SÃO
PAULO
TECH
SCHOOL

Pesquisa Operacional

Programação linear – modelagem

Eduardo Verri

eduardo.verri@sptech.school

"Um problema que não tem solução está resolvido sob o ponto de vista matemático. Se o problema tem apenas uma solução, basta encontra-la. Agora, se o **problema tem muitas soluções**, precisamos de alguma regra que oriente nossa escolha"

É o caso dos problemas que envolvem modelos em programação linear.

Introdução

Uma das técnicas mais utilizadas na abordagem de problemas em P.O. é a programação linear.

As aplicações mais conhecidas são feitas em sistemas estruturados, como os de produção, finanças, controle de estoques etc.

O modelo matemático de programação linear é composto de uma **função objetivo linear**, e de **restrições técnicas** representadas por um grupo de inequações também lineares.

Modelagem do sistema

Modelo em programação linear

Exemplo - Função objetivo a ser maximizada:

$$Lucro = 2x_1 + 3x_2$$

$$Restrições: \begin{cases} técnicas \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 10 \\ 6x_1 - x_2 \geq 20 \end{cases} \\ de\ não\ negatividade \begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

Modelo em programação linear

- As variáveis controladas ou variáveis de decisão são x1 e x2. **A função objetivo ou função de eficiência** mede o desempenho do sistema, no caso a capacidade de gerar lucro, para cada solução apresentada. O objetivo é maximizar o lucro.
- As **restrições** garantem que essas soluções estão de acordo com as limitações técnicas impostas pelo sistema. As duas últimas restrições exigem a não negatividade das variáveis de decisão, o que deverá acontecer sempre que a técnica de abordagem for a de programação linear.
- A construção do modelo matemático, no caso um modelo linear, é a parte mais complicada de nosso estudo. Não há regra fixa para a criação desse modelo, mas podemos sugerir um roteiro que ajuda a ordenar o raciocínio.

Modelo em programação linear - Roteiro

- **Quais as variáveis de decisão? -** Aqui consiste em explicar as decisões que devem ser tomadas e representar as possíveis decisões através de variáveis chamadas variáveis de decisão. Se o problema é de programação de produção, as variáveis de decisão são as quantidades a produzir no período. Nas descrições sumárias de sistemas, isso fica claro quando lemos a questão proposta, isto é, é a pergunta do problema.
- **Qual o objetivo? –** Identificar o objetivo da tomada de decisão. Eles aparecem geralmente na forma de maximização de lucros ou receitas, minimização de custos, perdas etc. A função objetivo é a expressão que calcula o valor do objetivo (lucro, custo, receita, perda etc.) em função das variáveis de decisão.
- **Quais as restrições? –** Cada restrição imposta na descrição do sistema deve ser expressa como uma relação linear (igualdade ou desigualdade), montadas com as variáveis de decisão.

Modelo em programação linear – Exemplo 1

- A empresa **Figuera S.A. (FSA)** fabrica os produtos baixo elétrico e amplificador. Os lucros unitários são: R$ 1.000,00 e R$ 1.800,00, respectivamente. A FSA precisa de 20h para fabricar uma unidade de baixo elétrico e de 30h para o amplificador. O tempo anual de produção disponível é de 1.200h. A demanda anual esperada para cada produto é de 40 unidades para o baixo e 30 unidades para o amplificador. Qual o plano de produção para que a empresa maximize seu lucro nesses itens? Construa o modelo de programação linear.

Modelo em programação linear – Exemplo 1 [solve]

Quais as variáveis de decisão? – O que deve ser decidido é o plano de produção, isto é, quais quantidades anuais que devem ser produzidas. Portanto, as variáveis de decisão serão x1 e x2:

x1 = quantidade anual a produzir de baixo elétrico

x2 = quantidade anual a produzir de amplificador

Qual o objetivo? – O objetivo é maximizar o lucro, que pode ser calculado:

Lucro devido a baixo elétrico: 1.000,00 * x1 (lucro por unidade x quantidade produzida)

Lucro devido a amplificador: 1.800,00 * x2 (lucro por unidade x quantidade produzida)

Lucro total: L = 1.000,00 * x1 + 1.800,00 * x2

Objetivo: maximizar L = 1.000,00 * x1 + 1.800,00 * x2

Modelo em programação linear – Exemplo 1 [solve]

Quais as restrições? – As restrições impostas pelo sistema são:

Disponibilidade de horas para a produção: 1.200 horas

Horas ocupadas com os baixos elétricos: 20 * x1 (uso por unidade x quantidade produzida)

Horas ocupadas com os amplificadores: 30 * x2 (uso por unidade x quantidade produzida)

Total em horas ocupadas na produção: 20 * x1 + 30 * x2

Restrição descritiva: 20 * x1 + 30 * x2 <= 1.200

Disponibilidade de mercado (demanda) para o baixo elétrico: 40 unidades

Disponibilidade de mercado (demanda) para os amplificadores: 30 unidades

Modelo em programação linear – Exemplo 1 [solve]

$$\textit{Resumo do modelo}: \max L = 1.000 * x1 + 1.800 * x2$$

$$\textit{Restrições técnicas} \begin{cases} 20 * x1 + 30 * x2 \leq 1.200 \\ x1 \leq 40 \\ x2 \leq 30 \end{cases}$$

$$\textit{Restrições de não negatividade} \begin{cases} x1 \geq 0 \\ x2 \geq 0 \end{cases}$$

Modelo em programação linear – Exemplo 2

- Para uma boa alimentação, o corpo necessita de vitaminas e proteínas. A necessidade mínima de carboidratos é de 410g/dia e a de proteínas de 80g/dia. Uma pessoa tem disponível bebida proteica e ovos para se alimentar. Cada unidade de bebida proteica tem 15g de proteínas e 21g de carboidratos. Enquanto que o ovo possui 7g de proteína e 0,8g de carboidratos.
- Qual a quantidade diária de whey e ovos que deve ser consumida para suprir as necessidades de vitaminas e proteínas com o menor custo possível? Cada unidade de whey custa R$ 8,30, e cada unidade de ovo custa R$ 1,50.

Modelo em programação linear – Exemplo 2 [solve]

Quais as variáveis de decisão? – Devemos decidir quais as quantidades de whey e ovos a pessoa deve consumir por dia:

x1 = quantidade de whey no dia

x2 = quantidade de ovo no dia

Qual o objetivo? – O objetivo é minimizar o custo, que pode ser calculado:

Custo devido ao whey = 8,30 * x1 (custo por unidade x quantidade a consumir de whey)

Custo devido aos ovos = 1,50 * x2 (custo por unidade x quantidade a consumir de ovo)

Custo total = C = 8,30 * x1 + 1,50 * x2

Objetivo = min C = 8,30 * x1 + 1,50 * x2

Modelo em programação linear – Exemplo 2 [solve]

Quais as restrições? – As restrições impostas pelo sistema são:

Necessidade mínima de carboidratos = 410g

Carboidratos do whey = 21 * x1 (quantidade por unidade x unidades de whey a consumir)

Carboidratos no ovo = 0,8 * x2 (quantidade por unidade x unidades de ovos a consumir)

Total de carboidratos = 21 * x1 + 0,8 * x2

Necessidade mínima = 410

Restrição descritiva da situação: 21 * x1 + 0,8 * x2 >= 410

Modelo em programação linear – Exemplo 2 [solve]

Quais as restrições? – As restrições impostas pelo sistema são:

Necessidade mínima de carboidratos = 80g

Proteínas do whey = 15 * x1 (quantidade por unidade x unidades de whey a consumir)

Proteínas no ovo = 7 * x2 (quantidade por unidade x unidades de ovos a consumir)

Total de carboidratos = 15 * x1 + 7 * x2

Necessidade mínima = 80

Restrição descritiva da situação: 15 * x1 + 7 * x2 >= 80

Modelo em programação linear – Exemplo 2 [solve]

$$Resumo\ do\ modelo\text{: } \min C = 8{,}30 * x1 + 1{,}50 * x2$$

$$Restrições\ técnicas \begin{cases} 21{,}0 * x1 + 0{,}8 * x2 \geq 410{,}0 \\ 15{,}0 * x1 + 7{,}0 * x2 \geq 80 \end{cases}$$

$$Restrições\ de\ não\ negatividade \begin{cases} x1 \geq 0 \\ x2 \geq 0 \end{cases}$$

Exercícios de modelagem

"A **primeira missão**, e em muitos casos a mais nobre, é a construção do modelo do sistema que gerou a situação problemática."

Dizem que construir modelos é uma arte!

Modelo em programação linear – Exercícios fluffy

1. Um sapateiro faz 6 sapatos/hora, ou então 5 cintos/hora. Para cada sapato gasta 2 unidades de couro e tem um lucro de R$ 5,00. Enquanto que para cada cinto gasta 1 unidade de couro e tem um lucro de R$ 2,00. Qual o modelo do sapateiro, se o objetivo é maximizar o lucro por hora, tendo 6 unidades de couro?

2. Uma rede de televisão local tem o seguinte problema: foi descoberto que o programa "A" com 20 minutos de música e 1 minuto de propaganda chama a atenção de 30.000 telespectadores, enquanto o programa "B", com 10 minutos de música e 1 minuto de propaganda chama a atenção de 10.000 telespectadores. No decorrer de uma semana, o patrocinador insiste no uso de no mínimo, 5 minutos para sua propaganda e que não há verba para mais de 80 minutos de música. Quantas vezes por semana cada programa deve ser levado ao ar para obter o número máximo de telespectadores? Construa o modelo do sistema.

Modelo em programação linear – Exercícios fluffy

3. Uma metalúrgica produz componentes para a indústria automobilística e recebeu um pedido para o fornecimento de 7.240 peças de um determinado modelo a ser entregue em 10 du. A fábrica pode processar a peça em três máquinas que apresentam tanto capacidade como precisão diferentes, e que produzirão durante 8 horas por dia, conforme tabela. Quantas máquinas de cada tipo deverão ser alocadas para essa tarefa com o menor custo possível?

	Capacidade peças/hora	Descarte em %	Custo descarte em R$/pça	Custo operação em R$/hora	Quantidade de máquinas
Máquina 1	20	5	2	85	4
Máquina 2	15	3	2	75	3
Máquina 3	12	1	2	70	1

Modelo em programação linear – Exercícios SIS

1. Uma empresa processa requisições de clientes usando funções Lambda. Cada requisição pode ser do tipo “leve” ou “pesada”. Cada requisição leve consome 128 MB de memória e dura 1 segundo (custa $0,003). Cada requisição pesada consome 512 MB e dura 5 segundos (custa $0,005).O orçamento diário da empresa é de $200. Memória máxima alocada por dia: 60.000 MB. A empresa quer maximizar o número de requisições processadas com um custo diário limitado.

2. Distribuir 100 TB entre 3 regiões com custo e latência diferentes. É necessário reduzir custo e respeitar média de latência e legislação (pelo menos 30% de armazenamento no Brasil). EUA: $0,023/GB, 200 ms, Brasil: $0,030/GB, 50 ms e Europa: $0,025/GB, 100 ms. A latência esperada é de até 12000ms.

3. Executar 10.000 tarefas em Lambda ou EC2, respeitando tempo máximo de execução (5h) com o menor preço possível. Lambda: $0,002, 3s. EC2: $0,01, 1s. Tempo total: 18.000s

Modelo em programação linear – Exercício 🔥

Uma equipe de DevOps precisa organizar dois tipos de serviços (Serviço A e Serviço B) em diferentes sub-redes IP de uma VPC na AWS. Eles possuem um total de 600 endereços IP utilizáveis.

- Serviço A utiliza sub-redes com **/26**, ou seja, 62 IPs disponíveis por sub-rede.
- Serviço B utiliza sub-redes com **/28**, ou seja, 14 IPs disponíveis por sub-rede.

O objetivo é maximizar o número total de sub-redes (A + B), considerando regras operacionais:

Devem ser configuradas pelo menos 4 sub-redes do tipo A.

O número de sub-redes do tipo B deve ser no máximo o dobro das sub-redes do tipo A (por limitações de roteamento).

Todos os IPs precisam ser utilizados (ou seja, os IPs disponíveis devem ser consumidos completamente pelas sub-redes configuradas).

Variáveis de decisão: x1: número de sub-redes do tipo A (/26), **x2:** número de sub-redes do tipo B (/28)

Agradeço

a sua atenção!

SÃO
PAULO
TECH
SCHOOL