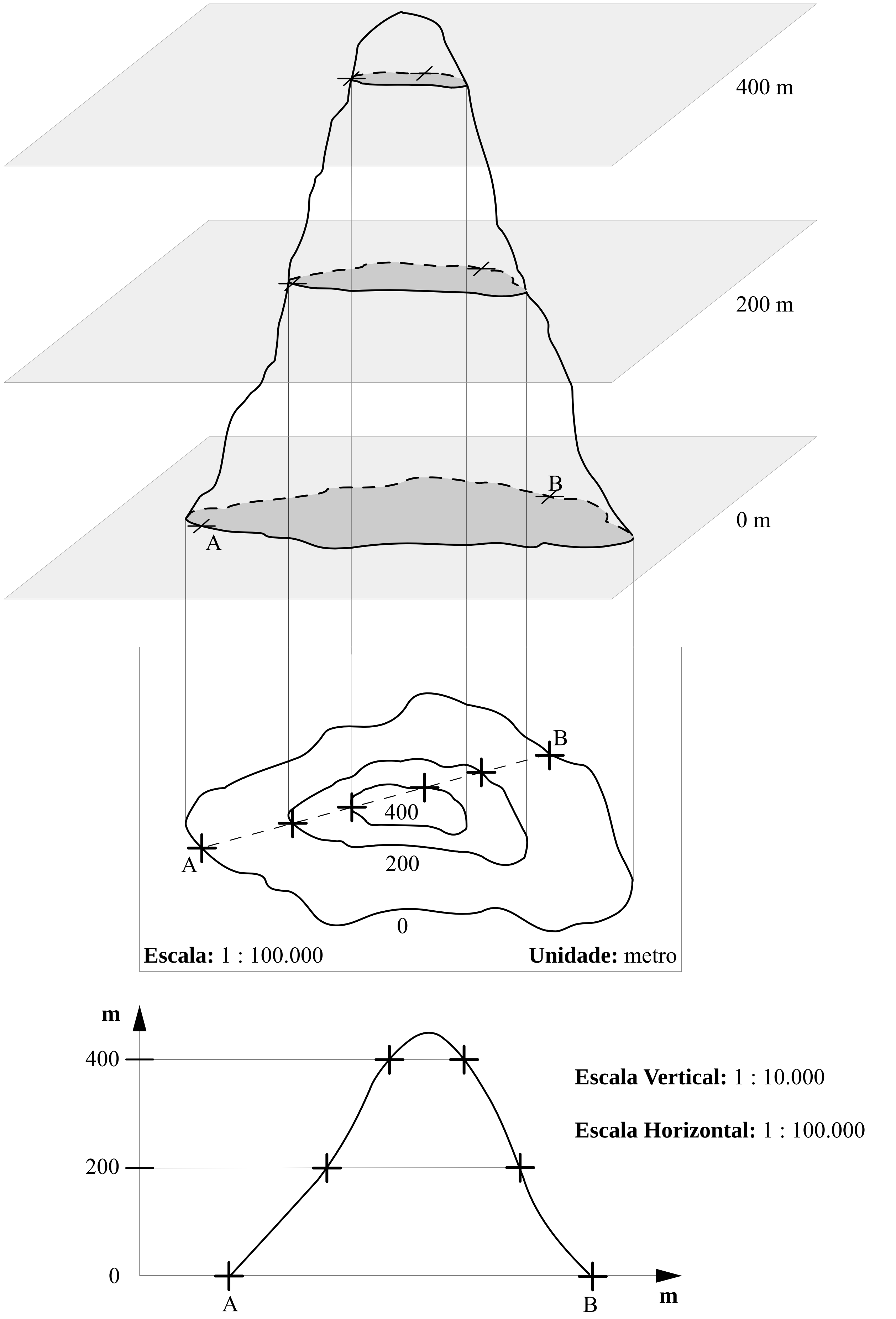
Os conceitos de escala e unidade permanecem idênticos aos vistos antes, apenas se tornam mais comuns as unidades maiores (km) e escalas menores (1 : 1.000, 1 : 10.000) devido às maiores dimensões do que se deseja representar.

Na figura a seguir, foram representadas apenas curvas com cotas múltiplas de 100 metros, não sendo desenhadas em intervalos de 1m em 1m como na Geometria Cotada.

Isto se justifica pela maior clareza e simplicidade conferidas à representação, sem “congestionar” demais o desenho com centenas de curvas, sendo o intervalo convenientemente adotado para o uso pretendido para a carta topográfica (conseqüentemente, maiores precisões exigem menores intervalos entre as curvas e vice-versa).

Sempre é possível interpolar uma curva com cota intermediária, traçada cuidadosamente e visualmente proporcional.

As cotas dos picos e vales não costumam ser exatas (quando não atingem a próxima cota inteira), sendo aproximadas por traçados suaves e coerentes com as demais curvas.


400 m
200 m
0 m
B
A
B
400
A
200
0
Escala: 1 : 100.000
Unidade: metro
m
400
200
0
A
B
m
Escala Vertical: 1 : 10.000
Escala Horizontal: 1 : 100.000

O perfil do terreno (apresentado na parte inferior da figura anterior) é a representação da evolução das cotas à medida que se caminha pelo desenho, similar a um gráfico em que a abscissa é a distância horizontal e a ordenada são as cotas verticais. Se a carta topográfica representa uma visão “aérea” do terreno, o perfil apresenta a observação lateral do terreno, cortando-o na direção da trajetória desejada, porém com perda da precisão do detalhamento da superfície. Usualmente, o perfil possui escalas diferentes no eixo vertical (cotas) e no horizontal (distâncias horizontais), pois a variação das cotas costuma ser mais sutil do que a distância percorrida na horizontal e esta distorção gera uma melhor visualização do relevo.

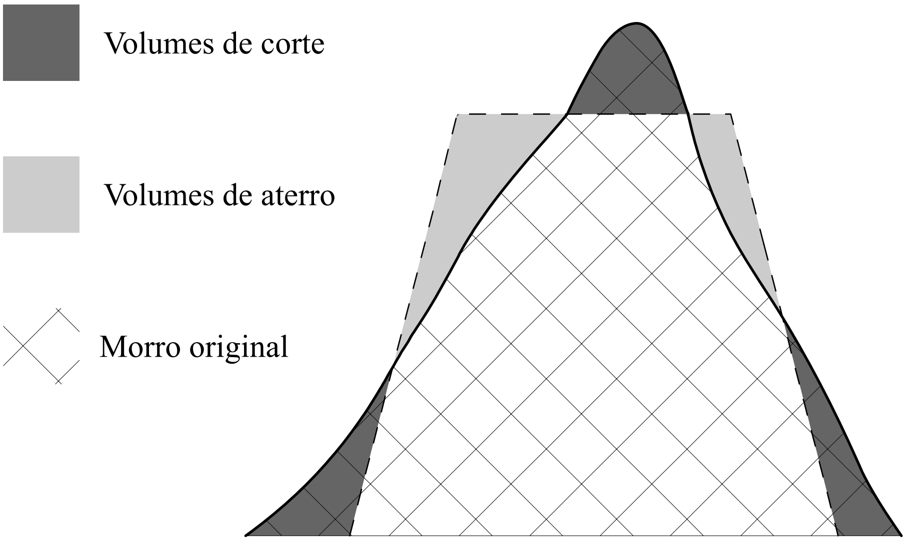
Em geral, não é possível calcular o intervalo, declividade e inclinação ao longo de toda a superfície, por não serem constantes, já que a superfície é irregular. Usualmente, referem-se a pequenos trechos aproximadamente regulares (análogo ao conceito de derivada) ou, de forma mais comum, questionam-se estes parâmetros relativos a planos artificiais, originados de ações humanas sobre o terreno (barragens, canalização do leito de rios, cones de luz e sombra de obstáculos, etc).

2.3. Cortes e Aterros

Uma das utilizações mais importantes da topografia é o cálculo (ou estimativa) das áreas e volumes de cortes e aterros para a implantação de obras de engenharia civil. O foco adotado não será a demonstração e aplicação dos cálculos dos volumes; a determinação das linhas de encontro do terreno com a obra será o alvo do estudo.

Estes encontros não serão, na absoluta maioria dos casos, figuras geométricas regulares, mesmo sendo prismáticas as formas das obras (uma barragem trapezoidal, por exemplo), pois isto apenas é possível em terrenos muito próximos de um plano ideal.

Duas são as formas possíveis de movimentos de terra (e de rochas): cortes, onde se deseja aprofundar (escavar) a superfície, e aterros, onde se deseja “erguer” o terreno para aumentar as cotas finais em relação às originais.



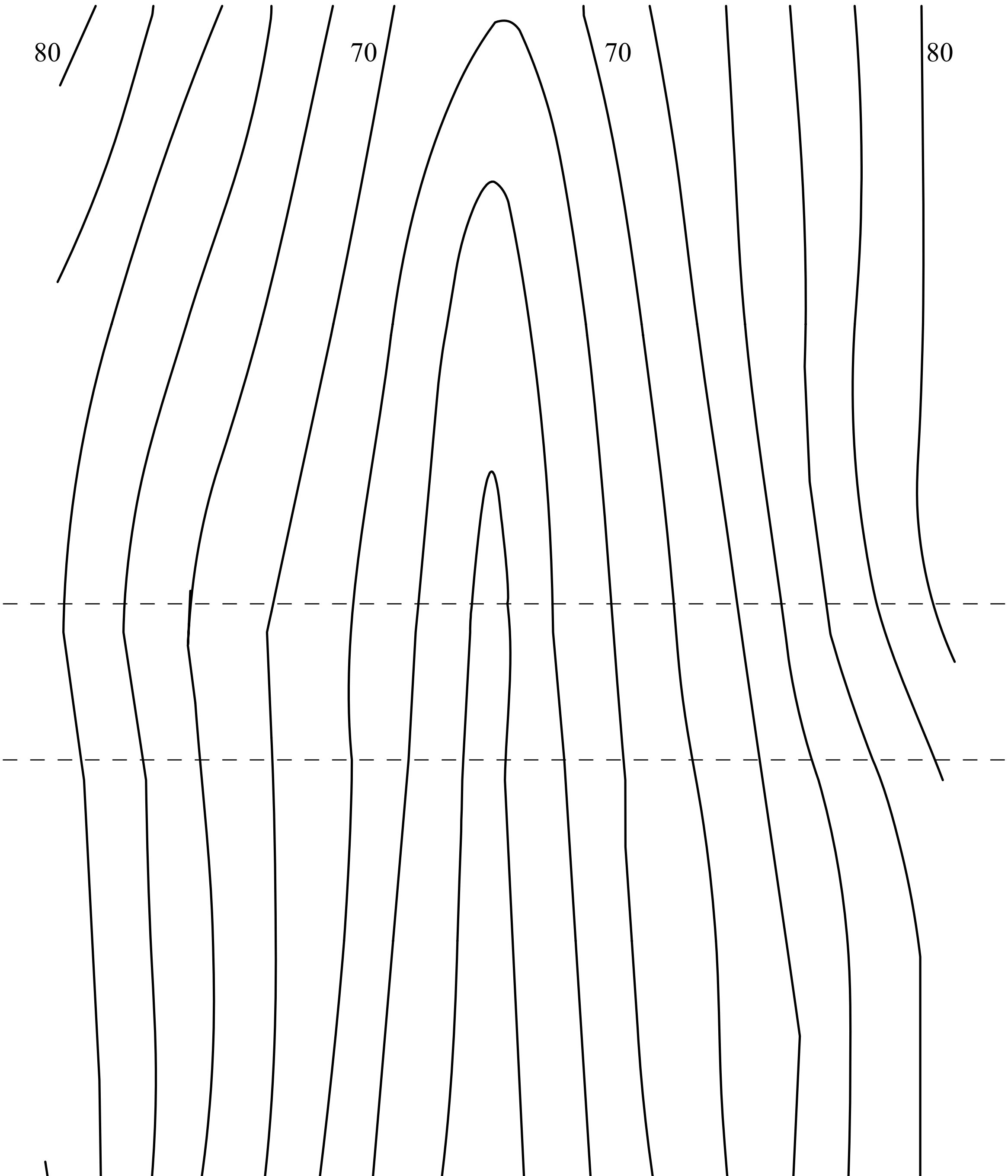
Perfil lateral de uma barragem de terra executada sobre um morro pré-existente

Os problemas tratarão quase sempre da determinação de obras humanas sobre terrenos naturais. A abordagem ao tratar e resolver um destes problemas será exemplificada a seguir, num problema resolvido do começo ao fim, com observações pertinentes à medida que se fizerem necessárias.

2.4. Superfícies Topográficas

Exemplo Resolvido: No projeto de uma barragem de terra com crista horizontal (representada em tracejado) na cota 76 m, largura de 12 m e bordos laterais retos, deseja-se determinar a linha de encontro da saia de aterro de montante com a superfície topográfica. Indicar a região inundável a montante para o nível de água na cota 74 m:

Escala: 1 : 500 $p_{montante} = 1 / 4$ **Unidade:** metro



Resolução comentada:

Os enunciados, mesmo os mais longos, costumam ser sucintos, sem dados ou informações redundantes, fornecendo apenas o mínimo necessário de informações para resolvê-los, cabendo ao aluno lembrar dos conceitos vistos em Geometria Cotada e aplicá-los corretamente.

A linguagem utilizada, às vezes, é um obstáculo para iniciar a solução, pois os termos são essencialmente voltados à engenharia civil. Este exemplo contém vários destes termos, que serão explicados um a um, à medida que forem necessários.

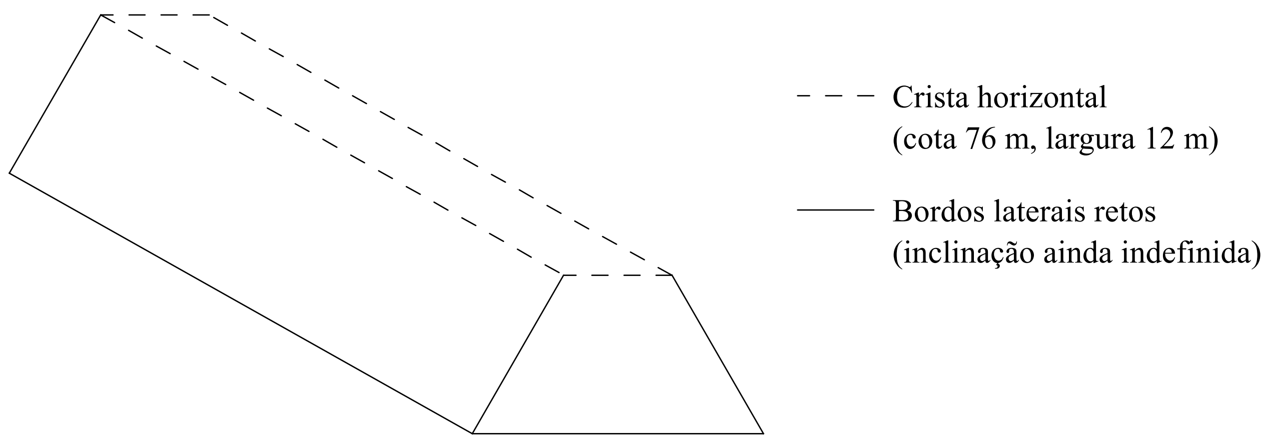
a) Ler atentamente o enunciado, pois dificilmente alguma de suas informações não será utilizada, mesmo como simplificação da resolução, enquadrando o problema em um caso particular mais simples. O desenho e as representações nele contidas também são parte do enunciado e devem ser observadas e analisadas.

Procede-se então à divisão do enunciado nas informações contidas nele:

1) É pedido o projeto de uma barragem de terra, obviamente localizada num rio, tratando-se de uma obra de grandes dimensões, cuja função é o represamento de água em um de seus lados.

2) A crista da barragem é horizontal e está na cota 76 m, possui largura de 12 m e seus bordos laterais são retos. Estas informações definem a geometria da obra e, conseqüentemente, a projeção da mesma.

- A crista é o topo da barragem e foi informado que está na altura de 76 m, a partir da superfície de referência (provavelmente, o nível do mar).
- A largura da crista é igual a 12 m, aplicada a escala do desenho ($1:500 \Rightarrow 2{,}4\,\text{cm} = 12\text{m}$).
- Os bordos laterais (as paredes da barragem) foram afirmados como retos, portanto são planos. Sabe-se previamente que a barragem será trapezoidal, pois uma declividade a montante foi fornecida no enunciado.
- As retas tracejadas representam as arestas dos bordos onde encontram a crista e já fornecem a locação da barragem na superfície topográfica.



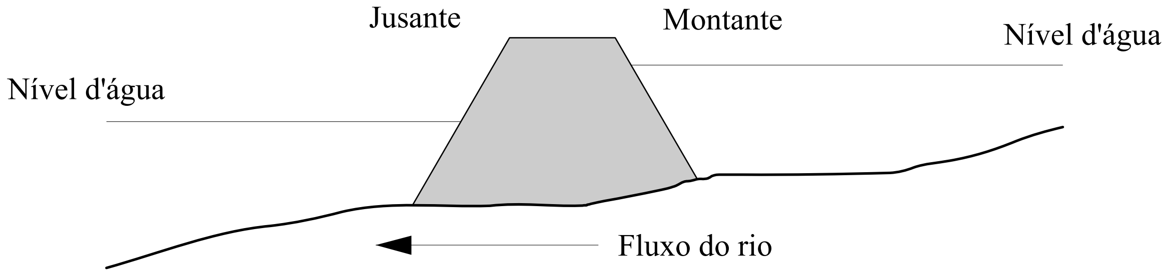
3) Pede-se a linha de encontro da saia de aterro de montante com a superfície natural.

- Linhas de encontro são a delimitação do encontro entre a barragem e o terreno existente, ou seja, o terreno original é aproveitado e só se constrói a diferença entre o volume do terreno e o da obra. Como as curvas de nível são irregulares, estas linhas também serão irregulares.

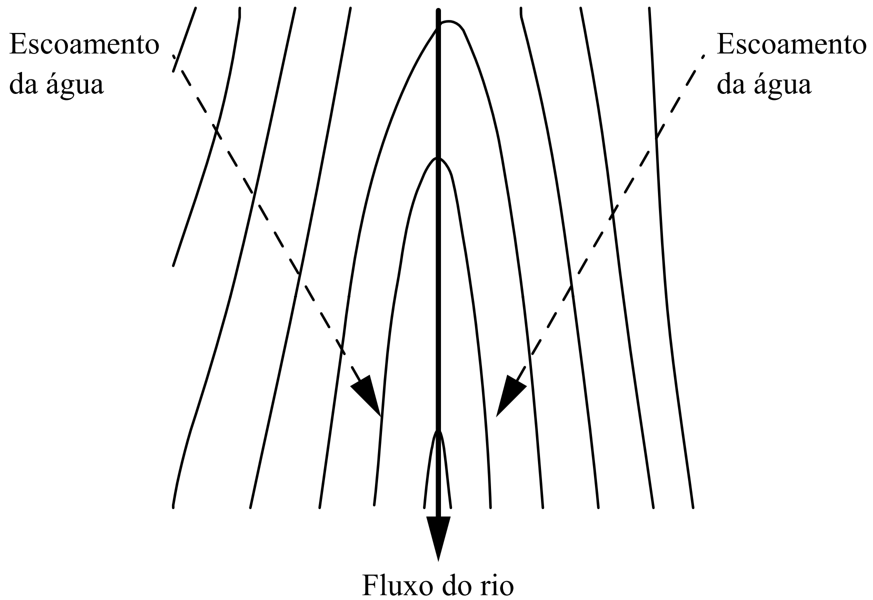
- Saias de aterro são as inclinações laterais que apóia e concede maior estabilidade à barragem. Os aterros usualmente são necessários para estabilizar obras com cotas mais altas do que as originais do terreno, o que é óbvio neste caso, pois uma barragem sempre é mais alta do que o leito do rio onde se encontra, a fim de represar sua água sem extravasá-la.

4) Outra questão presente no enunciado é a determinação da área inundável, ou seja, da água represada.

- Montante do rio é o sentido que aponta para a nascente do rio (regiões mais altas). Jusante é justamente o termo oposto: o sentido que aponta para a foz do rio.



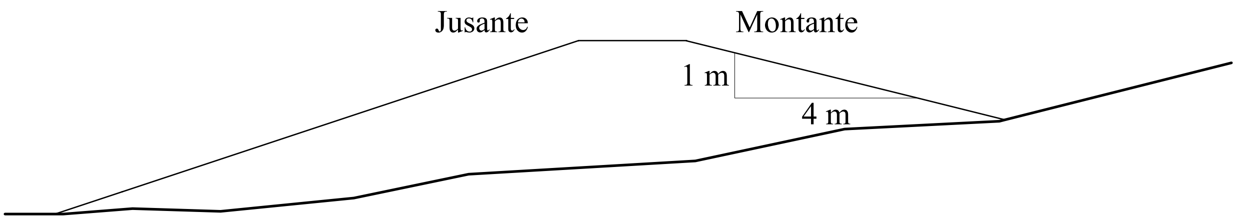
- A distinção entre montante e jusante neste exemplo é simples, bastando observar as curvas de nível presentes no terreno: as curvas de cotas maiores são mais externas e se localizam no topo deste desenho, decrescendo para o centro e para baixo da folha de desenho, pois o vale do rio não desce apenas no decréscimo das cotas (altitudes) longitudinalmente, mas também das margens para o centro do leito do rio.



- A lâmina d'água final da área inundável estará na cota 74 m, ou seja, a água estará contida na área limitada pelas de nível de cotas até 74 m, na região de montante.

5) Além destas informações, são fornecidas:

- A escala é igual a 1 : 500, isto é, 1 unidade medida no desenho equivale a 500 unidades na superfície real (por exemplo, 10 cm medidos com régua equivalerão a 5000 cm = 50 m na barragem e terreno reais).
- A unidade das cotas e das distâncias reais é o metro.
- A declividade ($p = DV/\ DH$) de montante é igual a 1/4.



b) Compreendido o significado de cada uma das informações contidas no enunciado, inicia-se a resolução.

Duas questões são identificadas no enunciado: a delimitação da linha de encontro da barragem com a superfície e a delimitação da região inundada.

O simples traçado do encontro da barragem com o terreno é um passo implícito e óbvio para a resolução de muitos outros problemas mais concretos (como a conseqüente delimitação da área inundável, por exemplo).

Para traçar a barragem em planta (vista por cima, tal como as curvas de nível), é necessário conhecer seu perfil, já identificado como sendo trapezoidal, de crista horizontal, bordos retos e com inclinação a montante já fornecida.

A crista já está posicionada pelas retas tracejadas e será o ponto de partida para o traçado da saia de aterro. A saia de aterro é plana (bordos retos) e será tratada como os planos da Geometria Cotada; portanto, pode ser representada por sua reta de maior declive.

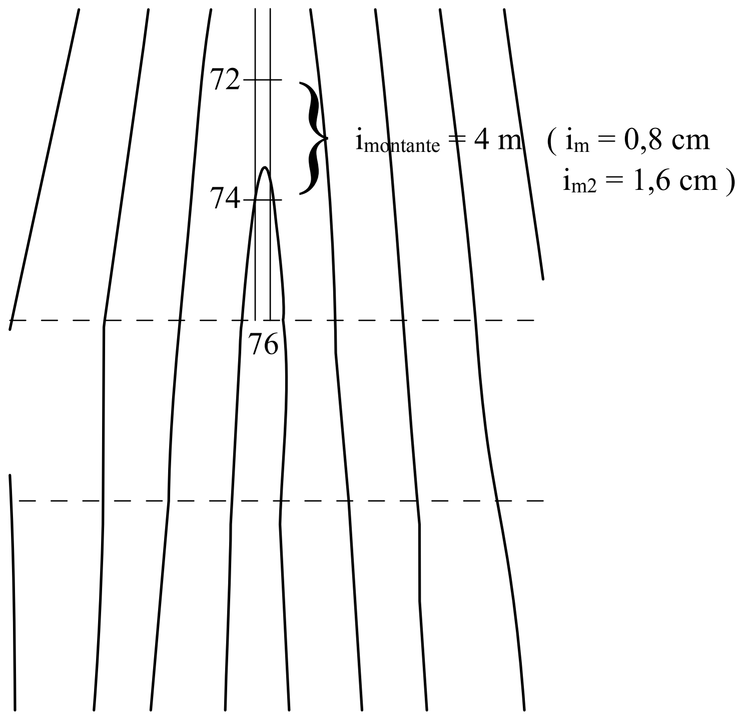
Para traçar esta reta, seu intervalo deve ser calculado; como a declividade já foi fornecida no enunciado, pode-se partir da relação inversa entre declividade e intervalo $(p = 1/i)$ para determiná-lo:

$$i_{\text{montante}} = \frac{1}{p_{\text{montante}}} = \frac{1}{1/4} = 4\ \text{m}$$

Não se deve esquecer que este intervalo deve ser convertido segundo a escala, ao aplicá-lo no desenho:

$$i_m = \frac{i_{\text{montante}}}{500} = \frac{4}{500} = 0{,}008\ \text{m} = 8\ \text{mm}$$

Recordando que a reta de maior declive é perpendicular às horizontais do plano (sendo a crista a primeira horizontal, de cota 76 m), deve-se traçar uma reta de maior declive para o aterro da barragem, graduando-a de acordo com seu intervalo.

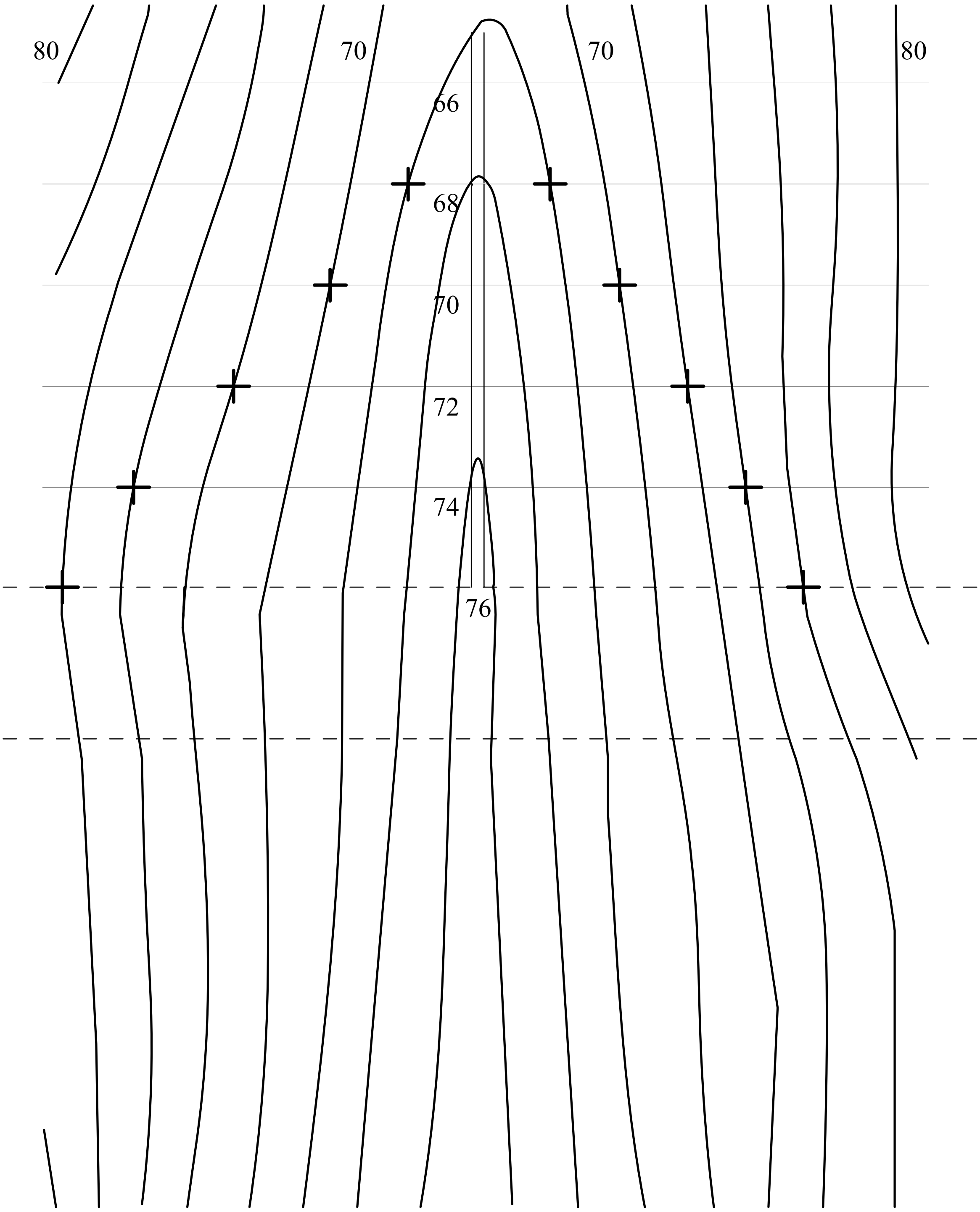


As cotas das horizontais foram espaçadas de 2 em 2 m.Isto se justifica pela presença apenas das curvas de 2 em 2 m (curvas numeradas com cotas múltiplas de 10 m, espaçadas por 4 curvas intermediárias a cada 2 m) na projeção do terreno.

As horizontais de cotas ímpares também poderiam ser desenhadas, porém apenas “poluiriam” o desenho, além de aumentar o risco de erros, ao confundir uma cota ímpar em lugar de uma par.

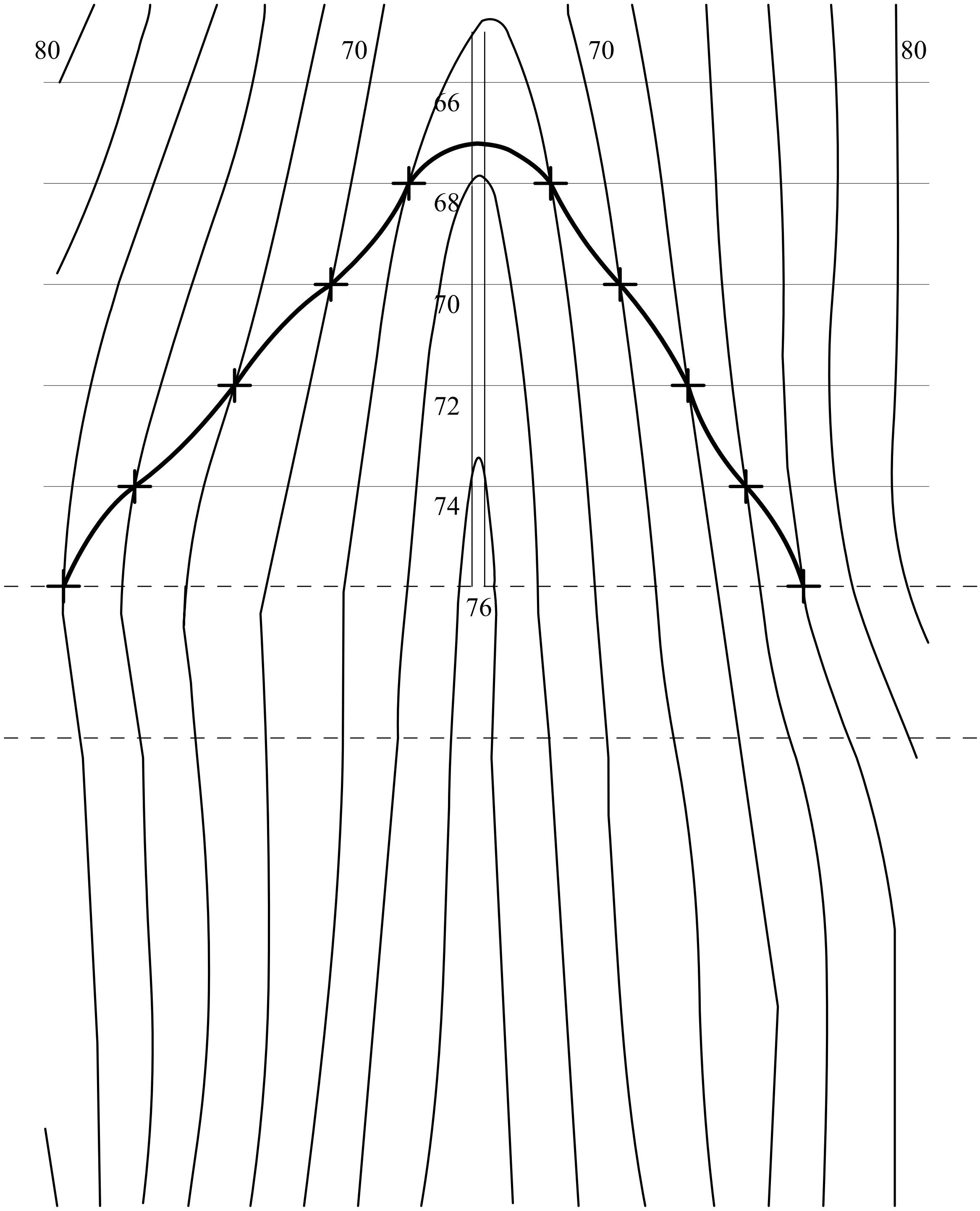
As retas horizontais, neste exemplo, se distribuirão apenas entre o valor da mais baixa curva de nível (curva de 64 m, imposta pelo terreno) até a mais alta curva (curva de 76 m, imposta pela crista da barragem); portanto, não há necessidade de traçar mais horizontais além deste intervalo.

c) Traçar as horizontais do aterro, perpendiculares à reta de maior declive. Analogamente ao conceito de interseção entre dois planos, marcar os pontos de cruzamento entre cada horizontal e a curva de nível de mesma cota.



Em geral, cada reta horizontal cruza uma curva de nível duas vezes, por serem secantes às curvas de nível.

d) Por fim, a união dos pontos forma a linha de encontro da saia de aterro com a superfície.

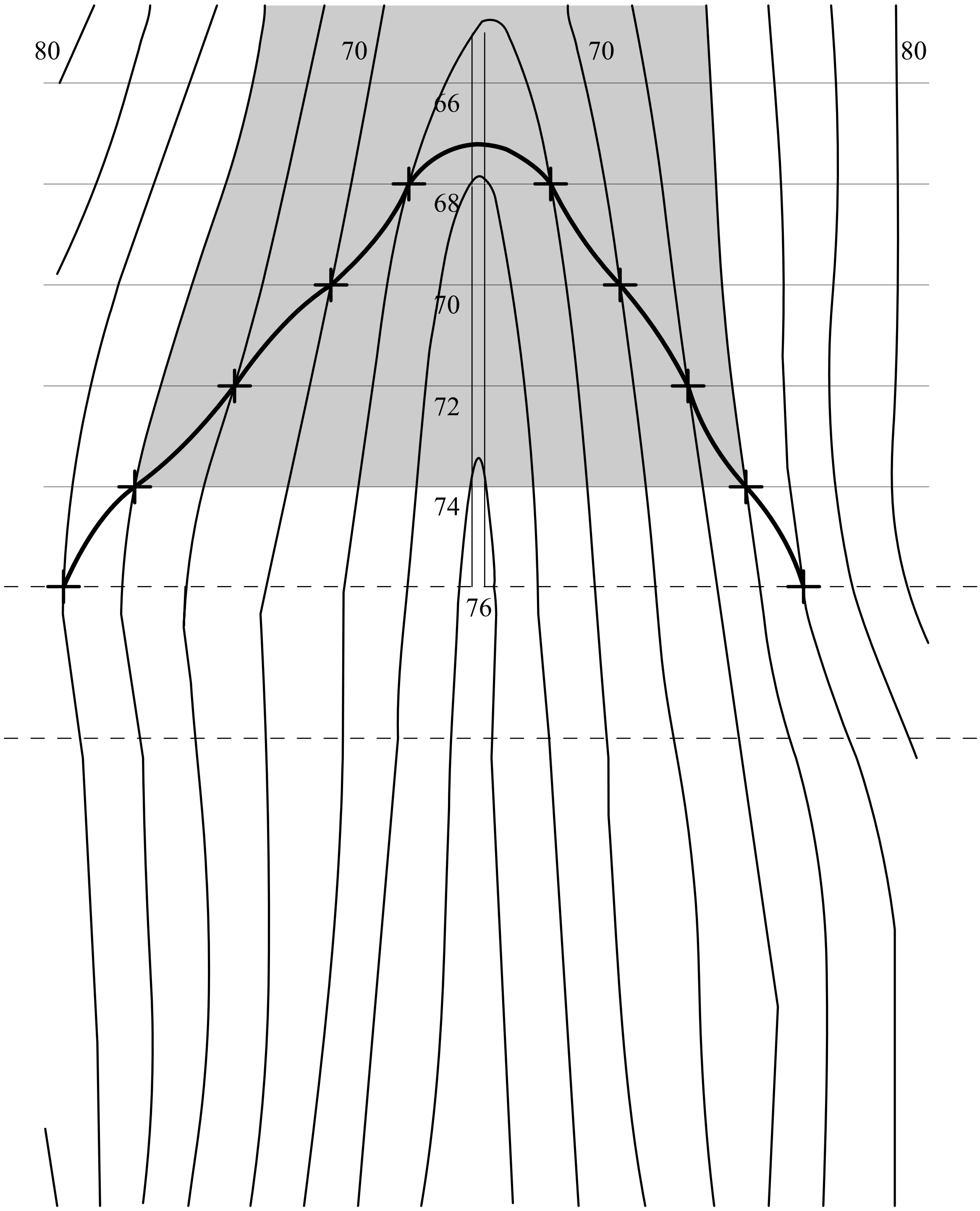


Quando a última horizontal não é tangente a uma curva de nível, isto é, não a cruza em apenas um ponto, deve-se traçar o fechamento com uma linha curva, coerente com o traçado restante, sem interceptar a próxima curva de nível nem a anterior. Não há exigência de precisão neste fechamento, apenas de coerência com o traçado do conjunto.

A mesma observação vale para encontros que extrapolam os limites da folha de desenho: como o fechamento da linha de encontro não seria possível na folha de desenho, traçam-se as extremidades soltas, seguindo a orientação dos pontos anteriores.

e) Com a projeção da barragem determinada sobre a superfície topográfica (a declividade de seu aterro e delimitação de seu encontro com o terreno), agora é possível indicar a região inundável a montante, para a lâmina d'água de cota 74 m.

Sobre o desenho anterior, acrescenta-se a representação da lâmina d'água, lembrando que a água parada (represada) permanece na forma de um plano horizontal (paralelo ao nível do mar) e restrito à região contida pela curva de 74 m.



⇒ **EXERCÍCIOS 2.1 , 2.2 e 2.3**

CAPÍTULO 3: DESENHO GEOMÉTRICO

3.1. Apresentação

Lugar geométrico é o conjunto de pontos em que todos os seus elementos, e somente eles, possuem uma propriedade comum em uma dada situação. Portanto são os únicos pontos do desenho (lembrando que retas e circunferências são conjuntos de pontos) que possuem uma determinada característica, por exemplo, paralelismo, eqüidistância, etc.

Uma particularidade deste assunto é a necessidade de explicitar bem as construções auxiliares (mediatrizes, ângulos, bissetrizes, arcos, etc.) de forma tênue, porém bem visíveis no desenho e longas o bastante para evitar prolongamentos posteriores.

A clareza e “limpeza” do desenho também são fatores levados em consideração, além da exigência do uso de apenas compasso e régua em todas as construções, sem permissão para traçar retas paralelas ou perpendiculares com esquadros, por exemplo.

A medição e operações de adição ou subtração de segmentos não são permitidas com régua ou por cálculos matemáticos. Tudo o que depender da régua só pode ser traçado sem o auxílio da escala graduada da mesma, bastando uma aresta reta para o traçado, como um esquadro sem graduação ou uma ripa de madeira.

Em suma, apenas três operações serão admissíveis:

1) Traçar uma reta através de dois pontos conhecidos.

2) Desenhar uma circunferência (ou um arco), dados seu centro e seu raio, mesmo que este ponto e esta distância sejam arbitrários.

3) Marcar os pontos de intersecção de duas linhas (duas retas, duas circunferências ou uma reta e uma circunferência).

Por estes motivos, o compasso se torna importantíssimo e deve ser de boa qualidade e bem afiado, pois toda a precisão da resposta final dependerá dele.

3.2. Ângulos Principais

Antes de introduzir os conceitos dos diversos lugares geométricos, faz-se necessária uma breve revisão sobre o traçado com compasso e régua (sem escala) dos ângulos mais comuns – 30º, 45º, 60° e 90º – utilizados de forma recorrente ao longo deste capítulo. É muito importante aprender bem como desenhar estes ângulos, em particular o de 90º, presente em problemas onde ocorram retas perpendiculares.

Existem dois procedimentos básicos: um para o ângulo de 60º e outro para o de 90º, sendo os ângulos de 30º e 45º obtidos pela bissetriz (divisão de um ângulo ao meio) dos dois procedimentos anteriores, respectivamente.

1) Ângulo de 60º:

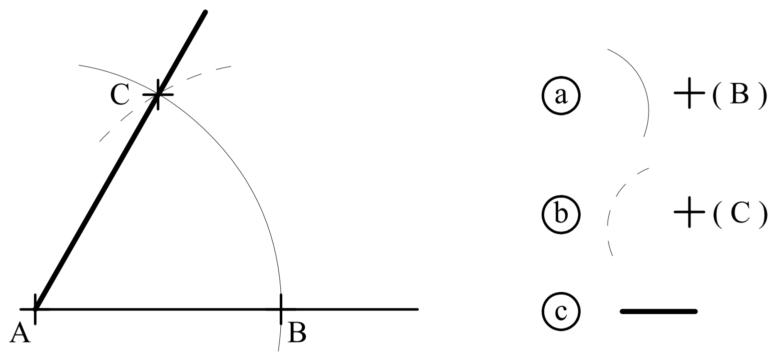
a) Apoiando a ponta metálica no ponto escolhido como vértice do ângulo (ponto A) e com uma abertura qualquer do compasso (porém não muito grande ou pequena), marca-se um arco cruzando a reta (ponto B) sobre a qual se deseja traçar o ângulo de 60º.

b) Mantendo a abertura anterior, apoiar a ponta metálica sobre o ponto originado da interseção do arco com a reta (ponto B), usando-o como centro de um pequeno arco para cruzar o arco do passo anterior (ponto C).

c) Apoiando a régua no ponto escolhido inicialmente como vértice do ângulo (A), traçar uma reta que passa por este ponto e pela interseção dos arcos (C), determinando o ângulo de 60º.

Traçar esta reta tênue, porém bem visível, e longa nas duas direções, para não necessitar de prolongamentos posteriores.

Atenção: As retas de construção não devem ser tracejadas ou pontilhadas; neste e nos próximos exemplos, apenas serão apresentadas por estes traçados para facilitar a visualização e compreensão do procedimento.

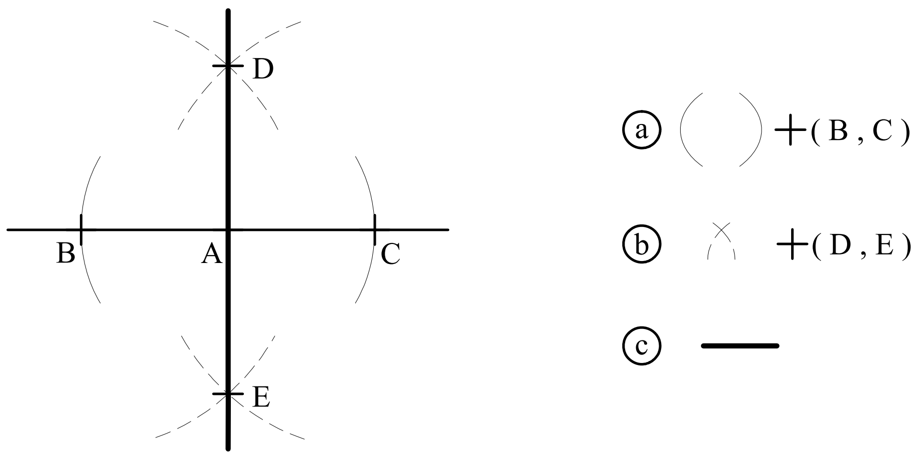


2) Ângulos de 90º:

a) Apoiando a ponta metálica do compasso no ponto escolhido como vértice do ângulo (ponto A) e com uma abertura qualquer do compasso, marcar dois pontos (um de cada lado do vértice, pontos B e C) sobre a reta, prolongando-a se necessário.

b) Com uma abertura próxima da anterior, apoiar a ponta metálica sobre um destes pontos (B ou C), e traçar dois arcos, um acima e um abaixo da reta. Repetir o traçado, porém com a ponta do compasso apoiada sobre o outro ponto (C ou B), cruzando estes novos arcos com os desenhados a partir do primeiro ponto (pontos D e E).

c) Unindo os pontos de interseção de cada par de arcos (D e E), traçar a reta que formará 90º com a original. A reta perpendicular deve necessariamente passar pelo vértice do ângulo; em caso contrário, houve erro de imprecisão no traçado.



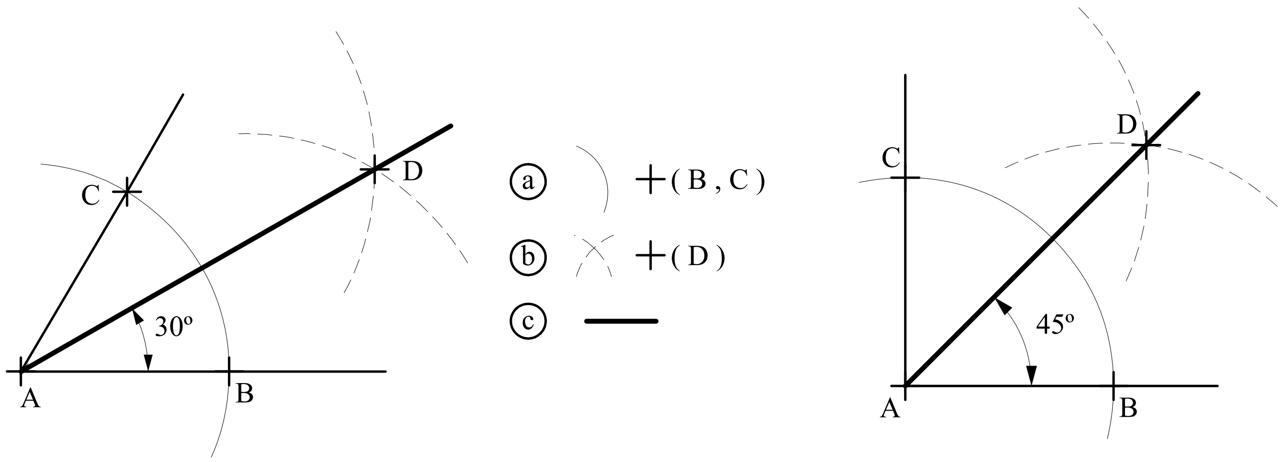
3) Ângulos de 30º e 45º:

Estes dois ângulos são desenhados pelo traçado das bissetrizes dos ângulos de 60º e 90º. Apesar da exigência de manter as linhas de construção dos ângulos anteriores (são avaliadas na correção), a seguir serão apresentadas apenas as arestas do ângulo, suprimindo as demais construções para maior clareza (como se os ângulos de 60° e 90º já fossem fornecidos).

a) Apoiando a ponta metálica no vértice (ponto A) do ângulo que se deseja dividir ao meio (bissetriz) e com uma abertura qualquer do compasso, traçar dois arcos que intersecionem as arestas do ângulo (pontos B e C).

b) Com uma abertura igual ou maior do que a anterior, apoiar a ponta metálica no ponto de cruzamento de um dos arcos com uma das arestas e traçar um arco (B ou C). Repetir o procedimento, agora apoiando a ponta no ponto de interseção do outro arco com a outra aresta (C ou B), traçando outro arco até cruzar com o primeiro (ponto D).

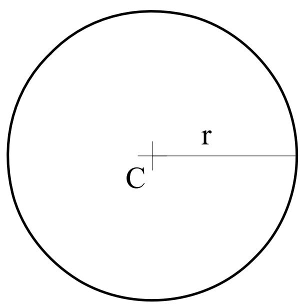
c) Traçar a reta que define a bissetriz do ângulo, a partir do vértice (A) e passando pelo ponto de interseção dos dois arcos (D).



⇒ **EXERCÍCIO 3.1**

3.3. Circunferência

Circunferência é o lugar geométrico dos pontos que distam uma mesma distância (r, denominada raio) de um ponto (C, denominado centro). Sua representação sintética é (C , r).

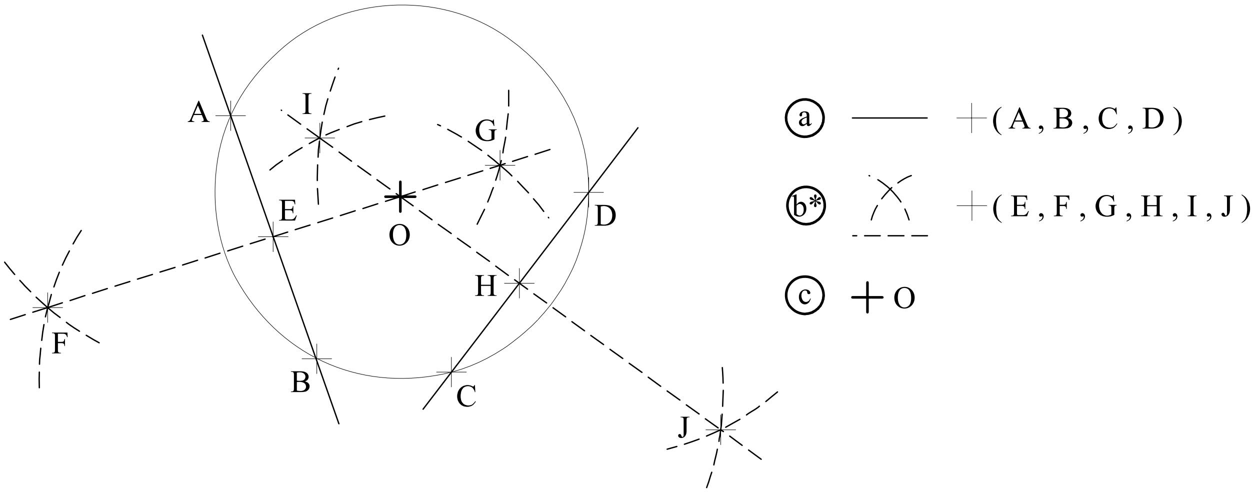


A circunferência deve ter seu centro demarcado e, quando o mesmo não é fornecido e for imprescindível para a resolução do problema, deve ser determinado graficamente e não através de medidas na régua. Uma maneira de obtê-lo é a seguinte:

a) Traçar duas retas quaisquer (não paralelas entre si), que interceptem a circunferência, marcando quatro pontos sobre a mesma (pontos A, B, C e D).

b) * Traçar duas retas perpendiculares (FG e IJ) que passem pelos pontos médios dos segmentos definidos por AB e CD (pontos E e H), ou seja, traçar as mediatrizes dos segmentos AB e CD.

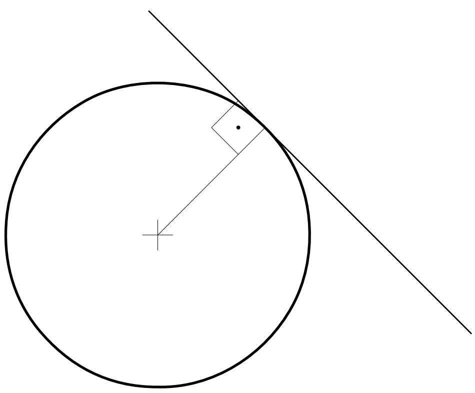
c) A interseção entre as mediatrizes fornecerá o centro da circunferência (ponto O).



⇒ **EXERCÍCIO 3.2**

3.4. Retas Tangentes

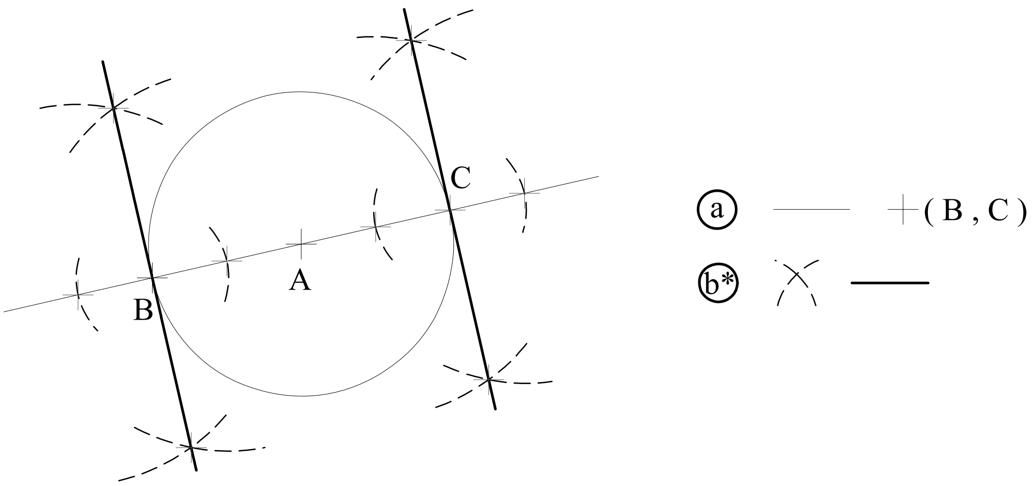
Reta tangente é qualquer uma das infinitas retas que interceptam a circunferência em apenas um ponto e necessariamente são perpendiculares ao raio neste ponto de tangência. Caso esta condição de perpendicularidade não seja obedecida, a reta não é tangente à circunferência.



Para traçar uma tangente qualquer a uma circunferência, basta seguir a seguinte seqüência de passos:

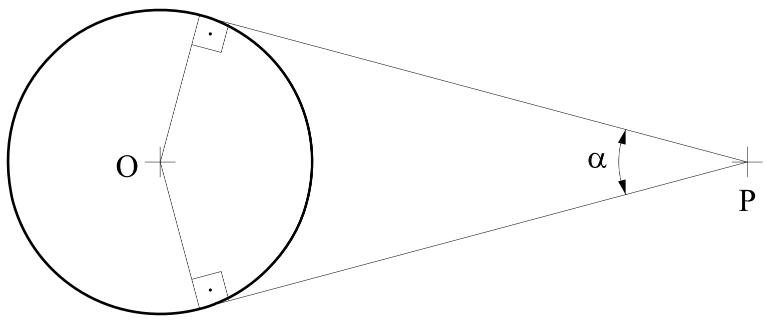
a) Traçar uma reta que passe exatamente pelo centro (ponto A), determinando seu diâmetro. Os dois pontos obtidos (pontos B e C) podem ser utilizados como pontos de tangência.

b) ***** Por um destes pontos (B ou C), traçar uma reta perpendicular ao diâmetro (ou raio): esta será uma reta tangente qualquer das infinitas possíveis à circunferência. O traçado da outra tangente possível (passando por C ou B, conforme a primeira escolha) não é redundante, pois, em alguns problemas, ocorrerá um par de respostas, simétricas ou não.



Além dela própria ser um lugar geométrico, a circunferência está vinculada a um outro LG: o conjunto de pontos que "enxergam" uma circunferência (C , r) sob um certo ângulo α.

Quando se afirma que um ponto "enxerga" uma circunferência sob um determinado ângulo α, significa que suas únicas duas tangentes (que passam por este ponto) formam o ângulo α entre si. A expressão "enxergam" neste caso é similar ao cone de sombra que a Lua faz sobre a Terra durante um eclipse solar.



O lugar geométrico dos pontos que "enxergam" a circunferência é uma circunferência concêntrica e maior do que a original. Em geral, um ponto P deste LG não se apresenta disponível (o que facilitaria bastante o problema), mas é determinado como conseqüência das dimensões da circunferência e do ângulo em questão.

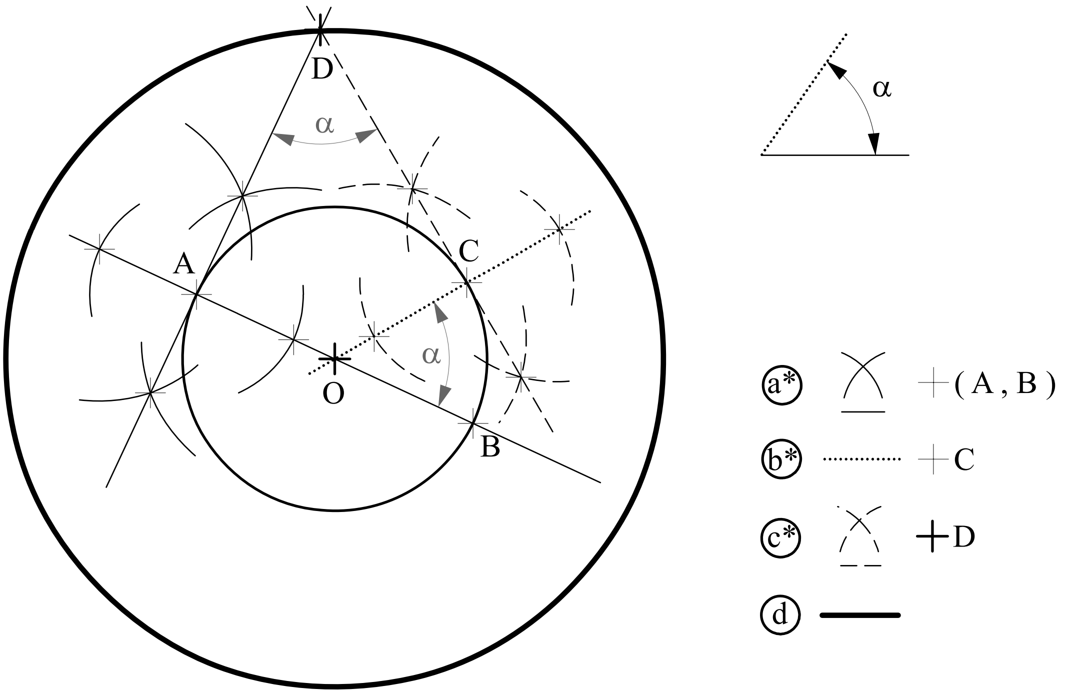
Para desenhar este lugar geométrico, quando não houver um ponto para guiá-lo, há um procedimento:

a) ***** São dados uma circunferência (C , r) e um ângulo α sob o qual se deseja "enxergar" a circunferência. Traçar o diâmetro da circunferência e, a partir de um dos dois pontos determinados (ponto A ou B), traçar uma reta tangente.

b) ***** Utilizando como vértice o centro da circunferência (ponto O), traçar o ângulo que se deseja "enxergar", sendo uma das arestas o raio oposto ao ponto escolhido como tangente no passo anterior (raio OB para o ponto A ou raio OA para o ponto B).

c) ***** No ponto de cruzamento entre a aresta do ângulo e a circunferência (ponto C), traçar outra reta tangente, longa o bastante para cruzar a tangente anterior (ponto D).

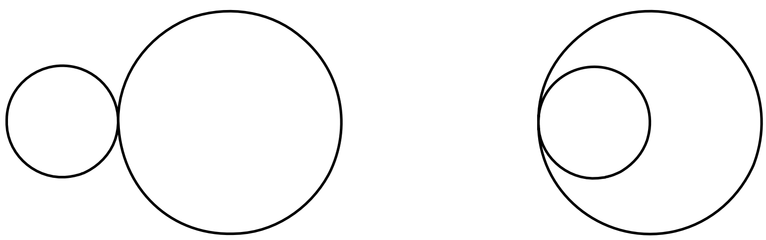
d) As tangentes formarão o ângulo α desejado e seu ponto de interseção (D) define o raio do lugar geométrico (de todos os demais pontos com mesma propriedade) e, por ser concêntrica à circunferência original, é traçada pelo mesmo centro (O).



⇒ **EXERCÍCIO 3.3**

3.5. Circunferências Tangentes

Um outro tipo de problema resolvido apenas por circunferências é o traçado de uma circunferência tangente a uma outra dada, externa ou internamente, estabelecido um raio para esta nova circunferência. Para circunferências tangentes externamente é também usual a omissão do termo "externa", descrevendo-a apenas como "circunferência tangente" à outra circunferência dada.



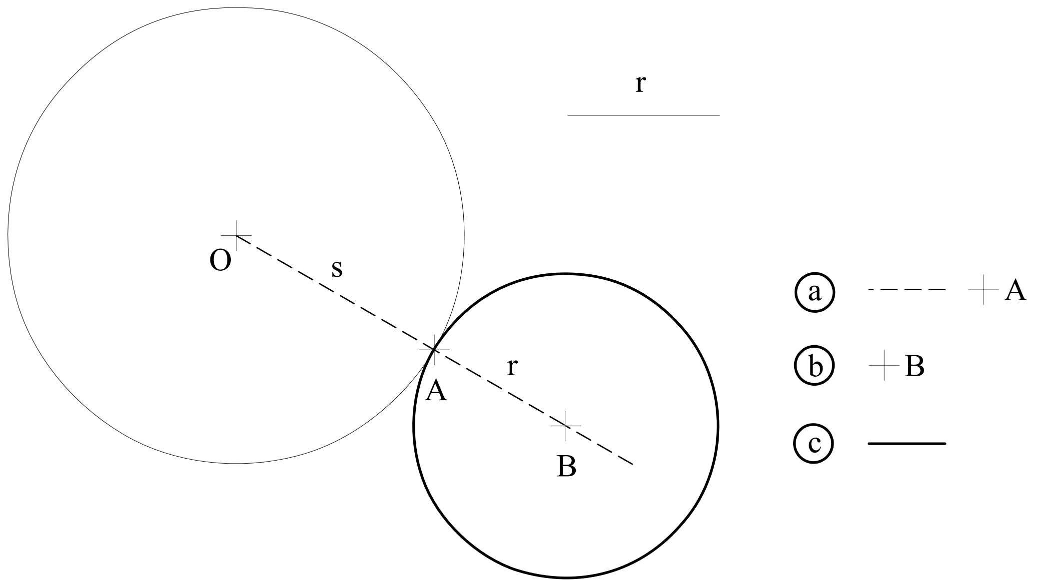
Tangente externa Tangente interna

O procedimento para desenhar uma circunferência tangente externamente (de raio r) a uma circunferência original de raio s é:

a) Traçar uma semi-reta longa, partindo do centro da circunferência original (ponto O), que servirá de apoio à operação de adição de raios a seguir.

b) Somar o raio r (nova circunferência) ao raio s (circunferência original) sobre a semi-reta: utilizando o ponto anteriormente definido (ponto A) como apoio para a ponta metálica do compasso, adicionar a distância r (ponto B) sobre a semi-reta.

c) Este ponto (B) é o centro da nova circunferência – tangente externamente – de raio r em relação à circunferência original.



Para circunferências tangentes internamente, o procedimento é semelhante, porém, os raios deverão ser subtraídos entre si (em lugar da adição) e haverá duas situações possíveis:

- se o raio original for menor do que o da nova circunferência (s < r), a nova conterá a original;
- em caso contrário (s > r), a nova circunferência estará contida na original.

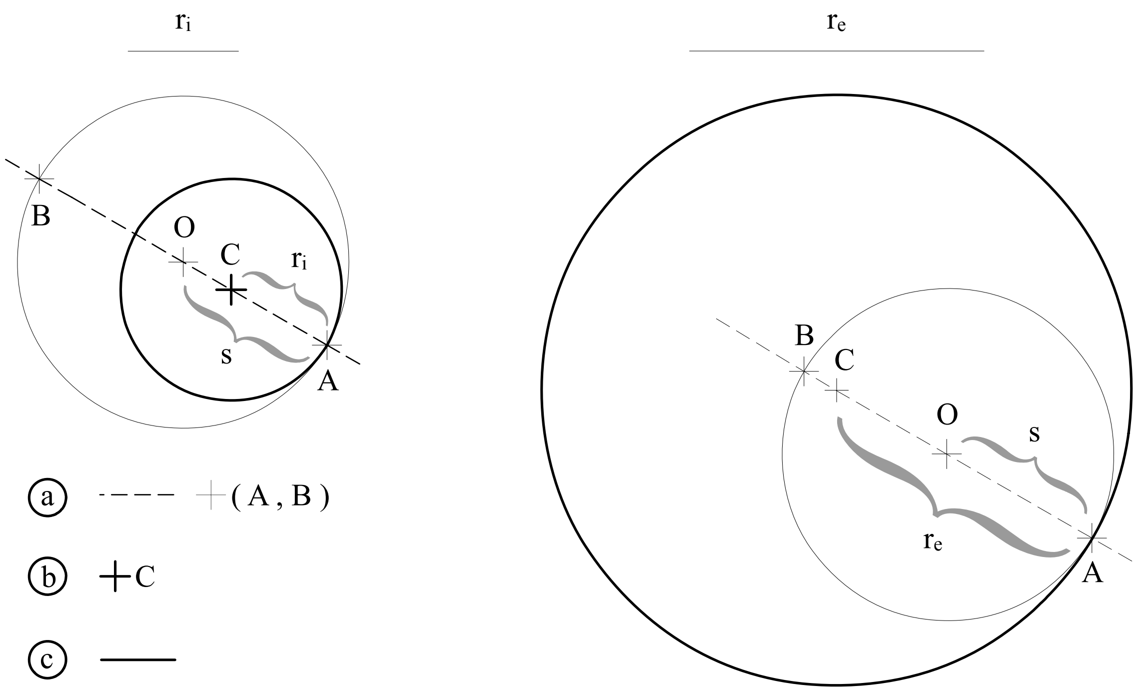
O procedimento para ambas as situações é apresentado a seguir, onde r é o novo raio e s é o raio original:

a) Traçar o diâmetro da circunferência original (pontos A e B) como uma reta longa em ambas as direções, que servirá de apoio à operação de subtração de raios a seguir.

b) Apoiado em um dos dois pontos da interseção anteriormente definidos (A ou B), o raio r deve ser marcado sobre a reta (ponto C) no sentido oposto ao ponto escolhido (A ou B).

c) O ponto determinado (C) será o centro da nova circunferência, contida na original (s > r) ou contendo a original (s < r).

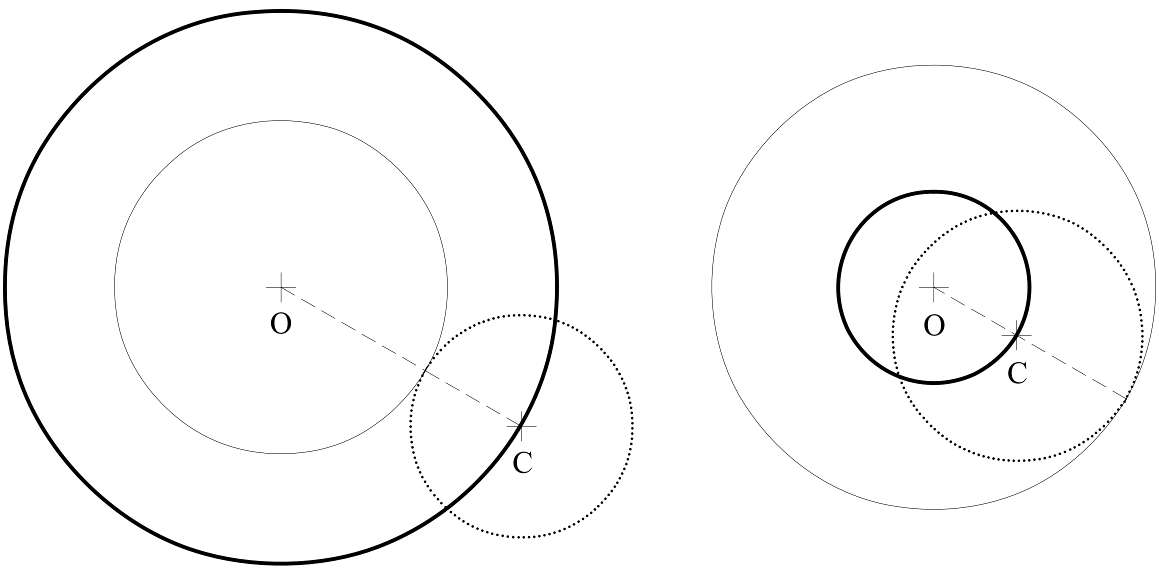
O traçado da circunferência pedida é obtido com centro neste ponto e o raio r dado.



Os procedimentos anteriores se referem ao traçado de uma circunferência tangente qualquer das infinitas possíveis. Porém, uma circunferência tangente qualquer não serve como resposta à maioria dos problemas, sendo apenas parte da resposta exigida pelas condições do enunciado.

O conjunto de centros de todas as circunferências (de mesmo raio) tangentes externa ou internamente a uma original também é um lugar geométrico e, coincidentemente, uma circunferência concêntrica à original, respectivamente maior ou menor do que ela.

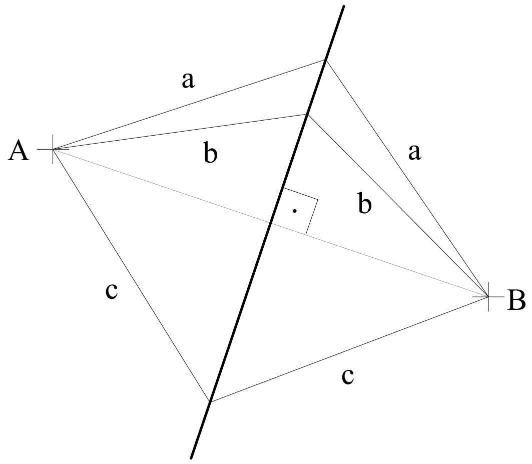
O traçado do lugar geométrico de todas as tangentes (externas ou internas, para um mesmo raio) é simples: basta tomar o centro da circunferência original (pontos O) como apoio para o compasso e traçar uma circunferência de raio igual à distância deste centro ao centro da circunferência tangente (raio OC).



⇒ **EXERCÍCIO 3.4**

3.6. Mediatriz

Mediatriz é o lugar geométrico do conjunto de pontos que eqüidistam (distam igualmente) de dois pontos dados, formando uma reta que representa as infinitas eqüidistâncias entre os dois pontos.

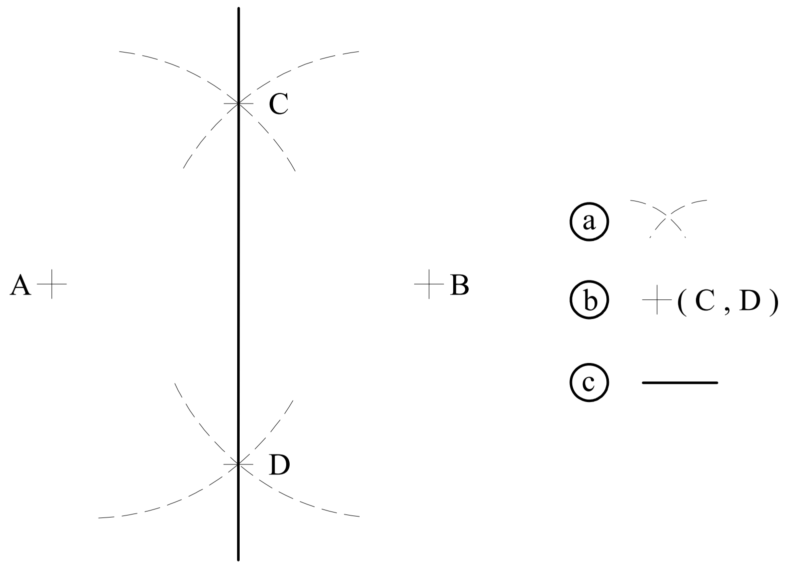


O procedimento para a construção se baseia na sua característica de perpendicularidade à reta de união dos pontos A e B, sendo similar ao traçado de um ângulo de 90º:

a) Com uma abertura do compasso maior do que a metade da distância entre os pontos e apoiada a ponta metálica sobre um destes pontos (ponto A ou B), traçar dois arcos, um acima e outro abaixo do espaço entre os pontos.

b) Repetir o passo anterior, mantendo a abertura e mudando o centro dos arcos para o outro ponto (B ou A), traçar outros dois arcos até interceptarem os anteriores (pontos C e D).

c) Unir os pontos de cruzamento de cada par de arcos, traçando a reta da mediatriz (reta CD).

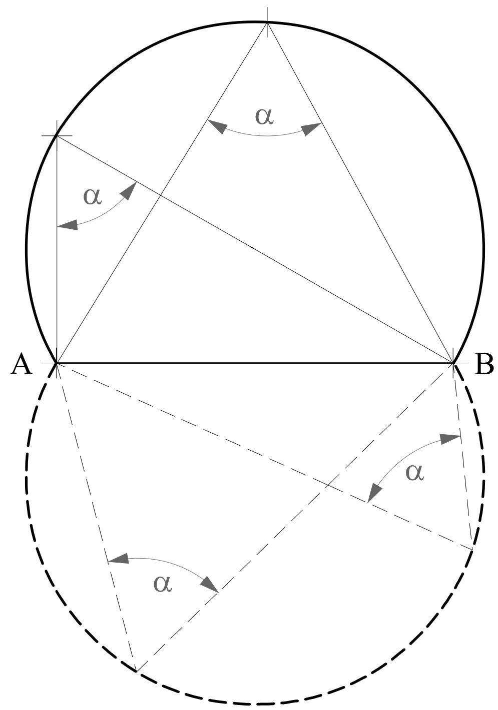


Outra utilidade da mediatriz é a divisão de distâncias e segmentos ao meio. Esta conseqüência da propriedade de eqüidistância é útil em problemas onde a solução é simétrica aos pontos dados.

⇒ **EXERCÍCIOS 3.5 e 3.6**

3.7. Arco Capaz

Arco capaz é o lugar geométrico de todos os pontos que "enxergam" um segmento de reta sob um dado ângulo α. Este lugar geométrico é similar ao dos pontos que "enxergam" uma circunferência, mas aqui aplicado a segmentos de reta (ou à distância entre pontos), e sua forma é a de um arco de circunferência (por não formar uma circunferência completa).



A representação em tracejado na figura anterior indica que o arco capaz é um lugar geométrico que ocorre aos pares e é simétrico.

De acordo com outras condições de problema, como restrições e interseções impostas, a resposta global pode ou não ser simétrica.

Há um método para seu traçado:

a) ***** Traçar a mediatriz do segmento sobre o qual se deseja o arco capaz para o dado ângulo α.

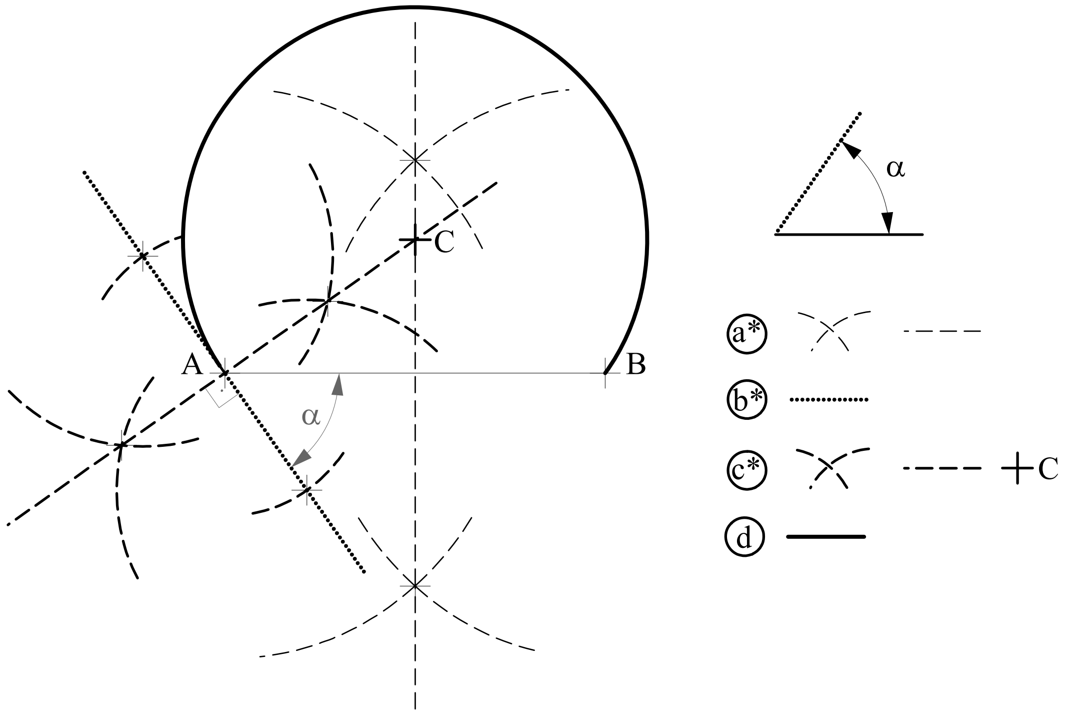
b) ***** A partir de uma das extremidades do segmento (ponto A ou B), traçar o ângulo α desejado.

Se o objetivo for o traçado do arco capaz superior, deve-se traçar este ângulo para baixo e vice-versa, ou seja, sempre oposto ao arco que se deseja.

Traçar a aresta deste ângulo longa nas duas direções, a fim de evitar prolongamento posterior.

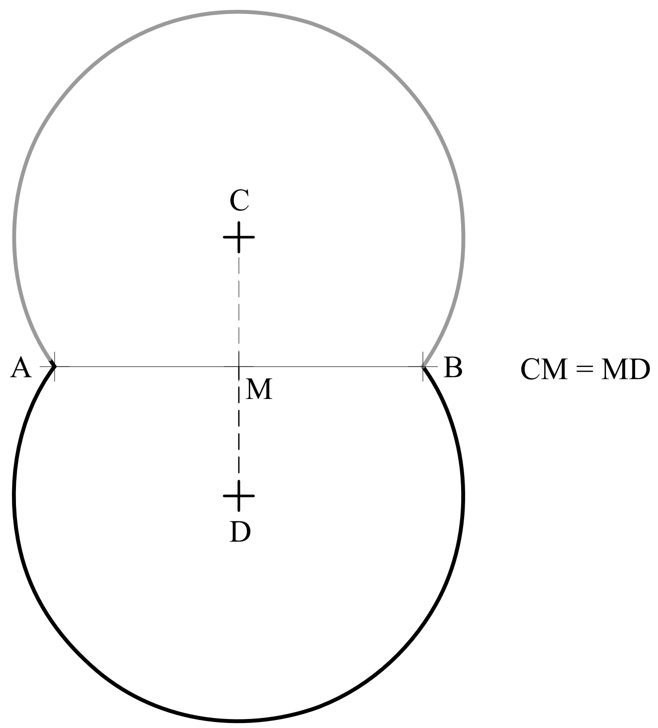
c) ***** Utilizando o ponto anteriormente escolhido (A ou B) como vértice do ângulo α, traçar uma perpendicular passando pelo mesmo, até cruzar a mediatriz do segmento (ponto C).

d) Este ponto de interseção (C) é o centro do arco capaz e seu raio será a distância deste ponto às extremidades (AC = BC).



O arco capaz inferior pode ser traçado da mesma maneira (lembrando que, neste caso, o ângulo α será desenhado para cima).

Há uma dica que encurta esta repetição: o 2º arco capaz será simétrico ao 1º, conseqüentemente a distância do centro C ao segmento AB será a mesma. Portanto, tomando esta distância (distância CM) com o compasso e apoiando a ponta metálica no ponto médio do segmento AB (ponto M), marca-se o ponto simétrico (ponto D) sobre o outro lado da mediatriz, determinando assim o centro do 2º arco capaz com raio idêntico ao do 1º arco (AD = BD = AC = BC).



⇒ **EXERCÍCIOS 3.7 e 3.8**

3.8. Retas Paralelas

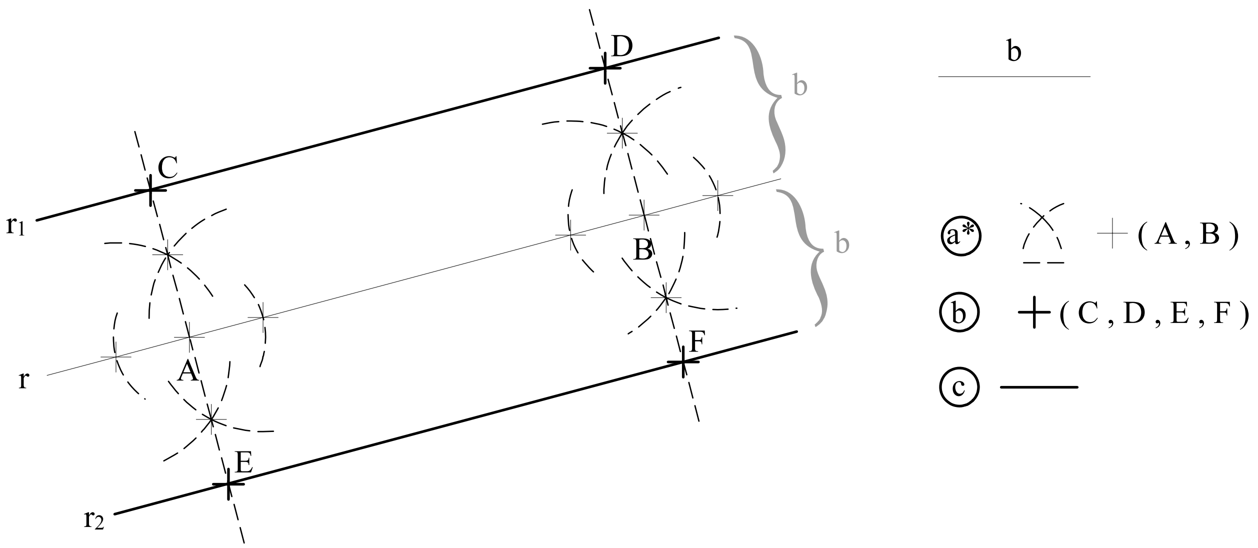
Retas paralelas são o lugar geométrico do conjunto dos pontos que mantêm uma determinada distância de uma reta, na forma de um par de retas, uma de cada lado da mesma.

O traçado das paralelas, a uma dada distância b da reta original, seria muito simples com o uso de régua e esquadros, porém, tal forma de construção não é permitida no Desenho Geométrico, obrigando à obediência do seguinte procedimento:

a) ***** Traçar duas retas perpendiculares em quaisquer pontos (pontos A e B) da reta original, longas em ambas as direções e próximas aos extremos, a fim de diluir erros de traçado.

b) Com abertura do compasso igual à distância b, apoiar a ponta do compasso sobre os pontos anteriormente escolhidos (A e B) e marcar quatro pontos sobre as perpendiculares (pontos C, D, E e F), dois em cada uma, um de cada lado.

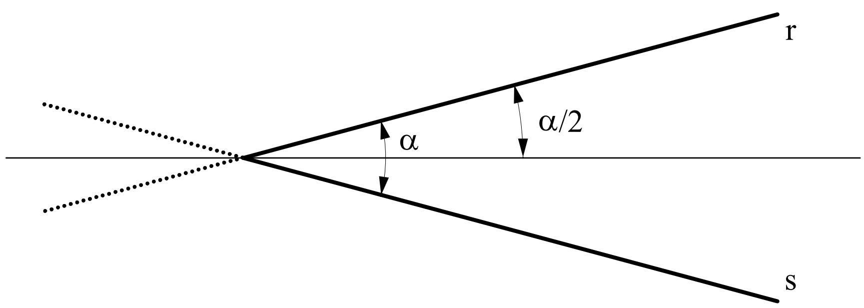
c) Unir os pontos marcados pelos arcos sobre as perpendiculares, dois a dois (C e E, D e F), sendo cada reta composta por dois pontos de um mesmo lado da reta original.



⇒ **EXERCÍCIO 3.9**

3.9. Bissetriz

Bissetriz é a reta formada pelo conjunto de pontos eqüidistantes a duas retas concorrentes que, conseqüentemente, divide o ângulo ao meio.

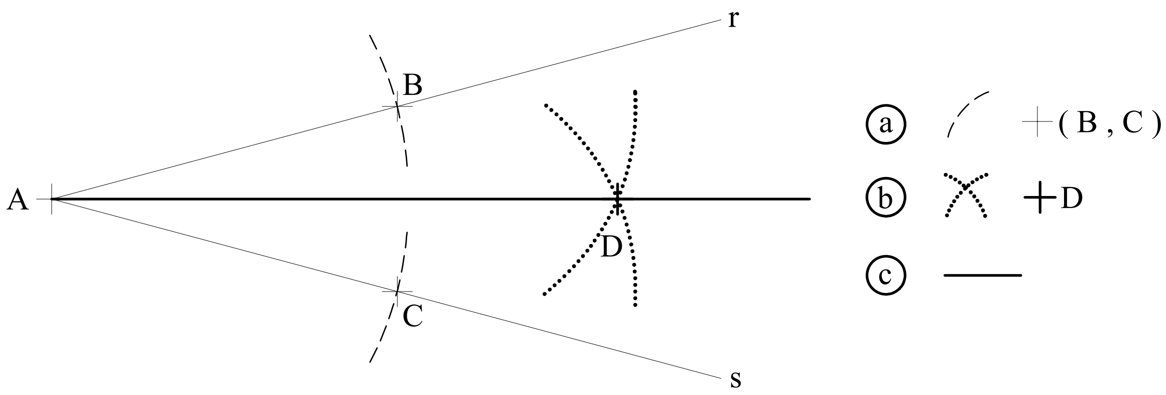


O procedimento para traçar a bissetriz já foi explicado anteriormente (na explicação dos ângulos de 30º e 45º):

a) Apoiando o compasso no vértice do ângulo (ponto A) que se deseja dividir e com uma abertura qualquer do compasso, traçar dois arcos que cruzem as arestas (pontos B e C) do ângulo dado.

b) Com uma abertura próxima da anterior, apoiar a ponta metálica num dos pontos de interseção dos arcos (B ou C) e traçar um arco. Repetir o procedimento, agora apoiando a ponta no outro ponto de interseção (C ou B), traçando outro arco até cruzar com o primeiro (ponto D).

c) Traçar a reta que define a bissetriz do ângulo, a partir do vértice (A) até o ponto de interseção dos dois arcos (D).



⇒ **EXERCÍCIOS 3.10 e 3.11**

3.10. Resolução de Problemas

Algumas dicas merecem atenção no entendimento e abordagem de problemas mais complexos:

- Os enunciados geralmente são sucintos e não costumam conter indicações sobre quais lugares geométricos são necessários para sua solução.
- Um esboço sobre a solução final esperada, a partir dos dados e de relações conhecidas (tangência, eqüidistância, perpendicularidade, etc), é sempre muito útil como orientação na resolução e sobre quais os lugares geométricos e construções auxiliares serão necessários. Pensar, durante a reflexão do esboço, na solução individual das restrições de cada elemento geométrico do problema e depois na sua interseção.
- Lembrar que os lugares geométricos e as construções tendem a se apresentar aos pares (em geral, simétricas entre si), mas, na resposta final, podem não conservar esta simetria entre si.
- Sempre lembrar que os únicos instrumentos permitidos em todos os passos da solução dos problemas são compasso e uma aresta reta (um esquadro ou régua, sem o uso de sua escala).
- O gênero mais comum de problemas é a interseção entre LG. Para resolvê-los deve-se, em geral, traçar as soluções individuais de cada LG e encontrar a interseção entre elas.

⇒ **EXERCÍCIOS 3.12 e 3.13**

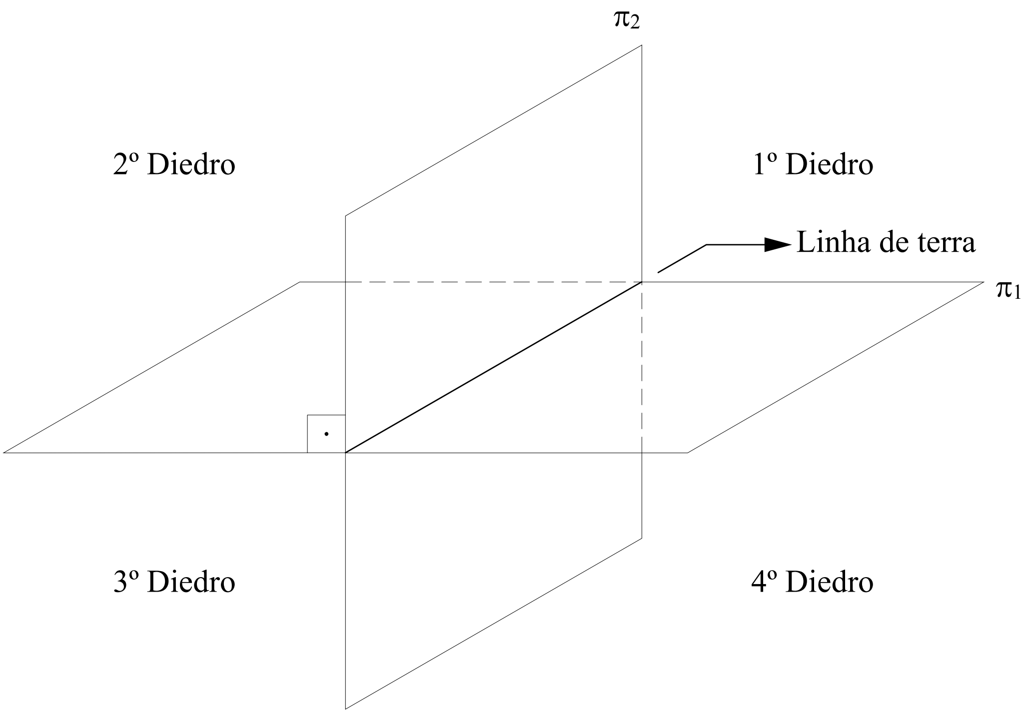
CAPÍTULO 4: GEOMETRIA DESCRITIVA

4.1. Apresentação

A Geometria Descritiva consiste essencialmente numa expansão da Geometria Cotada. Tal como a cotada, a Geometria Descritiva é uma representação de elementos (pontos, linhas e planos) do espaço tridimensional no espaço bidimensional (folha de papel).

Como qualquer representação gráfica, a Geometria Cotada sofre deformações e limitações, sendo derivadas principalmente de suas características: ser projetada num único plano horizontal, sendo a cota (terceira dimensão - altura) representada sempre em valores numéricos ao lado das respectivas projeções dos elementos, mas não visível diretamente.

A melhoria obtida com a aplicação da Geometria Descritiva em relação à Geometria Cotada é o acréscimo de mais um plano, vertical e ortogonal ao horizontal. Os planos π_1 e π_2 são infinitos e sua reta de inserção é chamada linha de terra, possuindo cota 0 em toda a sua extensão.



Cada ponto representado neste sistema de projeção possui duas projeções: uma sobre o plano π_1 e outra sobre π_2. Os planos juntos formam 4 diedros, similares aos do círculo trigonométrico, onde os pontos projetados podem também apresentar distâncias negativas em relação à origem.

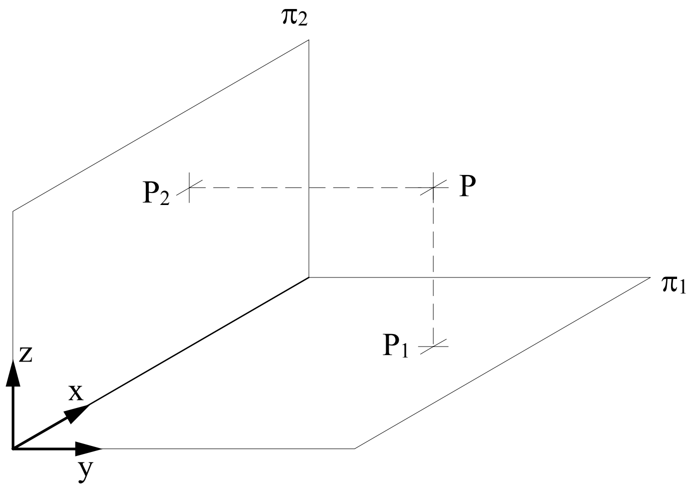
Atenção quanto à "troca" na correspondência entre projeções: a projeção vertical de um elemento é representada sobre o plano π_1 (horizontal) e a projeção horizontal é representada sobre o plano π_2 (vertical).

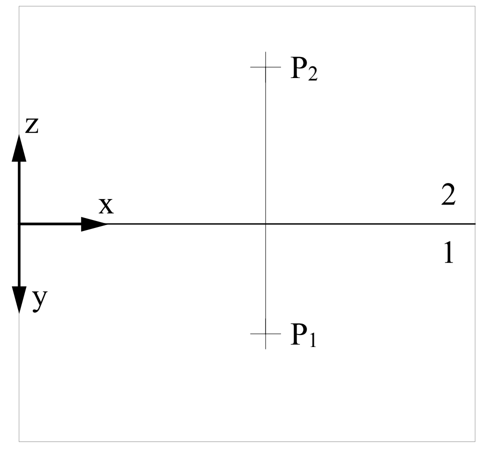
4.2. Épura

A representação prática deste sistema é a épura: representa simultaneamente os planos π_1 e π_2 na folha de papel, como se fossem "desdobrados" entre si, separados pela linha de terra e assinalados os números dos planos de projeção (1 e 2).

As dimensões x, y, e z são denominadas abscissa, afastamento e cota, respectivamente.

O par de projeções de qualquer elemento sobre a épura (P_1 e P_2, para o ponto P, na figura a seguir) devem ser alinhadas entre si e unidas por uma linha tênue nomeada linha de chamada, perpendicular à linha de terra.





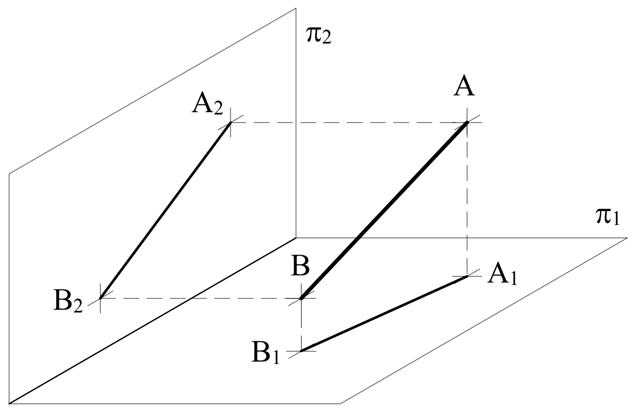
Não é obrigatório que a projeção P_1 esteja em π_1 e P_2 em π_2,: lembrando que os planos são infinitos e estão sobrepostos (devido ao "desdobramento" para poderem se representados na mesma folha de papel), portanto, se uma projeção P_1 está em π_2, significa que o ponto possui afastamento negativo ($y < 0$) e pode estar no 3º ou 4º diedro.

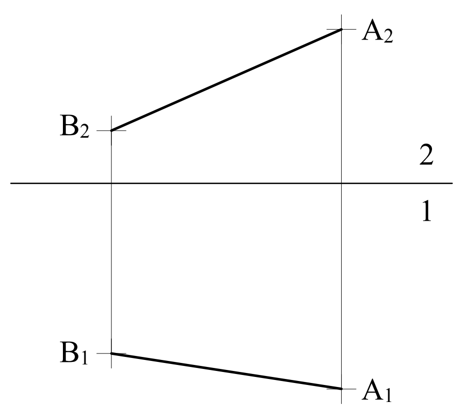
Como se pode notar, qualquer elemento será projetado duas vezes e estas duas projeções sempre deverão estar presentes; na ausência de uma, o elemento não pode ser considerado como corretamente representado. Por esta razão, cotas numéricas, intervalos ou graduação de retas não se fazem necessárias neste sistema de projeção.

No caso de pontos isolados no espaço a representação é simples: bastam a presença e a coerência (alinhadas verticalmente pela linha de chamada e no diedro correto) das duas projeções do ponto.

4.3. Retas

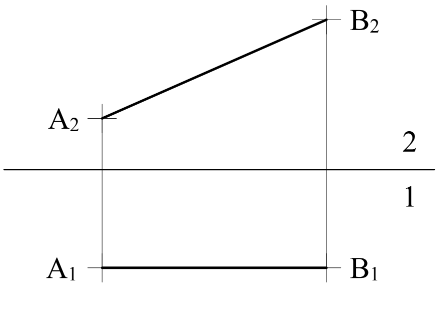
Para representar uma reta, basta a representação de suas projeções nos dois planos.



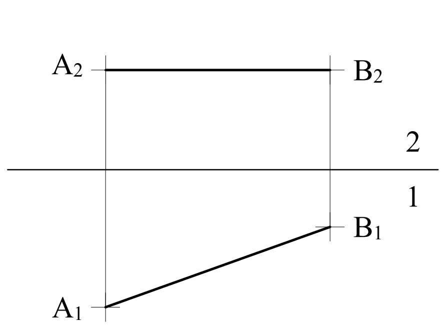


Na figura anterior, as diferentes projeções da reta AB (A_1B_1 e A_2B_2) não possuem a mesma inclinação, exceto quando a reta possuir inclinação simultânea de 45º em relação aos planos π_1 e π_2.

Outra distorção das projeções é a variação das distâncias entre os pontos A e B em cada projeção. Conseqüentemente, nenhuma das projeções apresenta a verdadeira distância (verdadeira grandeza) entre A e B. A única situação em que é possível observar e medir diretamente a verdadeira grandeza de uma reta ocorre quando ela é paralela a um dos planos.

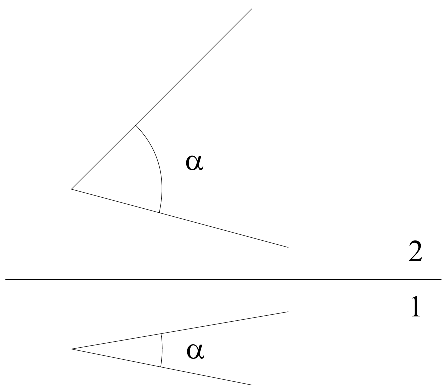


reta paralela a π_2

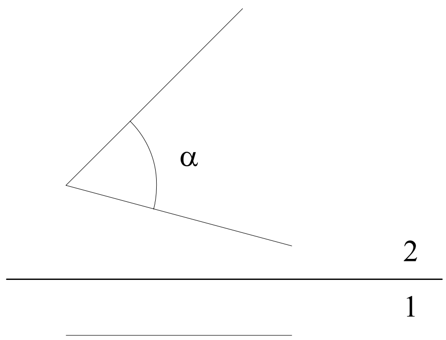


reta paralela a π_1

Pelas distorções inerentes às projeções, não se podem assumir como reais os ângulos medidos sobre a épura, exceto se o plano formado pelas retas concorrentes (arestas do ângulo) for paralelo a aos planos π_1 e π_2 (ou seja, este ângulo está representado em sua "verdadeira grandeza").

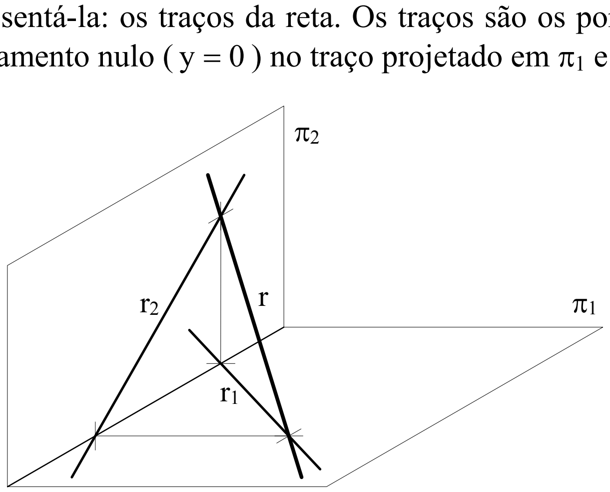


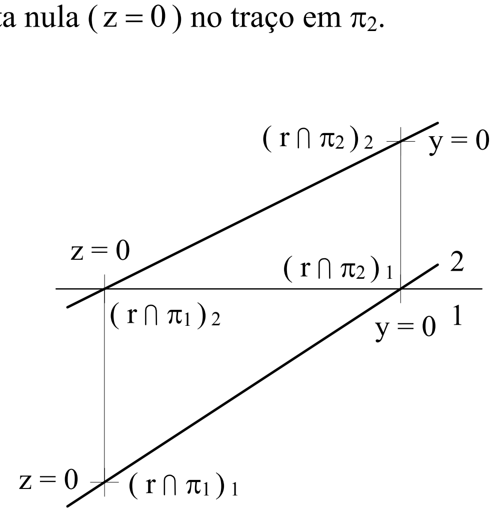
o ângulo α não possui 60º



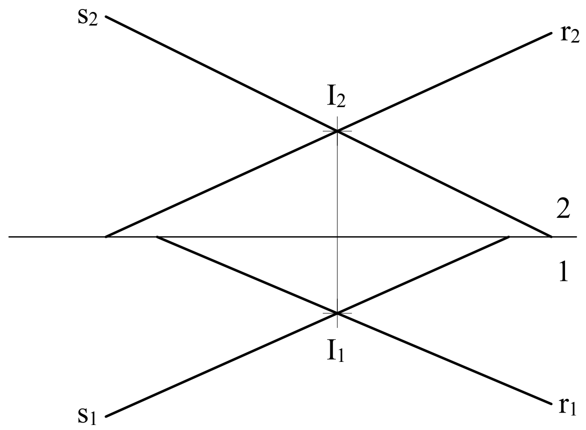
o ângulo α possui 60º

Há dois pontos principais na representação de uma reta sobre a épura, sendo preferíveis para representá-la: os traços da reta. Os traços são os pontos onde a reta cruza os planos π_1 e π_2, tendo afastamento nulo ($y = 0$) no traço projetado em π_1 e cota nula ($z = 0$) no traço em π_2.





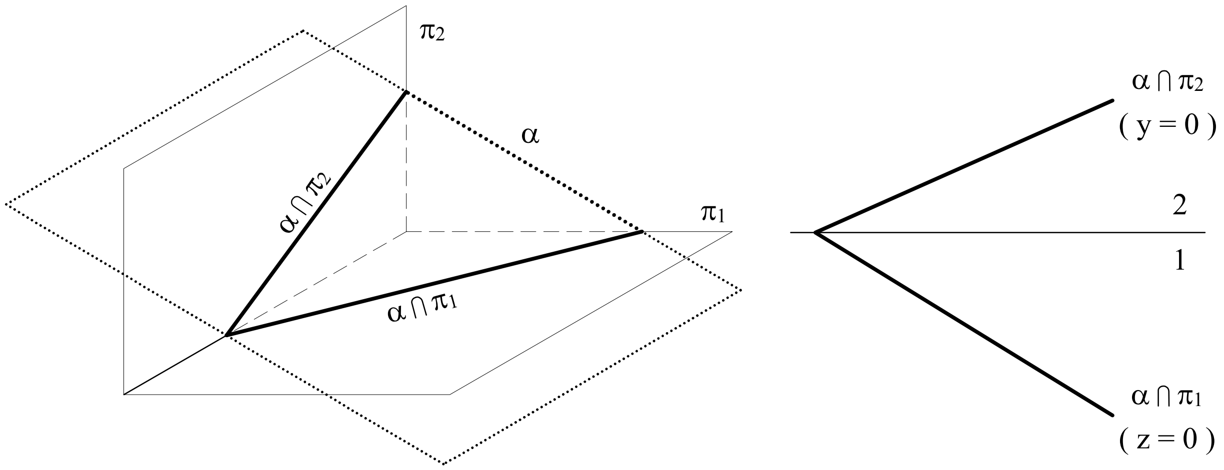
A avaliação da concorrência entre retas é mais simples do que o procedimento adotado na Geometria Cotada: na Geometria Descritiva, para afirmar que duas retas são concorrentes, basta que as duas projeções de cada reta interceptem-se no mesmo ponto (alinhado pela linha de chamada).



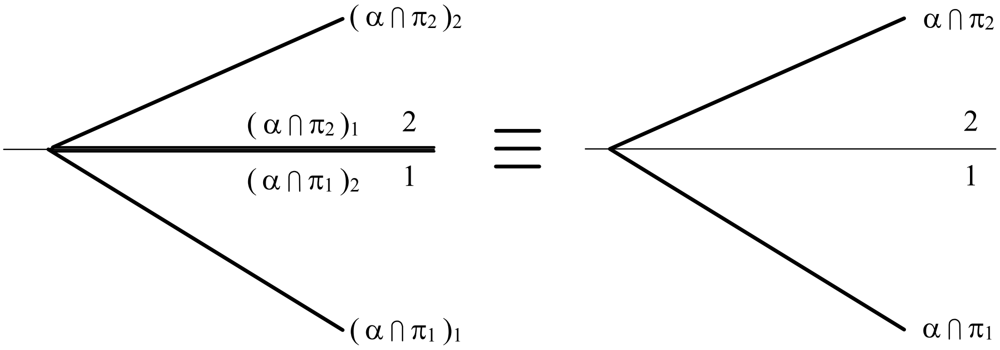
⇒ **EXERCÍCIOS 4.1 , 4.2 , 4.3 , 4.4 , 4.5 e 4.6**

4.4. Planos

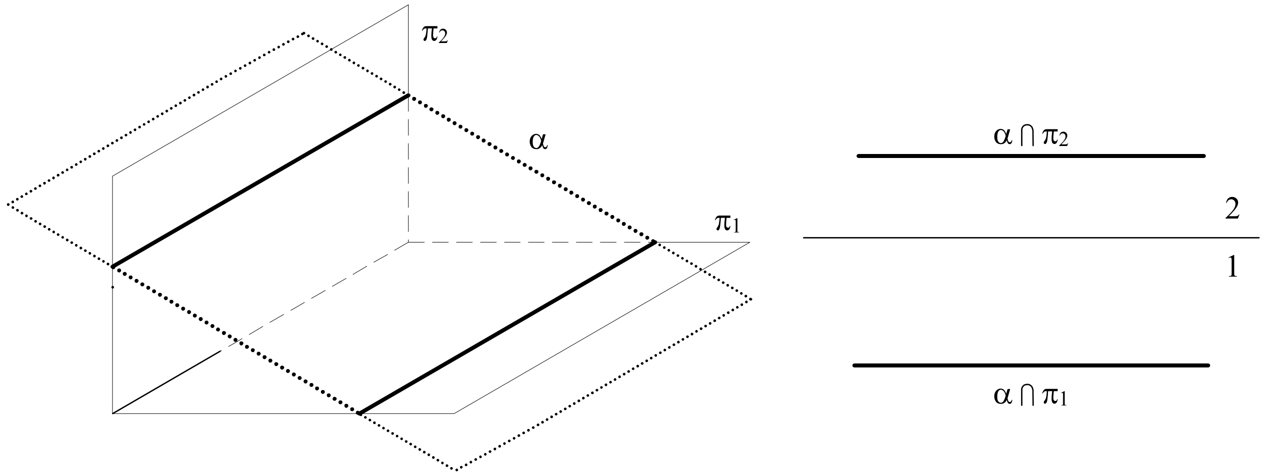
Um plano no espaço é representado por seus traços (interseções com π_1 e π_2).



A representação dos traços de planos na épura é simplificada, pois, duas das projeções coincidem com a linha de terra e são suprimidas na representação.

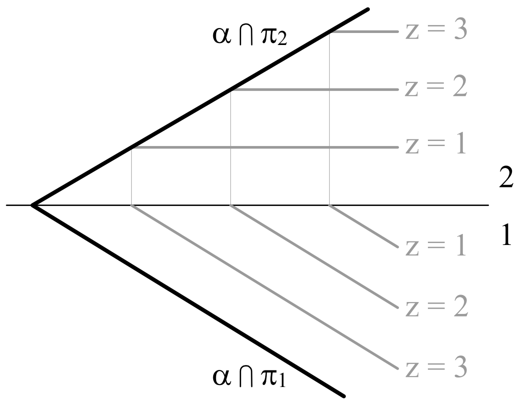


Os traços de um plano são infinitos e convergem para um único ponto, exceto quando o plano é paralelo à linha de terra.

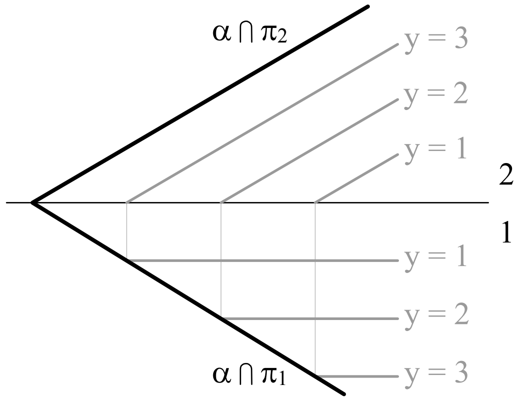


Analogamente às curvas de nível (das Superfícies Topográficas) e às horizontais de mesma cota (da Geometria Cotada), as retas de mesma cota (mesmo z) de um plano assumem um padrão bem definido na Geometria Descritiva:

- No plano π_2, apresentam-se como horizontais paralelas à linha de terra.
- No plano π_1, são retas paralelas ao traço do plano em π_1 ($\alpha \cap \pi_1$) e posicionadas de acordo com seu traço em π_2.



Da mesma forma, é possível traçar retas de mesmo afastamento (mesmo y), paralelas à linha de terra em π_1 e paralelas ao traço do plano ($\alpha \cap \pi_2$) em π_2.



Na Geometria Descritiva, a determinação dos traços do plano se resumirá à união dos traços de um par de suas retas, construídas se não estiverem presentes explicitamente, pois os traços do plano representam o conjunto dos traços de todas as infinitas retas contidas nele.

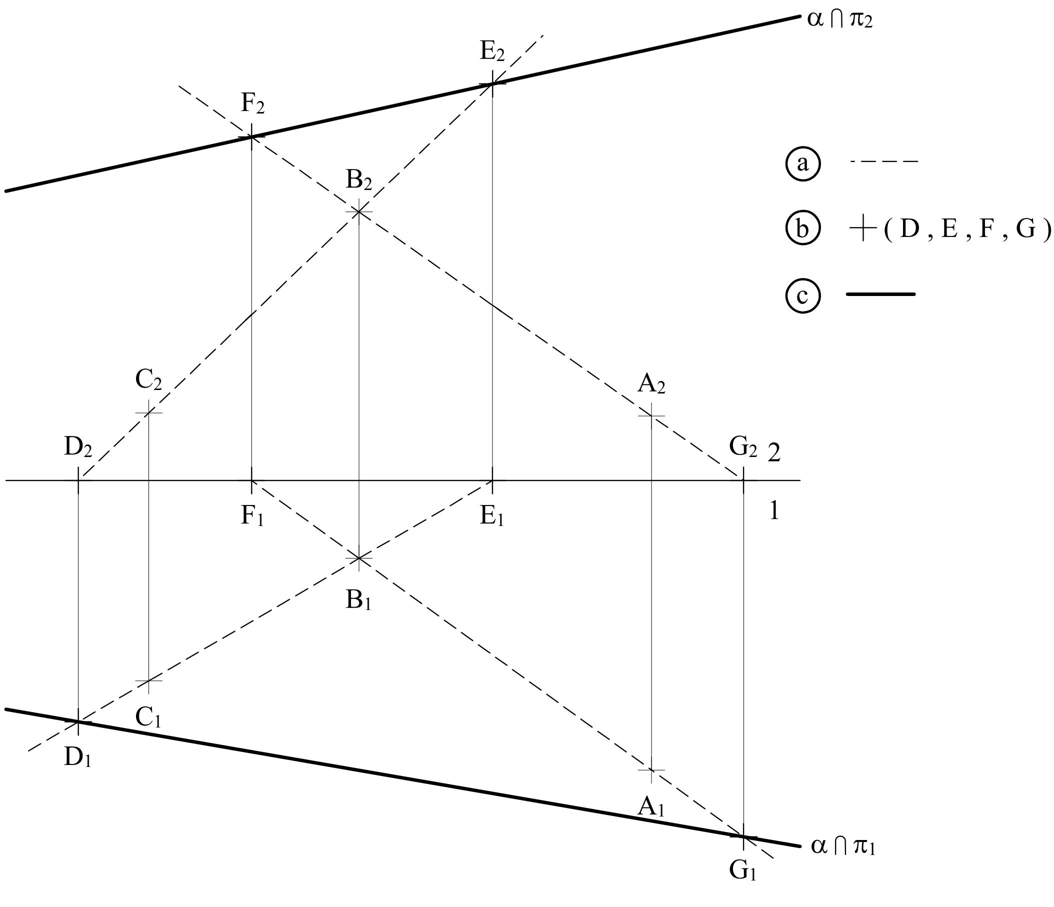
O procedimento para determinar os traços de um plano a partir de três de seus pontos é o seguinte:

a) Traçar duas retas do plano unindo dois pares de pontos (AB e BC ou AB e AC ou AC e BC).

b) Marcar os traços de cada projeção das suas retas (pontos D, E, F e G).

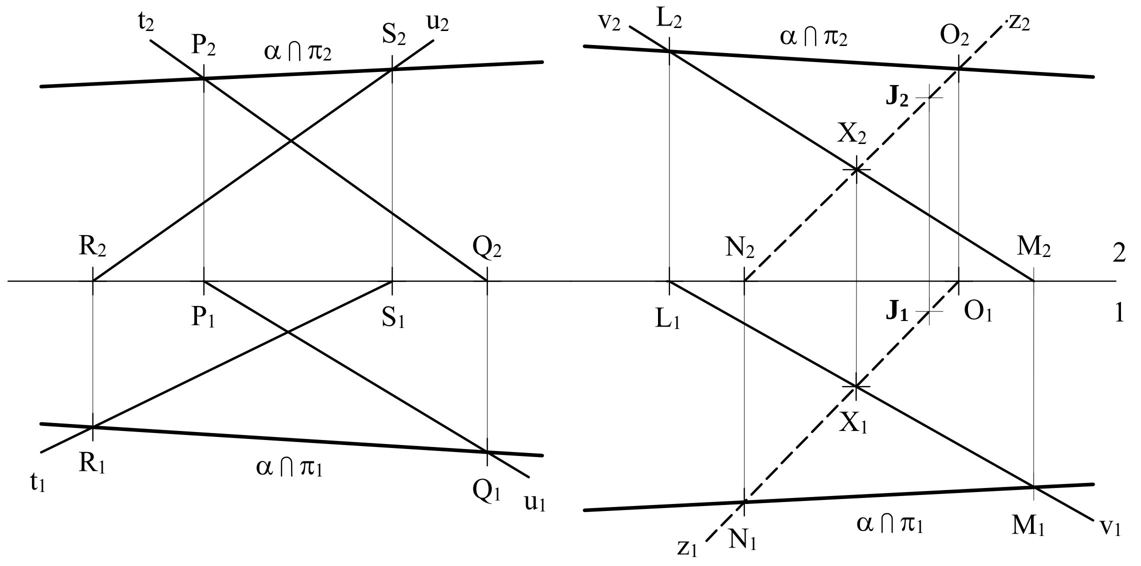
Devido à incômoda interceptação de linhas neste procedimento, deve-se ter especial atenção quanto a qual reta pertencem as projeções de cada traço e cada interseção.

c) Unir os traços das projeções em cada plano (FG e DE) para determinar os traços do plano α.



Quando duas retas estiverem presentes (retas t , u), não há necessidade de desenhar as retas de união de três pontos, apenas aproveitar os traços das mesmas (pontos P, Q, R, S).

A situação é similar ao plano de uma reta (reta v) e um ponto (ponto J): basta traçar uma reta (reta z) através do ponto (J) e cruze a reta original em outro ponto (ponto X), para obter os traços (pontos L, M, N, O) do plano.



⇒ **EXERCÍCIOS 4.7 , 4.8 e 4.9**

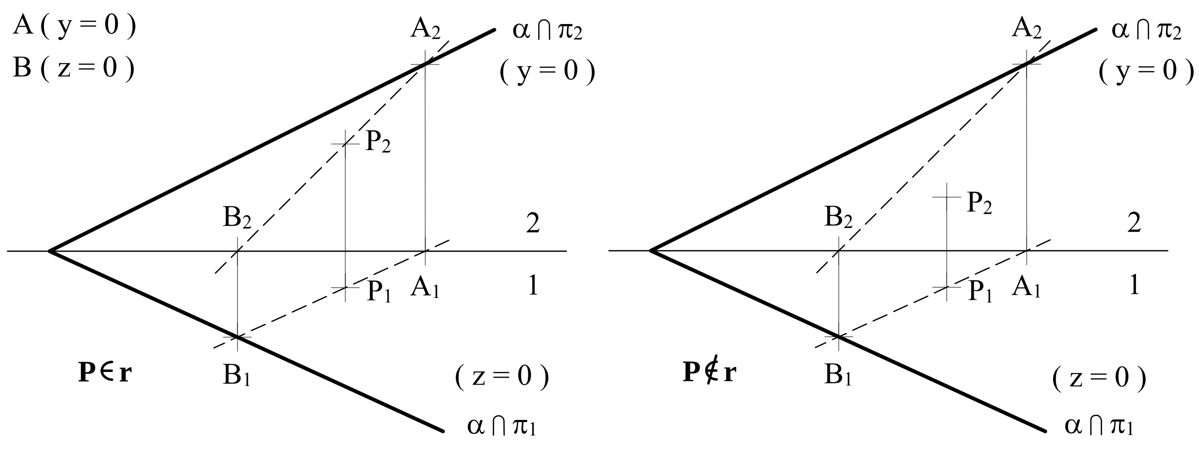
4.5. Pertinência entre Pontos, Retas e Planos

Um ponto pertence a uma reta se suas projeções em π_1 e π_2 coincidem com as projeções da reta nestes dois planos de projeção.

A pertinência de um ponto a um plano pode ser comprovada pelo traçado de uma reta arbitrária do plano que passe por uma das projeções do ponto e pode provocar uma das duas seguintes situações:

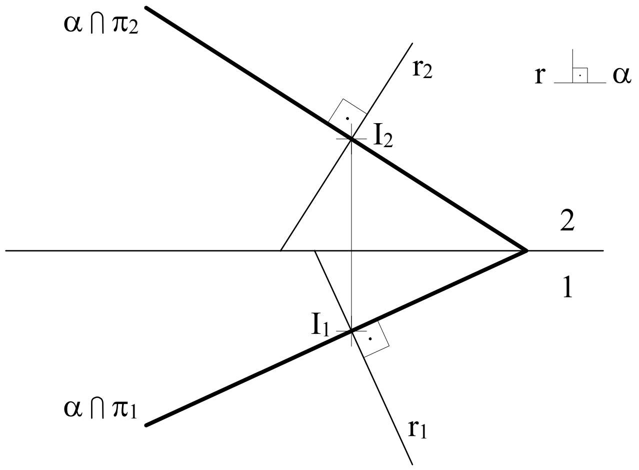
1) Se ambas as projeções da reta contiverem as projeções do ponto, este ponto pertencerá ao plano.

2) Se apenas uma das projeções da reta contiver a projeção do ponto, ele não pertencerá ao plano.



Pelo raciocínio oposto ao aplicado na determinação de um plano pelos traços de suas retas, uma reta pertencerá a um plano se seus traços coincidirem com os traços do mesmo.

Para traçar uma reta perpendicular a um determinado plano, bastam que suas projeções sejam simultaneamente perpendiculares aos respectivos traços do plano.



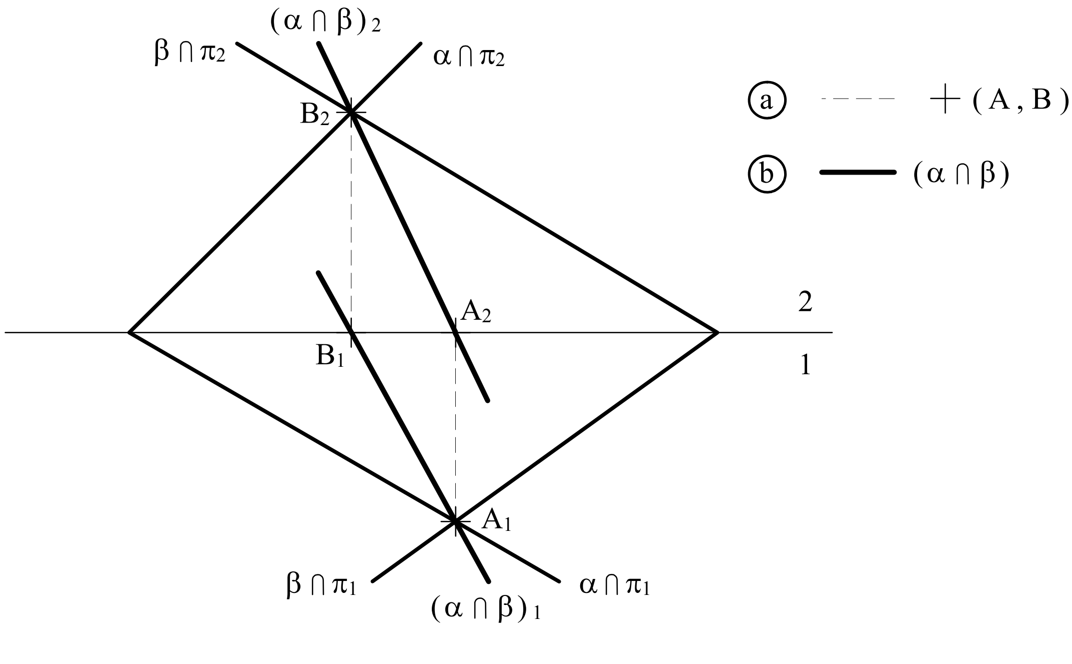
⇒ **EXERCÍCIOS 4.10 , 4.11 e 4.12**

4.6. Interseção entre Planos

A interseção entre dois planos é uma reta e para determiná-la bastam dois de seus pontos, que, obviamente, estarão também contidos em ambos os planos. Partindo dos pontos de interseção entre os traços de dois planos α e β, é possível determinar a reta de interseção entre eles ($\alpha \cap \beta$):

a) Determinar as projeções dos pontos de interseção entre os traços de cada plano (pontos A e B).

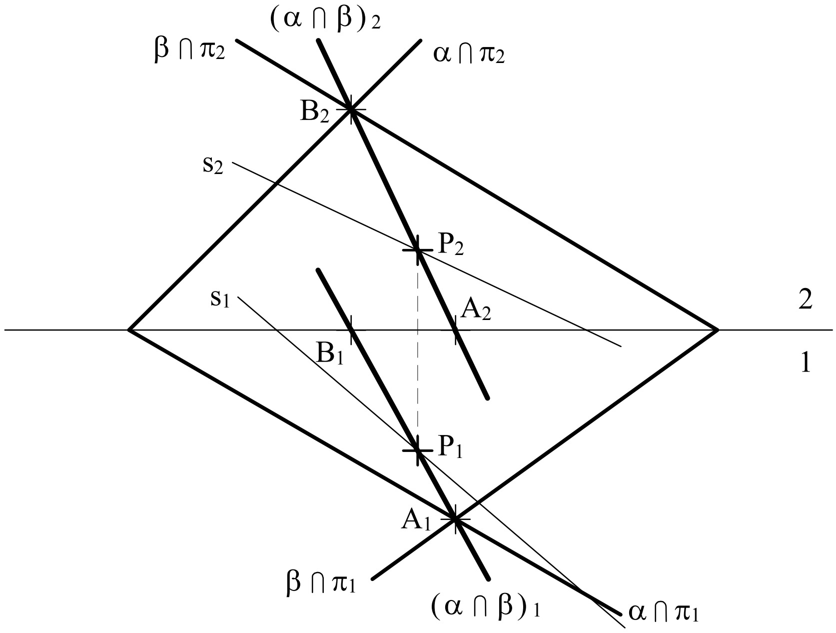
b) Unir estes dois pontos em cada plano de projeção, determinando as projeções da reta $\alpha \cap \beta$:



⇒ **EXERCÍCIO 4.13**

4.7. Interseção entre Reta e Plano

A interseção entre um plano e uma reta (contida em outro plano) será um ponto da reta de interseção dos planos.



O último caso de interseção ocorre entre um plano e uma reta não contida em nenhum plano previamente definido. A resolução é similar ao caso anterior, porém, esta nova situação exige o traçado de um dos infinitos planos que poderiam conter esta reta.

Dados um plano α e uma reta r, não contida em α ($r \not\subset \alpha$), pode-se obter a interseção $r \cap \alpha$ pelo seguinte procedimento (as linhas de chamada foram novamente suprimidas para facilitar a visualização da resposta):

a) A partir da reta e seus traços (pontos A e B), traçar um plano β (qualquer) que a contenha.

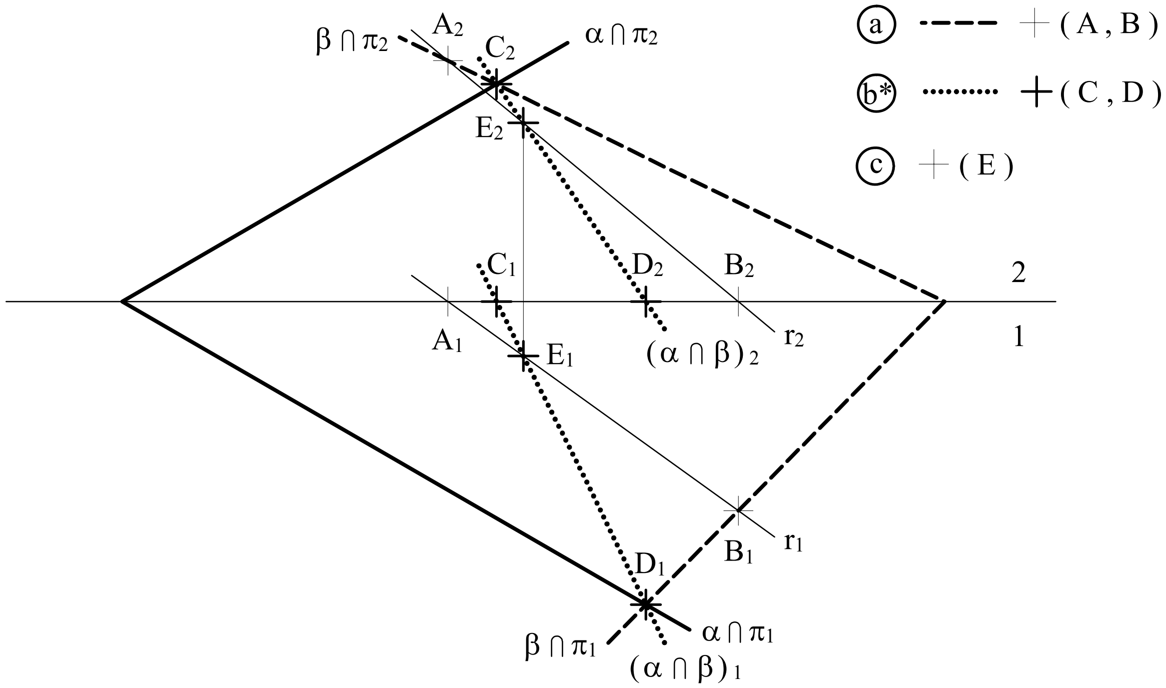
Para que um plano contenha uma reta, é necessário que seus traços contenham os traços dela ($(\beta \cap \pi_2) \supset A_2$ e $(\alpha \cap \pi_1) \supset B_1$), portanto, basta desenhar os traços de um plano que passem pelos traços da reta dada.

Não é recomendável traçar um plano desnecessariamente complexo, pois apenas atrapalhará a resolução; quanto mais simples a solução adotada, mais simples o desenvolvimento do restante do problema.

b) ***** Desenhado este novo plano fictício, o procedimento recai na interseção entre dois planos, explicada anteriormente. Portanto, deve-se traçar a reta $\alpha \cap \beta$, apoiada nos pontos de interseção entre α e β (pontos C e D).

c) O único ponto real de interseção (ponto E) entre a reta r e o plano α estará necessariamente contido na reta $\alpha \cap \beta$ e estará no cruzamento entre esta reta fictícia e a reta r.

As duas projeções do ponto E devem se alinhar necessariamente; em caso contrário, houve imprecisão ou erro no traçado do procedimento.



⇒ **EXERCÍCIOS 4.14 , 4.15 e 4.16**

4.8. Verdadeira Grandeza

Uma das dificuldades na resolução de problemas mais complexos da Geometria Descritiva é a visualização e compreensão dos elementos geométricos, distorcidos pelas projeções.

Se fosse possível visualizá-los em suas verdadeiras dimensões (ou verdadeira grandeza), todas as distâncias e interseções podem ser obtidas diretamente, sendo as soluções mais diretas e intuitivas.

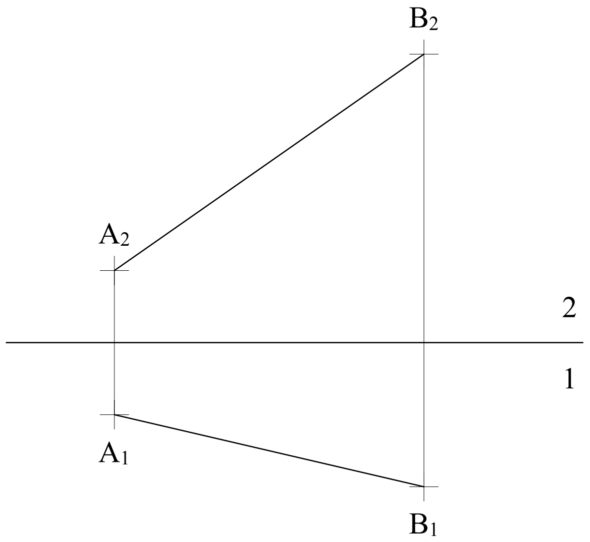
Há dois métodos gráficos para possibilitar a visão da verdadeira grandeza dos elementos em uma épura, ao aplicar um mesmo princípio: projetar o objeto de interesse frontalmente.

Para revelar a verdadeira grandeza, os métodos agem de modo complementar:

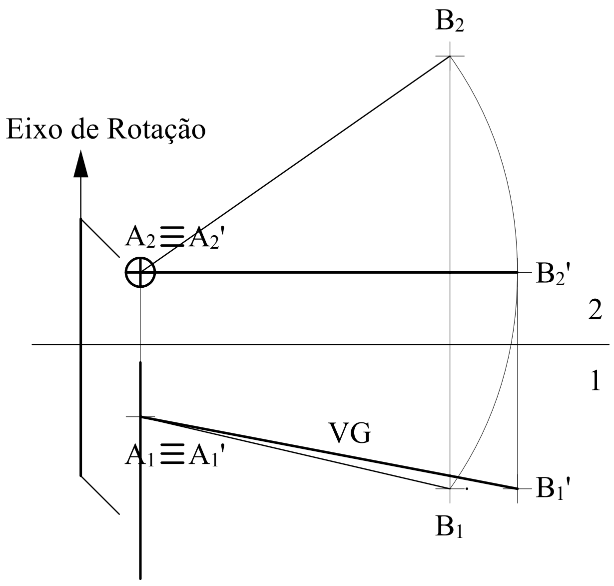
1) Método da Rotação: este método rotaciona o objeto até posicioná-lo de frente a um dos planos de projeção π_1 ou π_2, a fim de obter a verdadeira grandeza do elemento desejado e retornar a resposta procurada para o objeto inicial.

2) Método da Mudança de Planos: o segundo método cria um terceiro plano de projeção (π_3), para o qual a projeção do objeto é frontal, facilitando o traçado da resolução do problema e seu posterior retorno para o objeto original.

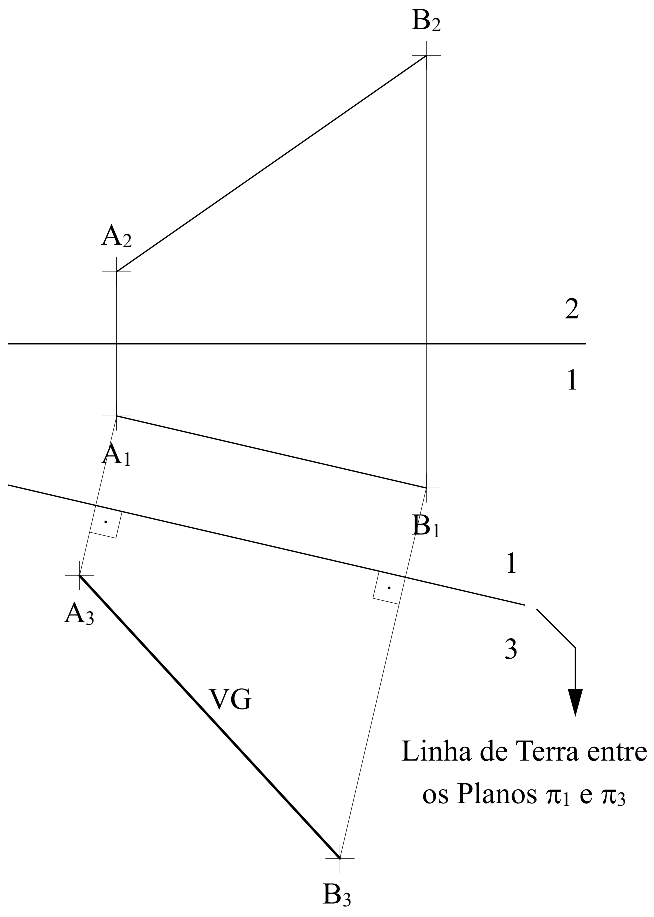
Problema: Deseja-se o verdadeiro comprimento do segmento AB (sua verdadeira grandeza):



Resposta pelo Método da Rotação



Resposta pelo Método da Mudança de Planos



Os dois métodos têm capacidade para resolver os mesmos problemas, porém alguns mais facilmente resolvidos pela aplicação de um ou outro. Usualmente, o enunciado do problema sequer indica a necessidade de aplicação de um dos métodos, cabendo ao aluno detectar esta necessidade e aplicar o método de sua escolha.

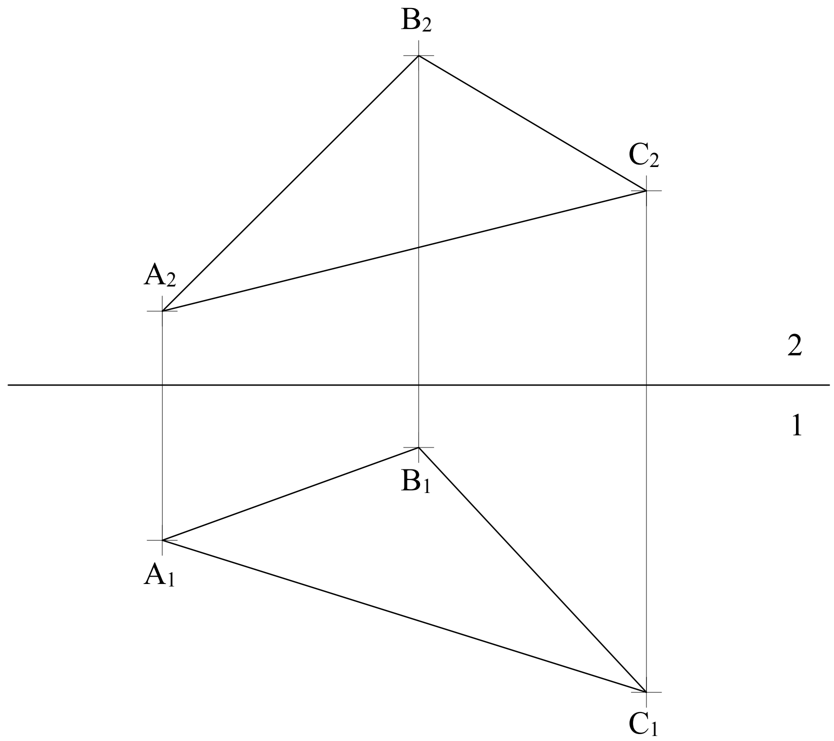
4.9. Método da Rotação

Este método baseia-se na rotação dos elementos até que o problema a ser resolvido (o elemento de interesse) esteja posicionado de frente a um dos planos de projeção existentes (π_1 ou π_2). A escolha do centro de rotação (também chamado eixo ou pivô de rotação) é muito importante, pois a rotação não é aleatória: somente se desenvolve até posicionar o objeto frontalmente e apresentar sua verdadeira grandeza.

Um objeto naturalmente em verdadeira grandeza é aquele que está reduzido a apenas uma de suas arestas (ou retas) numa das projeções, sendo esta projeção paralela à linha de terra (por ser paralela a um dos planos de projeção π_1 ou π_2). Portanto, a rotação aplicada ao objeto buscará este posicionamento específico a uma de suas projeções.

Às vezes, uma segunda rotação pode-se fazer necessária, quando o objeto está inclinado em relação aos dois planos de projeção, exigindo uma rotação para cada plano. Não há possibilidade de uma terceira rotação, por haver apenas dois planos presentes numa épura.

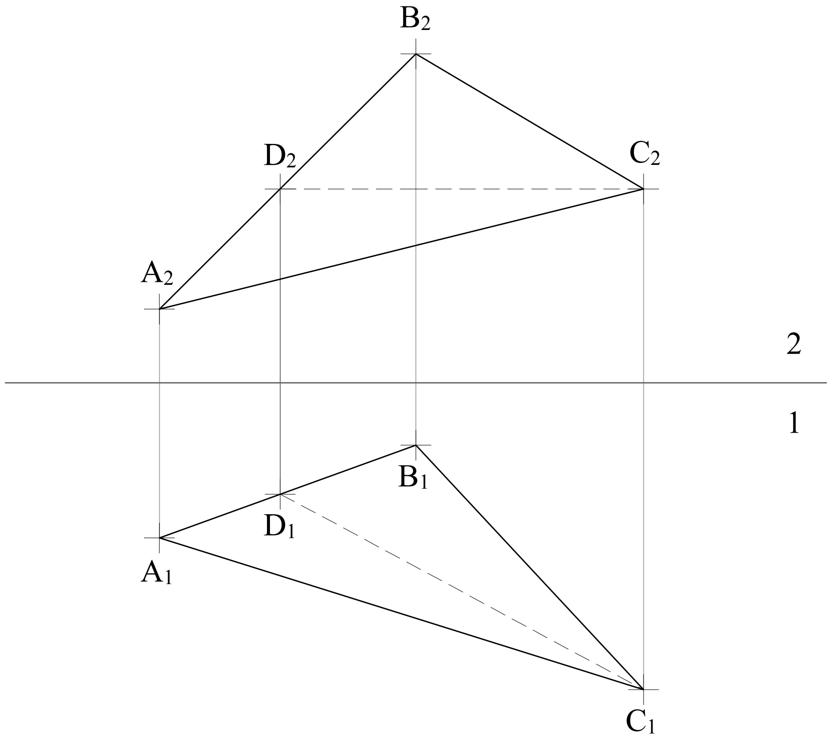
Exemplo resolvido: Traçar a altura do triângulo ABC, do ponto B em relação à aresta AC:



a) Por ser uma única figura, contida em um plano único, o problema é claramente resolvido pela medição sobre a verdadeira grandeza do triângulo inteiro.

O primeiro passo é identificar uma horizontal qualquer (segmento C_2D_2) em um dos planos de projeção, que servirá como referência à rotação, traçando sua projeção no outro plano.

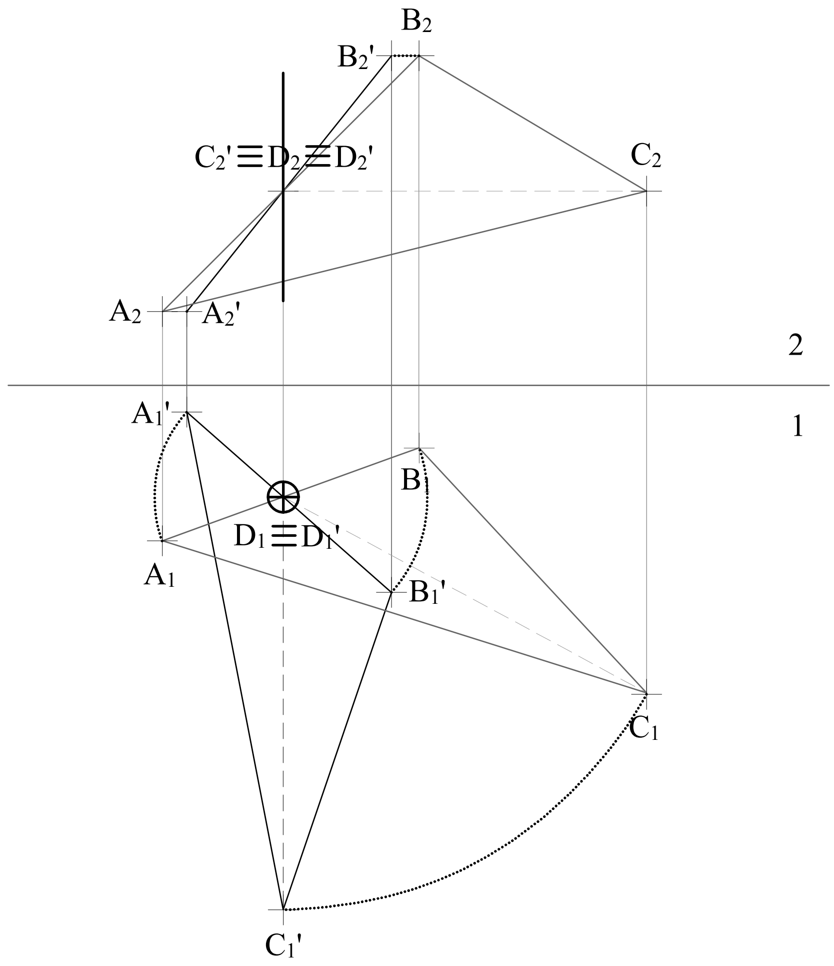
A reta horizontal pode ser traçada em qualquer uma das projeções, implicando na representação final da verdadeira grandeza no outro plano de projeção.



b) O passo seguinte é a escolha de um eixo de rotação (projetado como ponto em π_1 e como eixo em π_2) sobre a horizontal traçada (C_2D_2).

Centralizada neste ponto, a rotação (com compasso) de todos os pontos do desenho termina quando a projeção correspondente da horizontal (neste exemplo, no plano π_1) se torne vertical.

Em seguida, compatibiliza-se a projeção no plano π_2 (mantendo as cotas de cada ponto e deslocando-os para alinhá-los com suas novas posições do outro plano), que deve apresentar-se agora apenas como um segmento (A_2'C_2'B_2').



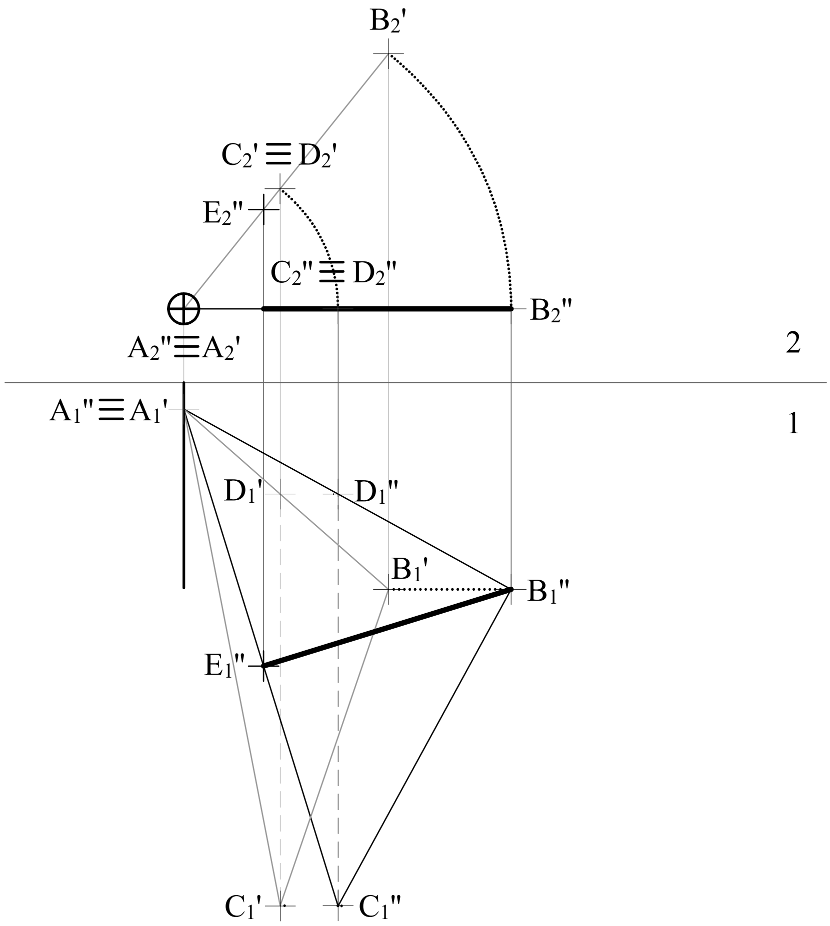
A fim de facilitar a rotação, é recomendável que a mesma se inicie pelo segmento escolhido como horizontal (C_2D_2) e transformado em vertical no segundo plano (C_1'D_1').

Os demais pontos podem então ser rotacionados a partir de suas distâncias aos pontos C_1' ou D_1', traçando estas distâncias como arcos e interceptando-as com novos arcos de acordo com as distâncias a outros pontos (como uma "triangulação" entre os pontos).

c) Se o triângulo estivesse inclinado em relação a apenas um dos planos de projeção, sua verdadeira grandeza já estaria projetada e os passos anteriores seriam desnecessários. Porém, neste exemplo, é necessária mais uma rotação.

Rotacionar em torno de um centro novamente no plano π_1 não surtirá melhor visão da VG, portanto, o novo centro escolhido estará na projeção do plano π_2.

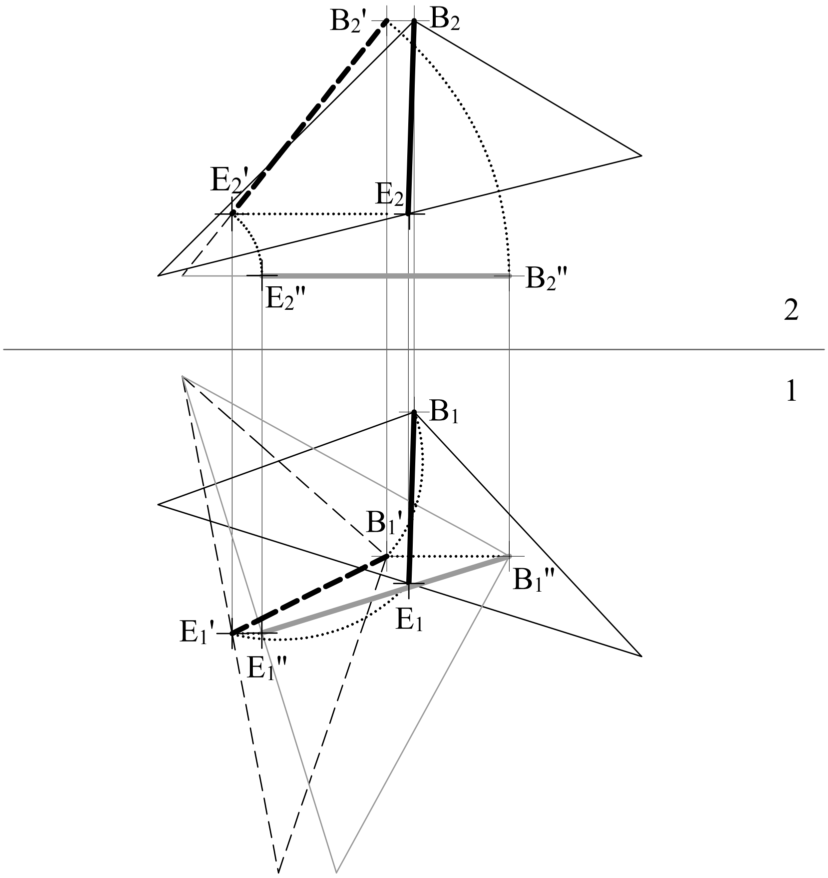
A rotação terminará quando o segmento A_2'C_2'B_2' se torne horizontal, revelando a verdadeira grandeza do triângulo A_1'C_1'B_1'. Conseqüentemente, obtém-se a altura B_1'E_1'.



O elemento deverá ser rotacionado até que se reduza a uma única reta paralela à linha de terra em um dos planos e apresente sua verdadeira grandeza no outro plano.

d) O último passo consiste no retorno cuidadoso da altura da verdadeira grandeza do triângulo, apresentada no segmento B_1”E_1”, “desfazendo as rotações” na ordem inversa dos passos anteriores e compatibilizando as projeções entre si.

Esta distância (B_1”E_1”) não é a solução do problema, devendo ser retornada às suas projeções iniciais, ou seja, retornado o novo ponto E às projeções originais do triângulo.



As construções auxiliares dos passos intermediários não devem ser apagadas, apenas ser traçadas mais tênues do que a solução final.

Notar que os afastamentos dos pontos A1”, B1”, C1” e D1” se mantiveram em relação às posições anteriores (A1’, B1’, C1’ e D1’), tal como as cotas de A2’, B2’, C2’ e D2’, que se mantiveram em relação às de A2, B2 , C2 e D2.

Se o problema desejasse a medida (na régua) de distâncias ou a determinação de interseções entre elementos, elas deveriam ser obtidas na posição final de verdadeira grandeza e depois retornadas à configuração inicial (antes de todas as rotações).

⇒ **EXERCÍCIOS 4.17 e 4.18**

4.10. Método da Mudança de Planos

Este método atua de modo complementar ao método da rotação: em lugar da alteração do posicionamento dos objetos, para que se posicionem de frente a um dos planos π_1 ou π_2, neste método insere-se na épura um terceiro plano que será frontal à solução desejada do problema.

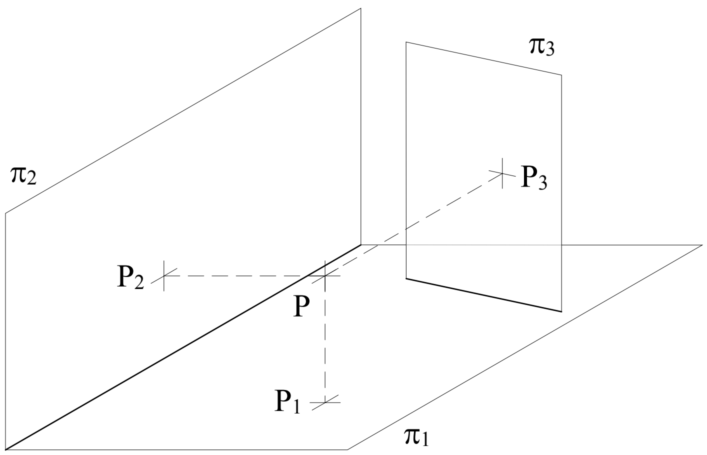
O conceito aqui aplicado é a mudança da posição do observador em lugar da posição do objeto observado.

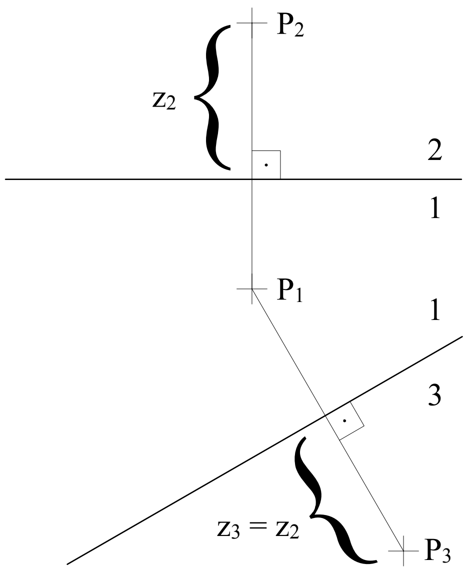
O novo plano π_3 deve ser escolhido como sendo frontal à solução e, portanto, não é aleatório. Às vezes, duas mudanças de planos serão necessárias, quando o objeto em questão estiver simultaneamente inclinado em relação aos planos π_1 e π_2.

O novo plano π_3 é perpendicular a π_1, porém não precisa ser também ortogonal a π_2.

Sempre haverá um plano de transição (neste exemplo, π_1) entre os outros dois (neste exemplo, π_2 e π_3) e as distâncias do primeiro plano à sua linha de terra (cotas de π_2) se manterão no terceiro plano em relação à nova linha de terra (cotas de π_3).

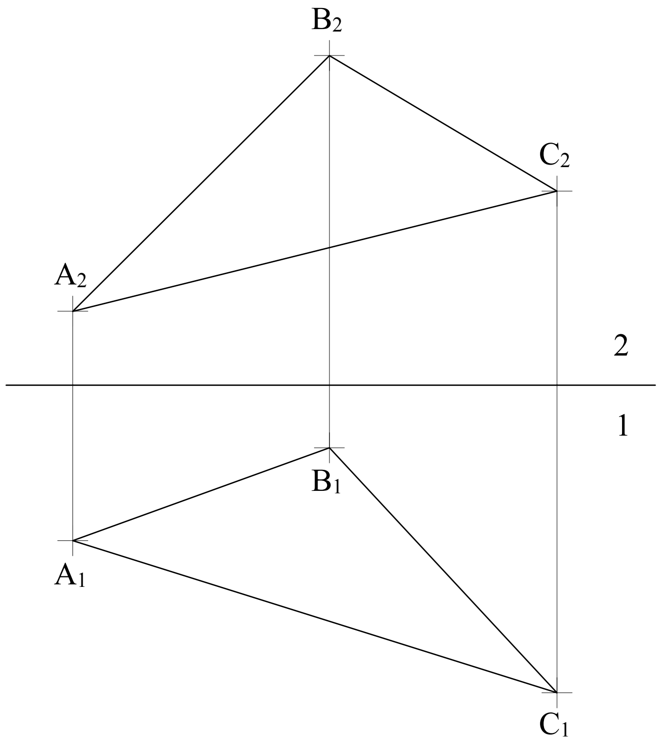
As linhas de chamada entre as projeções em π_1 e π_3 também deverão ser perpendiculares à sua linha de terra (entre 1 e 3).





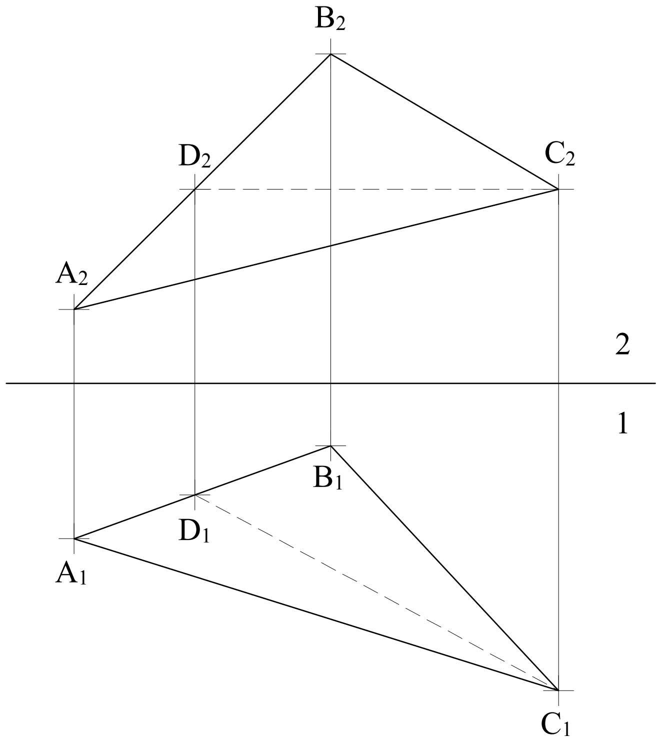
Na figura anterior, o plano de transição escolhido foi π_1, porém o plano intermediário poderia ser π_2 e as distâncias constantes seriam os afastamentos de π_1 em π_3, em lugar das cotas de π_2 em π_3.

Exemplo resolvido: Traçar a altura do triângulo ABC, do ponto B em relação à aresta AC:

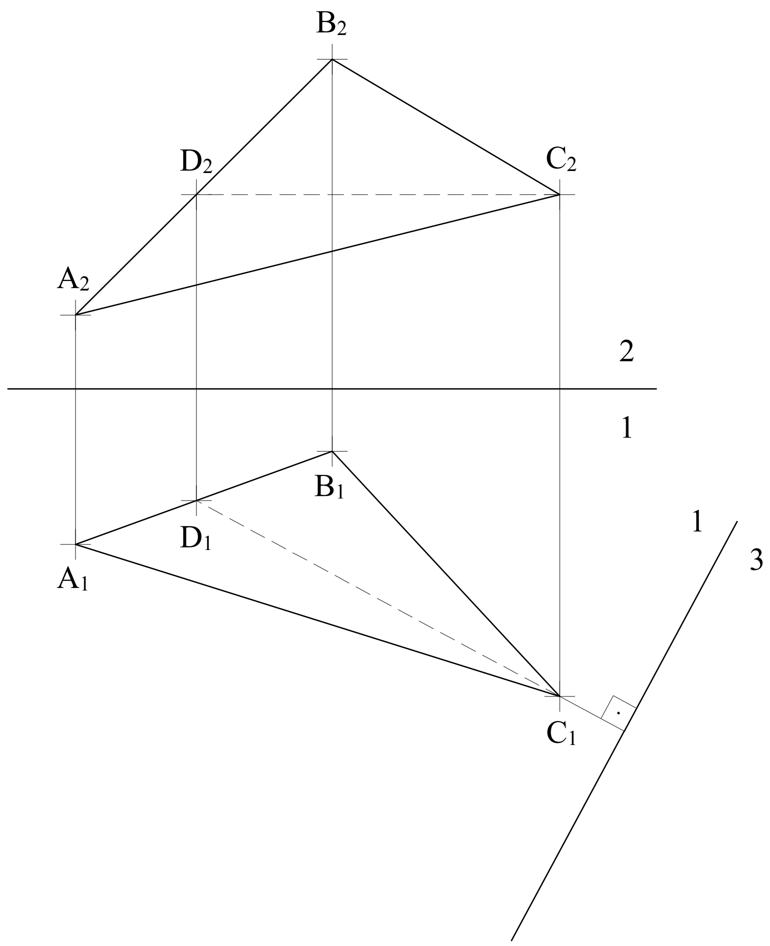


a) Novamente se buscará a verdadeira grandeza do objeto (o triângulo AC) e a determinação do ponto E da altura BE do triângulo.

Escolher uma reta horizontal (segmento C_2D_2) em um dos planos de projeção (neste exemplo, π_2) que servirá como referência ao novo plano π_3.

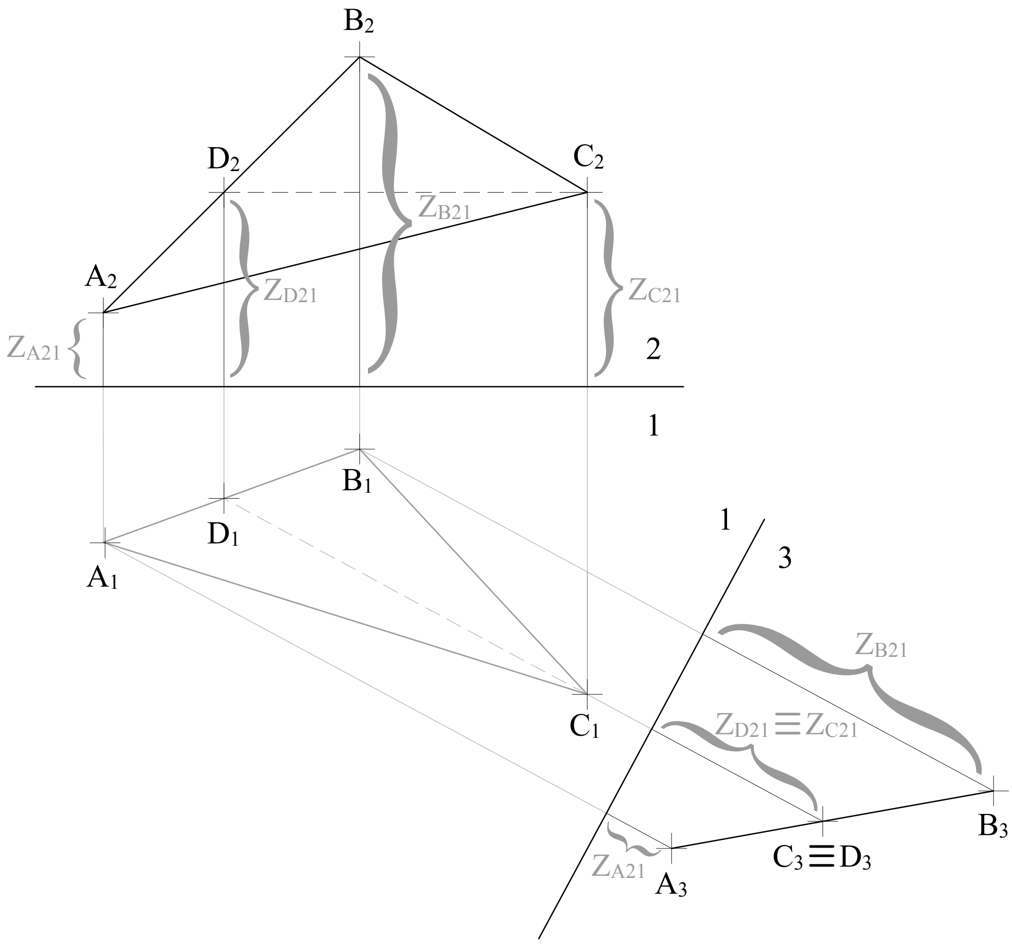


b) A seguir, traçar uma linha de terra entre o plano π_1 e o novo plano π_3, obrigatoriamente perpendicular à projeção da horizontal no plano π_1 (C_1D_1).



Se a horizontal escolhida estivesse no plano π_1, a linha de terra seria perpendicular à projeção da horizontal em π_2.

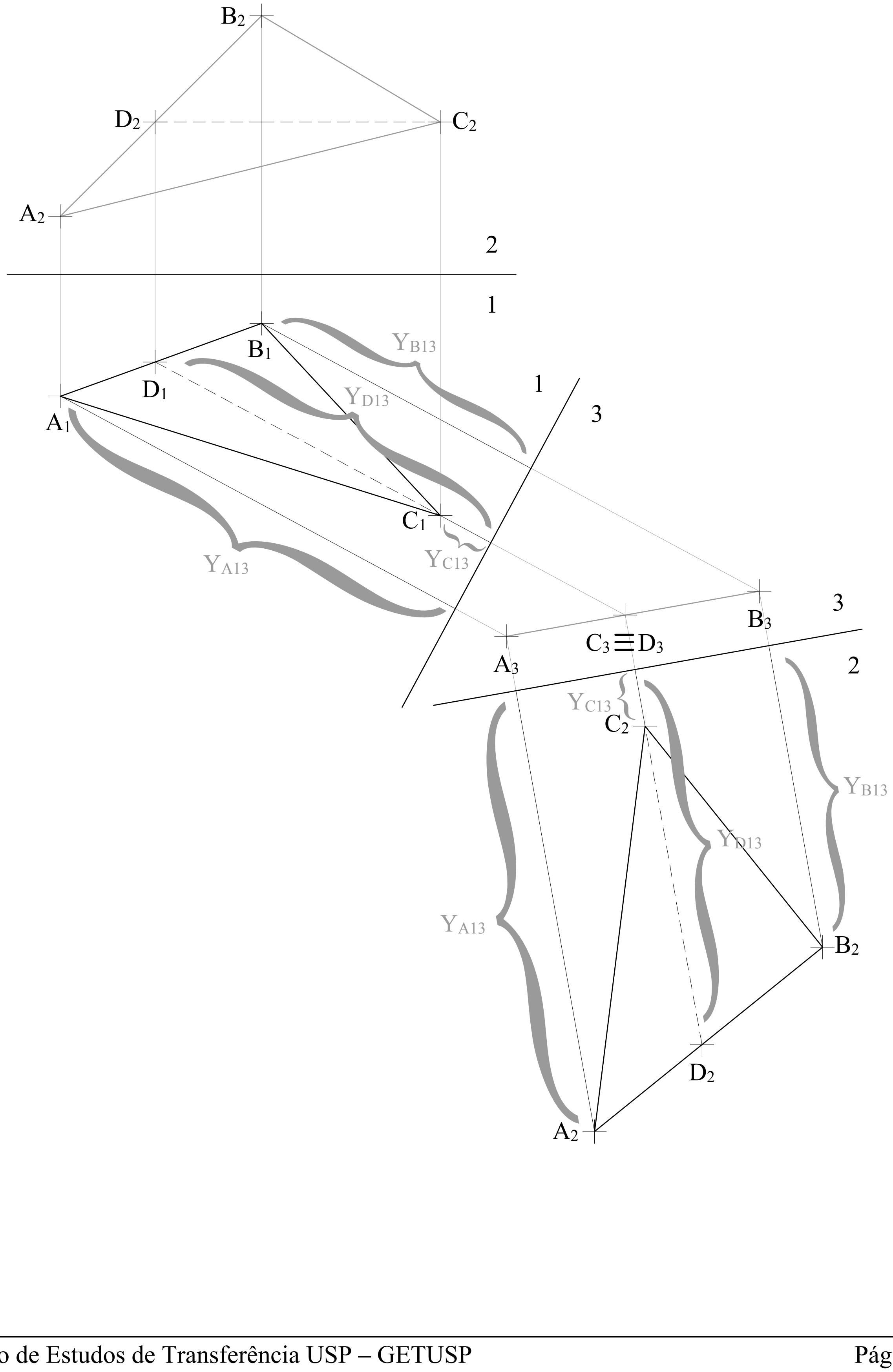
c) Desenhar as linhas de chamada, perpendiculares à nova linha de terra, e marcar as projeções em π_3 dos pontos do triângulo (pontos A_3, B_3, C_3 e D_3), com as mesmas cotas do plano π_2.



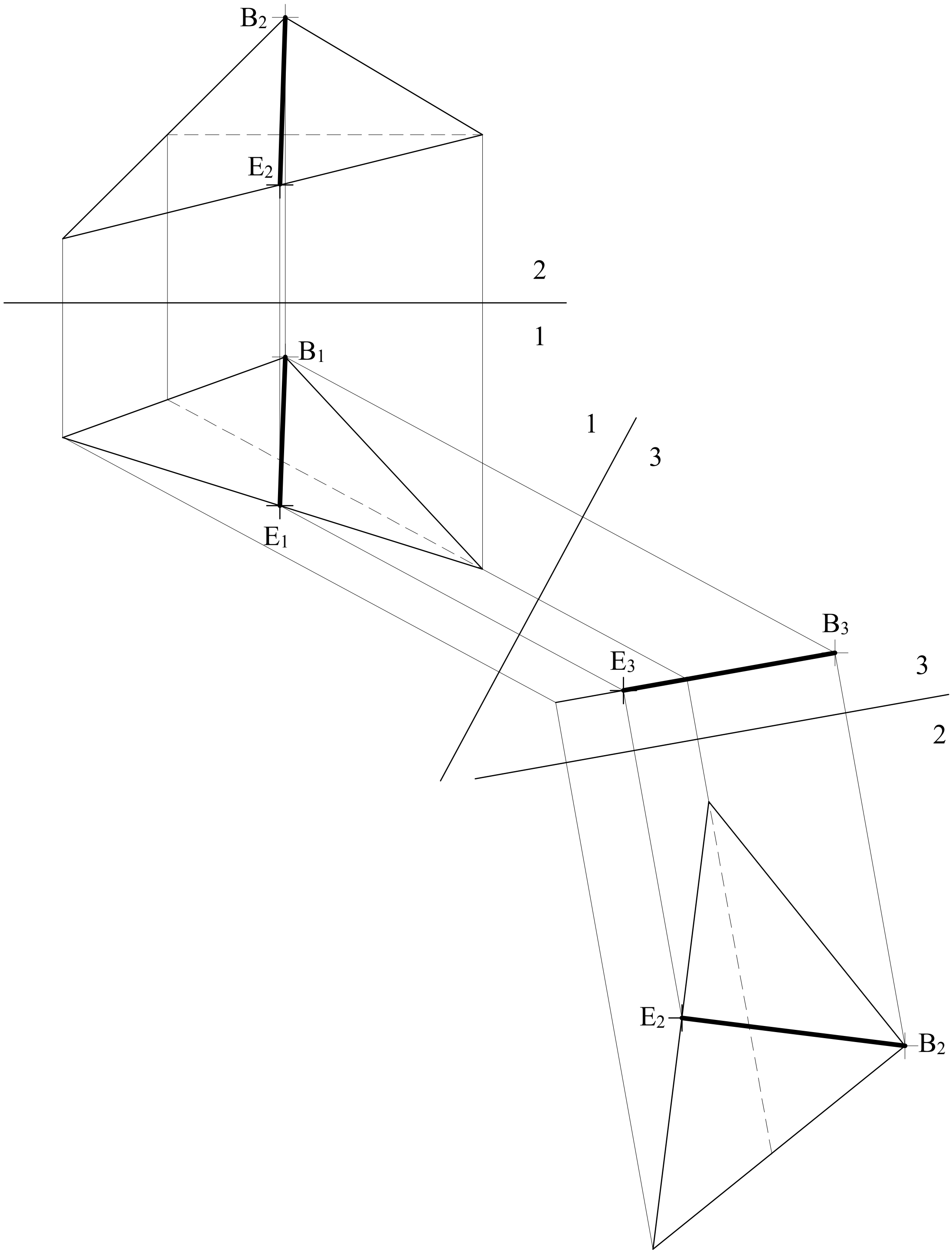
Uma sugestão para transpor as cotas (entre o 2º e o 3º planos) é utilizar o compasso para traçar arcos e "triangular" as distâncias entre os pontos, de forma idêntica à transposição de distâncias no método da rotação.

Em problemas onde apenas uma mudança de planos é necessária (isto é, a figura já está reduzida a uma reta em um dos planos de projeção, de forma idêntica ao triângulo $A_3C_3B_3$), pode-se suprimir os três passos anteriores e executar somente os dois passos a seguir.

d) Para a obtenção da verdadeira grandeza, traçar outra linha de terra, paralela à figura do terceiro plano ($A_3B_3C_3D_3$) e transpor para estes novos pontos (pontos A_2', B_2', C_2' e D_2') os mesmos afastamentos do plano π_1 em relação à linha de terra entre 1 e 3.



e) Transferir a altura (B_2'E_2') até o triângulo original ($A_2B_2C_2$), retornada pelas linhas de chamada.



⇒ **EXERCÍCIOS 4.19 e 4.20**

CAPÍTULO 5: VISTAS ORTOGRÁFICAS

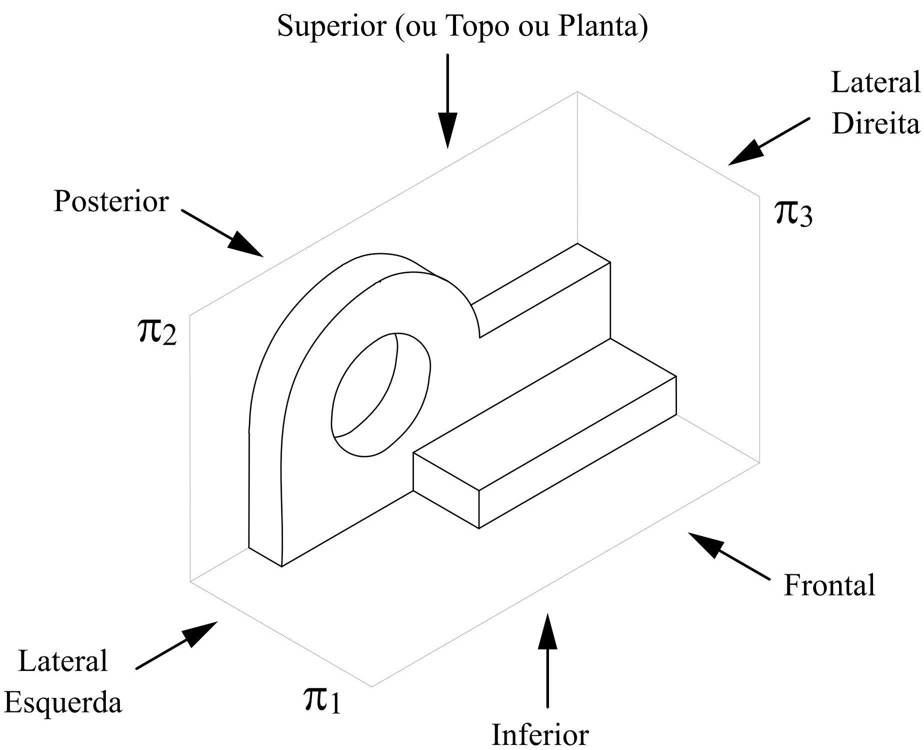
5.1. Apresentação

Vistas Ortográficas são as projeções de um objeto sólido tridimensional em uma épura composta por três planos ortogonais entre si. É uma aplicação muito prática da Geometria Descritiva, utilizada principalmente na comunicação entre projetistas, desenhistas e fabricantes de peças mecânicas, por constituírem uma linguagem clara, simples e bem difundida.

Este assunto não apresenta maior dificuldade em sua assimilação, bastando treinar a visão e compreensão espaciais com a resolução de exercícios.

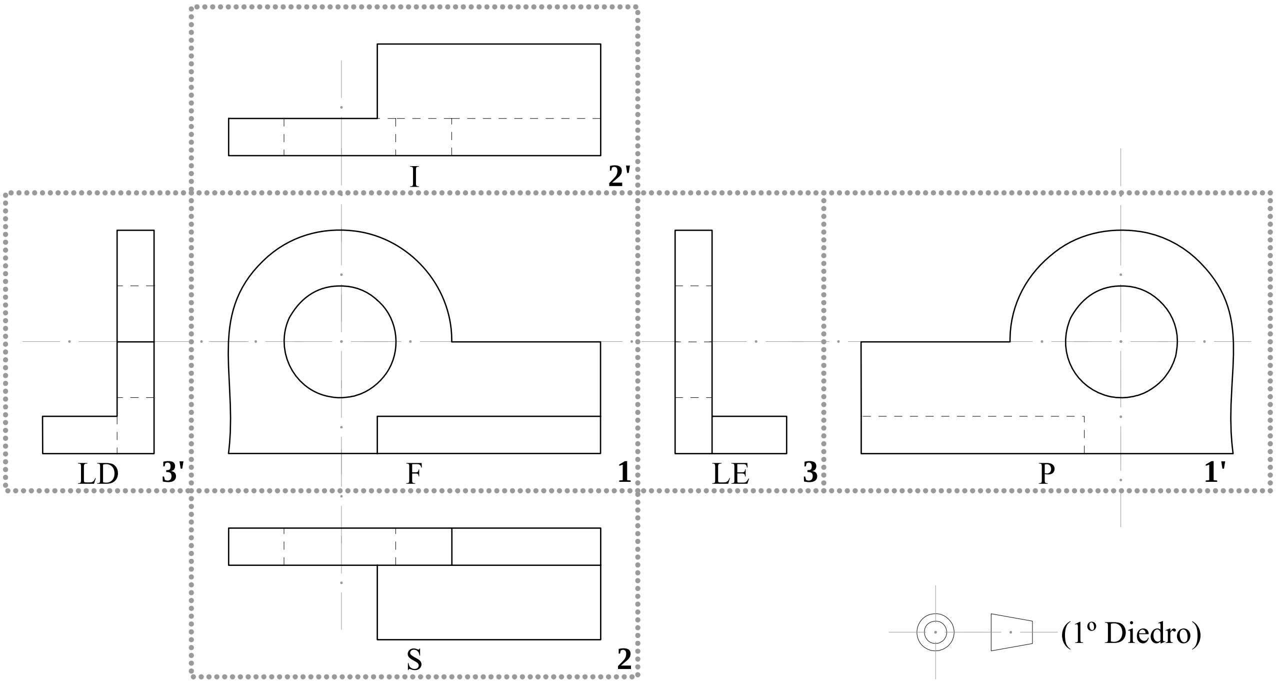
5.2. Vistas Ortográficas

Todos os elementos relevantes do objeto estão representados em suas Vistas Ortográficas. As diferentes vistas representam os seis diferentes ângulos de visão onde se pode posicionar observador (desenhista) em relação aos três planos ortogonais (pela frente e por trás de cada um).

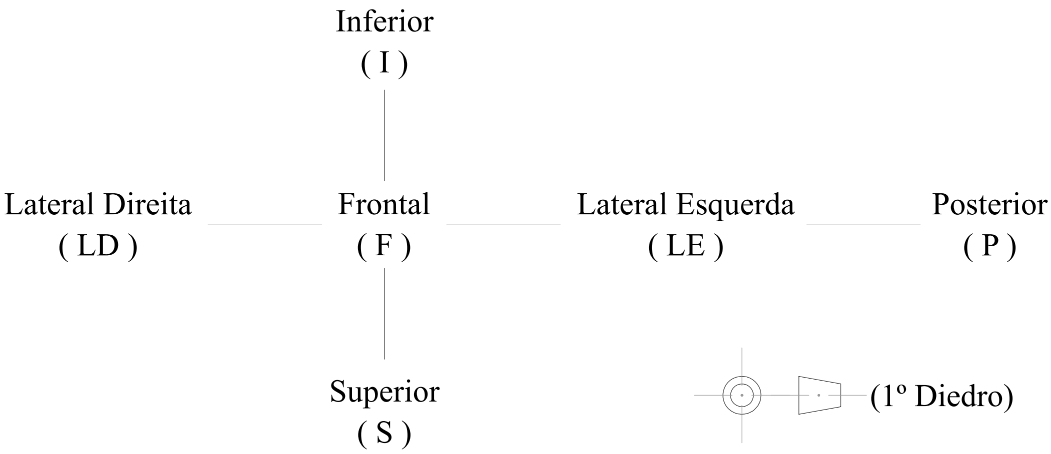


O conceito de Vistas Ortográficas é uma evolução da Geometria Descritiva, aplicando 3 planos ortogonais entre si e paralelos às faces mais relevantes e/ou maiores do objeto em questão.

Por estas características e por ser o objeto sempre um sólido, o traçado destas vistas é consideravelmente mais simples do que as situações usuais da Geometria Descritiva (pontos, retas e planos, que se apresentam como infinitos, sem espessura e "soltos" no espaço). Na verdade, esta aplicação é tão mais simples que pode ser compreendida mesmo sem o conhecimento prévio do capítulo anterior.



Esta configuração das vistas é coerente com o padrão brasileiro ou europeu (1º diedro):



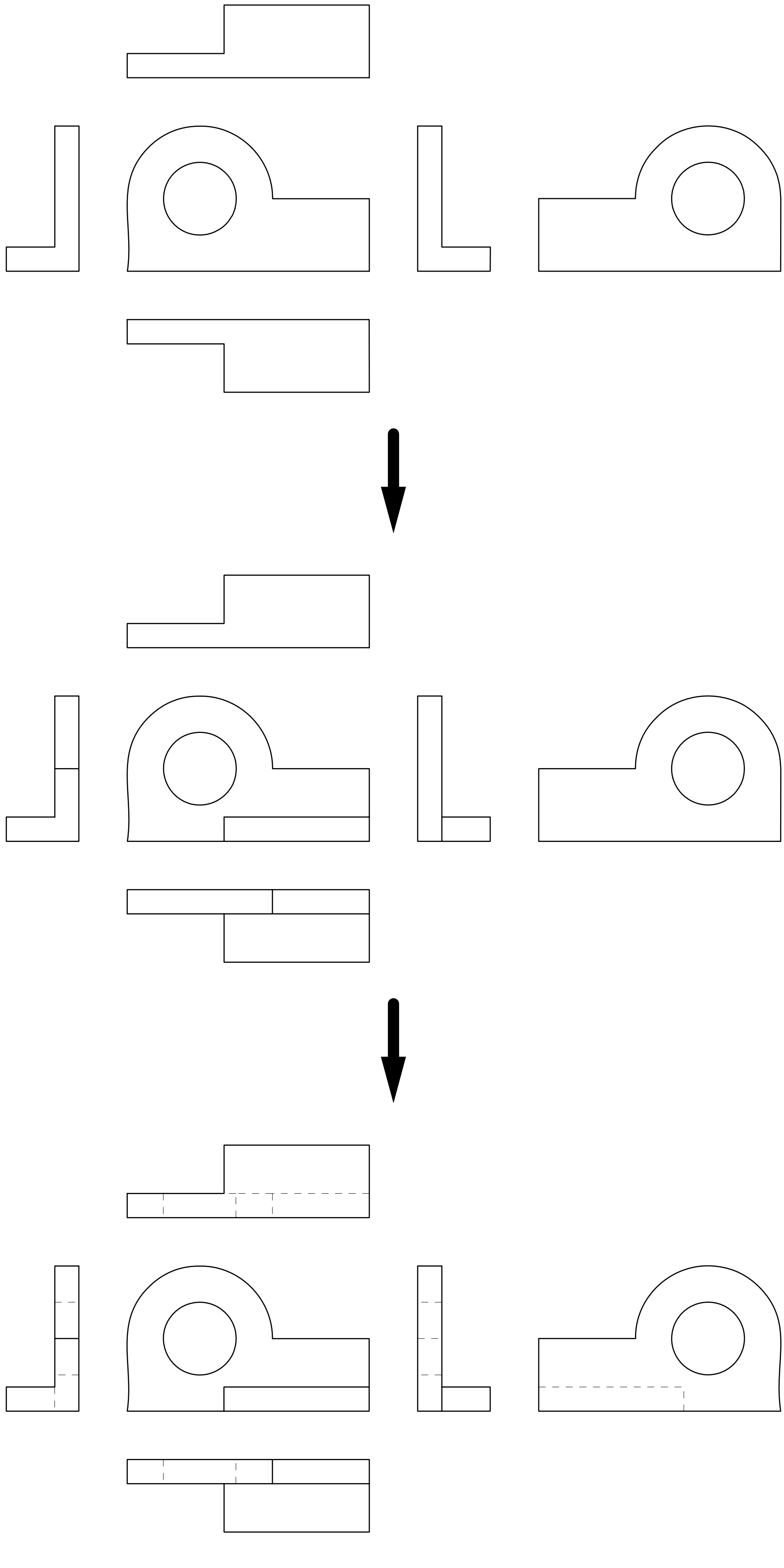
Uma forma mais intuitiva de compreender o posicionamento desta configuração é imaginar a peça colocada inicialmente na vista frontal e "tombá-la" em cada direção para obter as demais vistas.

As características relevantes das Vistas Ortográficas são:

1) Linhas cheias representam as arestas visíveis: os contornos externos podem ser traçados como se fossem os contornos da sombra externa do objeto; já as arestas internas (apenas as visíveis frontalmente em cada vista) devem ser completadas posteriormente conforme cada vista.

2) As linhas tracejadas representam as arestas não visíveis, que ficam ocultas pela face frontal da vista em questão. Se uma aresta não visível coincidir com uma aresta visível, a linha cheia prevalece na representação.

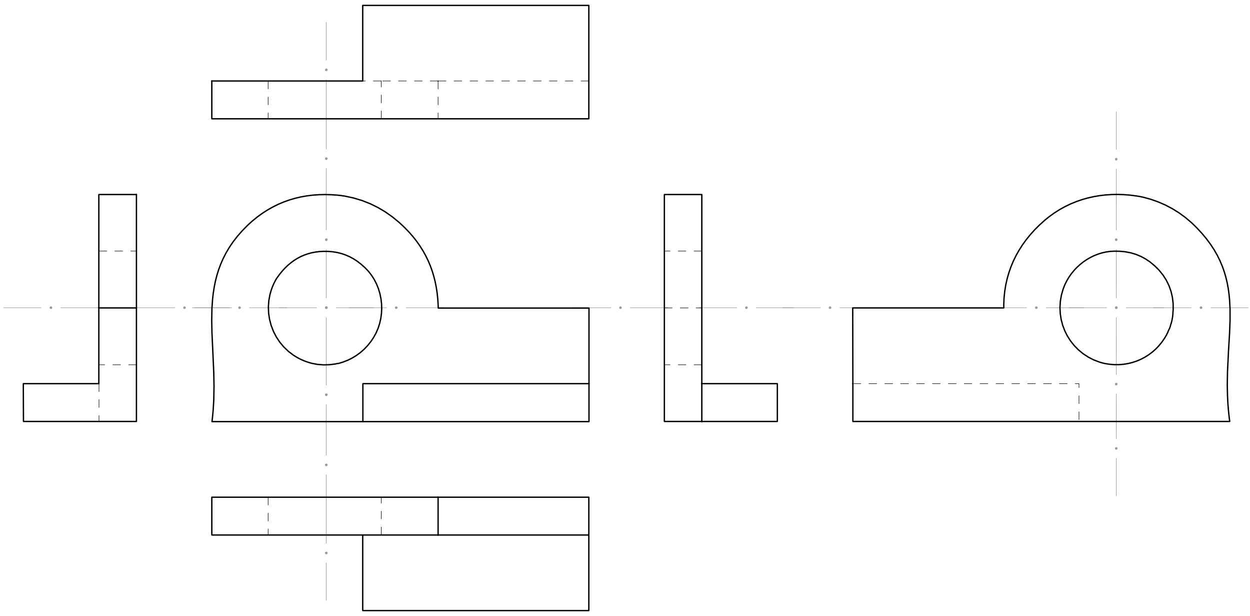
As arestas visíveis e não visíveis alternam sua "visibilidade" nas diferentes vistas, mudando o estilo do traço de uma vista para sua oposta.



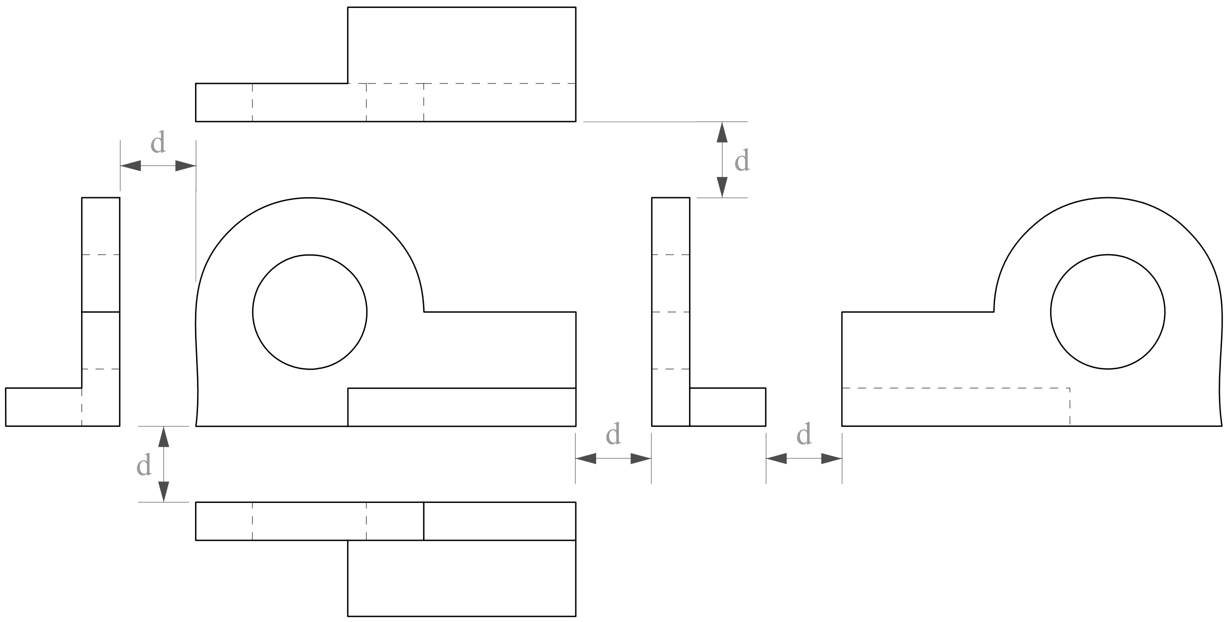
3) Contornos curvos, perfeitamente tangentes e concordantes às arestas que os encontram, não possuem uma aresta na transição. Arestas de cantos retos e curvas não perfeitamente concordantes serão representadas por linhas cheias.

Retas tangentes podem ser simplificadas em sua representação: estendidas até o centro da circunferência a que se referem, ao invés de exatamente até o ponto de tangência.

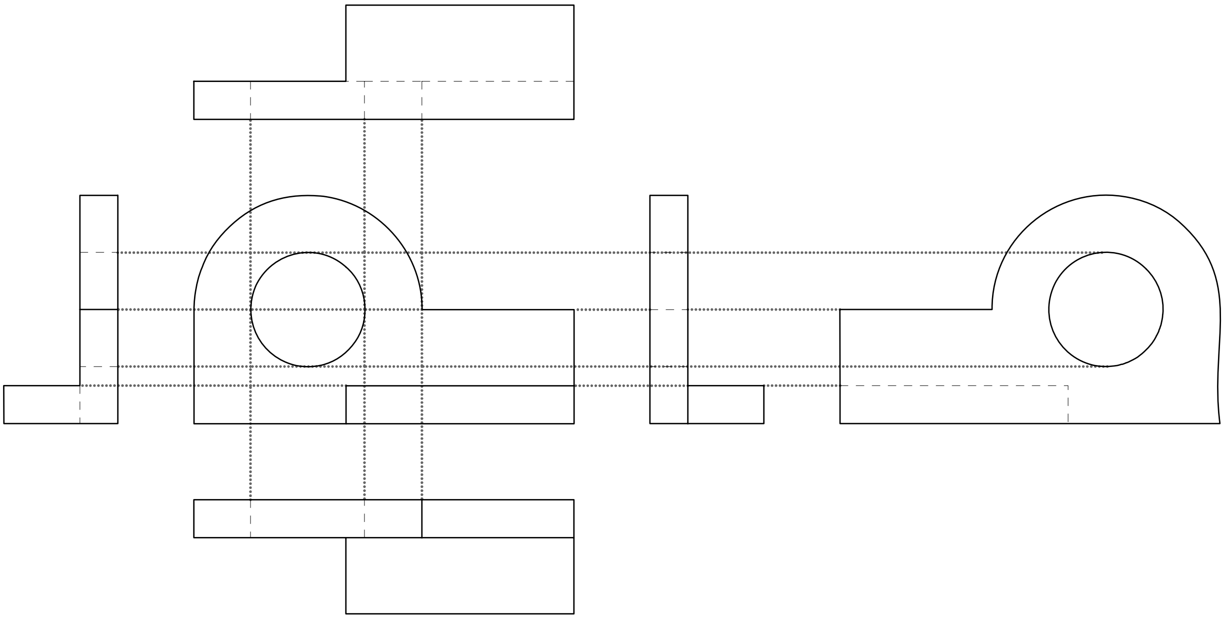
4) Os centros de arcos e círculos são indicados por linhas de traço-e-ponto, cruzando nos centros e continuando pelas demais vistas que também indiquem os elementos circulares em questão.



5) As vistas são igualmente espaçadas nas duas direções. Não há uma distância rígida para o espaçamento, mas um valor entre 1 e 2 cm é recomendável, a fim de reservar espaço suficiente para cotas.



6) As vistas são alinhadas entre si e as arestas (visíveis ou não) também deverão ser alinhadas com as correspondentes arestas nas demais vistas. Este é um dos parâmetros mais expressivos quanto à coerência e perfeição das vistas.

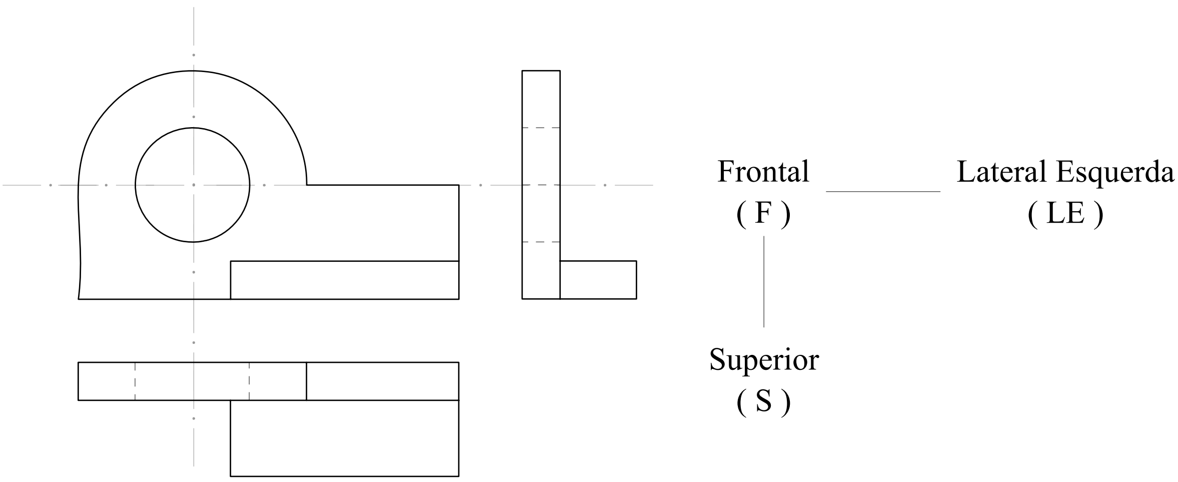


7) Às vezes, as vistas podem ser representadas em escala diferentes da natural (1 : 1), para ampliação (2:1, por exemplo) de algum detalhe pequeno ou redução (1:3, por exemplo) de uma peça grande, porém sem maiores detalhes, a fim de encaixar numa folha de desenho de tamanho mais prático (menor).

8) As Perspectivas, que apresentam as peças a serem representadas, sempre sofrem deformações nas medidas e ângulos e, portanto, "deduções" sobre o alinhamento de arestas em diferentes faces e profundidades ou sobre os ângulos de inclinação de algumas faces não são confiáveis.

Quando não houver medidas ou indicações quanto a qual escala a ser adotada, devem-se medir as dimensões diretamente no desenho e adotar uma escala (preferencialmente, 1 : 1), indicando-a no desenho, mantidas as proporções entre os elementos e suas dimensões.

9) Apesar de existirem seis Vistas Ortográficas, é muito comum simplificar a representação apenas pelas três principais, pois as demais são redundantes. O trio adotado pelo padrão brasileiro, que deve ser sempre obedecido, é: Frontal – Superior – Lateral Esquerda.



10) Quando a perspectiva ou desenhos representativos do enunciado não demonstrarem se há elementos ocultos (arestas, furos, etc) nas faces não visíveis do objeto, deve-se assumir que não há estes elementos ocultos e esta face permanece igual à parte visível.

Da mesma maneira, detalhes e dimensões não apontados claramente como simétricos, porém sem a presença de cotas que indiquem claramente esta assimetria, devem ser desenhados obedecendo a esta simetria implícita.

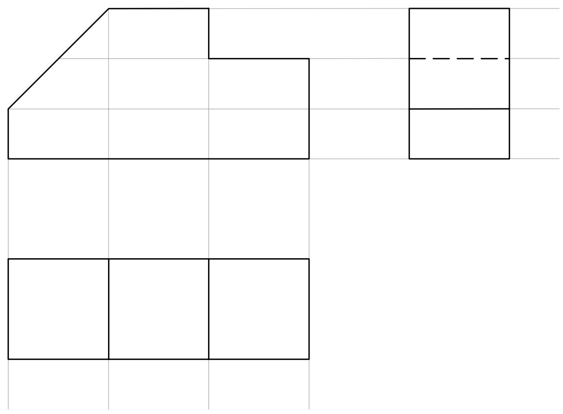
11) A vista frontal, quando não imposta pelo problema, deve ser escolhida como a de maior comprimento e/ou maior número de detalhes, com as vistas superior e lateral esquerda servindo apenas como apoio e dimensões na terceira dimensão. Uma sugestão para a escolha das vistas poderia ser pelas dimensões a serem representadas em cada uma:

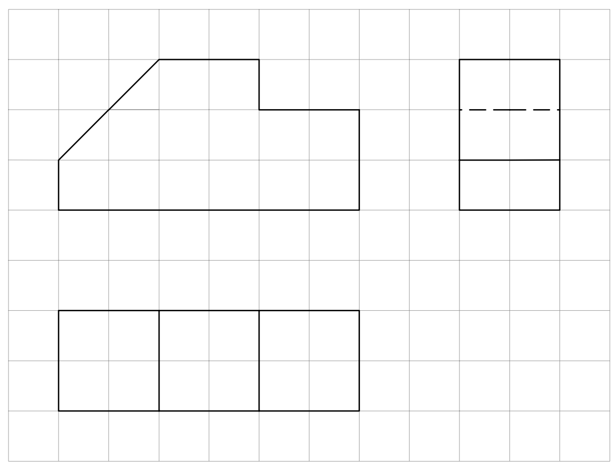
a) Frontal: Comprimento x Altura

b) Superior: Comprimento x Largura

c) Lateral Esquerda: Largura x Altura

Uma dica para ajustar o traçado das vistas, mantendo o alinhamento (perpendicularidade e paralelismo entre as mesmas), é iniciar o desenho pela vista frontal e traçar retas tênues prolongando suas arestas para servir de suporte às outras duas vistas. Outra idéia é traçar previamente uma malha quadriculada tênue com divisões compatíveis com as dimensões das arestas da peça.





⇒ **EXERCÍCIOS 5.1 e 5.2**

CAPÍTULO 6: PERSPECTIVAS

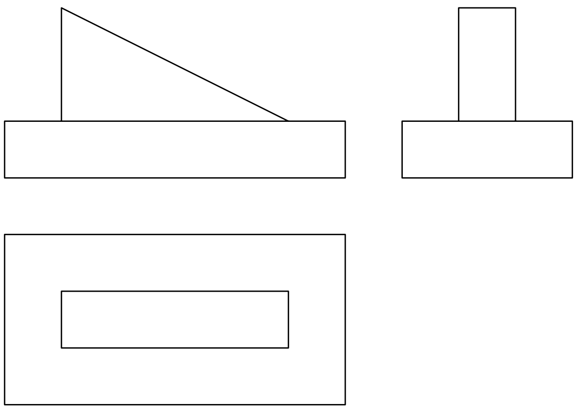
6.1. Apresentação

A representação de um objeto, através de suas Vistas Ortográficas, é unívoca (sem ambigüidades ou "alternativas" na representação) e, por esta razão, é a opção adotada na comunicação entre projetista e fabricante. Porém, o entendimento das vistas como um objeto sólido e tridimensional é comprometido, necessitando de uma visão espacial melhor treinada, além de dificultar a idealização de sua composição com outros objetos em um conjunto (por exemplo: eixo, rodas, parafusos, etc).

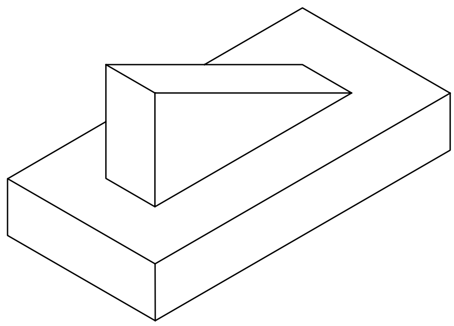
Para uma representação mais realista, é usual a representação em perspectiva, isto é, a representação do objeto em um plano de projeção não paralelo às suas faces (ao contrário das Vistas Ortográficas) de maneira a apresentar mais de uma face simultaneamente (três faces em cada perspectiva), sendo muito utilizada em desenho artístico e arquitetônico.

As Perspectivas dividem-se em cônicas (que apresentam os raios de projeção originados em pontos) e cilíndricas (que possuem os raios de projeção concentrados em pontos no infinito, ou seja, paralelos entre si). O objetivo aqui se restringirá somente ao estudo das Perspectivas cilíndricas.

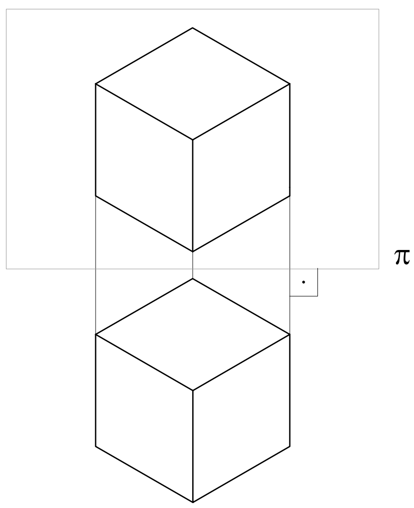
Vistas Ortográficas



Perspectiva Isométrica



Perspectiva cilíndrica ortogonal (ou axonométrica): é aquela na qual a projeção é ortogonal ao plano de projeção, lembrando que nenhuma face do objeto deve estar paralela a este plano.



Há três tipos de perspectiva axonométricas:

- Dimétricas: dois dos três ângulos são iguais entre si e apenas duas dimensões mantêm sua proporcionalidade na projeção.

- Trimétricas: os três ângulos são diferentes entre si e, conseqüentemente, perdem a proporcionalidade das dimensões na projeção.

- Isométrica: os três ângulos são iguais entre si e mantém uma proporção entre as dimensões da projeção (x , y , z) idêntica à das dimensões reais do objeto (1 : 1 : 1).

6.2. Perspectiva Isométrica

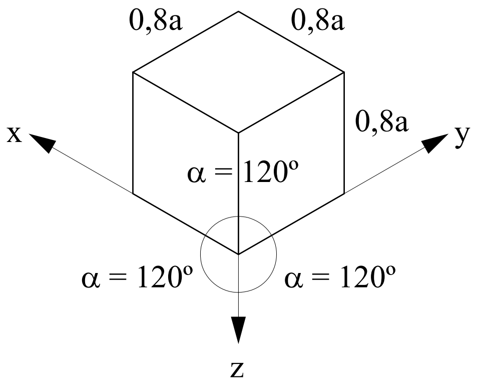
Entre as Perspectivas axonométricas, a perspectiva isométrica é a mais utilizada por possuir a construção mais simples e será a única estudada neste capítulo.

Como mencionado, ela possui três ângulos iguais entre os eixos projetados e mantém a proporção original entre as dimensões de cada eixo.

Todas as Perspectivas, inclusive a isométrica, sofrem redução em relação às dimensões originais; no caso da isométrica, as reduções podem ser representadas pelos coeficientes $K_X = K_Y = K_Z = 0{,}8$.

A prática usual é a aplicação da perspectiva isométrica simplificada, onde os três coeficientes de redução são iguais a 1, produzindo uma projeção aproximadamente 22,5 % maior do que o volume do objeto real.

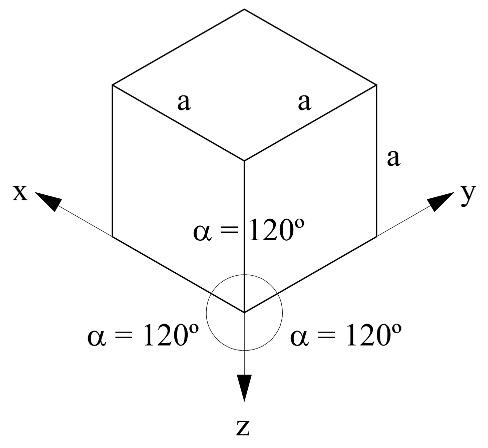
Rigorosa (volume original
medidas reduzidas)



x' : y' : z'

1 : 1 : 1

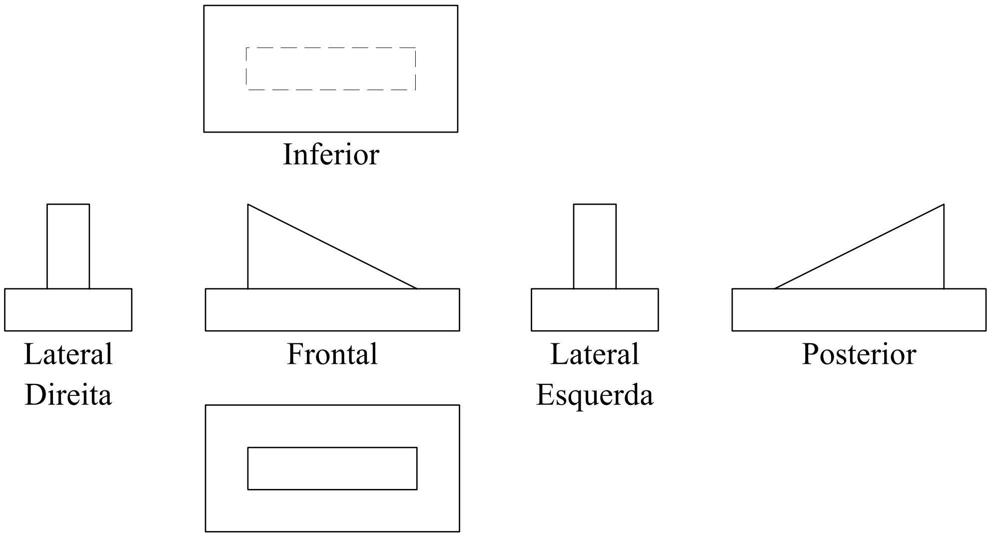
Simplificada (volume ampliado
medidas originais)



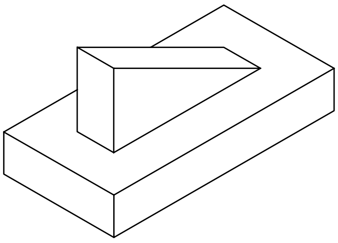
x : y : z

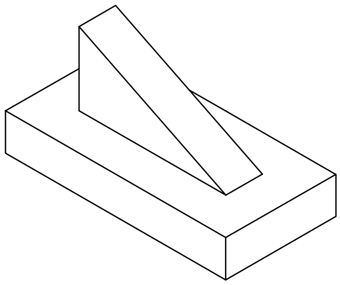
1 : 1 : 1

Na perspectiva isométrica, sempre são visíveis três faces (ou três vistas) das seis Vistas Ortográficas, portanto haverá oito posições possíveis para a perspectiva:



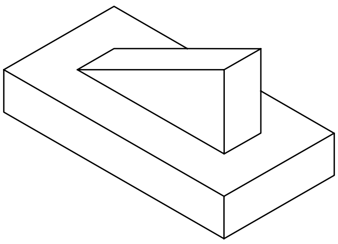
Frontal
Superior
Lateral Esquerda

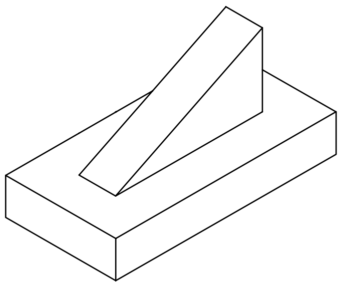




Frontal
Superior
Lateral Direita

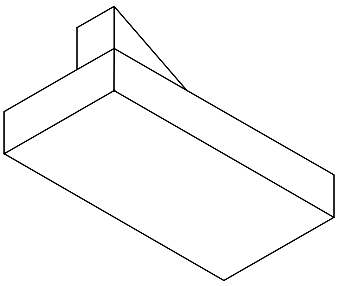
Posterior
Superior
Lateral Esquerda

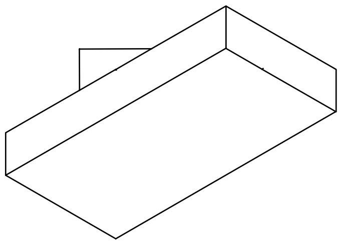




Posterior
Superior
Lateral Direita

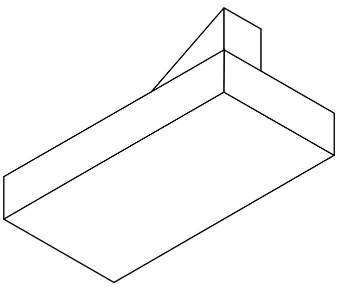
Frontal
Inferior
Lateral Esquerda

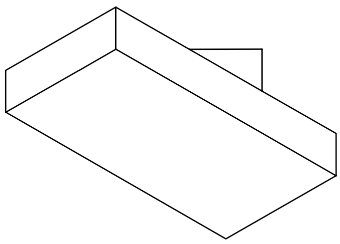




Frontal
Inferior
Lateral Direita

Posterior
Inferior
Lateral Esquerda



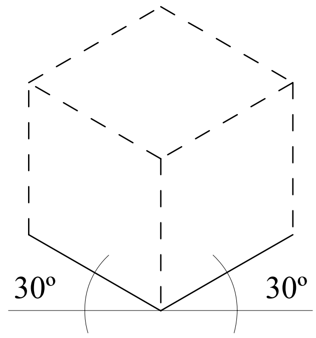


Posterior
Inferior
Lateral Direita

A mais comum entre estas posições é a primeira (faces frontal, lateral esquerda e superior) por apresentar o mesmo trio principal adotado para as Vistas Ortográficas. Quando a posição desejada da perspectiva não for mencionada no enunciado, deve ser desenhada como esta posição (F – LE – S).

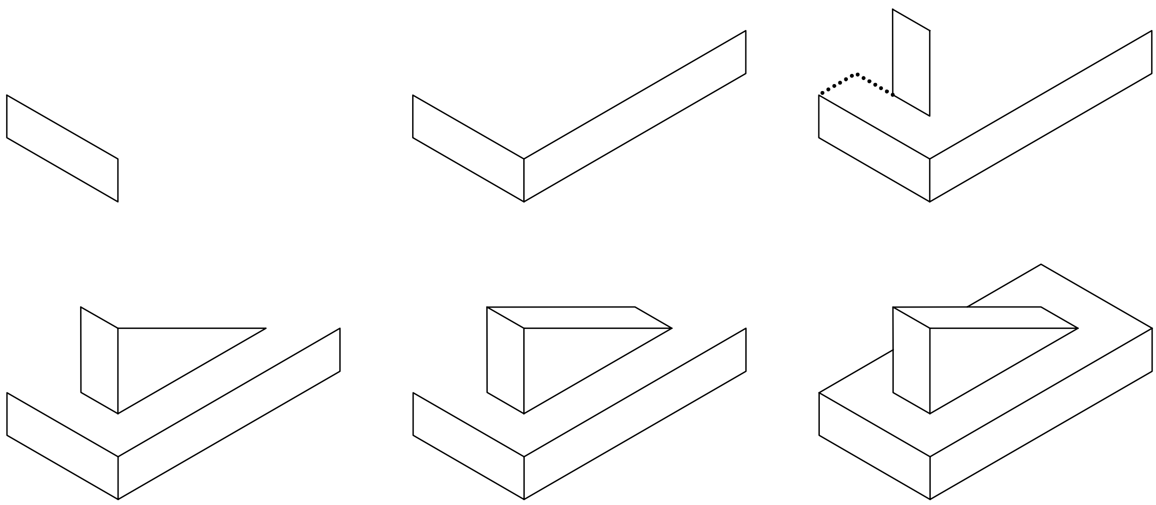
A construção da perspectiva é simples, devendo apenas transpor as dimensões obtidas em cada direção (x, y, z) para os eixos da perspectiva, obedecendo aos ângulos de 120º entre eles.

Uma dica antes de iniciar o desenho da perspectiva é traçar dois eixos de apoio, bem tênues, que formem 30º com a horizontal. Eles servirão como orientação para as dimensões em x e y, pois as dimensões em z permanecerão verticais.



Analogamente às Vistas Ortográficas, não há um caminho único para o desenho de uma perspectiva, porém, em geral, é mais vantajoso começar o desenho pelos pontos e faces mais à frente da perspectiva e recuar em profundidade para as faces e arestas mais distantes, pois alguns elementos à frente "cobrirão" os demais (sobreposição das faces posteriores), não necessitando traçá-los, pois arestas invisíveis nunca são desenhadas, exceto em enunciados ou para fins didáticos.

Uma possível seqüência do traçado de uma perspectiva F – S – LE é apresentada na figura a seguir e serve apenas como indicação, não importando os passos para sua construção e, sim, a clareza, limpeza e correção do resultado final.



O desenho e localização de algumas dimensões e pontos podem ser facilitados se tomados a partir de posições relativas de outros elementos já traçados, diminuindo os equívocos causados pela distorção da perspectiva sobre a profundidade da figura.

⇒ **EXERCÍCIO 6.1**

6.3. Falsa Elipse

O fato de qualquer projeção (inclusive as Perspectivas) sofrer distorções na representação dos objetos implica em alterações das formas geométricas regulares presentes originalmente no objeto.

Na perspectiva isométrica, em particular, é possível notar que os quadrados se tornam losangos na representação, os retângulos se assemelham a paralelogramos e os triângulos mudam seus ângulos. Estas distorções não causam maior dificuldade no traçado das figuras de arestas retas com auxílio da régua, bastando atenção quanto a esta particularidade.

Os arcos e circunferências também sofrem distorções próprias, tornando-se falsas elipses, avaliadas cuidadosamente na correção, e não aceitas como traçados à mão ou improvisados. A forma denominada como falsa elipse realmente não é uma elipse, tratando-se de uma forma composta por arcos de circunferência concordantes.

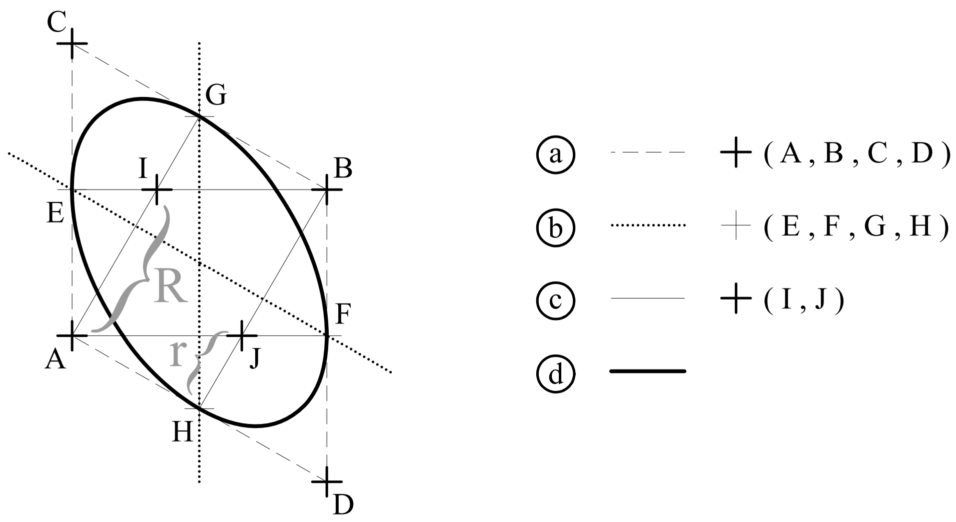
A técnica para desenhar as falsas elipses – ou seja, a representação em perspectiva isométrica de elementos circulares – é a seguinte:

a) Traçar o quadrado (na perspectiva será um losango de pontos A, B, C e D) circunscrito à circunferência desejada. Se a figura é apenas um arco de circunferência, traçar o mesmo quadrado circunscrito (que conteria) à circunferência completa e apenas traçar o arco desejado.

b) Traçar um par de retas unindo os centros dos lados (pontos E, F, G e H) do quadrado fictício, dois a dois (EF e GH).

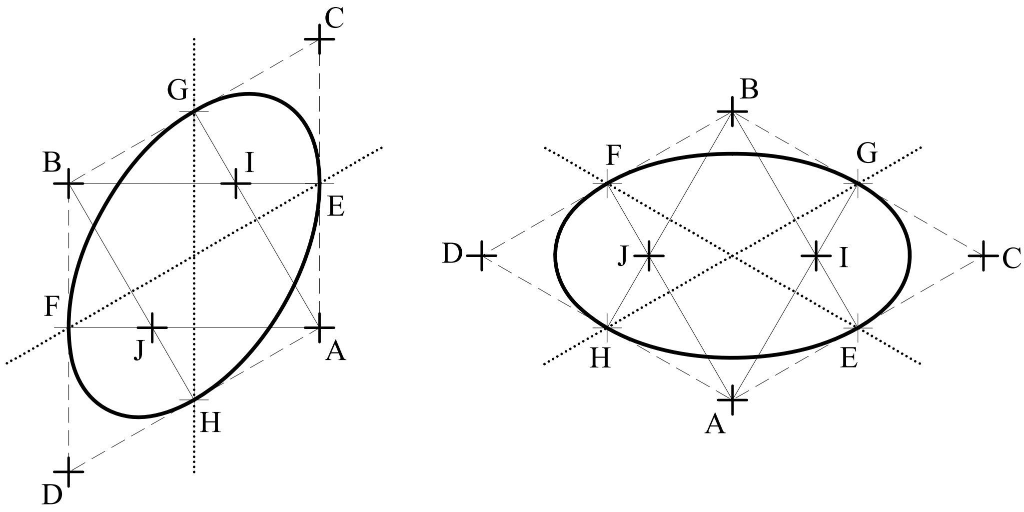
c) A partir de cada vértice dos ângulos maiores do quadrado (A e B), traçar duas retas que passem pelos pontos médios dos lados opostos a cada vértice (F e G para o ponto A e E e H para o ponto B). Marcar os pontos de interseção entre estas retas (pontos I e J)

d) Os dois vértices dos ângulos maiores (A e B) e os pontos de interseção entre as retas do passo anterior (I e J) definem os centros dos quadrantes da circunferência (falsa elipse). Os vértices (A e B) serão os centros dos quadrantes maiores (arcos F–G e E–H), sendo seu raio obtido pelo comprimento das retas que os ligam aos pontos médios dos lados opostos (raio R). Os pontos de interseção do passo anterior (I e J) serão o centro dos quadrantes menores (arcos E–G e F–H) com raios determinados pelos pontos médios dos lados mais próximos (raio r).



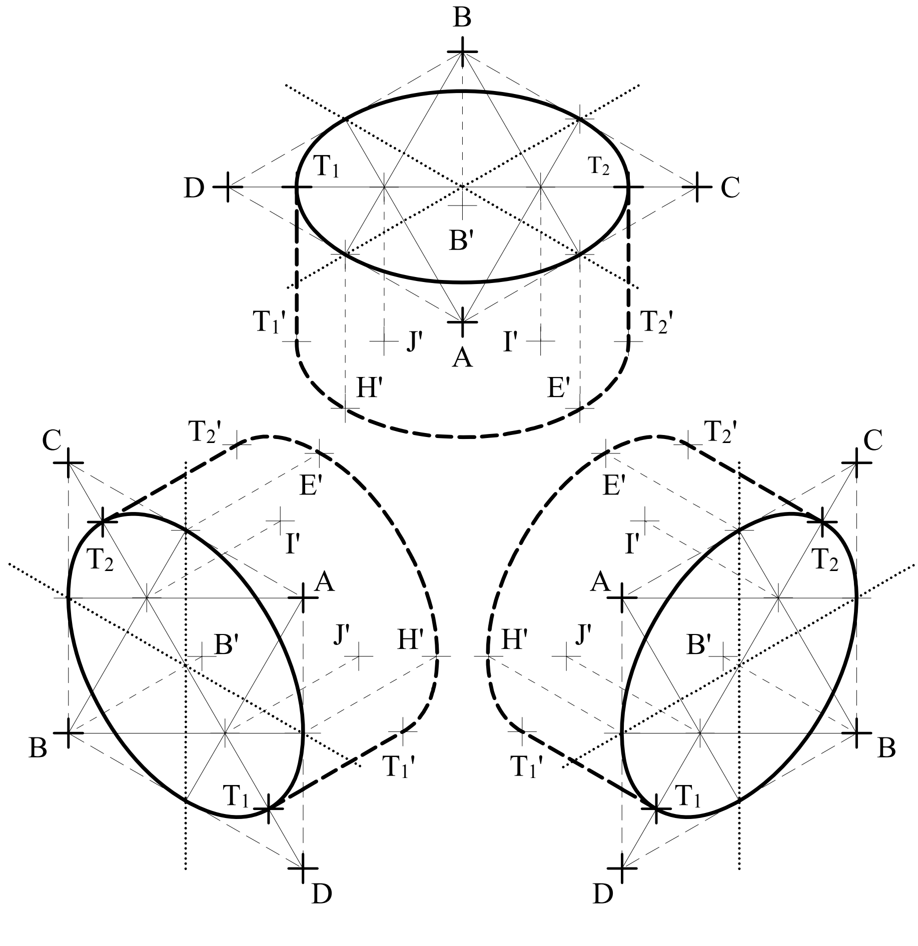
Este "quadrado/losango" e as demais linhas auxiliares da falsa elipse deverão estar presentes (porém mais tênues) na solução. As demais linhas de construção da perspectiva não são obrigatórias e não devem afetar a clareza do desenho (devem ser muito tênues).

O procedimento para uma face à esquerda é idêntico para as faces à direita ou no topo do objeto:



Os pontos de tangência (para arestas na terceira dimensão: profundidade) das circunferências serão os pontos de interseção entre as diagonais maiores dos quadrados e a circunferência, conforme o plano em que se encontra.

As elipses das circunferências em profundidade também podem ser transladadas da mesma forma, deslocando os pontos relevantes do losango e repetindo o procedimento para os quadrantes visíveis.

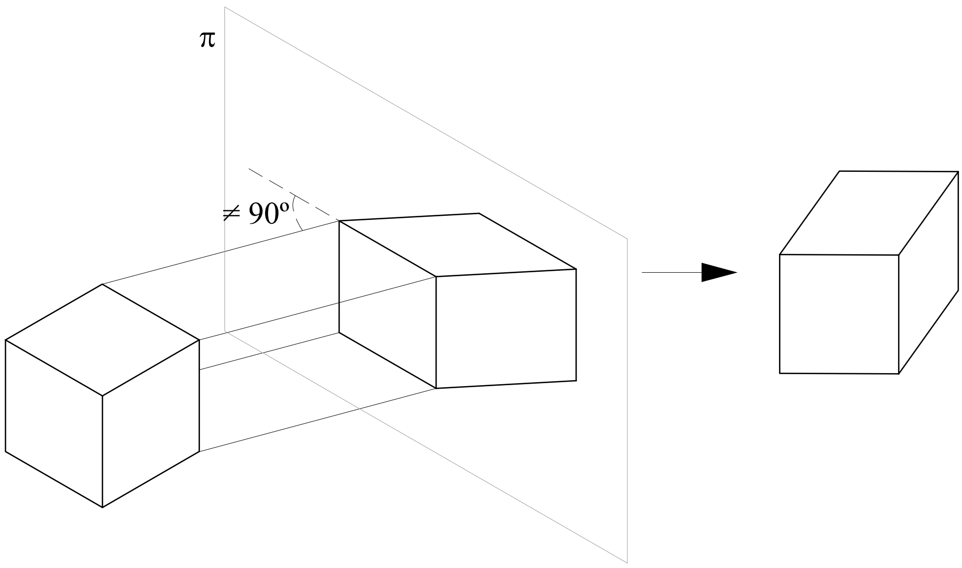


⇒ **EXERCÍCIO 6.2**

6.4. Perspectiva Cavaleira

A perspectiva cilíndrica oblíqua é aquela na qual a projeção possui uma face frontal ao plano de projeção, representada em verdadeira grandeza, porém os raios de luz estão oblíquos ao plano, criando o efeito de profundidade (tridimensionalidade).

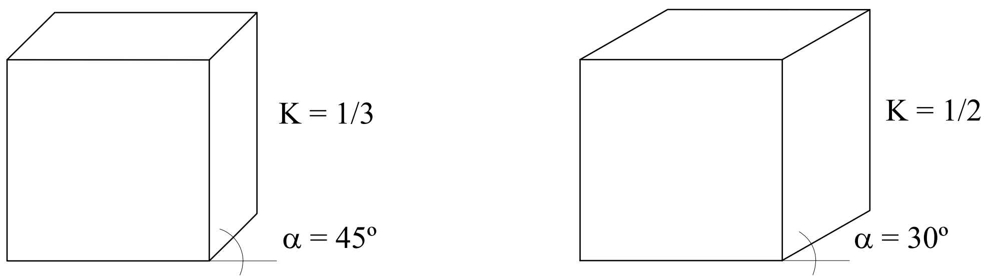
A perspectiva cilíndrica oblíqua na qual o plano de projeção π é vertical denomina-se perspectiva cavaleira.



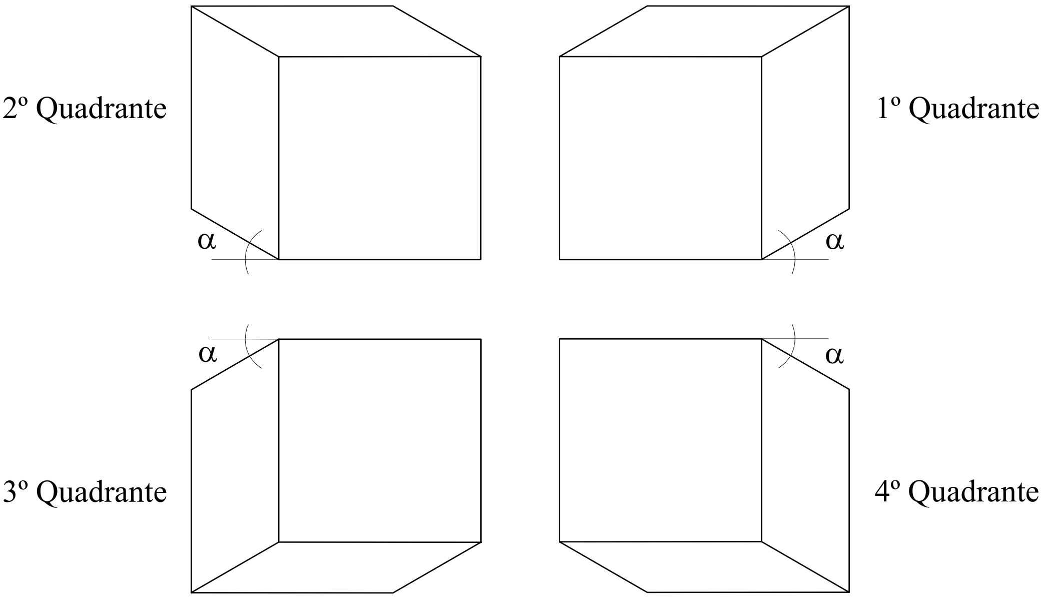
A perspectiva cavaleira se resume a uma face escolhida como frontal e apresentada sem distorções (e todas as demais faces paralelas a estas também apresentadas em verdadeira grandeza) e demais faces (em outros planos) distorcidas pela projeção oblíqua.

Três parâmetros práticos caracterizam esta perspectiva:

- O ângulo α, entre a face frontal e as faces perpendiculares à mesma.
- O fator de redução K, aplicado apenas às dimensões da terceira dimensão (espessura ou profundidade) das faces não frontais (laterais e horizontais). Ou seja, as dimensões da face frontal não sofrem distorções e as dimensões da profundidade são reduzidas pelo fator K.

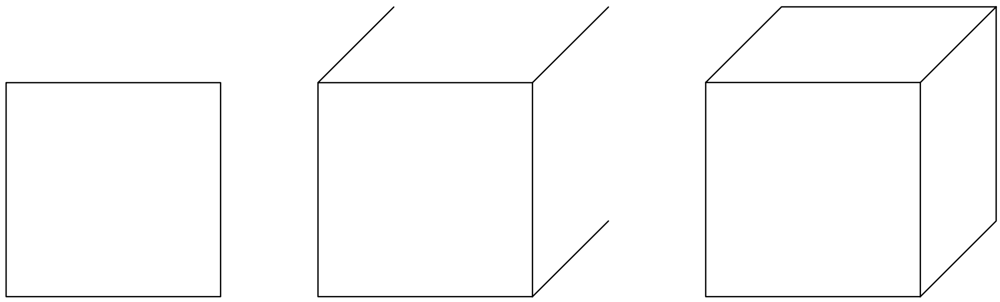


- O quadrante no qual se projetarão as faces oblíquas, identificado como os quadrantes do círculo trigonométrico: 1°, 2°, 3° e 4° quadrantes. Porém, o ângulo da perspectiva nunca próximo de 90º, sempre medido a partir da horizontal.



A construção desta perspectiva é muito simples: a face mais complexa deve ser escolhida como frontal; as demais arestas (das faces laterais e horizontais) devem ser projetadas obliquamente, obedecendo ao quadrante e ao ângulo α, aplicado o coeficiente K sobre estas dimensões; as arestas de planos paralelos à frontal (posicionados "atrás" da frontal, em outras profundidades) devem ser completadas apenas na parte visível, sem sofrer distorções.

Esta perspectiva também não admite a representação de arestas invisíveis, sendo ocultadas por faces à frente.



A escolha da face frontal é condicionada pela face que apresenta arcos e circunferências, pois sua construção exigirá um procedimento particular. Para o traçado de arcos e circunferências, deve-se obedecer à seguinte seqüência:

a) Traçar o arco ou circunferência (com centro no ponto O), com sua face escolhida antecipadamente como a frontal da perspectiva.

É mais fácil iniciar o traçado pela face mais à frente, pois ocultará parte das faces posteriores. Se as faces "atrás" forem desenhadas inicialmente, precisarão ser apagadas em alguns trechos, onde sofrerem sobreposição da face frontal.

b) As arestas das faces perpendiculares à circunferência (ou arco) devem partir de dois pontos relacionados ao ângulo α. Para determiná-los, deve-se traçar o diâmetro (pontos A e B) com um ângulo complementar a α ($\beta = 90^\circ - \alpha$), passando pelo centro da circunferência anterior e inclinado no sentido oposto ao do ângulo α.

Neste exemplo, a perspectiva está no 1º quadrante e, portanto, α inclina-se para a direita e para cima (também o 1º quadrante) e β inclina-se para a esquerda e para cima (2ºquadrante).

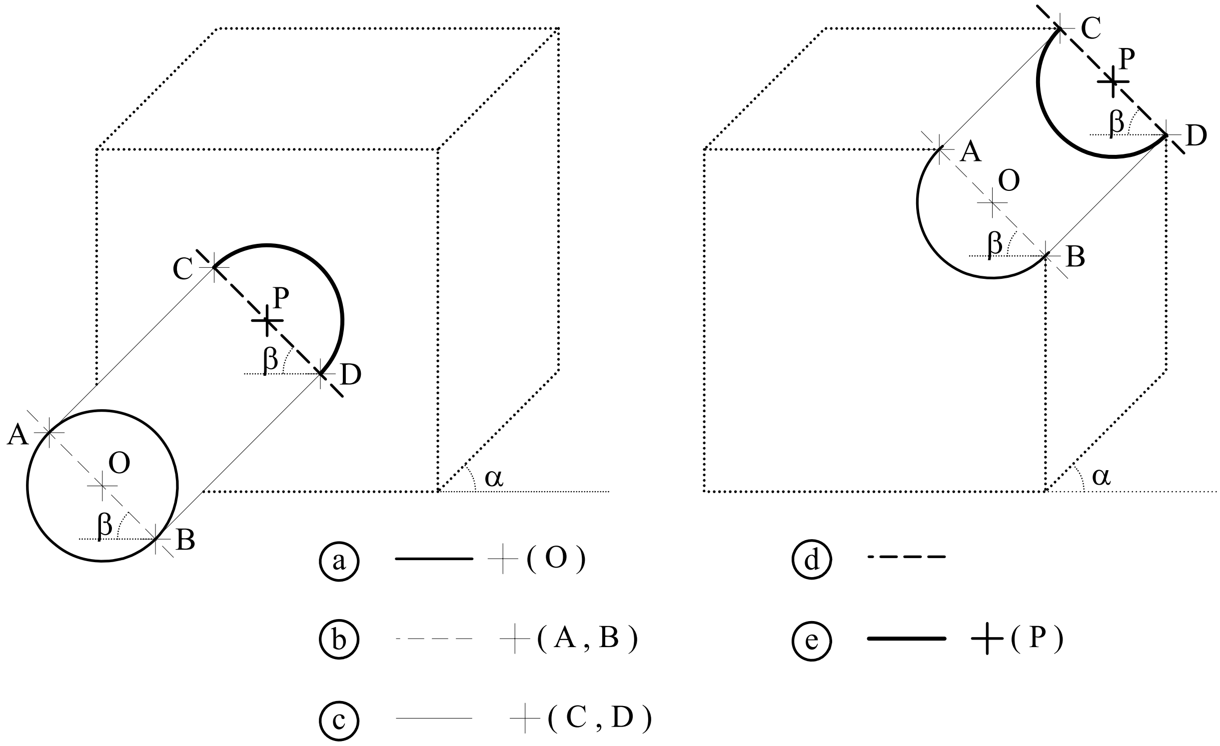
Os pontos do diâmetro (A e B) também serão os pontos de tangência da perspectiva.

c) Traçar as duas arestas, obedecendo ao ângulo α e ao coeficiente K.

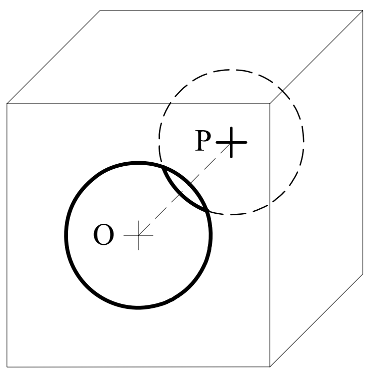
d) Traçar um segmento, paralelo ao utilizado no traçado do diâmetro inclinado do ângulo β, passando pelos pontos externos das arestas (pontos C e D)

e) Desenhar a circunferência ou arco no plano posterior (com centro no ponto P). A circunferência da face posterior se limitará a uma semi-circunferência, pois as arestas ocultarão metade dela.

O restante do objeto (neste exemplo, o cubo), em profundidade, será desenhado apenas após a construção do detalhe circular, a fim de não atrapalhar seu traçado.



Furos merecem atenção especial, pois, conforme a relação entre o ângulo α e a espessura reduzida e a espessura reduzida pelo coeficiente K, uma parte do contorno da face posterior do furo pode ser visível frontalmente e apenas esta parte deverá ser desenhada.



⇒ **EXERCÍCIO 6.3**

ÍNDICE

CAPÍTULO 1: GEOMETRIA COTADA

1.2. Graduação de Retas

Exercício 1.1: Dados dois pontos A e B, graduar a reta AB pelo método gráfico e determinar o intervalo da mesma: (Resposta: $i \cong 0{,}52\ m$)

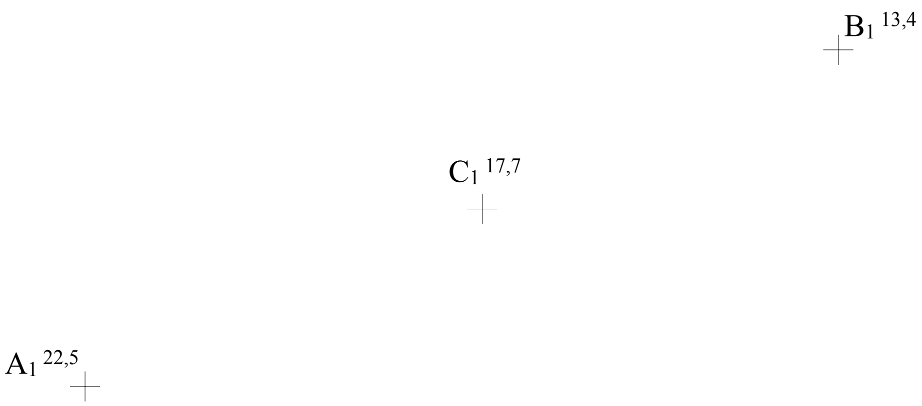
Escala: 1 : 25 **Unidade:** metro

Exercício 1.2: Dados três pontos A, B e C, pede-se:

a) O ponto C pertence à reta AB? (Resposta: $C \in AB$)

b) Determinar graficamente o ponto $D_1^{19,3}$, pertencente à reta CD:

Escala: 1 : 100 **Unidade:** metro



1.3. Concorrência entre Retas

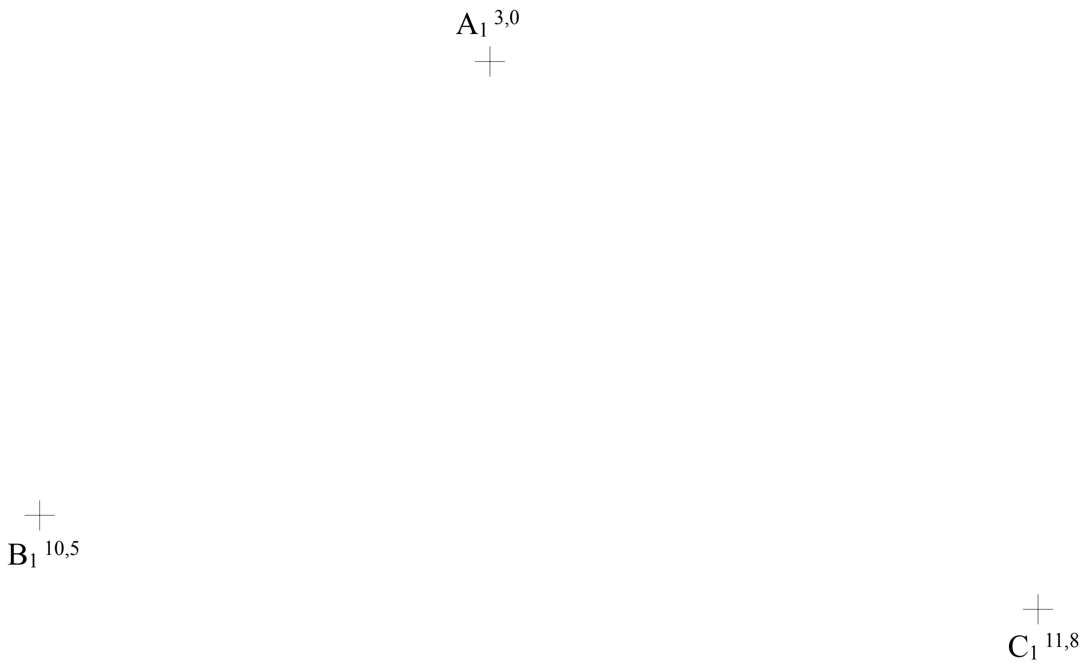
Exercício 1.3: Dados os quatro pontos abaixo (M, N, O, P), verificar graficamente se há concorrência entre as retas MN e OP: (Resposta: MN e OP não são concorrentes entre si)

Escala: 1 : 100 **Unidade:** metro

1.6. Reta de Maior Declive do Plano

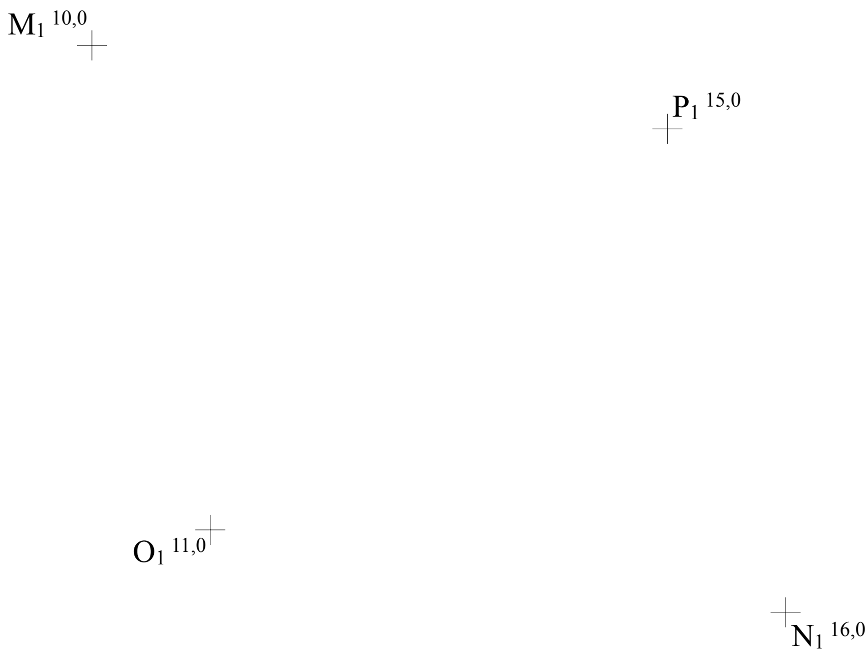
Exercício 1.4: Traçar a reta de maior declive do plano α, formado pelos pontos A, B e C:

Escala: 1 : 100 **Unidade:** metro



Exercício 1.5: Traçar a reta de maior declive do plano α, formado pelas retas MN e OP:

Escala: 1 : 50 **Unidade:** metro

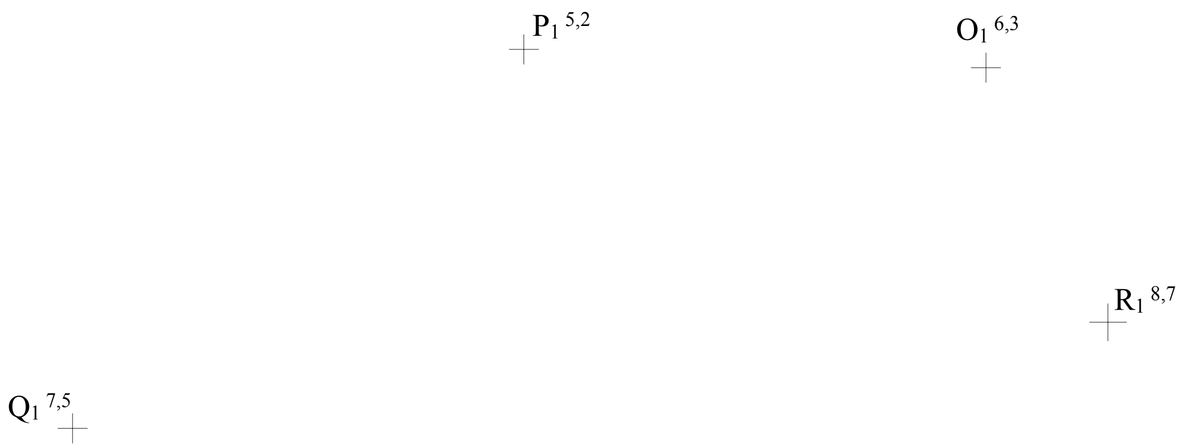


1.7. Pontos e Retas Contidos no Plano

Exercício 1.6: O ponto O pertence ao plano α definido pelos pontos P, Q e R?

(Resposta: $O \in \alpha$)

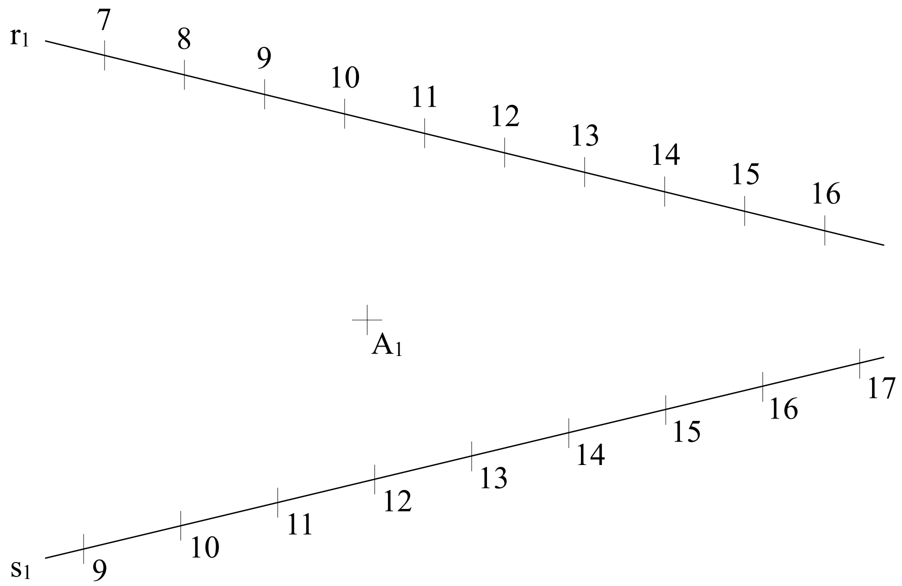
Escala: 1 : 100 **Unidade:** metro



Exercício 1.7: O ponto A pertence ao plano definido pelas retas r e s. Qual a cota deste ponto?

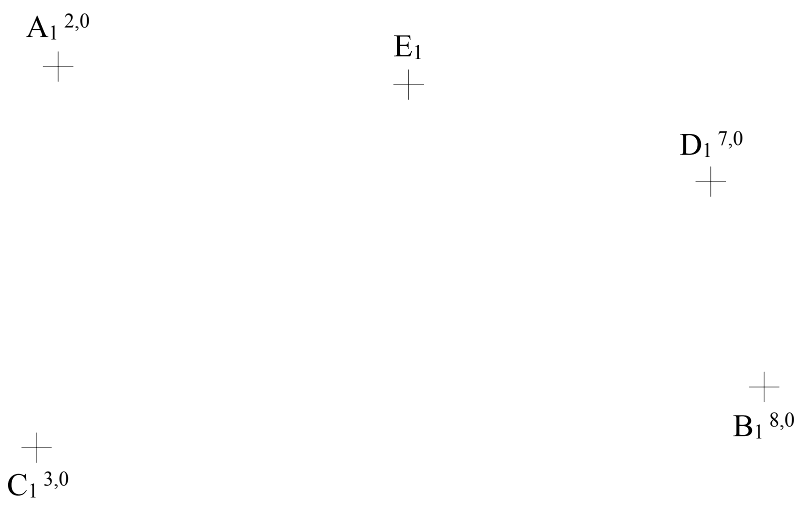
(Resposta: $A_1^{11,2}$)

Escala: 1 : 50 **Unidade:** metro



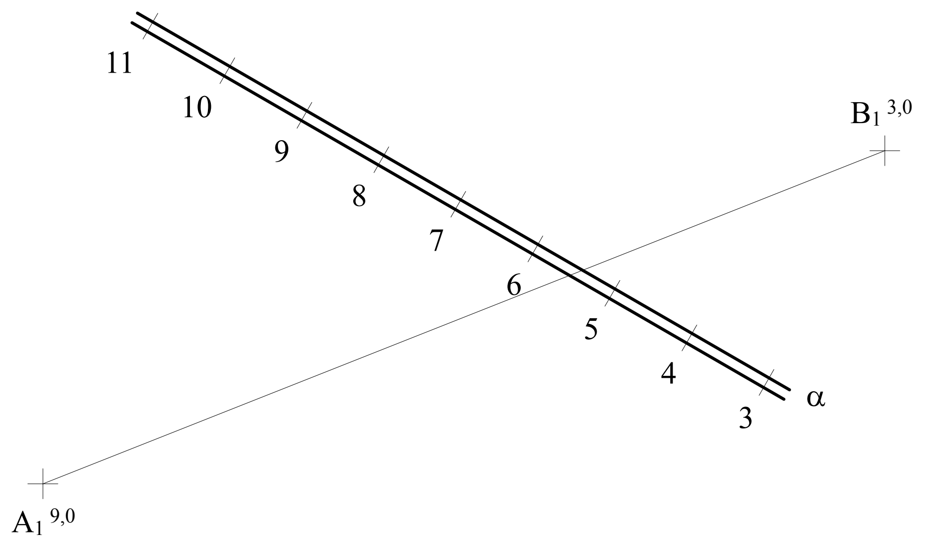
Exercício 1.8: O ponto E pertence ao plano definido pelas retas AB e CD. Qual a cota deste ponto? (Resposta: $E_1^{4,5}$)

Escala: 1 : 100 **Unidade:** metro



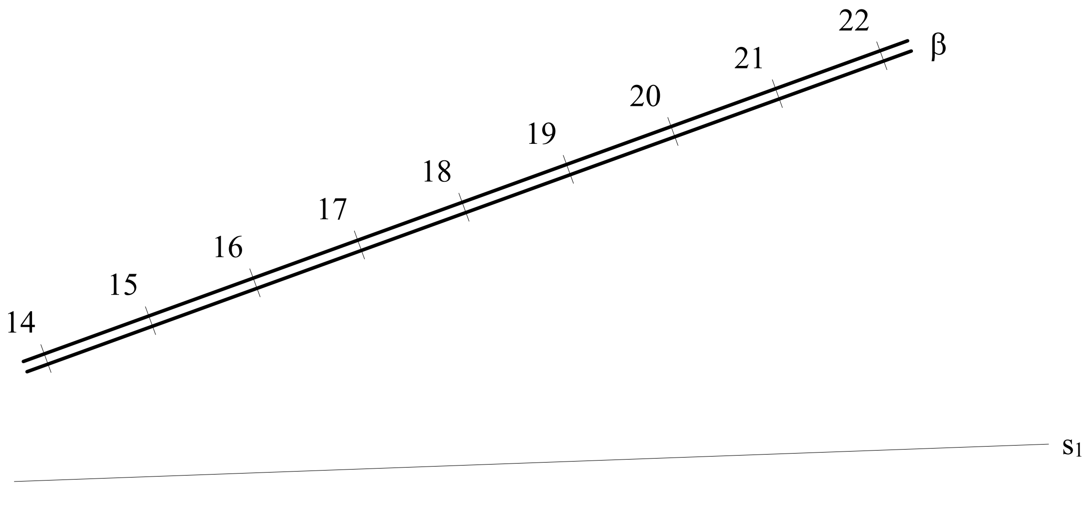
Exercício 1.9: A reta AB pertence ao plano α? (Resposta: $AB \notin \alpha$)

Escala: 1 : 100 **Unidade:** metro



Exercício 1.10: Gradue a reta s, pertencente ao plano β:

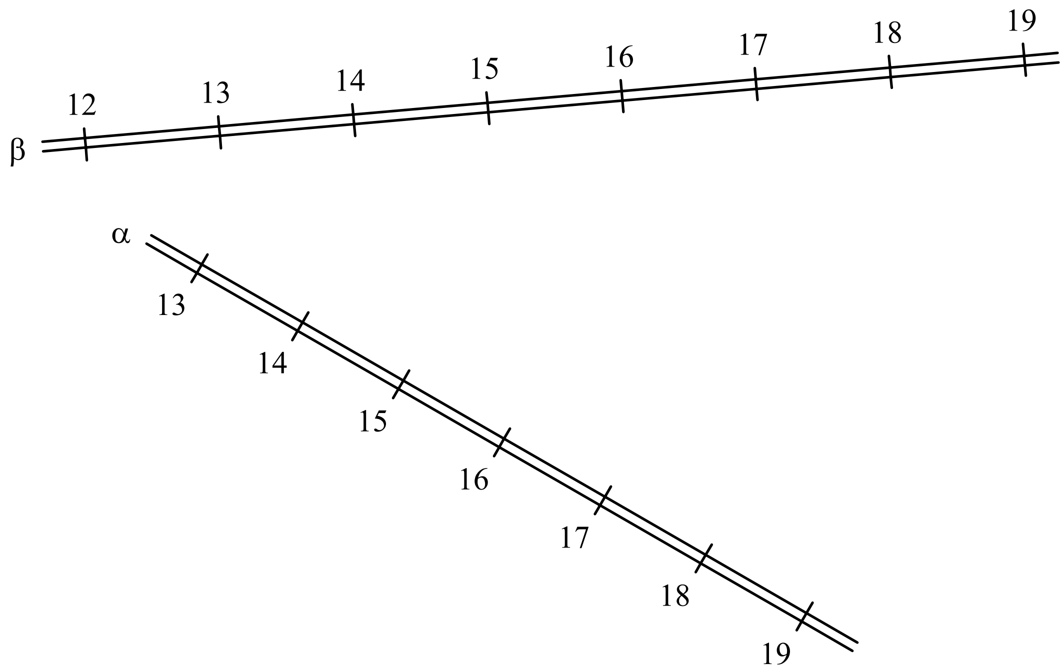
Escala: 1 : 100 **Unidade:** metro



1.9. Interseção entre Planos

Exercício 1.11: Dados dois planos α e β, definidos por suas respectivas retas de maior declive, pede-se a interseção entre eles:

Escala: 1 : 100 **Unidade:** metro



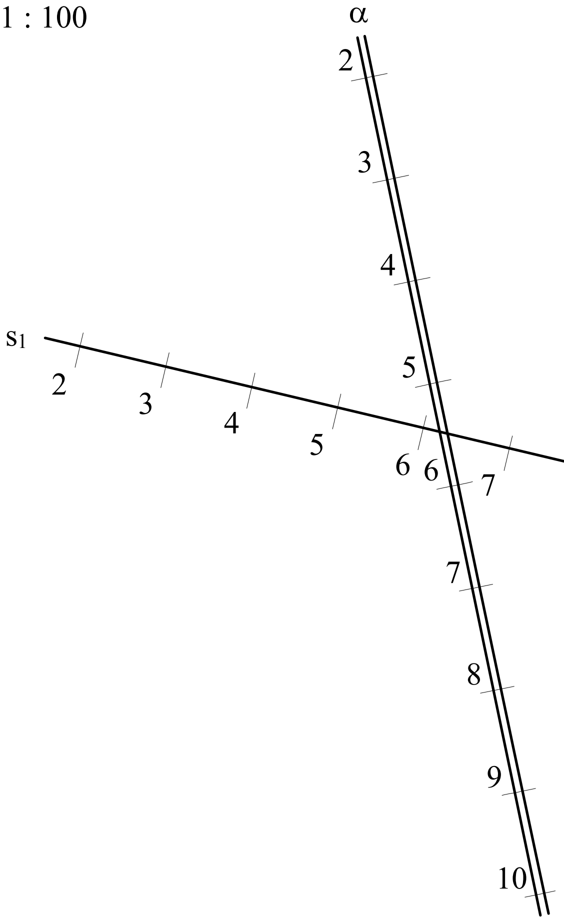
Exercício 1.12: Dados dois planos α e β, definidos pelas retas de maior declive AB e CD, respectivamente, pede-se a interseção entre α e β:

Escala: 1 : 100 **Unidade:** metro

1.10. Interseção entre Reta e Plano

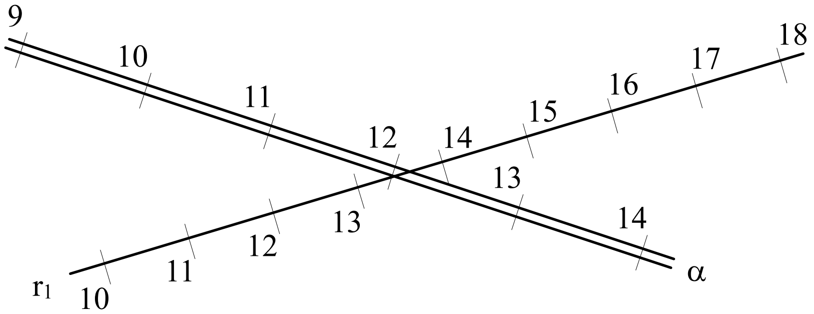
Exercício 1.13: Dados o plano α e a reta s, determinar o ponto de interseção entre ambos:

Escala: 1 : 100 **Unidade:** metro



Exercício 1.14: Dados o plano α e a reta r, determinar o ponto de interseção entre ambos:

Escala: 1 : 100 **Unidade:** metro



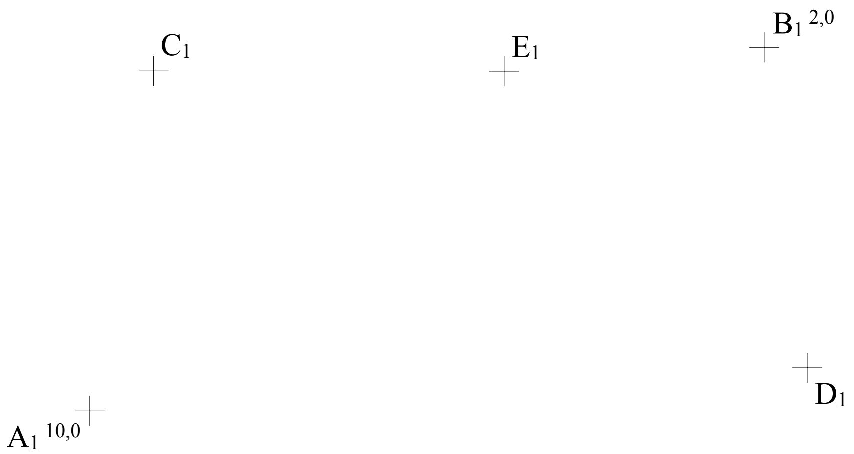
Exercício 1.15: São dados cinco pontos no espaço: A,B,C,D e E. A reta AB é a reta de maior declive do plano α e a reta CD pertence a este plano. Pede-se:

a) Graduar CD e determinar as cotas de C e D: (Resposta: $C_1^{7,7}$ e $D_1^{3,2}$)

b) Determinar a cota do ponto E, sabendo que $E \in \alpha$: (Resposta: $E_1^{4,5}$)

c) Traçar as duas retas que pertencem a α, passam por E e têm intervalo i = 2 m:

Escala: 1 : 50 **Unidade:** metro

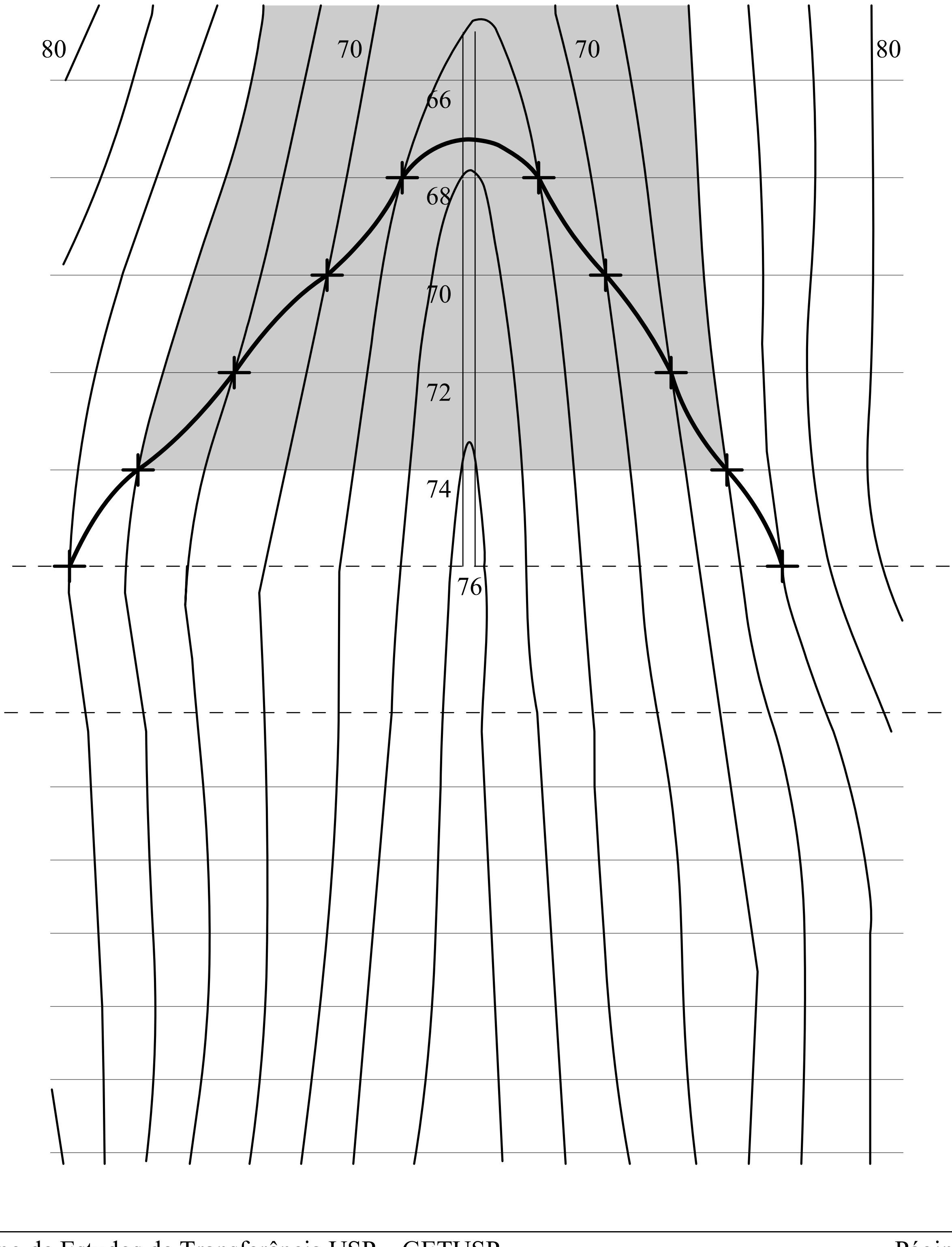


CAPÍTULO 2: SUPERFÍCIES TOPOGRÁFICAS

2.4. Superfícies Topográficas

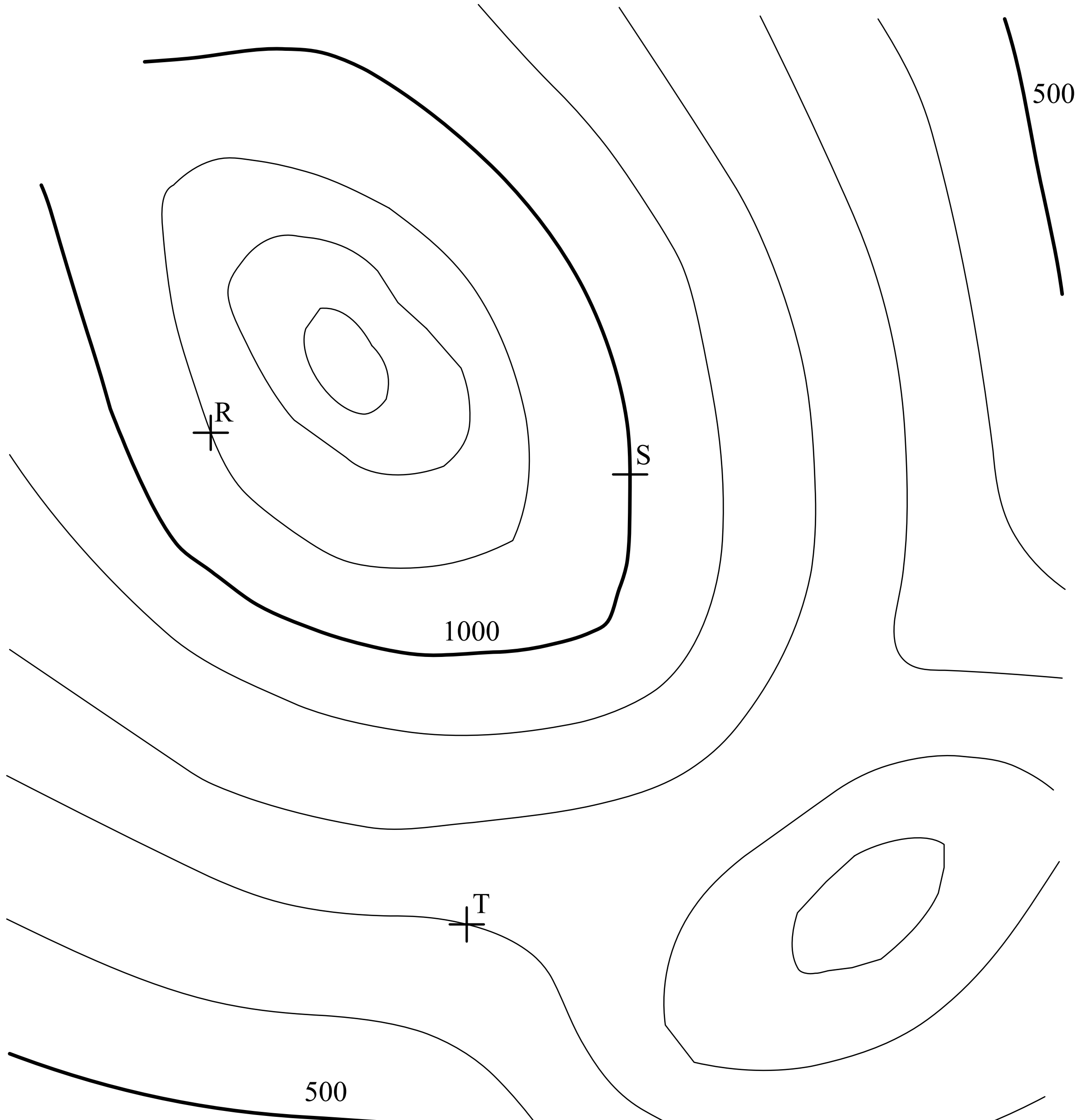
Exercício 2.1: Projetar sobre a mesma barragem de terra do Exemplo Resolvido (crista horizontal representada em tracejado, na cota de 76 m, com largura de 12 m e bordos laterais retos), a linha de encontro da saia de aterro de jusante com a superfície topográfica e a região inundável a jusante para o nível de água na cota 72 m, obedecida a declividade de jusante:

Escala: 1 : 500 $p_{jusante} = 1 / 3$ **Unidade:** metro



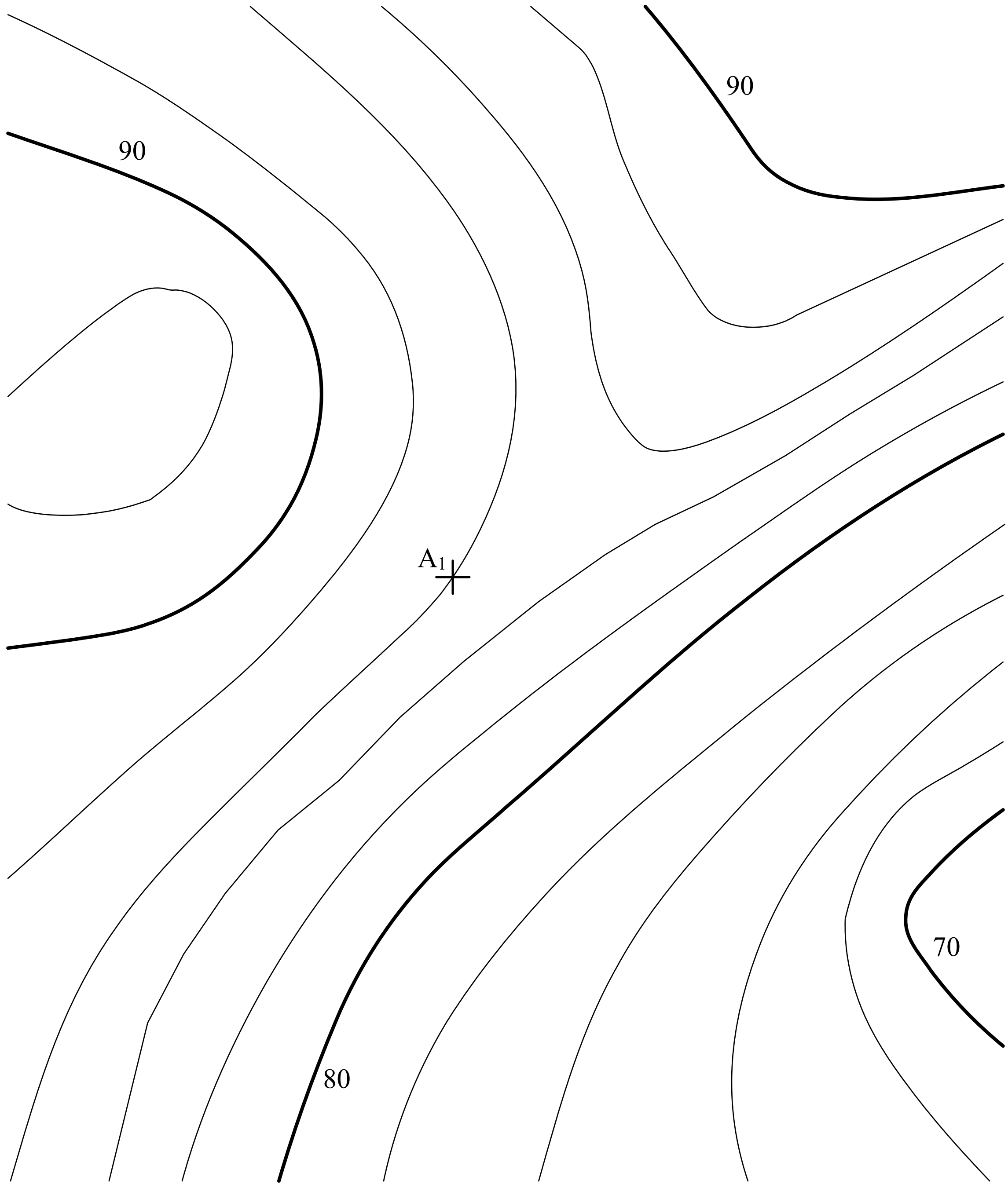
Exercício 2.2: Determinar a linha de afloramento da capa de uma jazida mineral plana, definida pelos pontos R, S e T. No ponto R, houve afloramento; no ponto S, foi feita uma perfuração vertical e a capa foi encontrada a 180 m de profundidade; no ponto T a perfuração atingiu a capa a 200 m de profundidade (Afloramento da capa de uma jazida significa que a camada superficial da jazida encontra-se exposta no referido ponto da superfície):

Escala: 1 : 10.000 **Unidade:** metro



Exercício 2.3: Uma lâmpada é instalada a 10 metros acima do chão no ponto A, à beira de uma lagoa. Sabe-se que a lâmpada ilumina um cone de luz, que forma 45º com a vertical e tem como vértice o ponto A. Determinar a superfície da água da lagoa com nível d'água de 83 m e também quais as áreas, do terreno e da lagoa, iluminadas pela lâmpada:

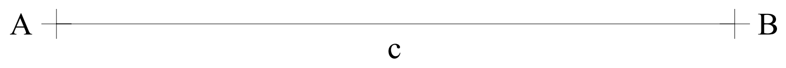
Escala: 1 : 200 **Unidade:** metro



CAPÍTULO 3: DESENHO GEOMÉTRICO

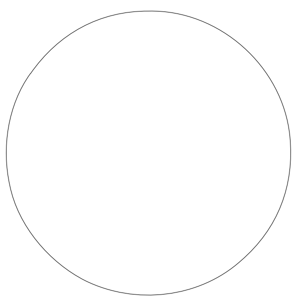
3.2. Ângulos Principais

Exercício 3.1: Traçar um triângulo de 30º a partir de seu lado c, sabendo-se que $\hat{A} = 30^{o}$ e $\hat{B} = 45^{o}$:



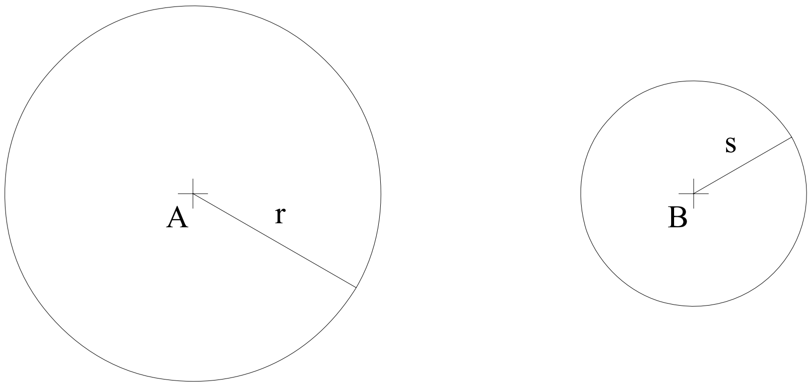
3.3. Circunferência

Exercício 3.2: Traçar uma circunferência concêntrica à circunferência dada, com raio igual ao dobro do raio original:



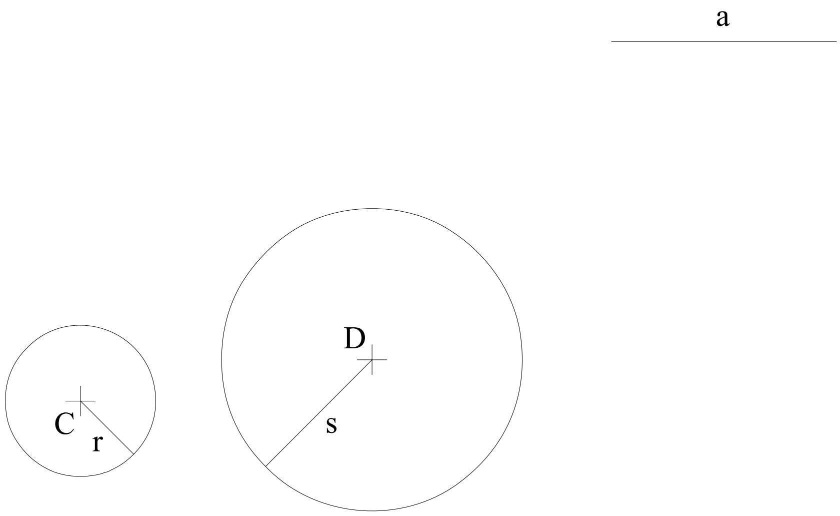
3.4. Retas Tangentes

Exercício 3.3: Dadas as circunferências (A , r) e (B , s), determine o(s) ponto(s) que "enxergam" simultaneamente (A , r) sob um ângulo de 60º e (B , s) sob 30º (Dica: estes pontos serão a interseção entre os lugares geométricos individuais de cada circunferência):



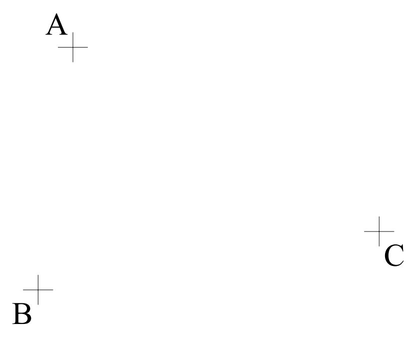
3.5. Circunferências Tangentes

Exercício 3.4: Determinar a circunferência de raio a, tal que (C , r) seja sua tangente interna e (D , s) seja sua tangente externa:

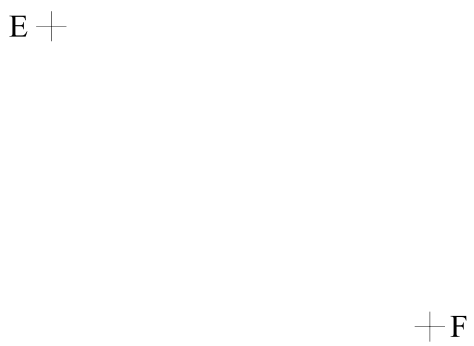


3.6. Mediatriz

Exercício 3.5: Traçar a circunferência que passa pelos pontos A, B e C:



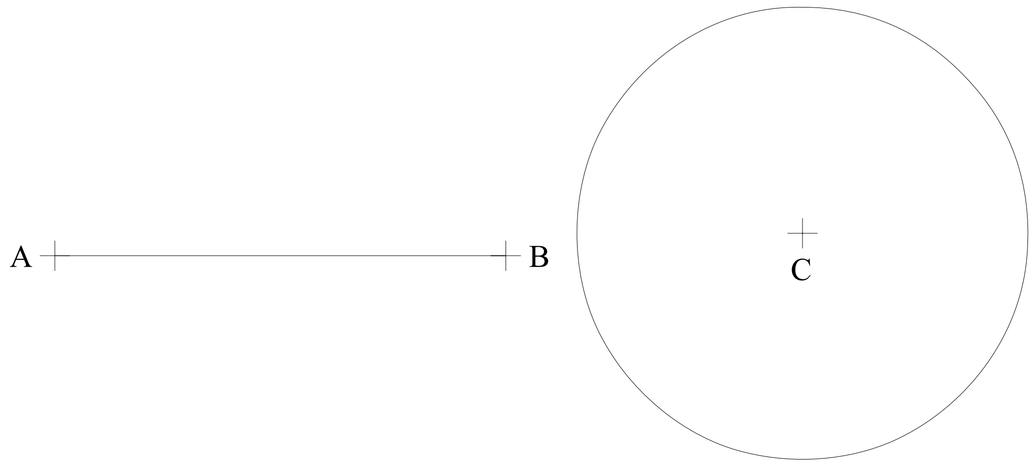
Exercício 3.6: Os pontos E e F são pontos médios de dois lados opostos do quadrado ABCD (respectivamente dos lados AB e CD). Desenhar o quadrado que contém estes pontos:



3.7. Arco Capaz

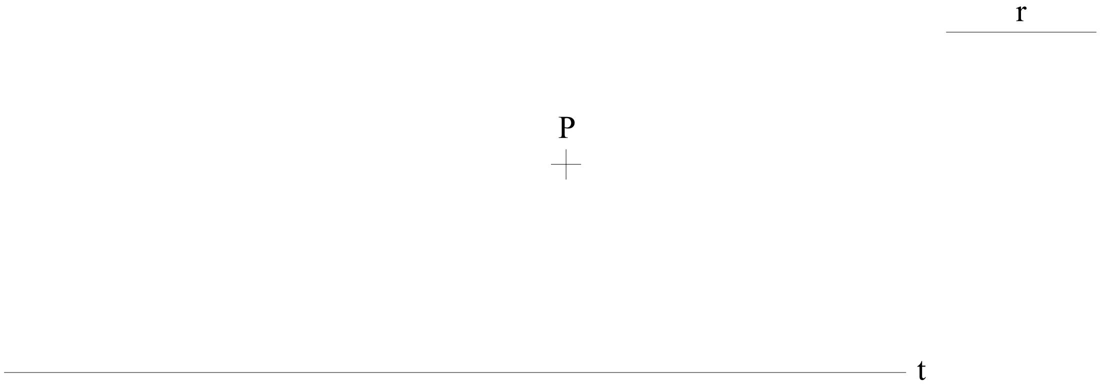
Exercício 3.7: Determinar o par de arcos capazes que "enxergam" o segmento MN sob o ângulo de 30º:

Exercício 3.8: Determinar os pontos que "enxergam" o segmento AB sob o ângulo de 60º e a circunferência sob 90º:



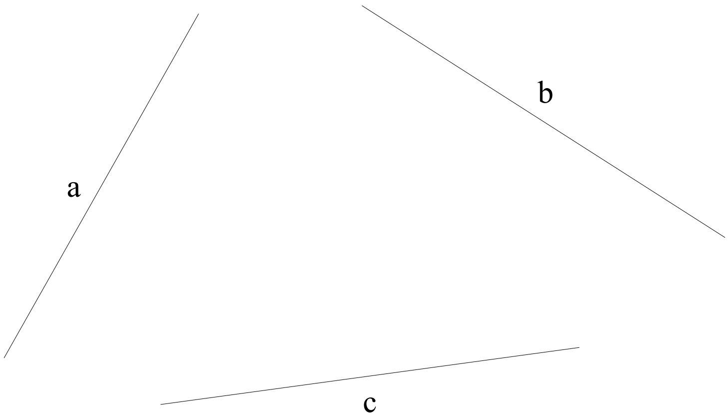
3.8. Retas Paralelas

Exercício 3.9: Desenhar a circunferência (O , r) que passa pelo ponto P e é tangente à reta t:

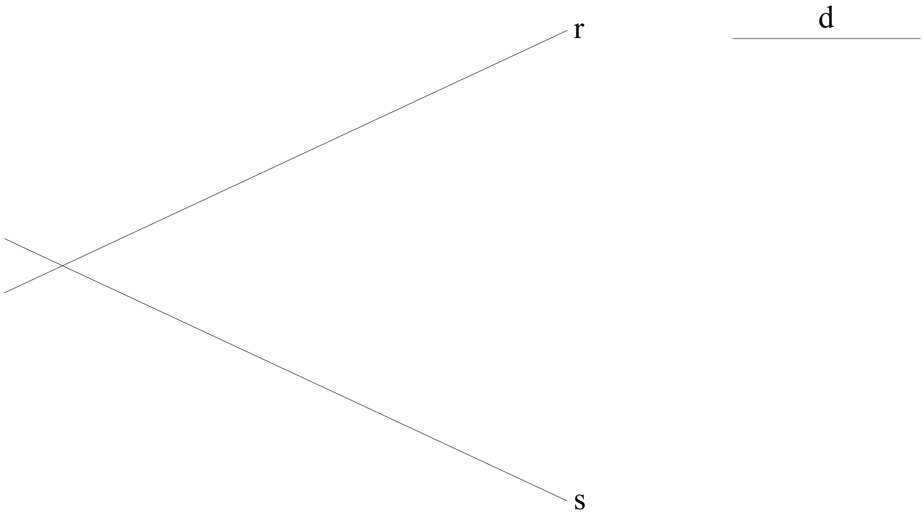


3.9. Bissetriz

Exercício 3.10: Traçar uma circunferência tangente às retas r, s e t.

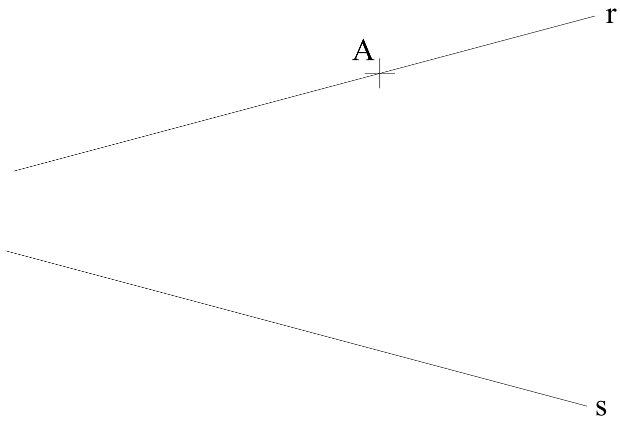


Exercício 3.11: Dadas duas retas r e s e a distância d, traçar uma circunferência de raio d e tangente à r e s:

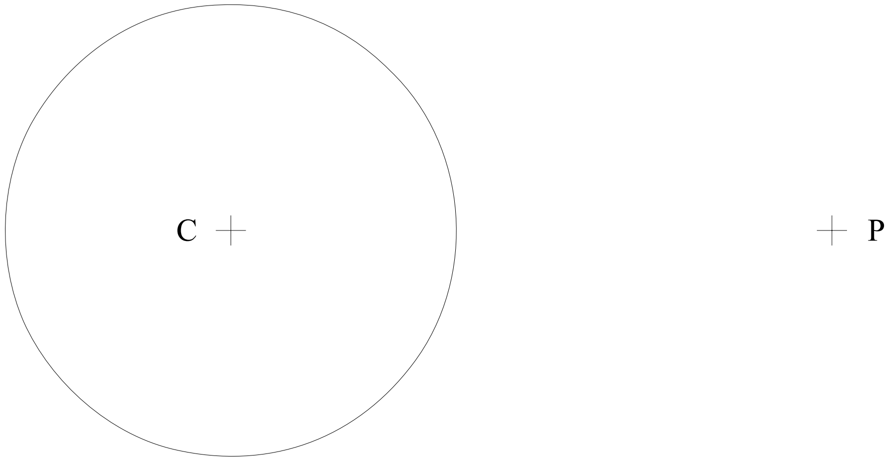


3.10. Resolução de Problemas

Exercício 3.12: Dadas duas retas r e s e um ponto $A \in r$, determinar a circunferência tangente à r e s, sendo A o ponto de tangência na reta r:



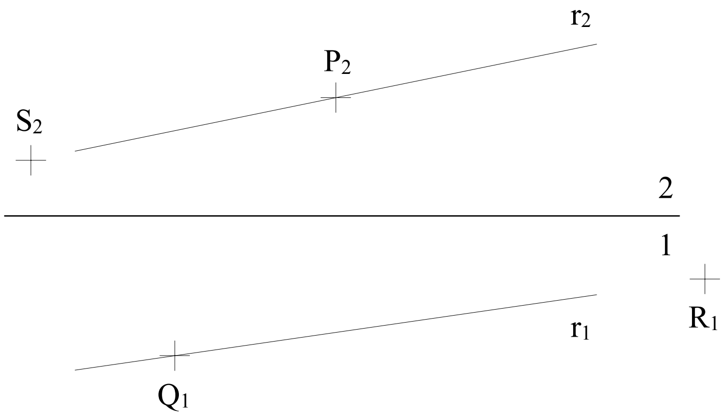
Exercício 3.13: Determinar as duas únicas retas tangentes à circunferência (C , r) que passam pelo ponto P:



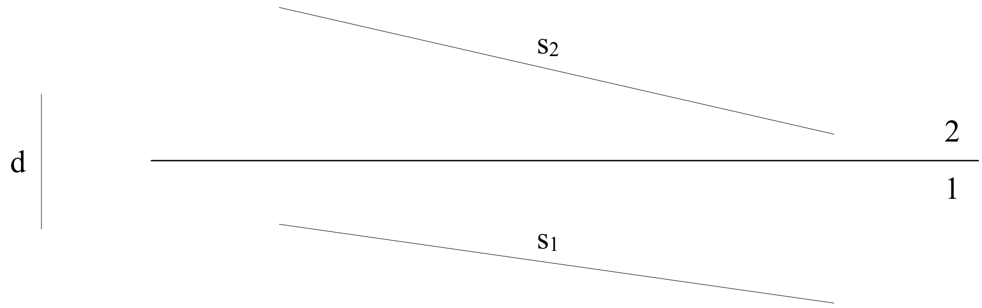
CAPÍTULO 4: GEOMETRIA DESCRITIVA

4.3. Retas

Exercício 4.1: Dados uma reta r e quatro pontos ponto $(P, Q, R, S) \in r$, determinar as projeções que faltam em π_1 ou π_2:

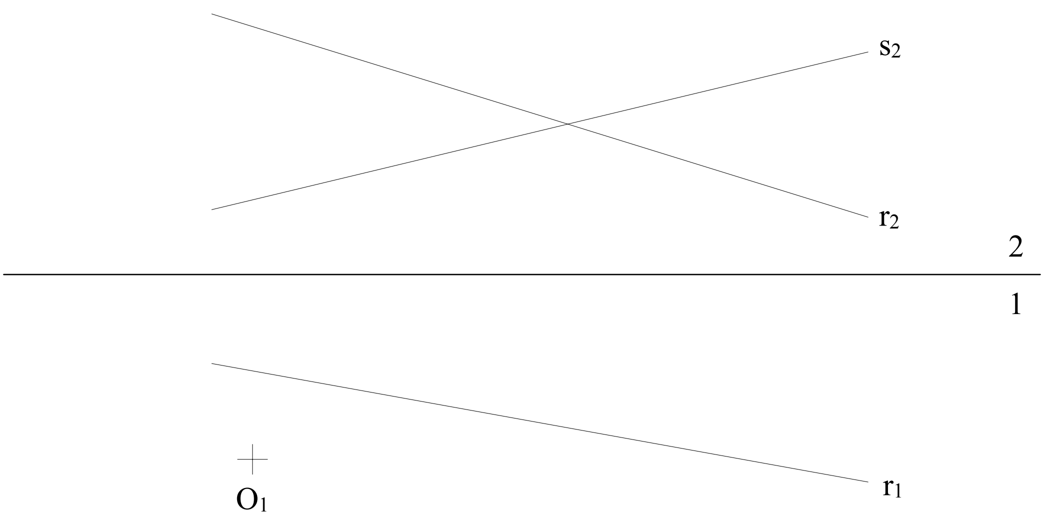


Exercício 4.2: Determinar as projeções dos pontos A (de afastamento d) e B (de cota $d/2$), pertencentes à reta s:

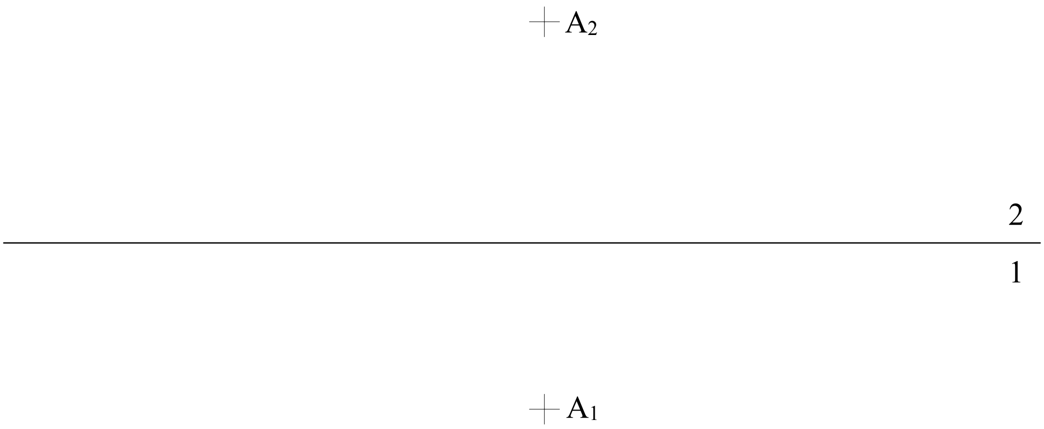


Exercício 4.3: Sabendo-se que os pontos A e B são os traços da reta r, em qual diedro estão as projeções r_1 e r_2?

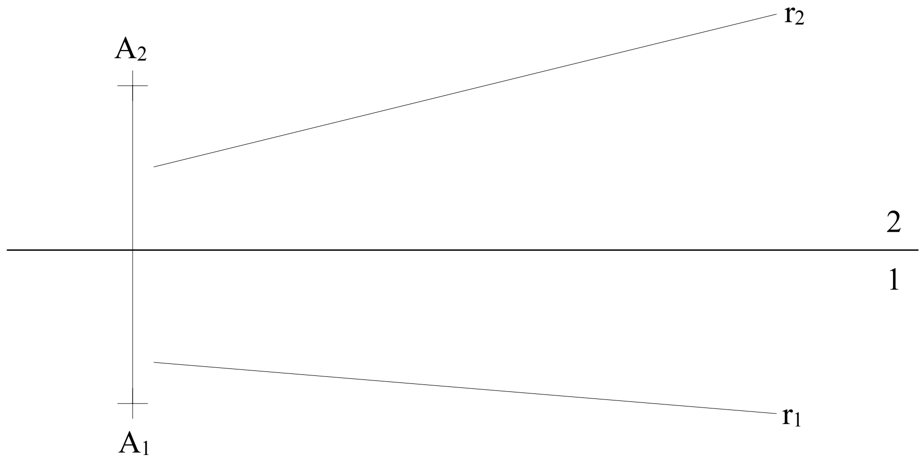
Exercício 4.4: Completar as projeções faltantes, sabendo-se que as retas r e s são concorrentes entre si e o ponto $O \in s$:



Exercício 4.5: Desenhar as retas paralelas a π_2, que contêm o ponto A e formam ângulo de 60º em relação a π_1:

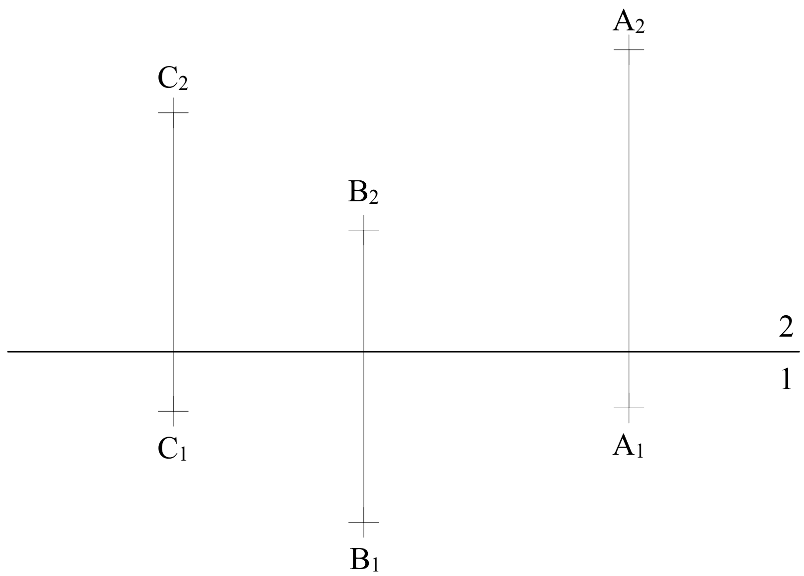


Exercício 4.6: Traçar a reta t paralela a π_1, que passa por A e se apóia na reta r:

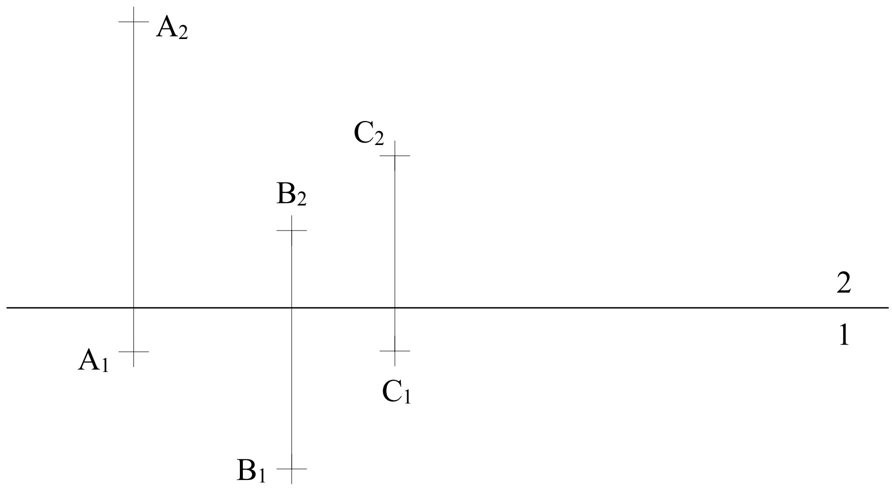


4.4. Planos

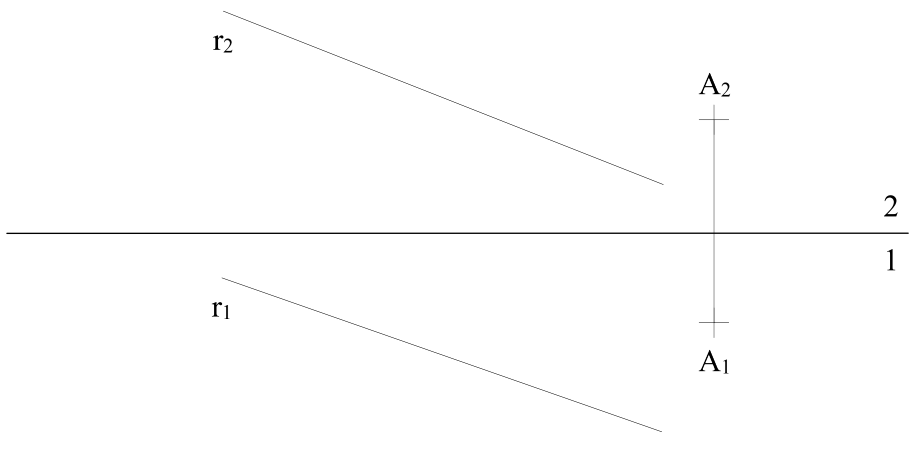
Exercício 4.7: Determinar os traços do plano α definido pelos pontos A, B e C:



Exercício 4.8: Determinar os traços do plano α definido pelos pontos A, B e C:

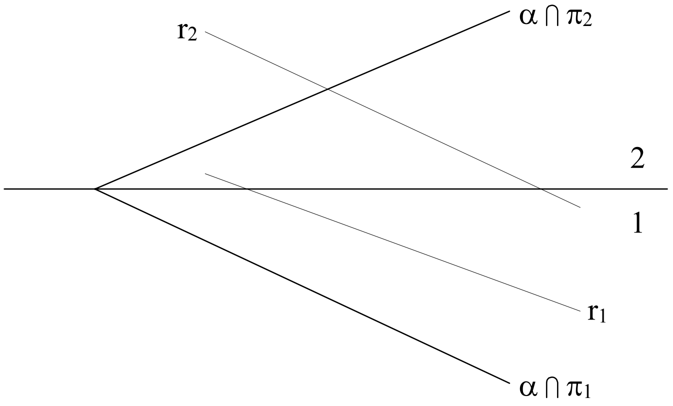


Exercício 4.9: Determinar os traços do plano definido pela reta r e pelo ponto A:

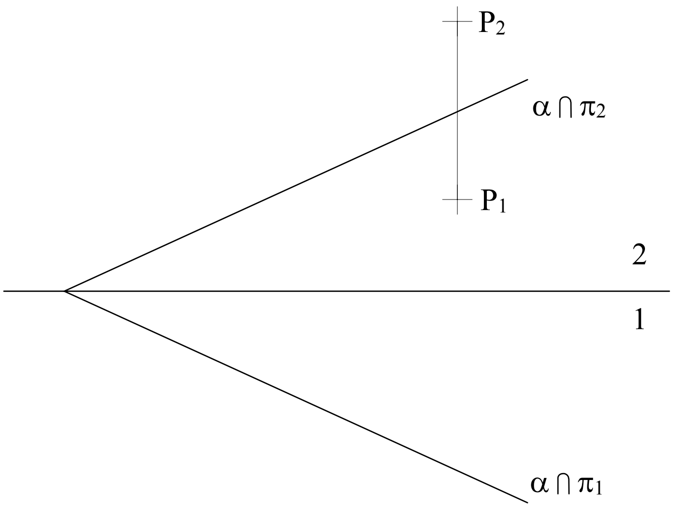


4.5. Pertinência entre Pontos, Retas e Planos

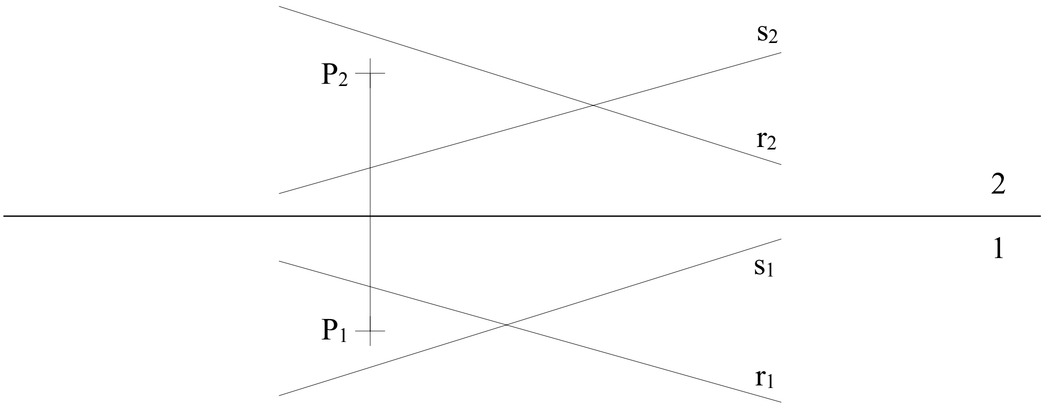
Exercício 4.10: Verificar se a reta r pertence ou não ao plano α: (Resposta: $r \notin \alpha$)



Exercício 4.11: Verificar se o ponto P pertence ao plano α: (Resposta: $P \in \alpha$)

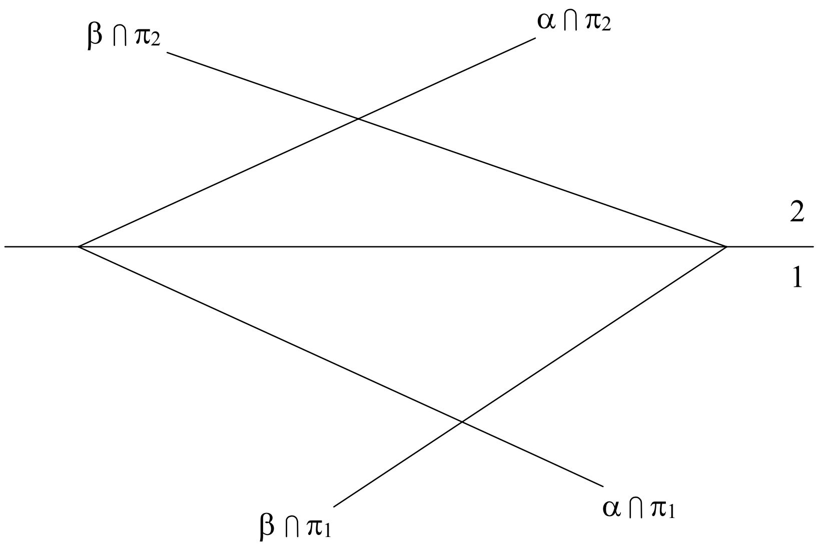


Exercício 4.12: Verificar se o ponto P pertence ou não ao plano β definido pelas retas r e s, concorrentes entre si: (Resposta: $P \notin \beta$)



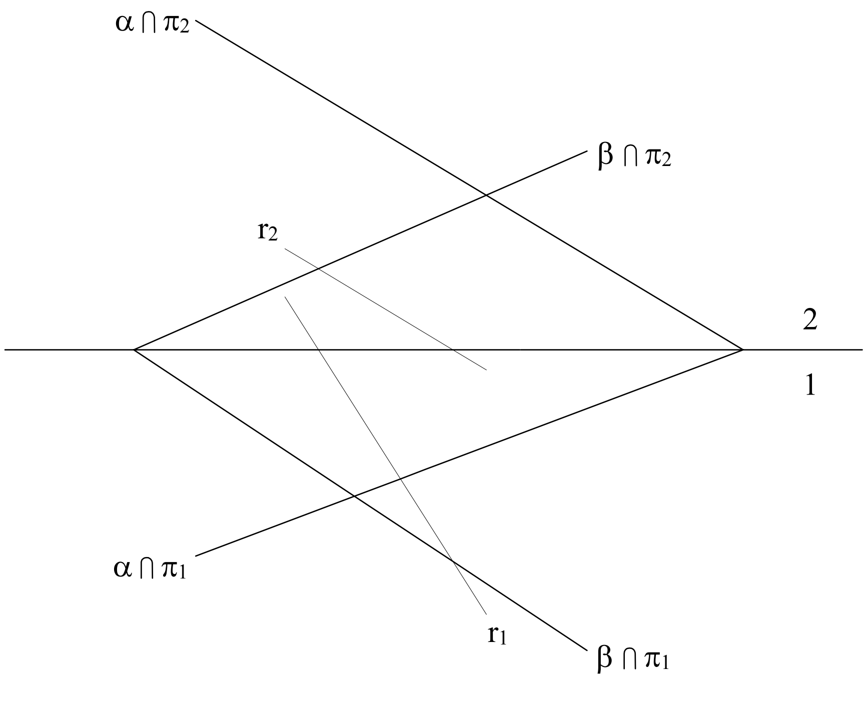
4.6. Interseção entre Planos

Exercício 4.13: Dados dois planos α e β, determine $\alpha \cap \beta$:

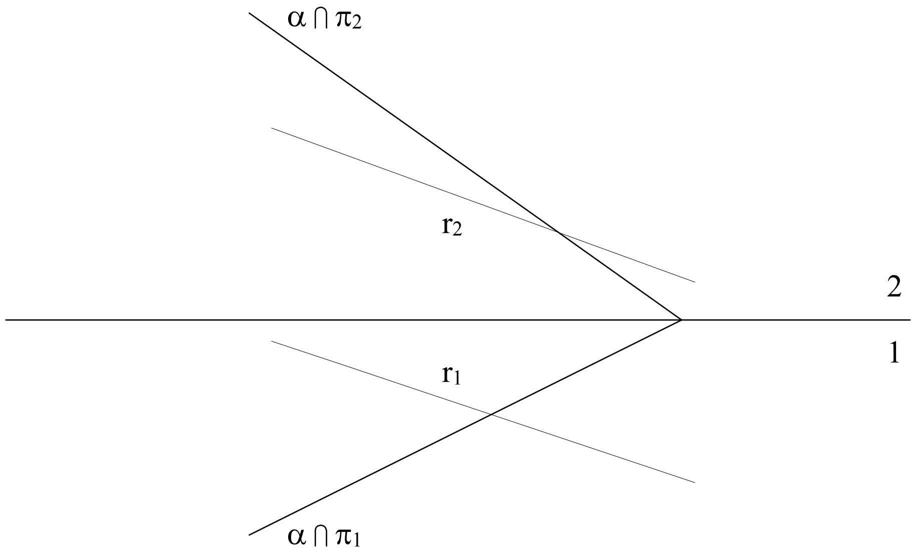


4.7. Interseção entre Reta e Plano

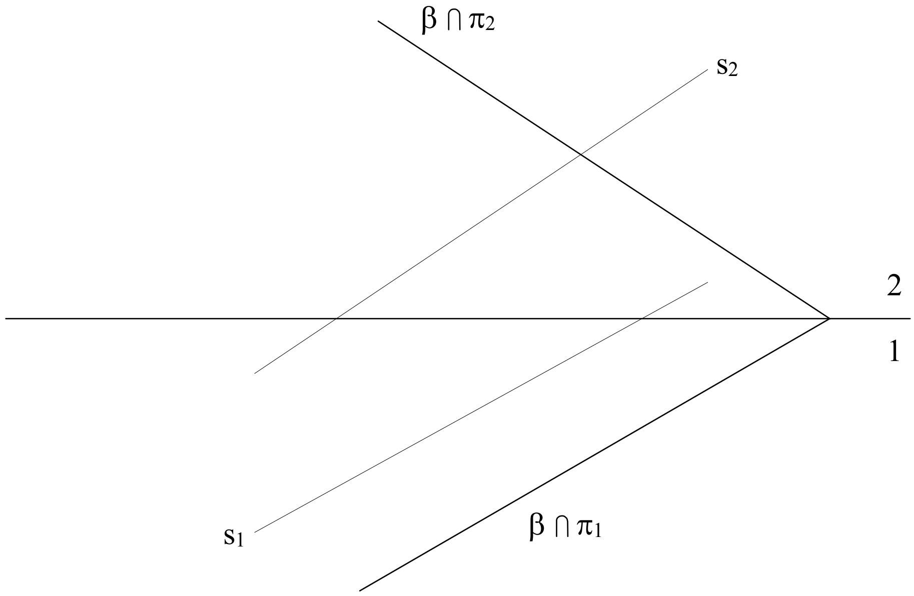
Exercício 4.14: Dados dois planos α e β e uma reta $r \subset \beta$, determine $r \cap \alpha$:



Exercício 4.15: Encontrar a interseção entre a reta r e o plano α:

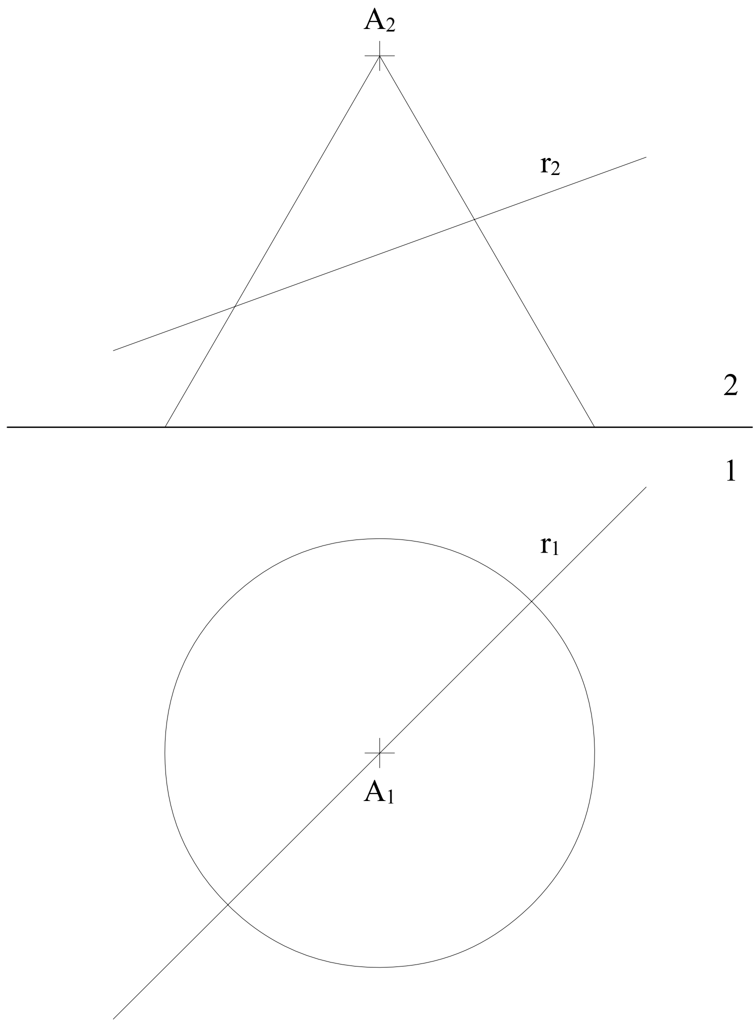


Exercício 4.16: Encontrar a interseção entre a reta s e o plano β:

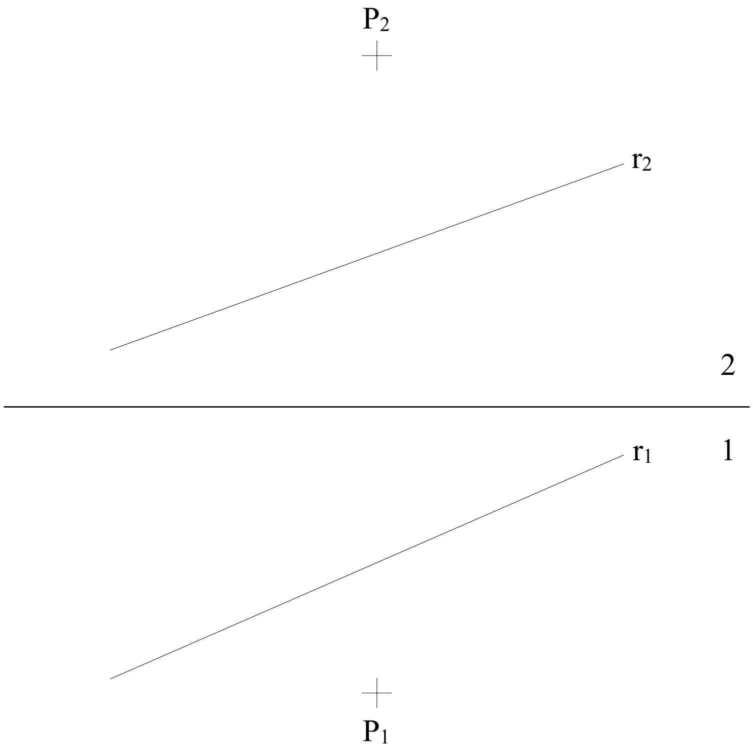


4.9. Método da Rotação

Exercício 4.17: Determinar a interseção entre a reta r e o cone, aplicando o método da rotação:

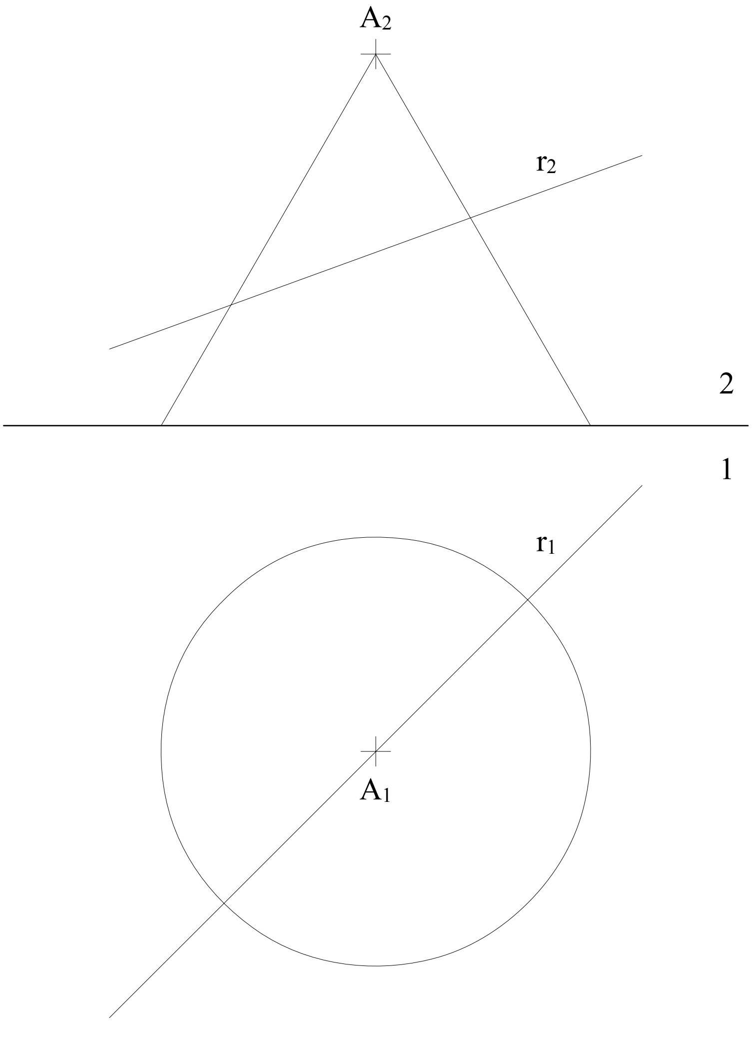


Exercício 4.18: Determinar a distância (distância perpendicular) entre a reta r e o ponto P, aplicando o método da rotação: (Resposta: $d \cong 3{,}2\,\text{cm}$)

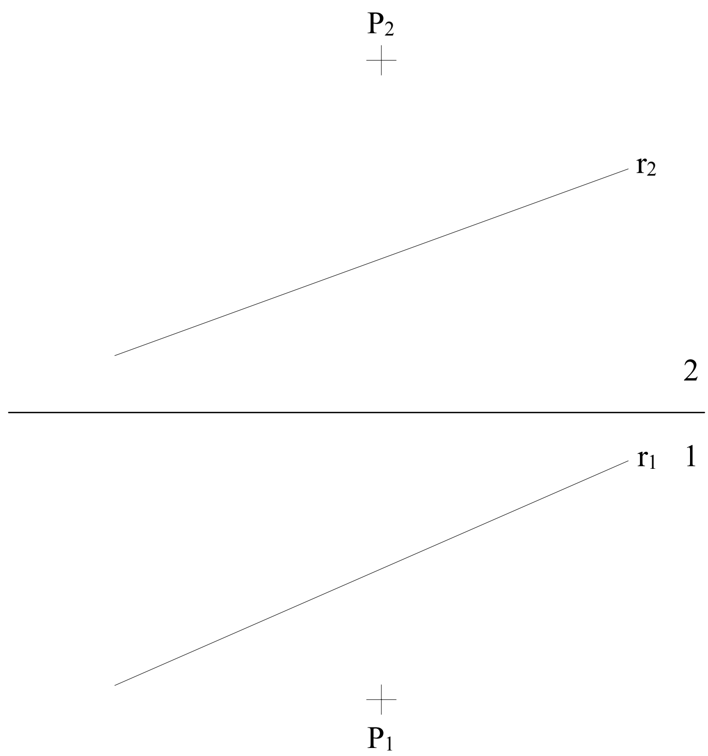


4.10. Método da Mudança de Planos

Exercício 4.19: Determinar a interseção entre a reta r e o cone, usando o método da mudança de planos:



Exercício 4.20: Determinar a distância (distância perpendicular) entre a reta r e o ponto P, aplicando o método da mudança de planos: (Resposta: $d \cong 3{,}2\,\text{cm}$)



CAPÍTULO 5: VISTAS ORTOGRÁFICAS

5.2. Vistas Ortográficas

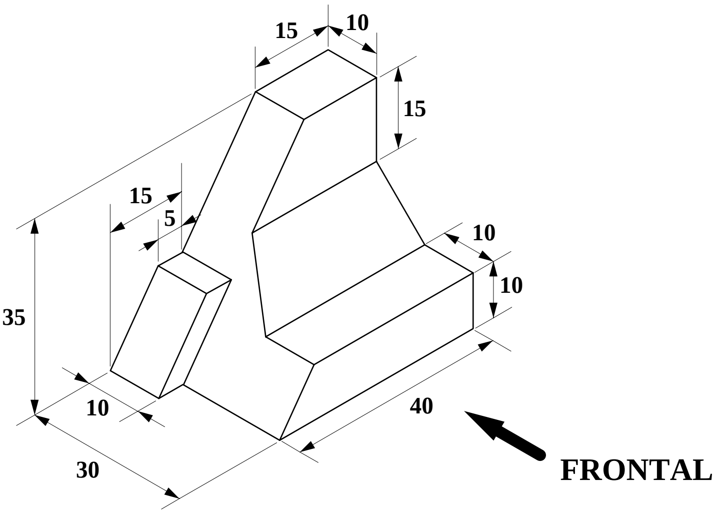
Exercício 5.1: Desenhar as vistas ortográficas pedidas dos objetos conforme as escalas e orientadas pela vista Frontal adotada (Atenção: Todas as dimensões estão fornecidas em mm):

a) Escala: 2 : 1

Frontal

Superior

Lateral Esquerda

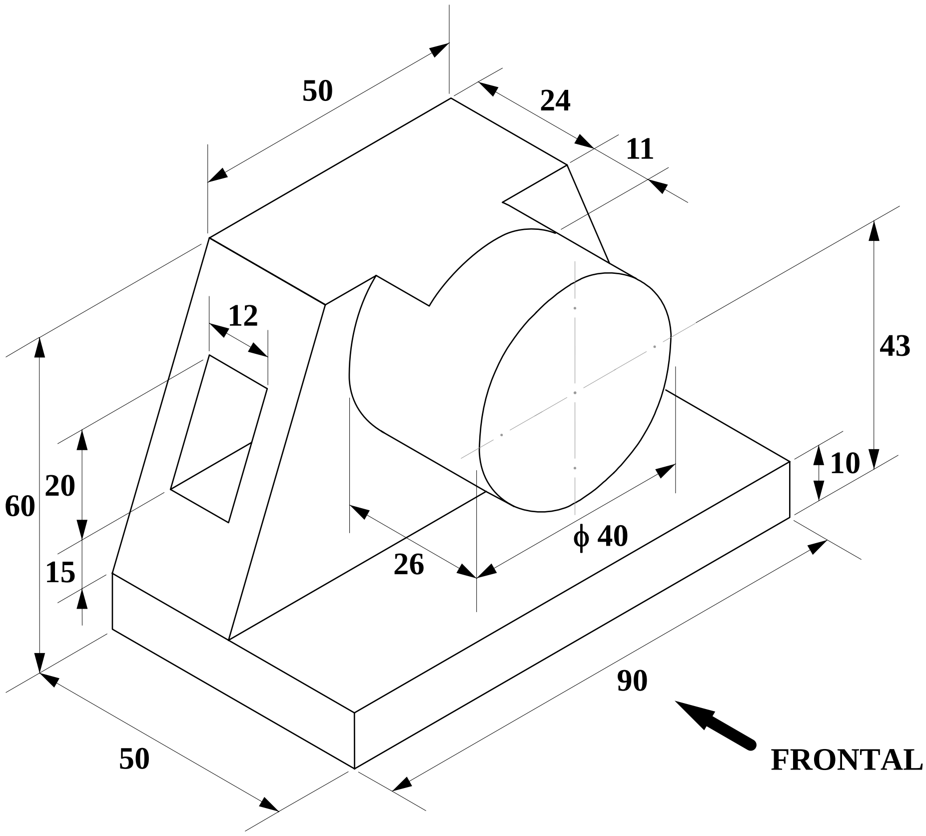


b) Escala: 1 : 1

Frontal

Superior

Lateral Esquerda

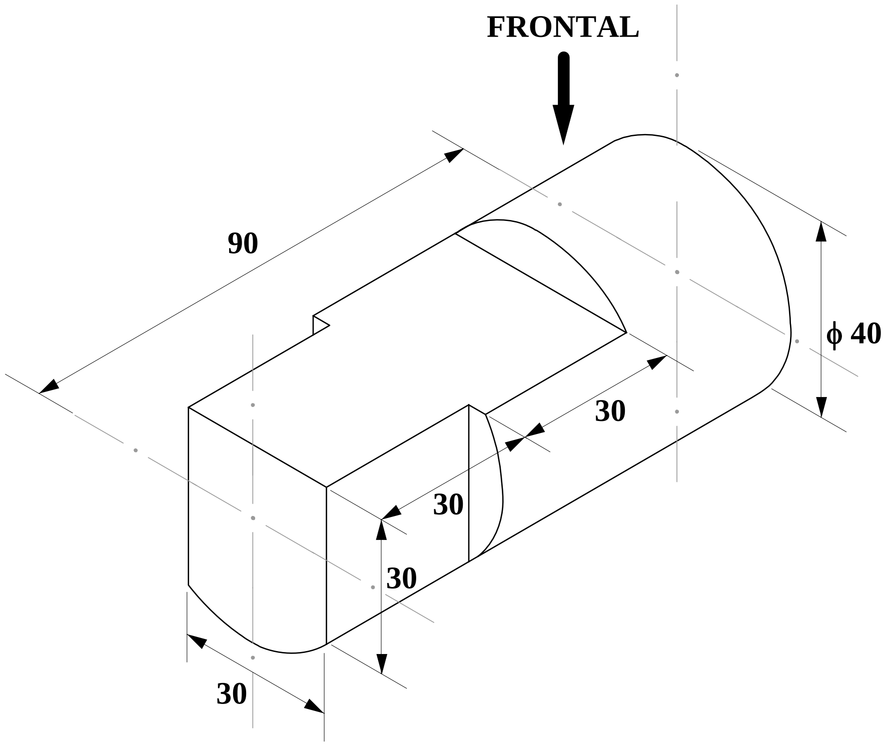


c) Escala: 1 : 1

Frontal

Inferior

Lateral Direita

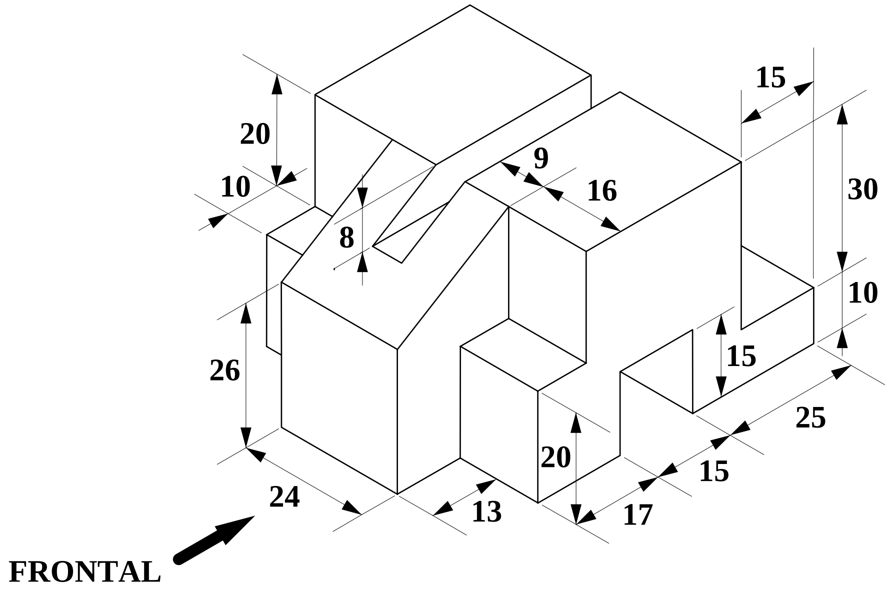


d) Escala: 1 : 1

Frontal

Inferior

Lateral Esquerda

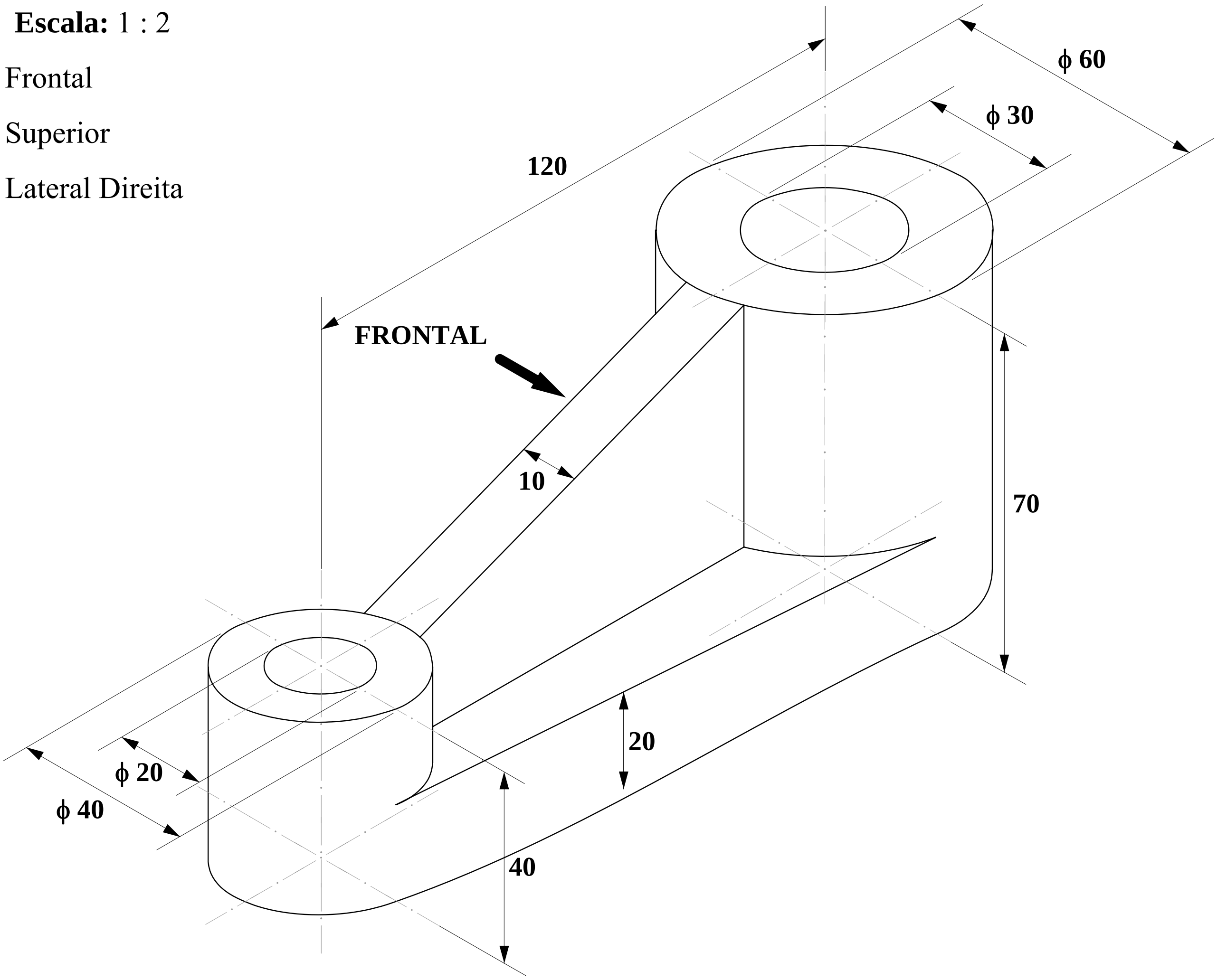


e) Escala: 1 : 2

Frontal

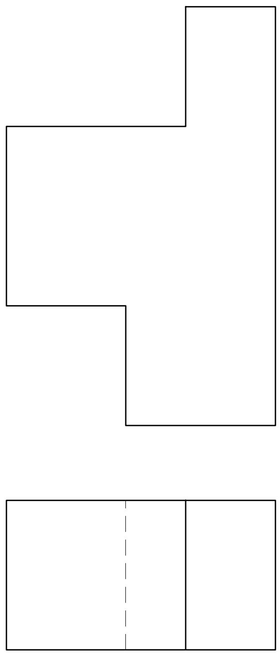
Superior

Lateral Direita

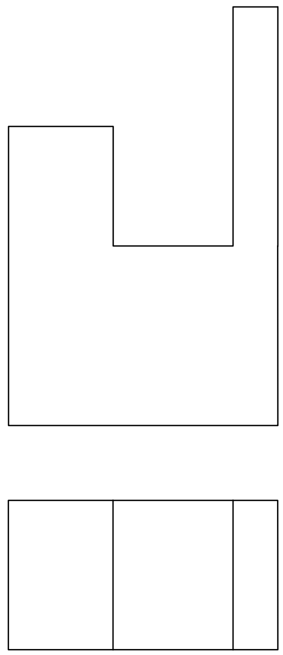


Exercício 5.2: Desenhar a terceira vista que falta, fornecidas apenas as outras duas vistas:

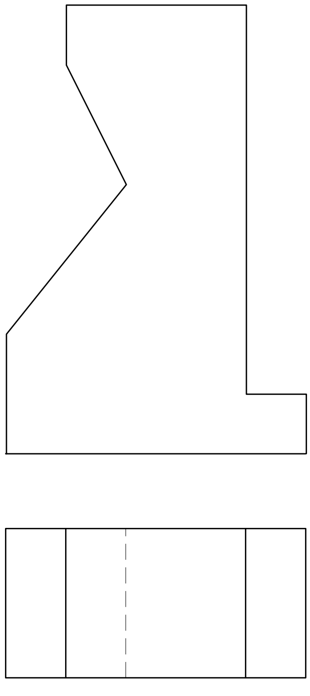
a)



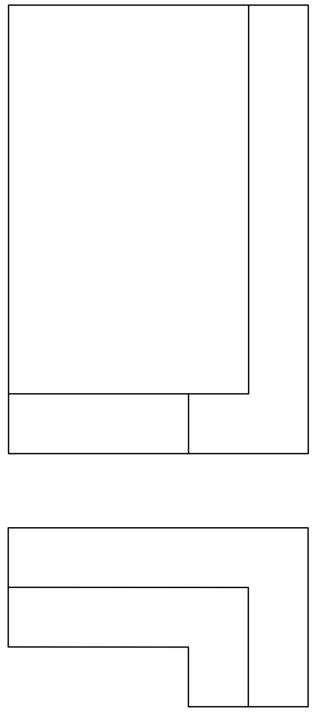
b)



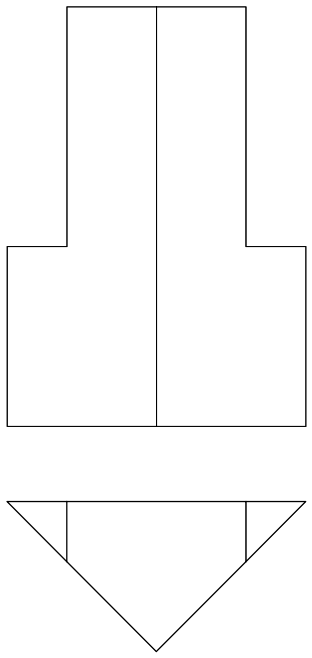
c)



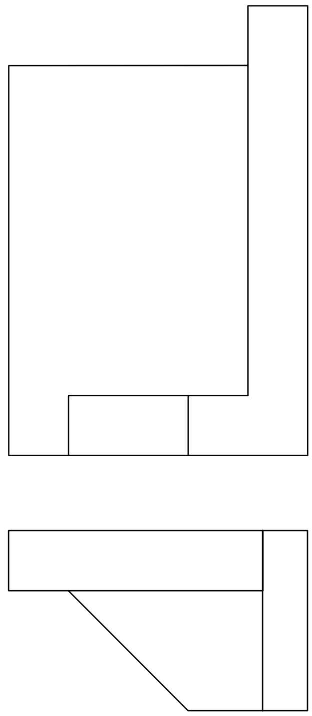
d)



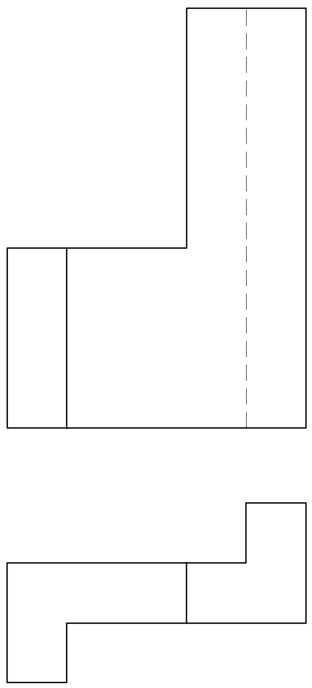
e)



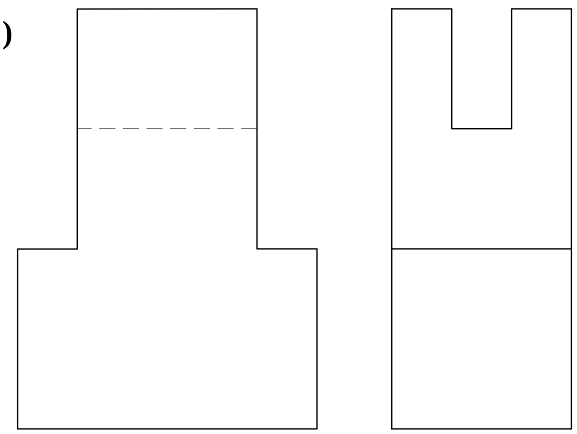
f)



g)



h)

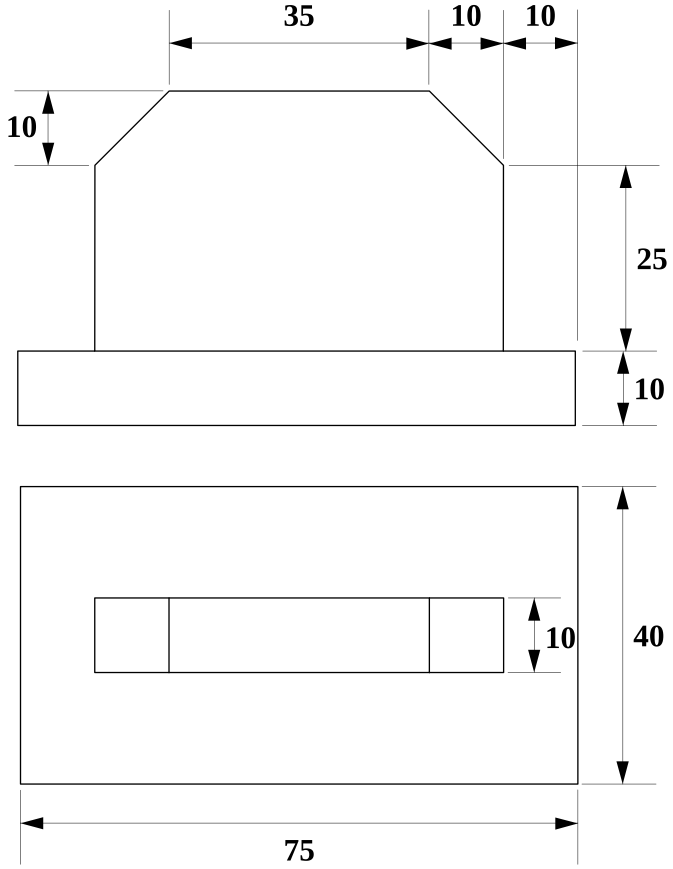


CAPÍTULO 6: PERSPECTIVAS

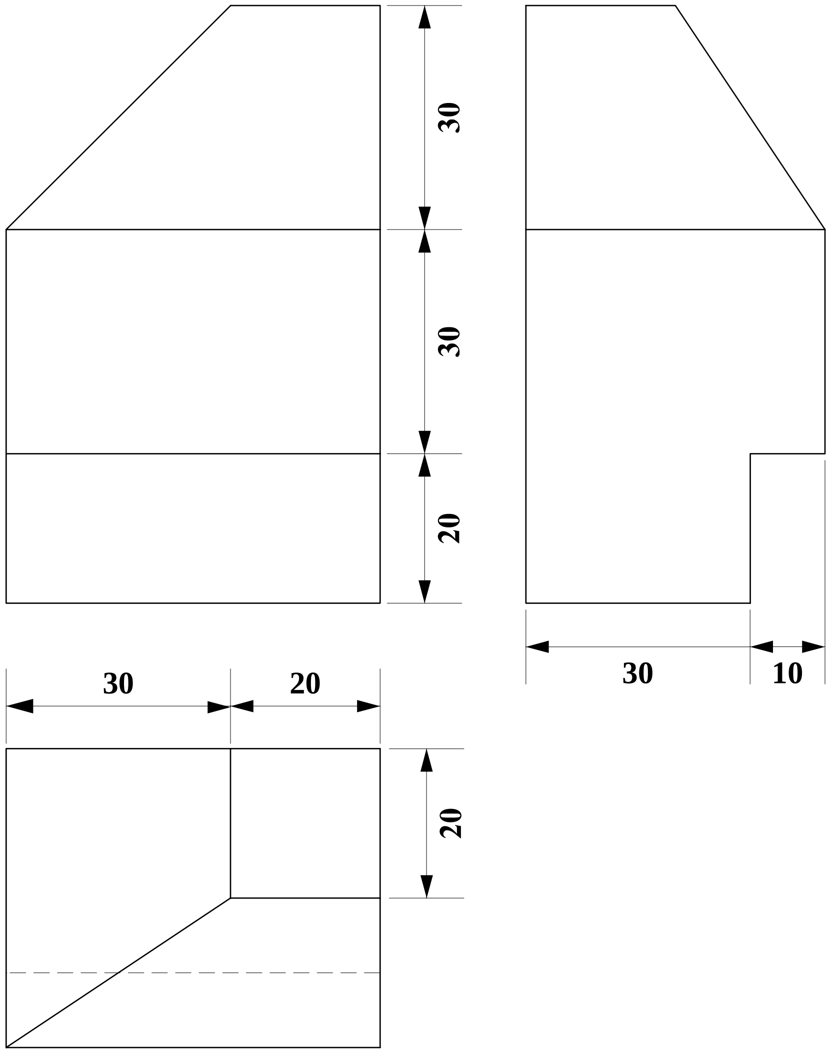
6.2. Perspectiva Isométrica

Exercício 6.1: Desenhar as perspectiva isométricas simplificadas das faces pedidas, a partir das vistas ortográficas fornecidas (Atenção: Todas as dimensões estão fornecidas em milímetros):

a) Frontal – Lateral Esquerda – Superior



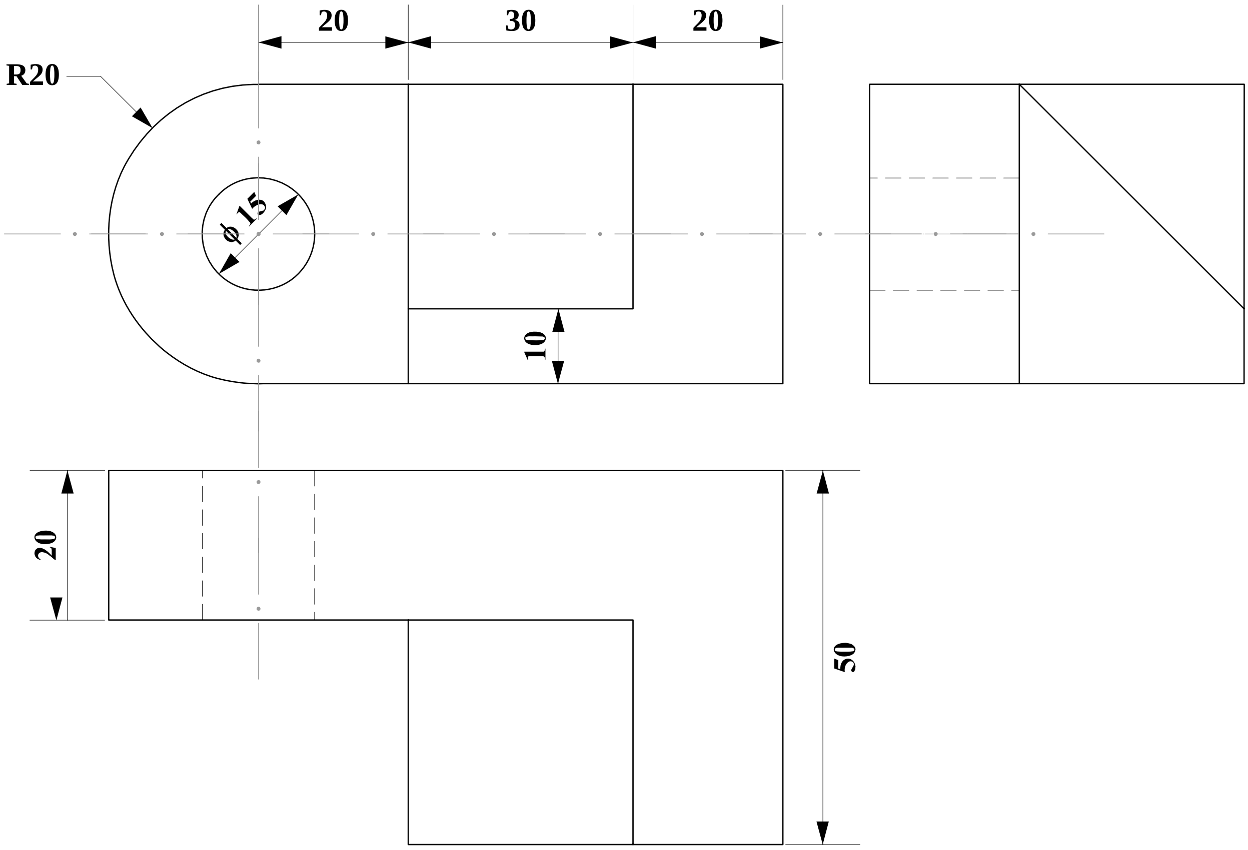
b) Posterior – Lateral Direita – Superior



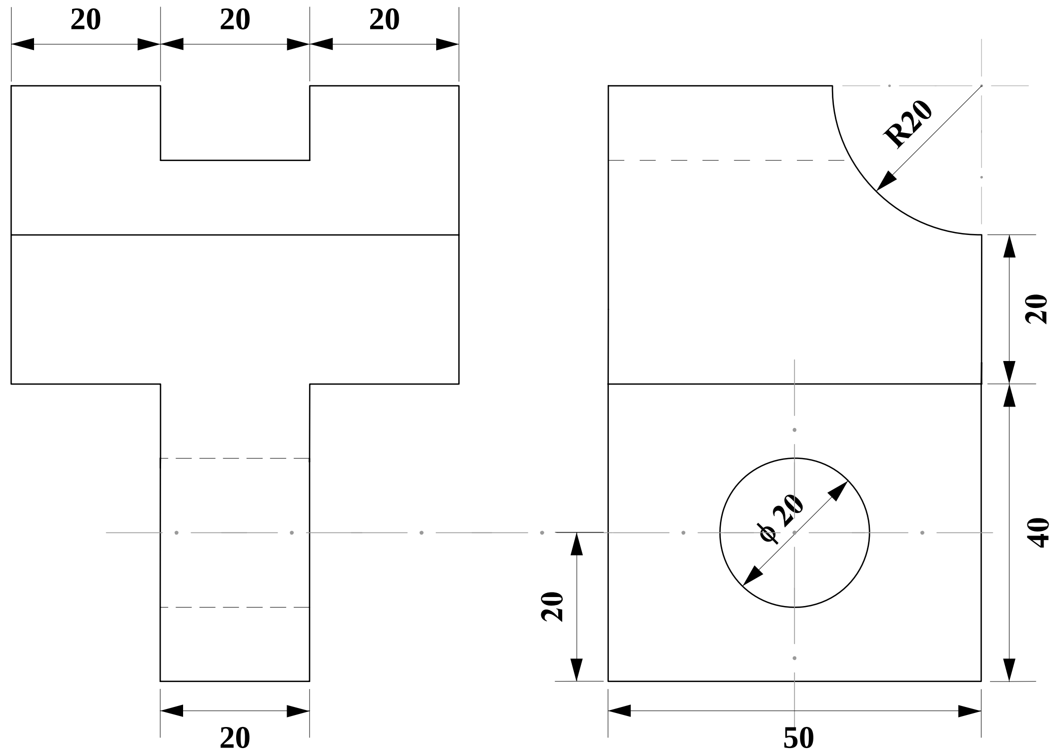
6.3. Falsa Elipse

Exercício 6.2: Desenhar as perspectiva isométricas simplificadas das faces pedidas, a partir das vistas ortográficas fornecidas (Atenção: Todas as dimensões estão fornecidas em milímetros):

a) Frontal – Lateral Esquerda – Superior



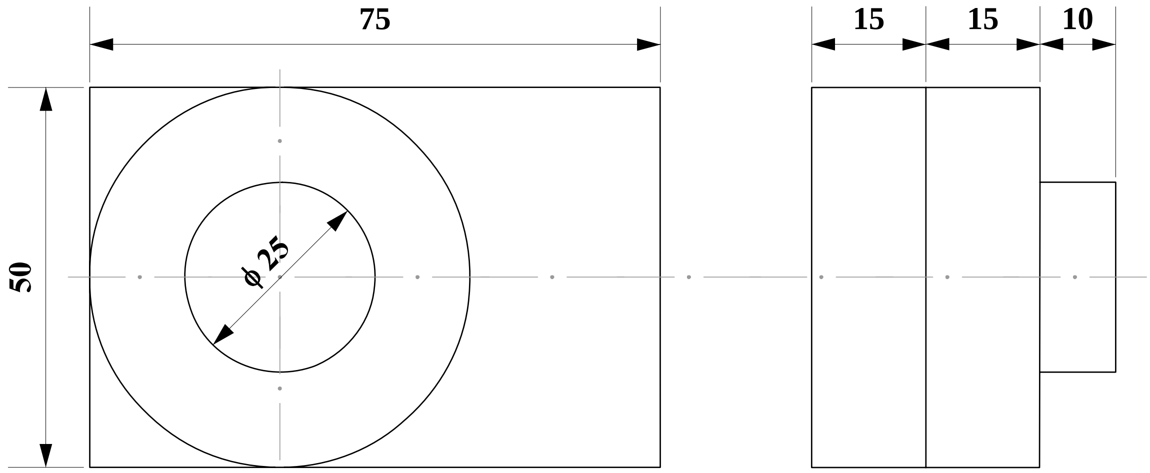
b) Frontal – Lateral Esquerda – Superior



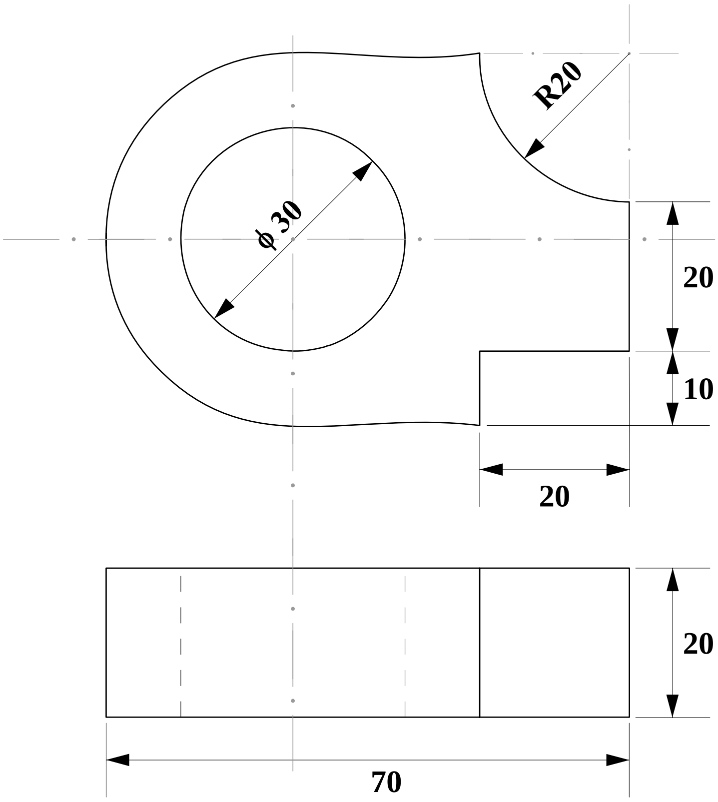
6.4. Perspectiva Cavaleira

Exercício 6.3: Desenhar as perspectivas cavaleiras das peças a seguir, obedecendo aos parâmetros pedidos (Atenção: Medir as vistas não cotadas diretamente no desenho e as cotas possuem unidades em cm):

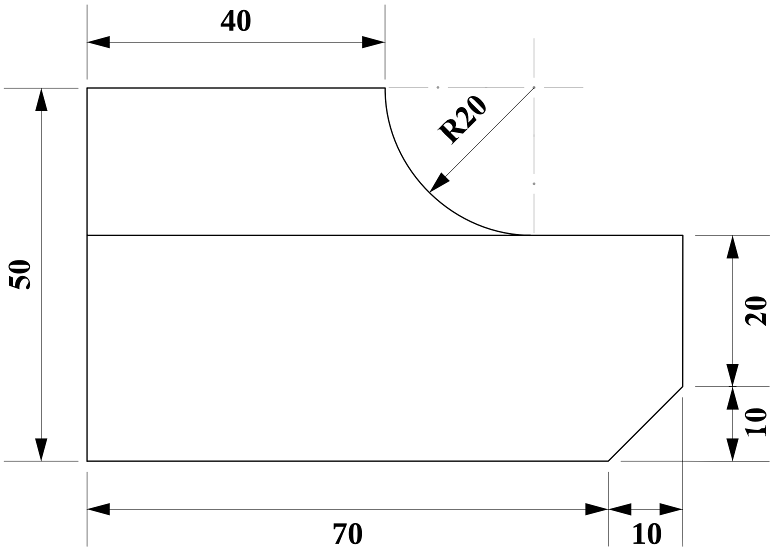
a) $\alpha = 30^{\circ} - K = 1 / 2 - 1^{\circ}$ quadrante

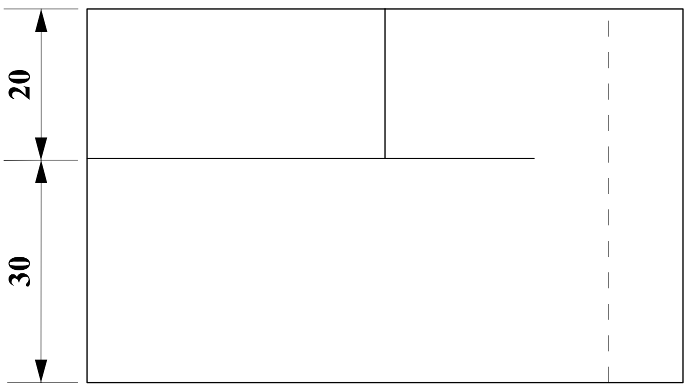


b) α = 30º – K = 3 / 4 – 4º quadrante



c) α = 45º – K = 2 / 5 – 2º quadrante





ANEXO: PROVAS DE ANOS ANTERIORES

Prova de Transferência de 2002

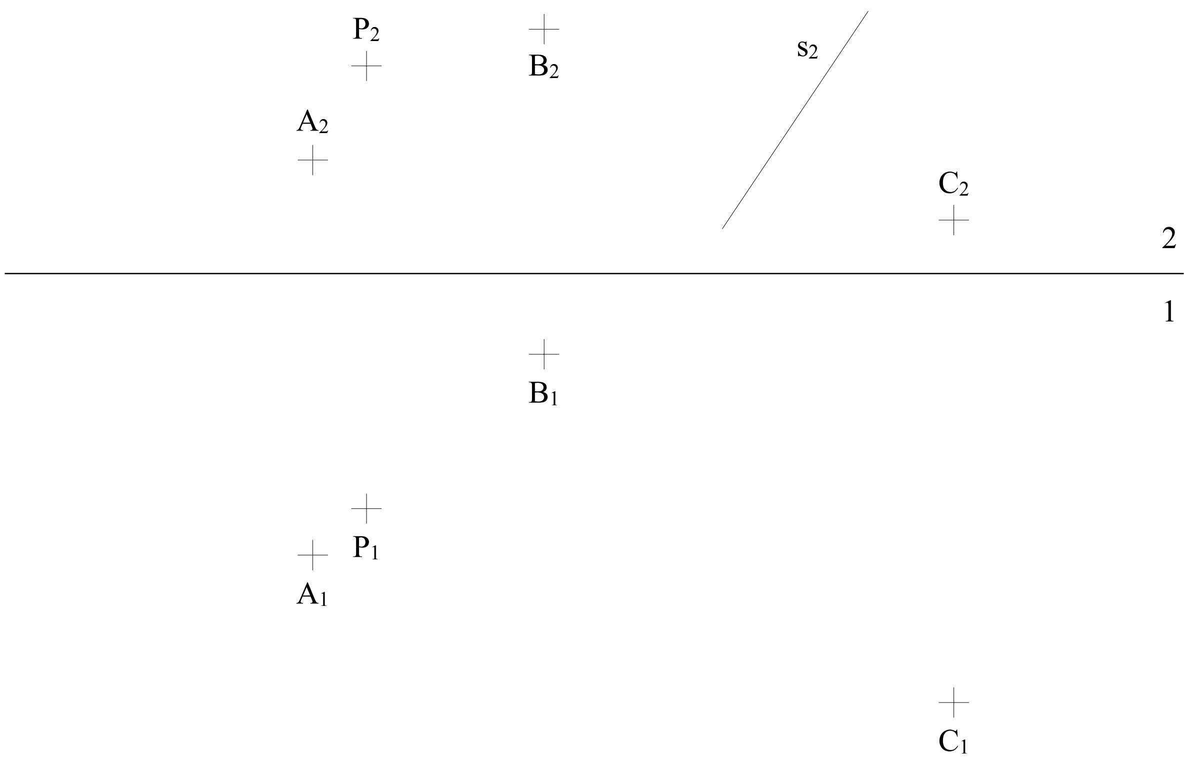
Questão 7: Na épura abaixo, sabendo que o plano α é definido pelos pontos A, B e C:

a) Determinar os traços horizontal (π_1) e vertical (π_2) do plano α:

b) Determinar se o ponto P pertence ou não ao plano α (explicar a solução): (Resposta: $P \notin \alpha$)

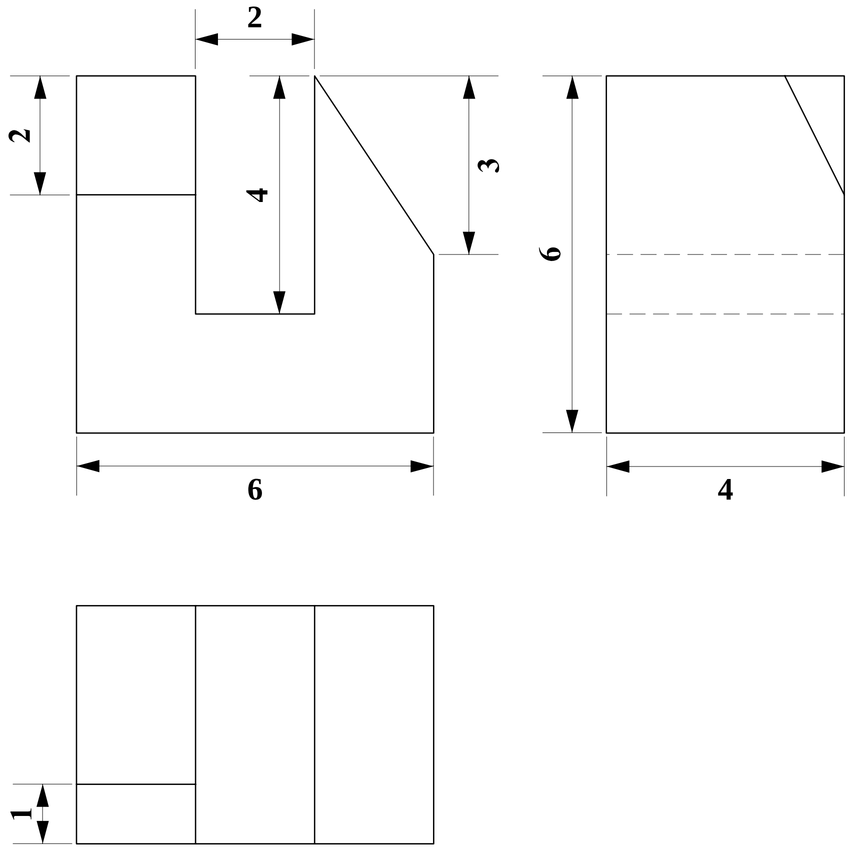
c) Determinar a projeção horizontal (s_1) da reta s, conhecendo sua projeção vertical s_2 e sabendo que ela pertence ao plano α:

Obs.: Indique claramente os elementos de sua resposta.



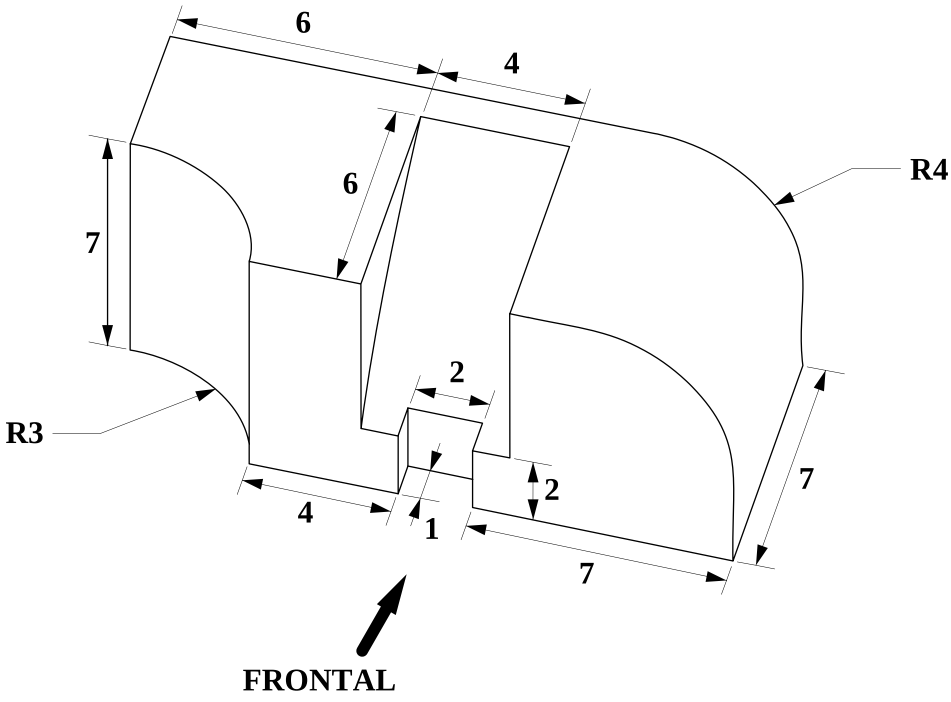
Questão 8: Desenhar com instrumentos a perspectiva isométrica simplificada (sem redução) da peça dada pelas vistas ortográficas abaixo:

Obs.: Unidade centímetro.



Questão 9: Desenhar, em escala 1 : 2, as vistas ortográficas frontal, superior e lateral esquerda da peça abaixo:

Obs.: Todos os arcos são de 90º. Medidas em centímetros. Não é necessário cotar.



Prova de Transferência de 2003

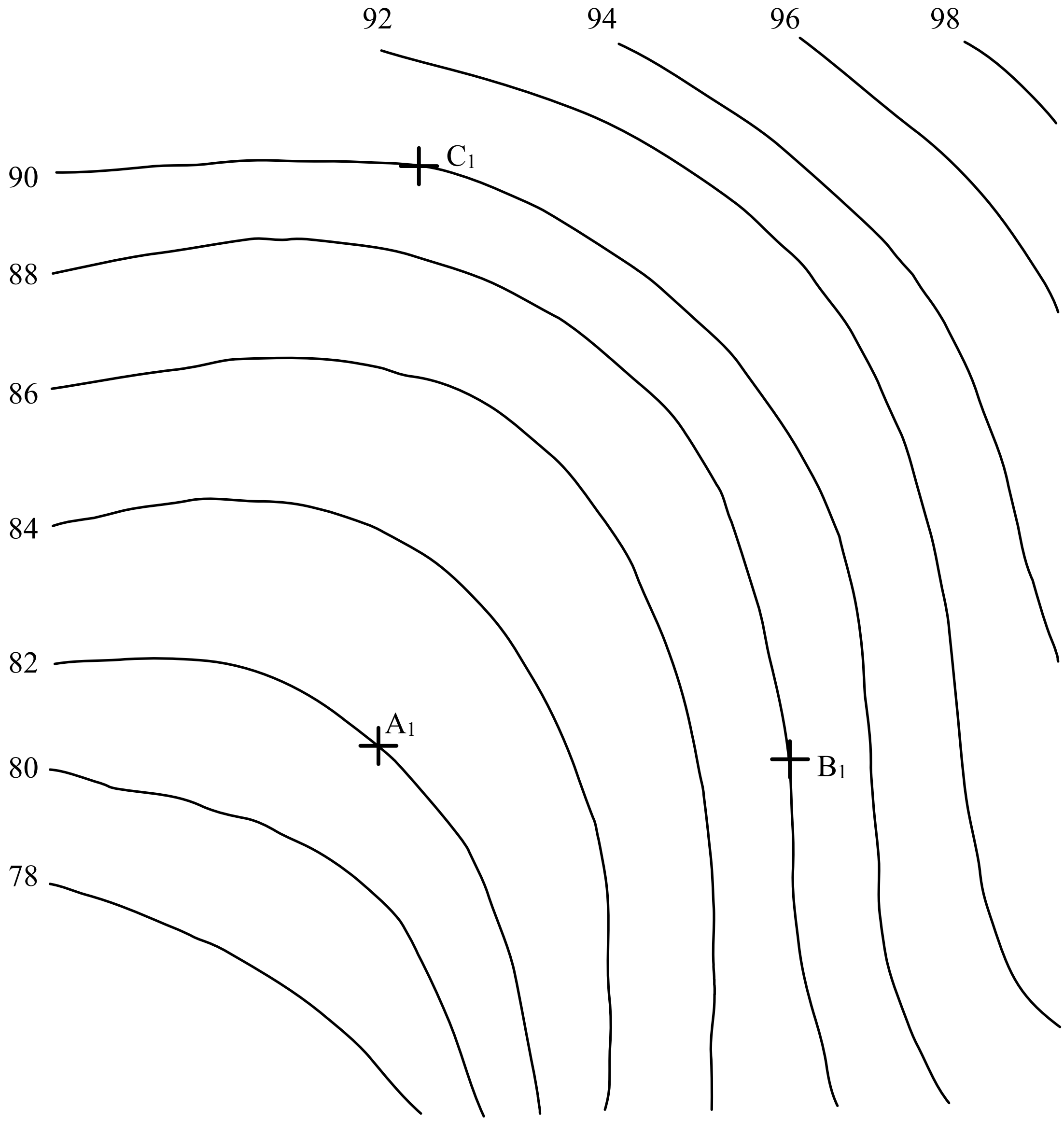
Questão 7: Deseja-se construir, num terreno, uma rampa cujo plano é definido pelos pontos A., B e C, cujas projeções estão indicadas na carta topográfica abaixo. Sabendo-se que os pontos estão situados na superfície do terreno, determine:

a) O intervalo do plano da rampa: (Resposta: i = 7,5 m)

b) A declividade da rampa: (Resposta: p = 0,1333 = 13,33%)

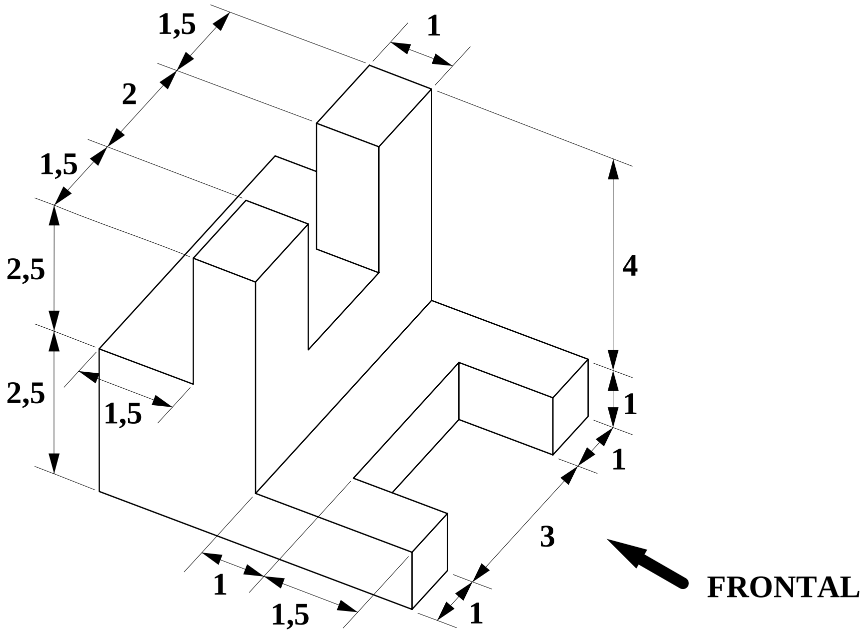
c) A linha de encontro entre a rampa e o terreno:

Unidade: metro **Escala:** 1 : 1.000



Questão 8: Dada a perspectiva axonométrica da peça abaixo, desenhar suas vistas frontal, lateral esquerda e superior:

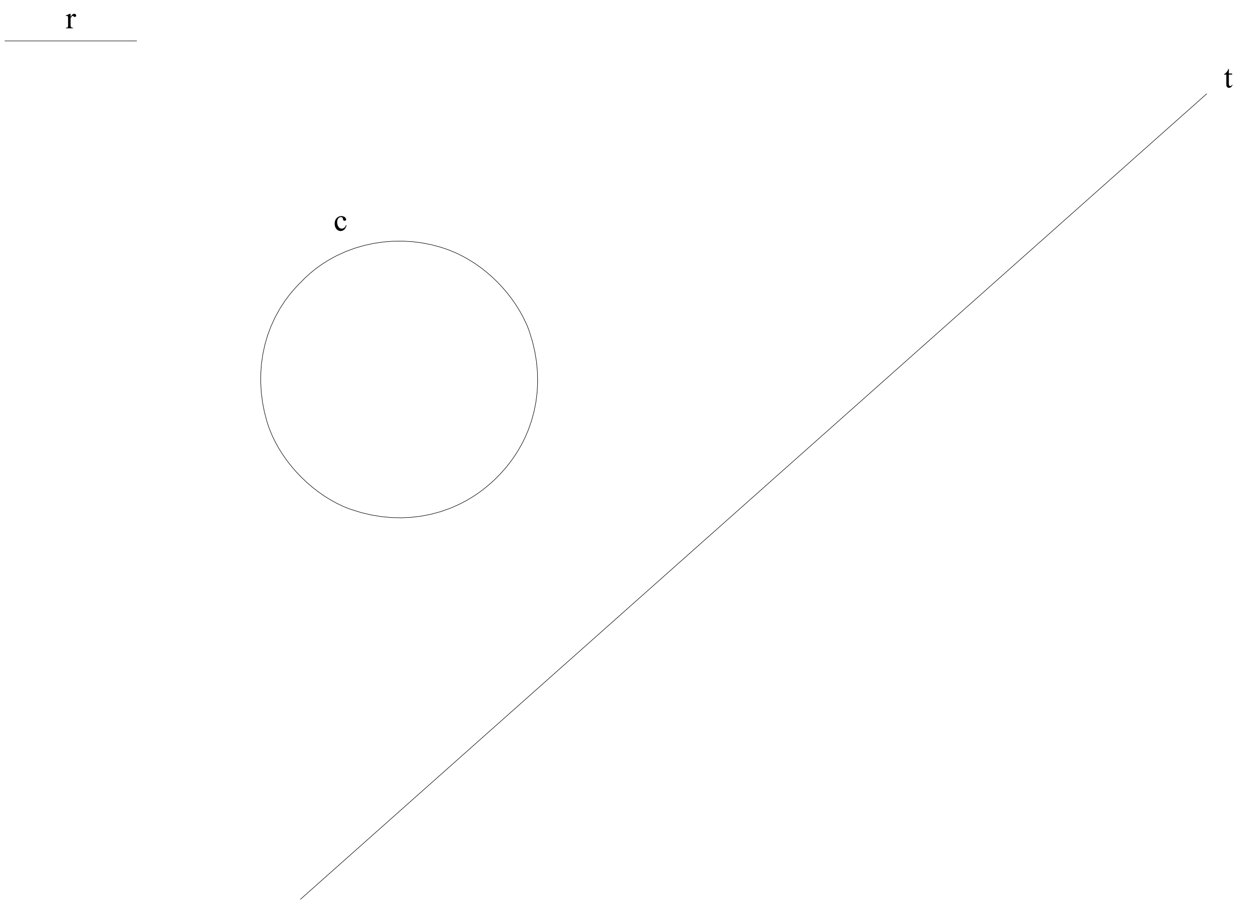
Obs.: Adotar: 1º diedro, unidade: cm, escala: 1 : 1. Considere a vista frontal indicada.



Questão 9: Dadas a circunferência c e a reta t, determinar:

a) O ponto A que é o centro da circunferência c:

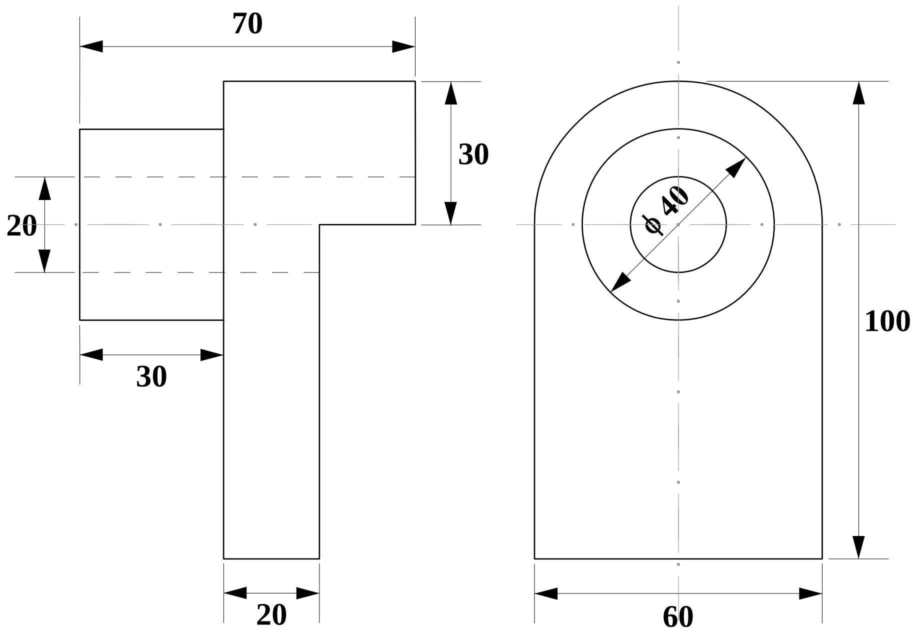
b) Uma circunferência de raio r (indicado abaixo) tangente à reta t e à circunferência c:



Prova de Transferência de 2004

Questão 7: Desenhar a perspectiva CAVALEIRA da peça dada abaixo por suas vistas lateral direita e frontal, representadas no primeiro diedro:

Obs.: Adotar: α = 45° no primeiro quadrante (ângulo das fugantes) e k = 1 / 2. Desenhar em escala natural. Medidas em milímetros.



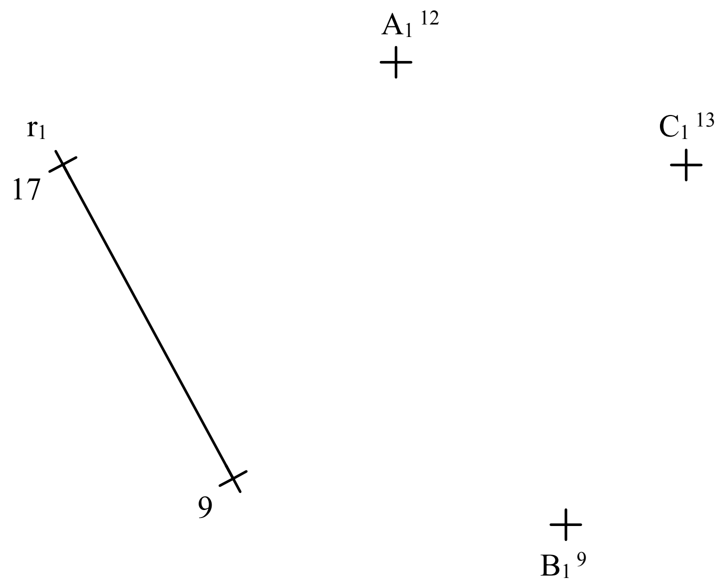
Questão 8: Na figura abaixo estão representadas as projeções cotadas de uma reta r e de um plano α dado pelos pontos A, B e C nele contidos. Determine:

a) A projeção cotada I_1 da intersecção da reta r com o plano α:

b) A cota deste ponto de interseção (I), com uma casa decimal de precisão: (Resposta: $I \cong 7{,}0$ m)

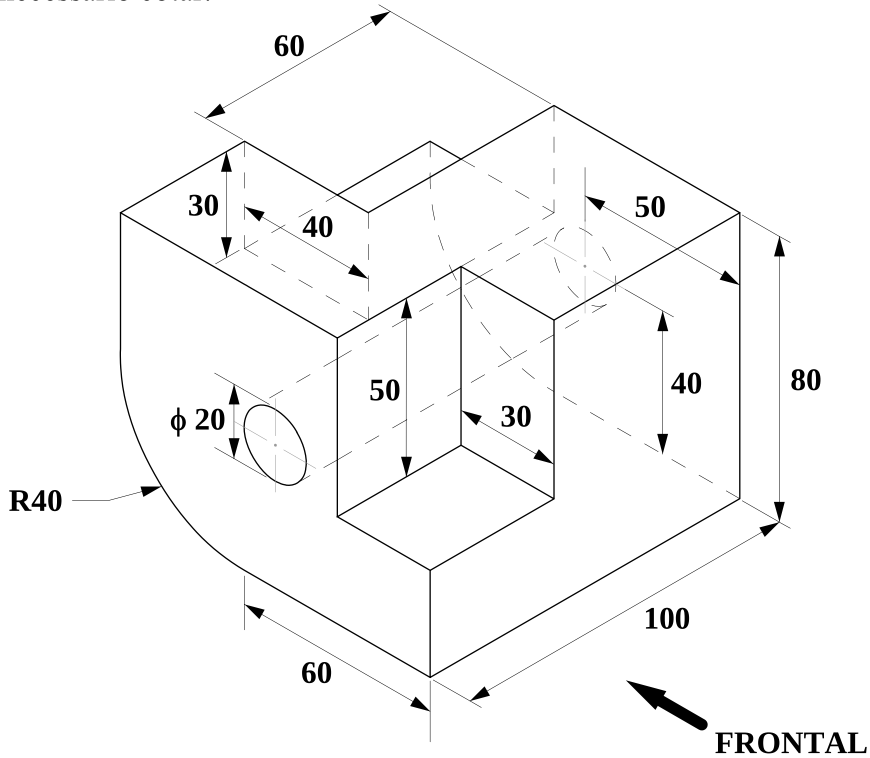
Obs.: Em todos os itens, deixe claramente indicadas as construções gráficas e/ou cálculos efetuados.

Escala: 1 : 50 **Unidade:** metro



Questão 9: Desenhar, em escala 1 : 2, as vistas ortográficas frontal, superior e lateral esquerda da peça abaixo no primeiro diedro, adotando como frontal a face indicada pela seta:

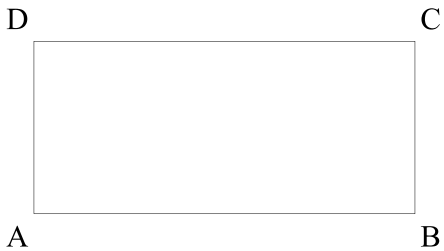
Obs.: Medidas em milímetros. Não é necessário cotar.



Prova de Transferência de 2005

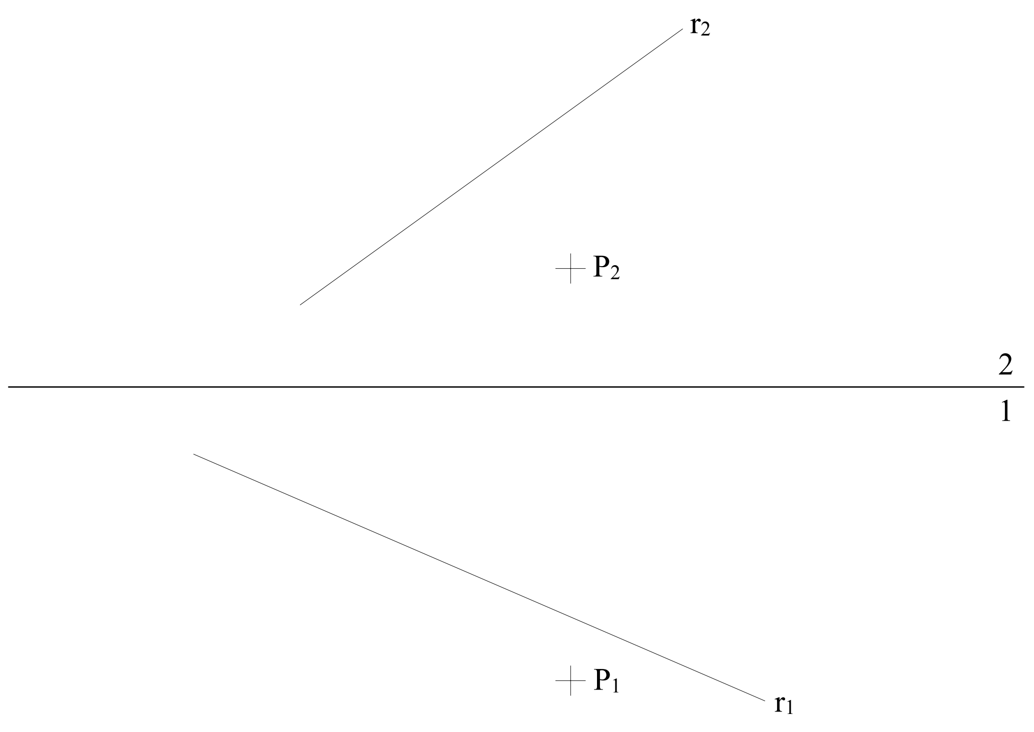
Questão 7: Determinar um ponto, no plano da folha, que enxerga o lado AB do retângulo abaixo sob um ângulo de 30° e que seja eqüidistante dos pontos A e C:

Obs.: Mostre claramente todas as construções na folha.



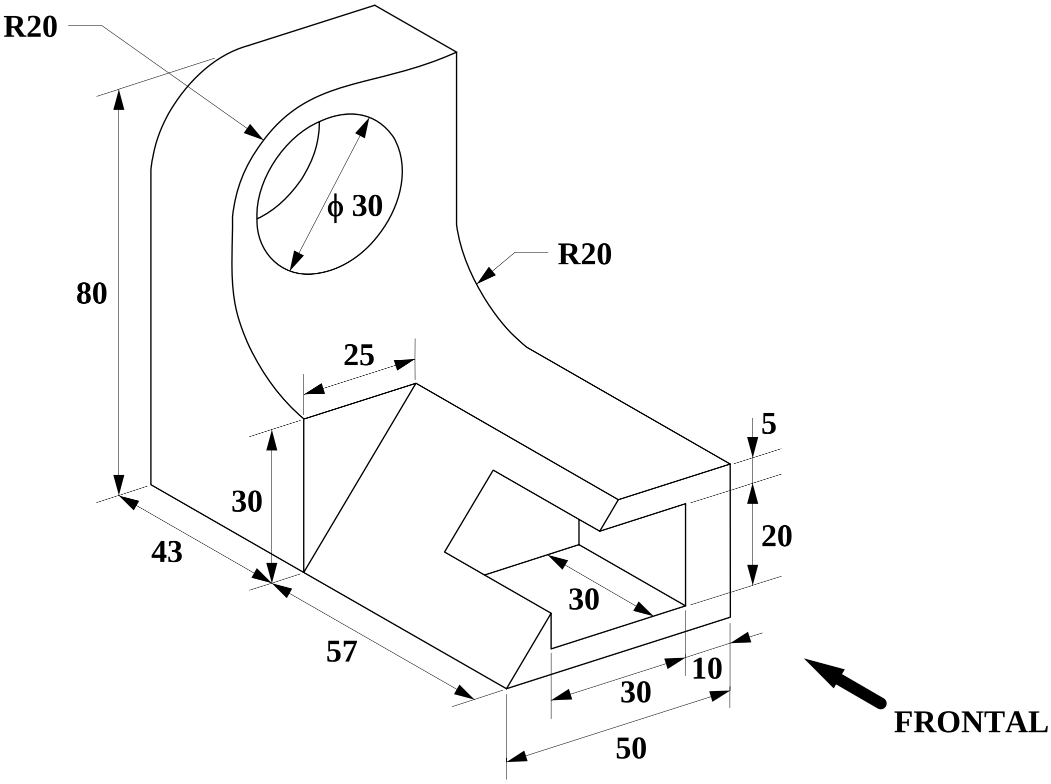
Questão 8: Na épura abaixo, determine os traços vertical e horizontal do plano α que contém a reta r e o ponto P:

Obs.: Indique claramente as construções e a solução final, com a notação apropriada.



Questão 9: Desenhar, em escala 1:2, as vistas ortográficas frontal, superior e lateral direita da peça abaixo, no primeiro diedro, adotando como frontal a face indicada pela seta:

Obs.: O furo circular é concêntrico com o arredondamento. Medidas em milímetros. Não é necessário cotar.



Prova de Transferência de 2006

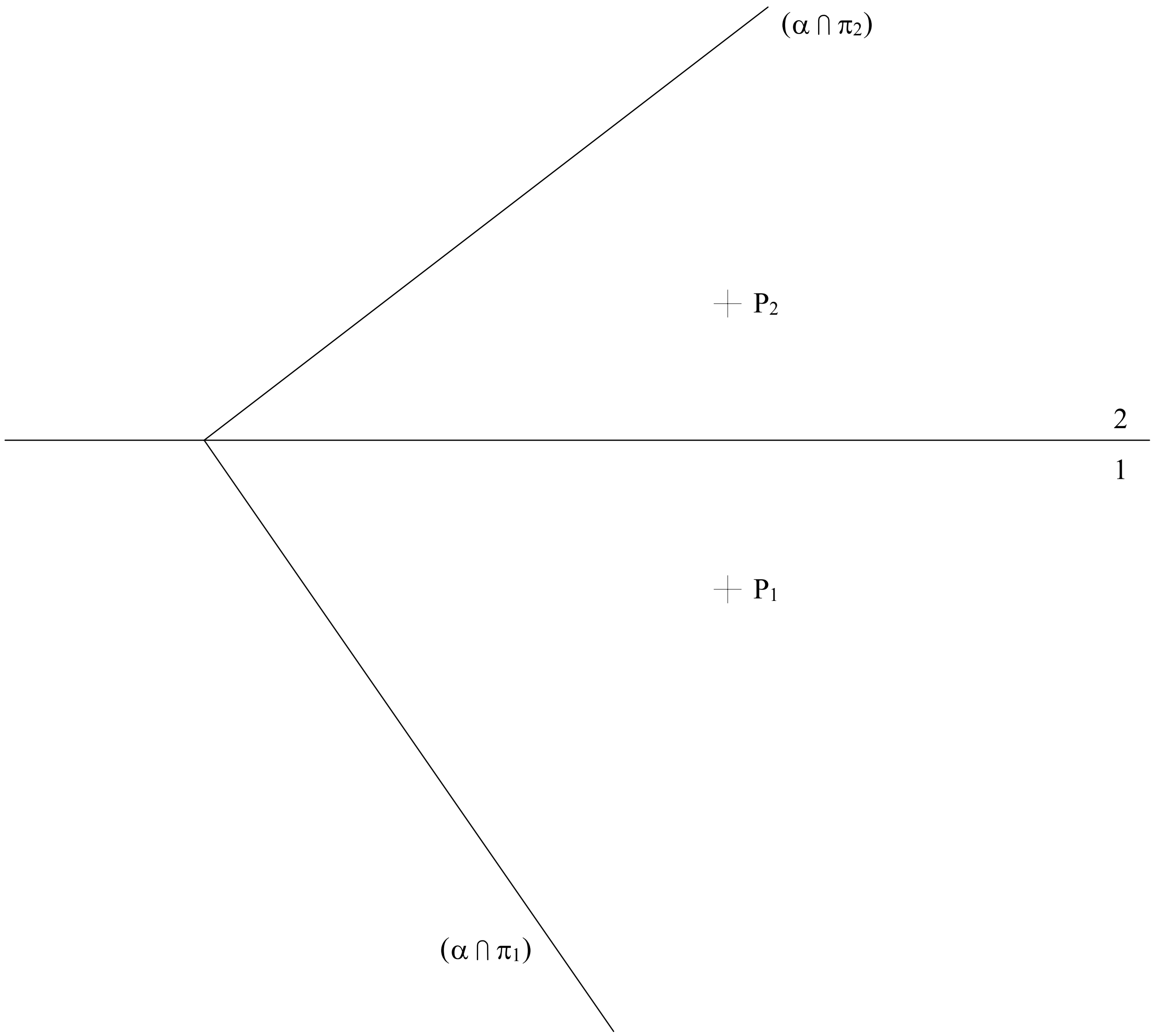
Questão 10: Dados os traços horizontal ($\alpha \cap \pi_1$) e vertical ($\alpha \cap \pi_2$) do plano α e as projeções horizontal (P_1) e vertical (P_2) do ponto P, determinar:

a) Os traços horizontal e vertical do plano β que é paralelo a α e contém P:

b) A reta r que é perpendicular a α e contém o ponto P:

c) Graficamente, o ângulo θ que o plano α forma com o plano horizontal π_1:

Obs.: Identifique claramente as respostas.

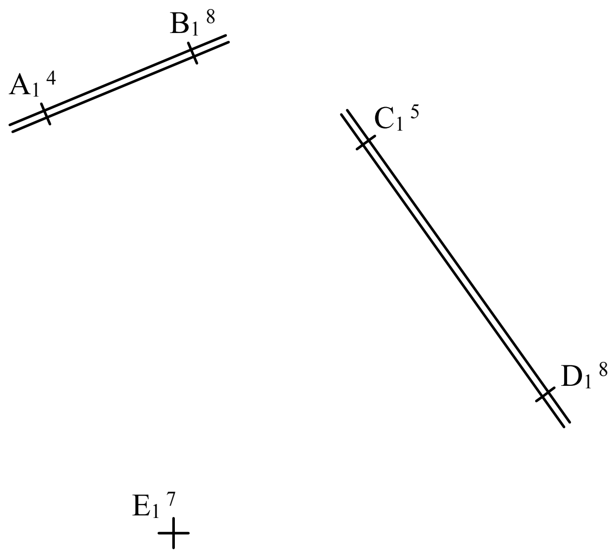


Questão 11: Dados, em plano cotado, o plano α por sua reta de maior declive AB e o plano β por sua reta de maior declive CD:

a) Determinar a reta i que é a interseção entre os planos α e β:

b) O ponto E pertence ao plano β? Justifique por escrito e faça as construções gráficas necessárias para tirar sua conclusão: (Resposta: $E \in \beta$)

Escala: 1 : 200 **Unidade:** metro



Questão 12: Desenhar a perspectiva ISOMÉTRICA, mostrando as faces frontal, lateral direita e superior da edificação dada pelas vistas abaixo, que estão representadas no 1º diedro:

Obs.: Tome as medidas diretamente das vistas, desconsiderando o fator de redução da isométrica (isométrica simplificada).