

COMPARAÇÃO ENTRE O CONTROLE PID E MPC

UM ESTUDO DE CASO COM *CART POLE* E *LUNAR LANDER*



Universidade Federal
de São João del-Rei

Gabriel Bueno Leandro

Orientador

Samir Ângelo Milani Martins

Universidade Federal de São João del-Rei

Departamento de Engenharia Elétrica

9 de abril de 2024

Introdução

Conceitos Preliminares

Metodologia

Resultados

Conclusão

Referências Bibliográficas

Introdução

Importância no contexto da Engenharia

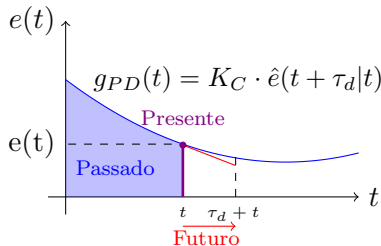
- ▶ O controlador PID é, atualmente, o mais prevalente e amplamente adotado nas malhas fechadas industriais [1];
- ▶ A ISA considera que o controle preditivo é uma ferramenta importante capaz de diferenciar entre um bom e um excelente Engenheiro de Controle;
- ▶ O Controle Preditivo Generalizado (GPC) emerge como a técnica mais amplamente reconhecida no contexto do Controle Preditivo Baseado em Modelo (MPC) [2];
- ▶ O desafio apresentado pelo pêndulo invertido (*Cart Pole*) é um clássico na engenharia de controle;
- ▶ Estudar os desafios do pouso lunar por meio da simulação no *Lunar Lander* permite entender um pouco sobre autonomia de veículos/robôs.

Conceitos Preliminares

Um controlador PID é composto por três termos ajustáveis que atuam em torno do erro do sistema:

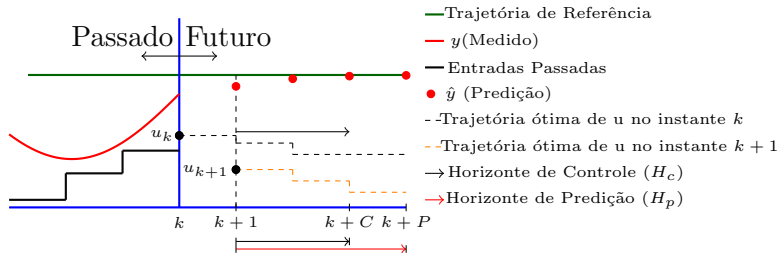
$$e(t) = r(t) - y_m(t). \quad (1)$$

$$g(t) = K_C \left(e(t) + \frac{1}{\tau_I} \cdot \int_0^t e(t) dt + \tau_D \cdot \frac{de(t)}{dt} \right). \quad (2)$$



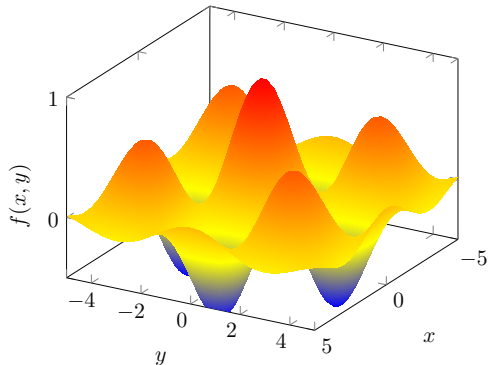
- ▶ Trajetória de referência;
- ▶ Modelo do processo;
- ▶ Otimizador;
- ▶ Processo real.

O Controle Preditivo Generalizado (GPC) se baseia em modelos paramétricos.



Método de pesquisa em grade

- ▶ Complexidade $O(n!)$;
- ▶ Mínimo/máximo global.



Algoritmo subida de encosta

- ▶ Inicialização com uma solução inicial;
- ▶ Mover-se iterativamente para uma solução vizinha mais favorável;
- ▶ Continuar até não haver mais melhorias ou um critério de parada ser alcançado.

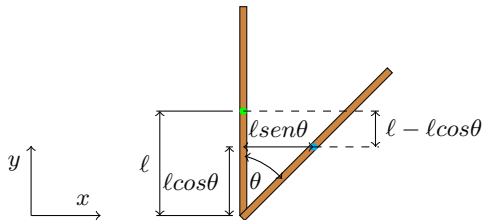
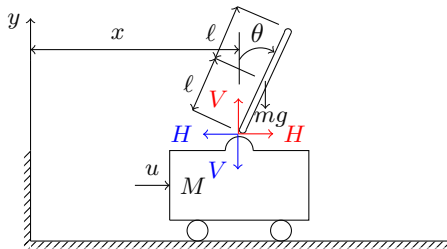
Cart Pole

Número	Observação	Mínimo	Máximo
0	Posição	-4,8	4,8
1	Velocidade linear	-Inf	Inf
2	Ângulo	$-0,418 \text{ rad } (-24^\circ)$	$0,418 \text{ rad } (24^\circ)$
3	Velocidade angular	-Inf	Inf

Lunar Lander

Número	Observação	Mínimo	Máximo
0	Coordenada x	-1,5	1,5
1	Coordenada y	-1,5	1,5
2	Velocidade linear em x	-5	5
3	Velocidade linear em y	-5	5
4	Ângulo	$-\pi \text{ } (-180^\circ)$	$\pi \text{ } (180^\circ)$
5	Velocidade angular	-5	5
6	Contato pé esquerdo	0	1
7	Contato pé direito	0	1

Metodologia



Deslocamento horizontal do carro:

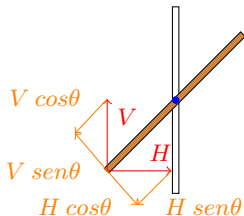
$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = u - H. \quad (3)$$

Equilíbrio das forças horizontais do pêndulo:

$$m \frac{d^2}{dt^2} (x + \ell \sin \theta) = H \Rightarrow m \frac{d^2}{dt^2} (x + \ell \theta) = H. \quad (4)$$

Equilíbrio das forças verticais do pêndulo:

$$m \frac{d^2}{dt^2} (\ell - \ell \cos \theta) = mg - V \Rightarrow 0 = V - mg. \quad (5)$$



Movimento rotacional do pêndulo:

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = V \ell \sin\theta - H \ell \cos\theta, \quad (6)$$

ou ainda:

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = V \ell \theta - H \ell. \quad (7)$$

Onde, $H = m \frac{d^2}{dt^2}(x + \ell\theta)$ e $V = mg$, assim:

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = mg\theta\ell - m \frac{d^2}{dt^2}(x + \ell\theta)\ell m. \quad (8)$$

Ao igualar a zero, tem-se:

$$(I + m\ell^2) \frac{d^2\theta}{dt^2} + m\ell \frac{d^2x}{dt^2} - mg\ell\theta = 0. \quad (9)$$

Substituindo a expressão de H em $M \frac{d^2x}{dt^2} = u - H$, chega-se:

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = u - m \frac{d^2}{dt^2}(x + \ell\theta). \quad (10)$$

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} + m \frac{d^2}{dt^2} (x + \ell \theta) = u. \quad (11)$$

Ao considerar a transformada de Laplace com condições iniciais nulas:

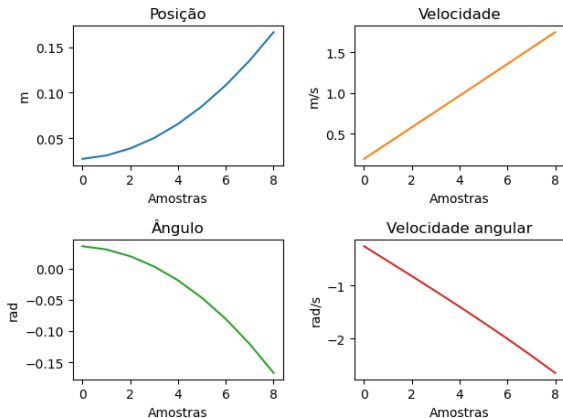
$$(I + m\ell^2)s^2\Theta(s) + m\ell s^2 X(s) - mg\ell\Theta(s) = 0, \quad (12)$$

$$(M + m)s^2 X(s) + m\ell s^2 \Theta(s) = U(s). \quad (13)$$

Após algumas manipulações, chega-se à FT [3]:

$$\frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{m\ell}{(m^2\ell^2 - (M + m)(I + m\ell^2))s^2 + (M + m)mg\ell}. \quad (14)$$

Força constante à direita:

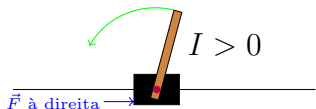


Aceleração linear:

$$\ddot{x} = 0,19524 \frac{m}{s^2}. \quad (15)$$

Aceleração angular:

$$\ddot{\theta} = -0,29775 \frac{rad}{s^2}. \quad (16)$$



Considere:

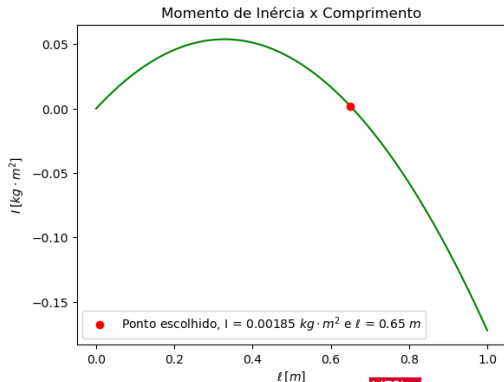
$$(I + m\ell^2) \frac{d^2\theta}{dt^2} + m\ell \frac{d^2x}{dt^2} - mg\ell\theta = 0. \quad (17)$$

Sendo $\theta \approx 0$:

$$(I + m\ell^2) \frac{d^2\theta}{dt^2} = -m\ell \frac{d^2x}{dt^2}, \quad (18)$$

numericamente:

$$I = \frac{0,0976\ell - 0,1488\ell^2}{0,29775}. \quad (19)$$



Agora, será estimada a massa do carro:

$$(M + m)\frac{d^2x}{dt^2} + m\ell\frac{d^2\theta}{dt^2} = u, \quad (20)$$

isolando M :

$$M = \frac{u - m\ell\ddot{\theta} - m\ddot{x}}{\ddot{x}}, \quad (21)$$

como $m = 0,5kg$, $u = 1N$ e $\ell = 0,65m$,
tem-se:

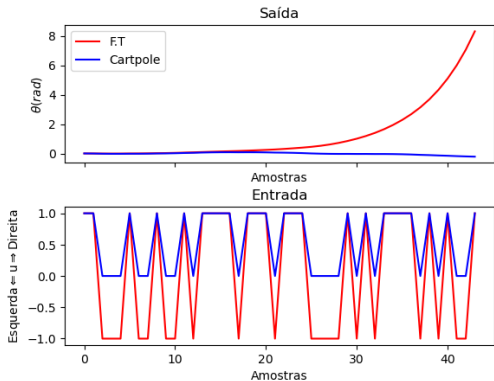
$$M = 5,11754kg. \quad (22)$$

Os resultados encontrados/fixados foram:

$M[kg]$	$m[kg]$	$\ell[m]$	$I[kg \cdot m^2]$
5,11754	0,5	0,65	$1,8537 \times 10^{-3}$

Ao substituí-los na FT da Equação 14,
chega-se:

$$\frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{0,325}{-1,0914s^2 + 17,9101}. \quad (23)$$



As acelerações \ddot{x} e $\ddot{\theta}$ serão multiplicadas por k . Considere a Equação de Inércia:

$$(I + m\ell^2) \frac{d^2\theta}{dt^2} k = -m\ell \frac{d^2x}{dt^2} k. \quad (24)$$

Se $\frac{d\vec{a}}{dt} > 0$ e $\vec{F} = \text{cte}$, então $\frac{dM}{dt} < 0$:

$$M = \frac{u - km\ell\ddot{\theta} - km\ddot{x}}{k\ddot{x}}. \quad (25)$$

A FT não conseguiu representar o sistema adequadamente.

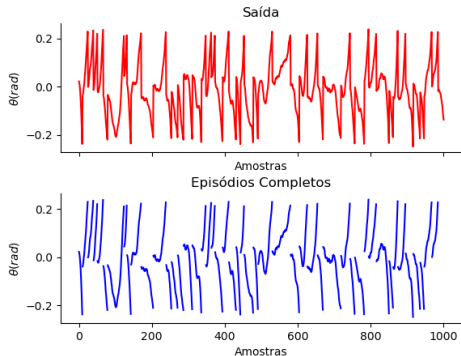
Onde $M > 0$, logo:

$$0 < \frac{u - km\ell\ddot{\theta} - km\ddot{x}}{k\ddot{x}}, \quad (26)$$

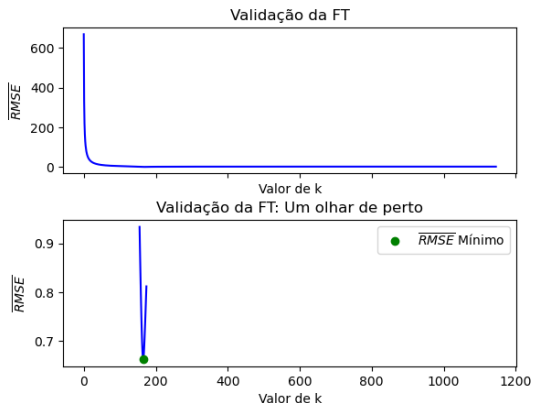
ou ainda:

$$0 < 1 + 0,096768k - 0,09762k, \quad (27)$$

chega-se a $k < 1174,74$, o valor de k , ele será variado de 1 a 1174.



$$\overline{RMSE}_k = \frac{1}{47} \sum_{ep=1}^{47} \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N (y_{ep}(i) - \hat{y}_{ep}(i))^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (y_{ep}(i) - \bar{y}_{ep})^2}}. \quad (28)$$



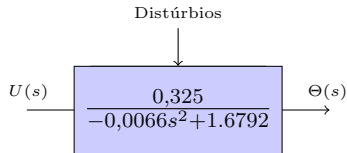
Ao tomar $k = 165$, obtém-se uma FT que responde melhor aos estímulos da entrada.

A nova massa passa a ser:

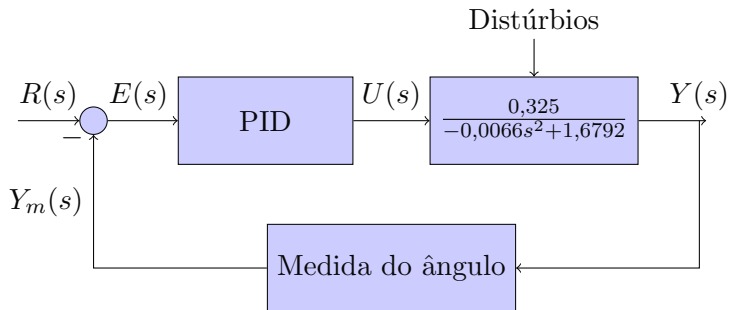
$$M = 0,02668kg, \quad (29)$$

com os novos valores dos parâmetros, a FT passa a ser:

$$\frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{0,325}{-0,00661s^2 + 1,67919}. \quad (30)$$



Para estabilizar o sistema, será utilizado um controlador PID:



Considere a expressão do PID:

$$g(t) = K_C \cdot e(t) + \frac{K_C}{\tau_I} \cdot \int_0^t e(t) dt + K_C \cdot \tau_D \cdot \frac{de(t)}{dt}, \quad (31)$$

o τ_i foi fixado em 2 e τ_d em 0,25.

O pacote GEKKO [4] fornecerá o valor de K_C ao minimizar:

$$e(t) = r(t) - y_m(t). \quad (32)$$

Os parâmetros encontrados foram:

Termos	Relação com K_C	Valor
Proporcional	K_C	0,5
Integral	$\frac{K_C}{\tau_I}$	0,25
Derivativo	$K_C \cdot \tau_D$	0,125

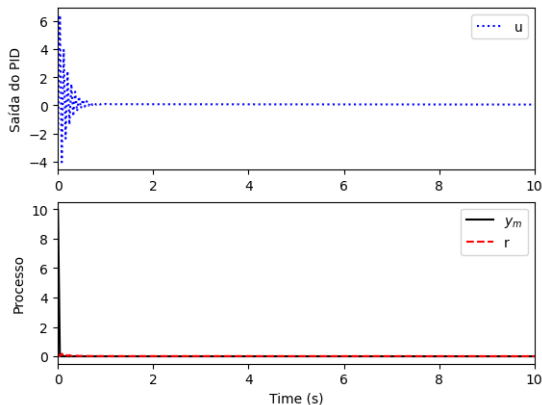
Ao substituir os valores, obtém-se:

$$g(t) = 0,5 \cdot e(t) + 0,25 \cdot \int_0^t e(t)dt + 0,125 \cdot \frac{de(t)}{dt}. \quad (33)$$

A expressão completa para o controlador PID é:

$$u_n = 0,5 \cdot \theta_n + 0,25 \cdot \sum_{i=0}^n \theta_i + 0,125 \cdot \omega_n. \quad (34)$$

É fundamental realizar uma análise gráfica da saída do GEKKO.



O primeiro passo é definir a trajetória de referência:

$$w = [0, 0, 0, \dots, n_{etapas}]. \quad (35)$$

Sendo a Função Custo utilizada:

$$J(k) = \sqrt{\sum_{j=d}^{h_p} [\hat{y}(j+k|k) - w(j+k)]^2}. \quad (36)$$

Deve-se também, definir todos os Δu possíveis, logo:

$$\begin{aligned} u_{k-1} = 1 \text{ e } u_k = -1 &\Rightarrow \Delta u = -2 \\ u_{k-1} = 1 \text{ e } u_k = 1 &\Rightarrow \Delta u = 0 \\ u_{k-1} = -1 \text{ e } u_k = -1 &\Rightarrow \Delta u = 0 \\ u_{k-1} = -1 \text{ e } u_k = 1 &\Rightarrow \Delta u = 2 \end{aligned} \quad (37)$$

A definição do problema de otimização é a seguinte:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & J(k) = \sqrt{(\sum_{j=d}^{h_p} [\hat{y}(j+k|k) - w(j+k)])^2} \\ \text{sujeito a:} \quad & \Delta u = \{-2, 0, 2\} \end{aligned} \quad (38)$$

Para estimar o modelo ARX, utilizou-se o sinal PRBS [6] e o SysIdentPy [7]:

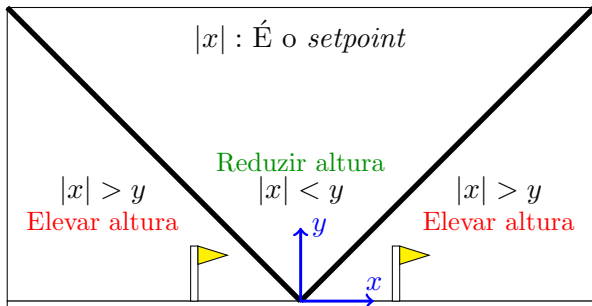
$$y(k) = 2 \cdot y(k-1) - 0,993 \cdot y(k-2) - 0,005 \cdot u(k-1), \quad (39)$$

$$y(k) = 3 \cdot y(k-1) - 2,993 \cdot y(k-2) + 0,993 \cdot y(k-3) - 0,005 \cdot \Delta u(k-1). \quad (40)$$

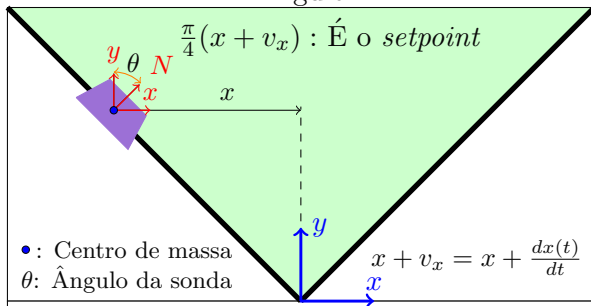
$h_c = h_p$	2	3	4	5	6	7
Tempo [s]	t	$1,071t$	$1,218t$	$1,8164t$	$3,582t$	$9,187t$

Os *setpoints* utilizados para a implementação do controle PD foram:

Altura



Ângulo



A expressão do controlador PD para a altura é a seguinte:

$$y_{PD} = k_{p1} \cdot (|x| - y) + k_{d1} \cdot v_y. \quad (41)$$

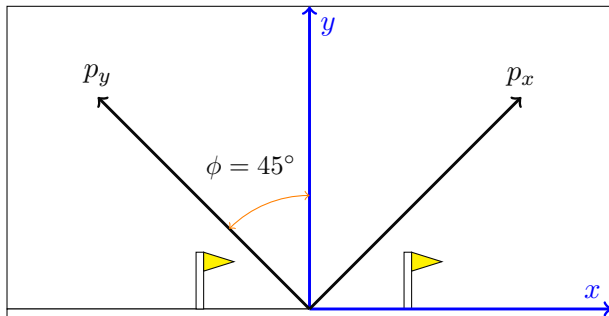
A expressão do controlador PD para o ângulo é a seguinte:

$$\theta_{PD} = k_{p2} \cdot \left[\frac{\pi}{4} \cdot (x + v_x) - \theta \right] + k_{d2} \cdot v_\theta, \quad (42)$$

ao empregar a técnica de Otimização por Subida de Encosta, obtém-se:

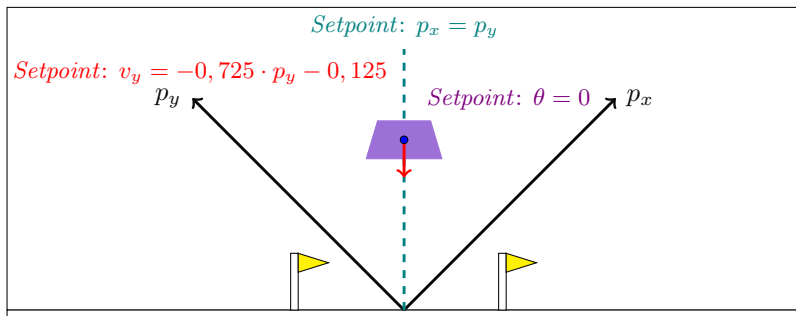
k_{p1}	k_{d1}	k_{p2}	k_{d2}
9,0565	-9,9488	11,9271	-5,0963

Para facilitar nas trajetória de referência, o plano cartesiano foi rotacionado em 45° :



$$\begin{aligned} p_x &= x \cdot \cos 45^\circ + y \cdot \sin 45^\circ \\ p_y &= -x \cdot \sin 45^\circ + y \cdot \cos 45^\circ \end{aligned}$$

Com o plano cartesiano rotacionado, é possível estimar três trajetórias de referência.



Neste contexto lunar, u substitui Δu devido à variação na penalização dos propulsores. Quando $h_c < h_p$, u é mantido em 0 para maximizar a recompensa do ambiente.

A função de custo para o *Lunar Lander* foi definida como:

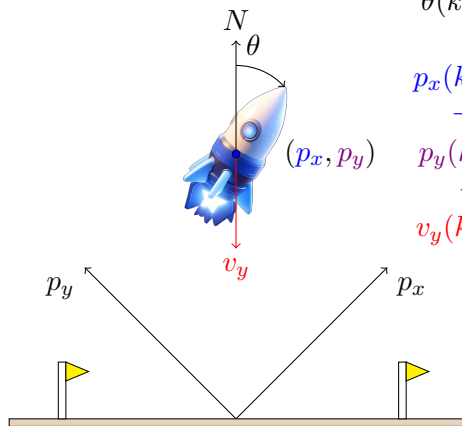
$$J(k) = \sum_{j=d}^{h_p} [\{\alpha \cdot (\hat{p}_x(j+k|k) - \hat{p}_y(j+k|k)) - \beta \cdot \hat{\theta}(j+k|k) + \delta \cdot (\hat{v}_y(j+k|k) - 0,725 \cdot \hat{p}_y(j+k|k) - 0,125)\}^2]^{\frac{1}{2}} \quad (43)$$

sujeito a:

$$Propulsor = \begin{cases} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{cases} \begin{matrix} u_1 \Rightarrow \text{Propulsor principal} \\ u_2 \Rightarrow \text{Propulsor auxiliar} \end{matrix}$$

Horizonte de controle: 2 ($h_c = 2$) e horizonte de predição: 4 ($h_p = 4$). Correlação das saídas com entrada específica foram identificadas durante a obtenção do modelo:

Saída	p_x	θ	p_y	v_y
Entrada	u_2	u_2	u_1	u_1



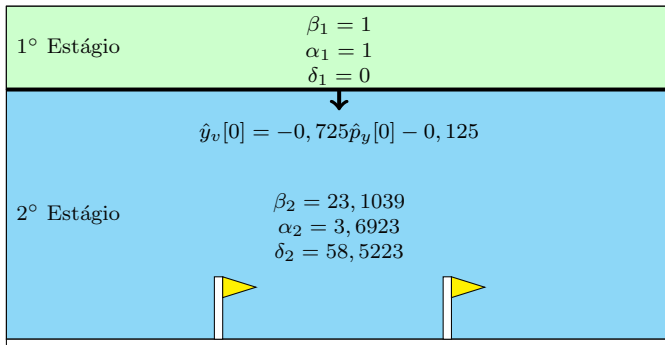
$$\theta(k) = -1,9891 \cdot \theta(k-1) + 0,989 \cdot \theta(k-2) \\ + 1,7201 \cdot 10^{-4} \cdot u_2(k-1)$$

$$p_x(k) = 1,9986 \cdot p_x(k-1) - 0,9986 \cdot p_x(k-2) \\ - 7,3642 \cdot 10^{-5} \cdot u_2(k-1) - 4,7979 \cdot 10^{-4}$$

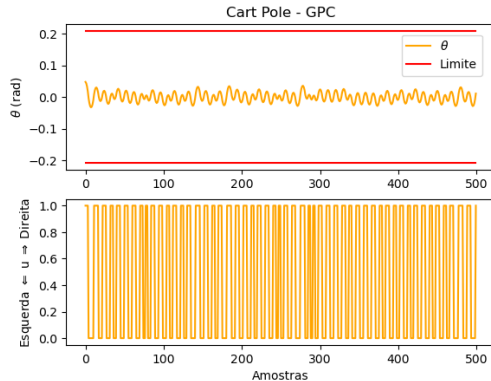
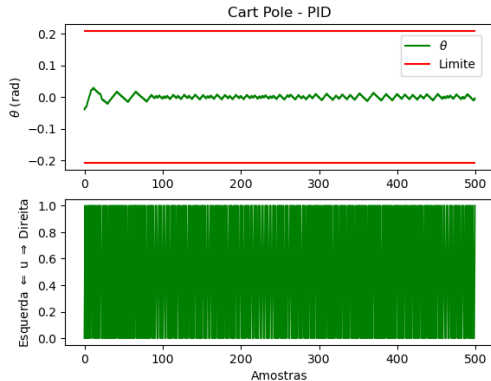
$$p_y(k) = 1,9928 \cdot p_y(k-1) - 0,99279 \cdot p_y(k-2) \\ + 8,1745 \cdot 10^{-5} \cdot u_1(k-1) - 3,9457 \cdot 10^{-4}$$

$$v_y(k) = 1,2503 \cdot v_y(k-1) - 0,25137 \cdot v_y(k-2) \\ - 1,3791 \cdot 10^{-2} \cdot u_1(k-1) + 2,3644 \cdot 10^{-3}$$

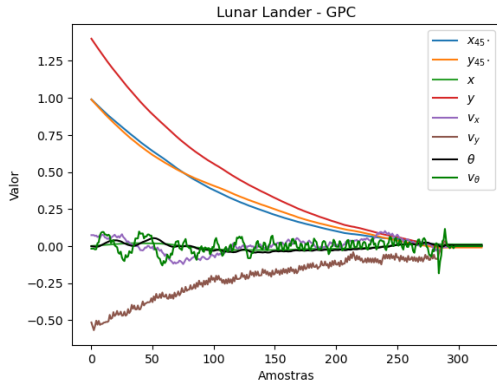
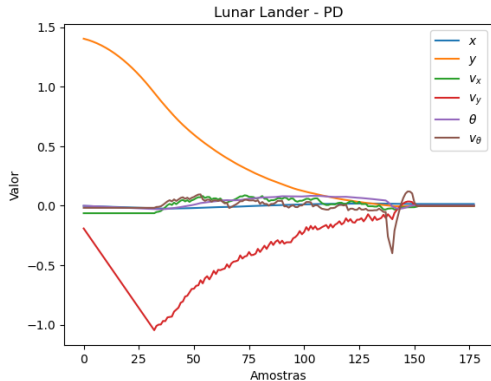
Pesos utilizados:



Resultados



Controle	$\bar{\theta}$	θ_{max}	Etapas	Tempo de Execução [s]
PID	$1,1053 \cdot 10^{-5}$	$4,6395 \cdot 10^{-2}$	5000	9,0421
GPC	$-9,7546 \cdot 10^{-5}$	$7,3337 \cdot 10^{-2}$	5000	15,1423



Controle	Pouso	Pouso com +200 pontos	Etapas	Tempo [s]	Média
PD	765	764	177577	1086,6976	217,4862
GPC	870	808	340369	1017,0346	209,1881

Conclusão

- ✓ Ambos os controladores demonstraram eficácia no controle tanto do *Cart Pole* quanto do *Lunar Lander*;
- ✓ O controlador PID destacou-se pela sua eficácia no *Cart Pole*, enquanto o GPC mostrou-se mais eficiente no *Lunar Lander*;
- ✓ Este trabalho revelou especificidades distintas de cada técnica, oferecendo uma aplicação prática e comparativa entre elas.

- [1] P. DEULKAR AND S. HANWATE, “ANALYSIS OF PSO-PID CONTROLLER FOR CSTR TEMPERATURE CONTROL,” IN *2020 IEEE First International Conference on Smart Technologies for Power, Energy and Control (STPEC)*, PP. 1–6, IEEE, 2020.
- [2] C. B. ALBA AND I. C. D. E. EN AUTOMATICA, “CONTROL PREDITIVO: METODOLOGIA, TECNOLOGIA Y NUEVAS PERSPECTIVAS,” *Universidad de Sevilla, Aguadulce, Almeria*, 2000.
- [3] OGATA AND KATSUHIKO, *Engenharia de controle moderno*. PRENTICE HALL DO BRASIL, 5 ED., 2010.
- [4] L. BEAL, D. HILL, R. MARTIN, AND J. HEDENGREN, “GEKKO OPTIMIZATION SUITE,” *Processes*, VOL. 6, NO. 8, P. 106, 2018.
- [5] T. C. PRATA, “CONTROLE PREDITIVO BASEADO EM MODELO (MPC) APLICADO A UMA PLANTA DIDÁTICA,” MASTER’S THESIS, INSTITUTO FEDERAL DE SÃO PAULO, 2020.
- [6] L. A. AGUIRRE, *Introdução à identificação de sistemas—Técnicas lineares e não-lineares aplicadas a sistemas reais*. EDITORA UFMG, 2004.
- [7] W. R. LACERDA, L. P. C. DA ANDRADE, S. C. P. OLIVEIRA, AND S. A. M. MARTINS, “SYSIDENTPY: A PYTHON PACKAGE FOR SYSTEM IDENTIFICATION USING NARMAX MODELS,” *Journal of Open Source Software*, VOL. 5, NO. 54, P. 2384, 2020.

Muito Obrigado!