BFE

- Viteza luminii in vid:

$$c = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$$

- Sarcina electrica (notata cu q sau Q), are ca unitate de masura columbul [C].

S-a constatat experimental că forţa $\vec{F}$ exercitată asupra unui corp de probă, aflat în vid şi presupus imobil, este proporţională cu sarcina electrică q a corpului de probă conform relaţiei:

$$\vec{F} = q\vec{E}_0$$

$\vec{E}_0$ – marime primitiva vectorială ce caracterizează local starea câmpului electric, numită intensitatea câmpului electric în vid.

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{\vec{r}_{12}^{\,3}}$$

q_1, q_2 – sarinile corpurilor.

r_{12} – distanta dintre corpuri .

$\vec{r}_{12}$ – vectorul de poziţie relativ al corpului asupra căruia se exercită forţa în raport cu celălalt corp.

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}$$

ε_0 - o constantă universală, numită permitivitatea vidului, având în SI unitatea farad pe metru [F/m].

- Densitatea de volum (volumica) a sarcinii electrice:

$$\rho_v = \frac{dQ}{dv} \left[\frac{C}{m^3}\right];$$

- Densitate de suprafaţă (superficială) a sarcinii electrice:

$$\rho_s = \frac{dQ}{ds} \left[\frac{C}{m^3}\right];$$

- Densitate de linie (lineică) a sarcinii electrice:

$$\rho_l = \frac{dQ}{dl} \left[\frac{C}{m^3}\right];$$

Pentru cazurile cu distributii uniforme de sarcina electrica, relatiile devin:

$$Q = \rho_v V$$

$$Q = \rho_S V$$

$$Q = \rho_l V$$

$$Q = \pm ne, \qquad n \in N, \qquad e \cong 1.6 \cdot 10^{-19} C$$

$$u_{AB} = \int_{A(C)}^{B} E dl \cos\alpha = \int_{A(C)}^{B} E_t dl$$

Tensiunea electromotoare:

$$u_e = \oint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl}$$

Fluxul electric:

$$\Psi = \int_S \vec{D} \cdot \overrightarrow{ds} = \int_S D\, ds \cos\alpha = \int_S D_n ds$$

$\vec{D}$ - vectorul inducţie electrică.

$\overrightarrow{ds}$ - constituie elementul vectorial de suprafaţă.

α - unghiul format de vectorii $\vec{D}$ si $\overrightarrow{ds}$.

D_n - modulul componentei normale la suprafaţă a inducţiei electrice $\vec{D}$.

Ansamblul format dintr-o pereche de sarcini electrice punctiforme, egale in modul si opuse ca semn, situate la o distanta extrem de mica, se numeste dipol electric si este caracterizat de momentul electric dipolar, definit cu relatia:

$$\vec{p} = Q \cdot \vec{\Delta l}$$

Vectorul $\vec{\Delta l}$ este orientat de la $-Q$ catre $+Q$.

Pilarizatia electrica:

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dv}$$

Polarizaţia $\vec{P}$ este o mărime derivată, a cărei unitate de măsură este coulomb pe metru pătrat $\left[\frac{C}{m^2}\right]$.

In interpretare microscopica, intensitatea curentului de conductie se defineste ca marime fizica scalara, egala cu sarcina electrica a purtatorilor mobile care strabat o suprafata considerate, in unitatea de timp:

$$i = \frac{dQ}{dt}$$

Unitatea de masura in SI a curentului electric se numeste amper [A].

Modulul fortei Lorentz este:

$$F = qvB_0 \sin\alpha$$

α – reprezinta unghiul dintre vectorii $\vec{v}$ si $\vec{B}_0$

Intensitatea campului magnetic in vid se defineste cu relatia:

$$= \frac{1}{\mu_0}\vec{B}_0$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{H}{m}$$

μ_0 – permeabilitatea vidului, avand in SI unitatea de masura henry pe metru $\left[\frac{H}{m}\right]$.

Flucul magnetic:

$$\square = \int_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{ds}$$

Unitatea SI a fluxului magnetic se numeste weber [Wb].

Intensitatea campului electric imprimat se defineste prin relatia:

$$\vec{E}_i = \frac{\vec{F}_i}{q}$$

$\vec{F}_i$ – forta imprimata.

Polarizatia temporara este proportionala cu intensitatea campului electric conform relatiei:

$$\vec{P}_t = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

ε_0 – permitivitatea absoluta a vidului.

χ_e – factorul adimensional care este o constanta de material pozitiva, numita susceptivitate electrică.

Legea conducţiei electrice stabileşte dependenţa locală şi instantanee între densitatea curentului electric de conducţie $\vec{J}$ şi câmpul electric în sens larg $\vec{E} + \vec{E}_i$, respectiv între curentul electric i şi tensiunea electrică u în lungul unui conductor.

a) Forma locală.

Pentru mediile conductoare izotrope şi liniare, legea conducţiei electrice se exprimă sub forma:

$$\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_i)$$

respectiv:

$$\vec{E} + \vec{E}_i = \rho\vec{J}$$

σ - conductivitatea electrică $\left[\frac{S}{m}\right]$ (siemens/metru).

$\rho = \frac{1}{\sigma}$ – rezistivitatea electrica [Ωm].

În absenţa oricărei acţiuni de natură neelectrică cu efect conductiv ($\vec{E}_i = 0$), relaţiile de mai sus devin:

$$\vec{J} = \sigma\vec{E}$$

respectiv:

$$\vec{E} = \rho\vec{J}$$

Rezistivitatea electrică a mediilor conductoare este influenţată de: conţinutul şi natura impurităţilor, solicitările mecanice şi termice, starea de agregare, factori ambientali. Peste o anumită valoare a temperaturii, numită temperatură Debye, rezistivitatea unui metal se aproximează prin funcţia liniară:

$$\rho = \rho_0[1 + \alpha(\theta - \theta_0)]$$

ρ, ρ_0 – rezistivitatile la temperaturile θ si θ_0.

α – coeficientul termic al rezistivitatii (in majoritatea cazurilor este pozitiv, in consecinta, rezistivitatea creste cu temperatura).

Indiferent de regimul de desfasurare in timp a fenomenelor electronice, in orice punct si in orice moment, intre marimile de stare locala $\vec{D}$ si $\vec{E}$ ale campului electric si polarizatia $\vec{P}$ a mediului exista relatia:

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$$

Asadar tinand cont de relatiile de mai sus, legea legaturii in camp electric se scrie sub forma:

$$\vec{D} = \left[\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}_t(\vec{E})\right] + \vec{P}_p$$

Din asocierea legii legăturii în câmp electric cu legea polarizaţiei temporare, pentru materialele liniare şi izotrope care nu au polarizaţie permanentă rezultă succesiv următoarele relaţii:

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}_t = \varepsilon_0(1 + \chi_e)\vec{E} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E} = \varepsilon\vec{E}$$

$\varepsilon_r = 1 + \chi_e$ - permitivitatea relativă a mediului (adimensională)

$\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$ - permitivitatea absolută a mediului $\left[\frac{F}{m}\right]$

Fluxul electric prin orice suprafaţă închisă Σ este egal cu sarcina electrică liberă totală Q localizată în domeniul mărginit de suprafaţa considerată:

$$\oint_\Sigma \vec{D} \cdot \overrightarrow{ds} = Q$$

$$D = \rho_v \frac{r}{3}$$

$$E = \rho_v \frac{r}{3\varepsilon}$$

Sarcina electrică din volumul delimitat de suprafaţa Σ este localizată în sfera de raza a, astfel că se poate scrie

$$Q = \rho_v \frac{4\pi a^3}{3}$$

Prin urmare, expresiile inducţiei electrice şi intensităţii câmpului electric într-un punct oarecare, situat la distanţa $r > a$ de centrul sferei încărcate, sunt:

$$D = \rho_v \frac{a^3}{3r^2}$$

$$E = \rho_v \frac{a^3}{3\varepsilon_0 r^2}$$

Indiferent de regimul de desfăşurare în timp a fenomenelor electromagnetice, în orice punct şi în orice moment, între mărimile de stare locală $\vec{B}$ şi $\vec{H}$, ale câmpului magnetic, şi magnetizaţia $\vec{M}$, a mediului, există relaţia:

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$$

$$\vec{B} = \mu_0[\vec{H} + \vec{M}_t(\vec{H}) + \vec{M}_p] = \mu_0[\vec{H} + \vec{M}_t(\vec{H})] + \mu_0\vec{M}_p$$

$\vec{M}_p$ - magnetizaţie permanenta.

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}_t) = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} = \mu_0\mu_r\vec{H} = \mu\vec{H}$$

$\mu_r = 1 + \chi_m$ - permeabilitatea magnetică relativă a mediului (adimensională).

$\mu = \mu_0\mu_r$ - permeabilitatea magnetică absolută a mediului $\left[\frac{H}{m}\right]$ (ca μ_0).

Considerând regimul staţionar, în care tensiunea în lungul conductorului u_{12} este egală cu tensiunea la borne U_b şi legea lui Ohm pentru o latură pasivă de circuit , expresia poate fi scrisă şi sub forma

$$P = U_b I = RI^2 = \frac{U_b^2}{R} \cdot \qquad (2.59)$$

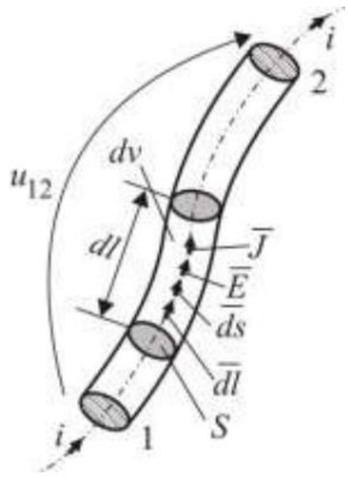

Fig. 2.16

Unitatea de măsură pentru putere se numeşte *watt [W]*. Energia cedată conductorului parcurs de curent într-un interval de timp $\Delta t = t_2 - t_1$ se exprimă sub forma

$$W = \int_{t_1}^{t_2} P\, dt \cdot \qquad (2.60)$$

Unitatea de măsură pentru energie se numeşte *joule* [1J = 1Ws]. În electrotehnică se foloseşte frecvent *kilowattora* [1 kWh = 3,6 . 10^6J].

În cazul în care intervine şi un câmp electric imprimat sau asocierea formei integrale a legii conducţiei rezultă:

$$P = Ri^2 - u_e i \cdot \qquad (2.61)$$

Utilizând teorema lui Ampère, expresia inducţiei magnetice în punctul precizat devine:

$$\vec{B} = \mu_0 \frac{1}{2\pi r} \vec{u}$$

$\vec{u}$ - versorul tangentei la cercul de rază r ce reprezintă o linie de camp.

Se consideră un mediu omogen, izotrop şi liniar, fără polarizaţie, respectiv magnetizaţie permanente, fără câmpuri electrice imprimate, pentru care sunt valabile relaţiile:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

Admiţând că nu există distribuţii de sarcină electrică ($\rho_v = 0$), ecuaţiile lui Maxwell, stabilite pentru medii în repaus şi fără discontinuitate, se scriu în forma:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \sigma \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Pe de altă parte, din dezvoltarea dublului produs vectorial se obţine relaţia:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E}$$

în care s-a avut în vedere că $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ si s-a notat cu Δ operatorul laplace vectorial.

$$\Delta \vec{E} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\Delta \vec{H} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

iar pentru cazul unui mediu conductor, la care se poate neglija curentul de deplasare $\left(\varepsilon \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0\right)$, se obţin ecuaţii cu derivate parţiale, de tip parabolic:

$$\Delta \vec{E} = \sigma\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\Delta \vec{H} = \sigma\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

Într-un regim permanent sinusoidal de pulsaţie ω, utilizând reprezentarea în complex, ecuaţiile vectoriale corespunzătoare celor două cazuri particulare devin:

- pentru mediu dielectric ideal:

$$\Delta \underline{\vec{E}} + \omega^2 \mu\varepsilon \underline{\vec{E}} = 0$$

$$\Delta \underline{\vec{H}} + \omega^2 \mu\varepsilon \underline{\vec{H}} = 0$$

- pentru mediu conductor ideal:

$$\Delta \underline{\vec{E}} = j\omega\mu\sigma \underline{\vec{E}}$$

$$\Delta \underline{\vec{H}} = j\omega\mu\sigma \underline{\vec{H}}$$

Se consideră în continuare cazul undei electromagnetice plane uniforme care se propagă într-un dielectric ideal (σ = 0), omogen, izotrop şi linear. Admiţând direcţia vectorului $\vec{H}$ (care nu se modifică în cursul propagării undei) după axa Oz se poate scrie:

$$\nabla \times \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Ecuaţiile de undă sunt de forma ecuaţiei hiperbolice:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

ale cărei soluţii sunt funcţii scalare care depind de x şi t prin intermediul unei combinaţii liniare şi omogene $u = t \mp x / v_u$.

$$f = f(u) = f\left(t \mp \frac{x}{v_u}\right)$$

Funcţia de mai sus este o soluţie a ecuaţiei precedente numai dacă:

$$v_u^2 = \frac{1}{\varepsilon\mu}$$

respectiv

$$v_u = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

v_u - viteza de fază a undei.

$$\zeta = \frac{E_d}{H_d} = -\frac{E_i}{H_i} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \qquad \left[\frac{V/_m}{A/_m} = \frac{V}{A} = \Omega\right]$$

ζ - se numeşte impedanţă de undă a mediului.

În cazul vidului:

$$\zeta_0 = 120\pi \cong 377\Omega$$

În cazul undei electromagnetice plane uniforme, energia se distribuie în mod egal între componentele electrică şi magnetică ale undei. Densităţile de energie electromagnetică în cazul undei directe şi a celei inverse sunt date de expresiile:

$$w_d = w_{e_d} + w_{m_d} = \frac{1}{2}\varepsilon E_d^2 + \frac{1}{2}\mu H_d^2 = 2w_{e_d} = 2w_{m_d}$$

$$w_i = w_{e_i} + w_{m_i} = \frac{1}{2}\varepsilon E_i^2 + \frac{1}{2}\mu H_i^2 = 2w_{e_i} = 2w_{m_i}$$

Impedanţa intrinsecă sau impedanţa de undă a mediului este o mărime complexă de forma:

$$\underline{\zeta} = \frac{\underline{E_d}}{\underline{H_d}} = -\frac{\underline{E_i}}{\underline{H_i}} = \frac{\underline{\gamma}}{j\omega\underline{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\underline{\varepsilon}}}$$

În cazul propagării undei electromagnetice într-un mediu conductor omogen, caracterizat prin permeabilitatea μ = const., conductivitatea σ = const. şi în care se neglijează curenţii de deplasare (ceea ce presupune ε = 0), constanta de propagare devine:

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = \sqrt{j\omega\mu\sigma} = \sqrt{\omega\mu\sigma}e^{j\frac{\pi}{4}} = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}(1+j)$$

astfel ca:

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \sqrt{\pi\, f\, \mu\, \sigma}$$

$f = \frac{\omega}{2\pi}$ – frecventa undei sinusoidale.

Se defineşte adâncimea de pătrundere (δ), ca fiind distanţa, măsurată de la suprafaţa conductorului, în sensul de propagare, la care amplitudinea undei scade de e ori (adică 36,8% din valoarea pe care o are la suprafaţă):

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu\sigma}}$$

- Viteza de propagare a undei in mediul conductor:

$$v_u = \frac{\omega}{\alpha} = \delta\omega$$

- lungimea de undă (distanţa parcursă într-un interval de timp egal cu o perioadă):

$$\lambda = v_u T = \frac{v_u}{f} = 2\pi\delta$$

$$\underline{\zeta} = R_u + jX_u = \frac{1}{\delta\sigma}(1 + j)$$

$$R_u = \frac{1}{\delta\sigma}$$

$$X_u = \frac{1}{\delta\sigma}$$