Gabarito - Teste2

1. Considere uma amostra aleatória de tamanho n de uma população com função densidade de probabilidade

$$f(x) = \frac{3x^2}{\theta^3} I_{[0,\theta]}(x). \ \ \theta > 0$$

a. Encontre um estimador de θ pelo método dos momentos.

b. Calcule a esperança do estimador

c. Calcule o erro quadrático médio do estimador.

Solução

a. Para encontrar o estimador via dos método dos momentos, precisamos primeiramente encontrar $\mu_1 = E(X)$ (o primeiro momento). Vamos então encontrar $E(X)$.

Como X é uma v.a. contínua, sua esperança é dada por

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

Como nesse caso $f(x) = \frac{3x^2}{\theta^3} I_{[0,\theta]}(x)$, temos então que

$$E(X) = \int_0^\theta x \frac{3x^2}{\theta^3} dx = \left[\frac{3x^4}{\theta^3 4} \right] \Bigg|_0^\theta = \frac{3\theta}{4}$$

Dado então que $\mu_1 = E(X) = \frac{3\theta}{4}$ o próximo passo consiste em igualar μ_1 ao primeiro momento amostral $M_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^1 = \bar{X}$. Portanto, devemos ter então

$$\hat{\mu_1} = \bar{X} \Rightarrow \frac{3\theta}{4} = \bar{X} \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{4\bar{X}}{3}.$$

Ou seja, o estimador de θ via método dos momentos é $\boxed{\hat{\theta} = \frac{4\bar{X}}{3}}$.

b. Como o nosso estimador é $\hat{\theta} = \frac{4\bar{X}}{3}$, a esperança do estimador, $E(\hat{\theta})$, é

$$E(\hat{\theta}) = E(\frac{4\bar{X}}{3}) = \frac{4}{3}E(\bar{X}).$$

Sabemos que $E(\bar{X}) = \frac{1}{n}E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)$ e como $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são iid, $E(\bar{X}) = \frac{1}{n}nE(X) = \frac{3\theta}{4}$.

Portanto, temos finalmente que

$$\boxed{E(\hat{\theta}) = \frac{4}{3}\frac{3\theta}{4} = \theta}$$

c. O erro quadrático médio é definido como

$$EQM(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - \theta)^2] = Var(\hat{\theta}) + (Vies(\hat{\theta}, \theta))^2$$

Mas, nesse caso, $Vies(\hat{\theta}, \theta) = E(\hat{\theta}) - \theta = 0$. Ou seja, $EQM(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta})$. Como $\hat{\theta} = \frac{4\bar{X}}{3}$, temos que

$$Var(\hat{\theta}) = Var(\frac{4\bar{X}}{3}) = \frac{16}{9}Var(\bar{X}) = \frac{16}{9n^2}Var(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{16}{9n}Var(X).$$

Vamos portanto calcular $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$. Já sabemos que $E(X) = \frac{3\theta}{4}$, precisamos então só de $E(X^2)$. Mas

$$E(X^2) = \int_0^\theta x^2 \frac{3x^2}{\theta^3} dx = \left[\frac{3x^5}{\theta^3 5}\right]\Bigg|_0^\theta = \frac{3\theta^2}{5}.$$

Portanto,

$$Var(X) = \frac{3\theta^2}{5} - \left[\frac{3\theta}{4}\right]^2 = \frac{3\theta^2}{5} - \frac{9\theta^2}{16} = \frac{3\theta^2}{80}.$$

Finalmente, então,

$$\boxed{EQM(\theta^2) = \frac{16}{9n}\frac{3\theta^2}{80} = \frac{\theta^2}{15n}}$$