TRABALHO 1 (ZEROS DE FUNÇÕES) - CÁLCULO NUMÉRICO COMPUTACIONAL
CURSO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO, 1º SEM/2025, PROF. ROGÉRIO L. RIZZI

Grupo: 1
Alunos(as): Pedro Miotto Mujica, Gabriel Costa de Moraes, Thiago Oliveira Dupim, Vinicius Castamann Giongo

ATENÇÃO: LEIA ATENTAMENTE INSTRUÇÕES ABAIXO.

- **Escreva precisa e acuradamente os passos necessários para responder corretamente as questões, justificando e discutindo os argumentos ou métodos empregados para resolver cada item. As interpretações delas é parte integrante não são aceitas apenas as respostas, sendo necessário o desenvolvimento solicitado.**
- **Os relatórios deverão ser entregues em documento em formato .pdf, não sendo aceitos outros padrões. O documento deve conter respostas às questões que sejam objetivamente identificáveis, e que estejam legíveis e organizadas. Pode-se copiar as saídas no console do Scilab para inserir as respostas se e quando for o caso. Os códigos fontes devem ser enviados com o arquivo no modo. compactado identificado como "TRAB1-ZEROS-Gi-Pj.zip(ou rar)".**
- **Para o cálculo de derivadas utilize, querendo, o software da Wolframalpha (Mathematica) https://www.wolframalpha.com/input?i=derivative**

..TRABALHO 1 - ZEROS REAIS DE FUNÇÕES REAIS...

NA CORREÇÃO DOS EXERCÍCIOS, PARTES 1 E 2, É VERIFICADO:

1) ANÁLISE POR INSPEÇÃO (DOS SINAIS) PARA DETERMINAR OS INTERVALOS CANDIDATOS
2) GRÁFICO DA FUNÇÃO NO DOMÍNIO DE DEFINIÇÃO DA FUNÇÃO (TODO O INTERVALO)
3) ANÁLISE TEÓRICA DA EXISTÊNCIA E UNICIDADE DA SOLUÇÃO NO INTERVALO ESCOLHIDO
4) USO DOS MÉTODOS DE APROXIMAÇÃO DA: A) BISSECÇÃO, B) FALSA POSIÇÃO, C) NEWTON-RAPHSON, D) SECANTE
5) VERIFICAÇÃO DA FUNÇÃO NA APROXIMAÇÃO OBTIDA.

//

PARTE 1: Realize corretamente o solicitado usando os algoritmos discutidos, que você deve aperfeiçoar e modificar quando e se for necessário.

....

Problema 1.1: Obter uma aproximação às raízes das funções:

Solução:

....

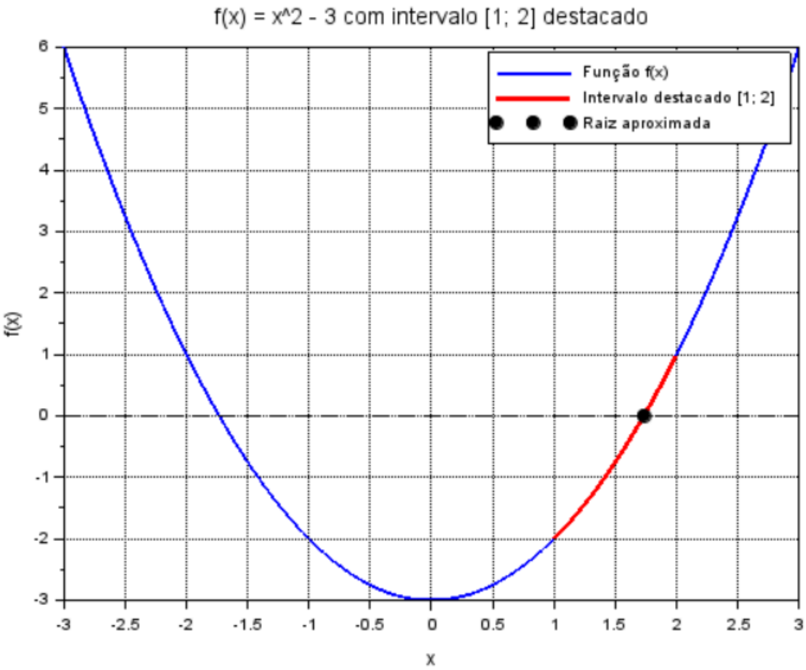
1. $f(x) = x^2 - 3$ **no intervalo** $[1, 2]$, **com** $\epsilon = 10^{-6}$. **Solução:**

→ **Fazendo um estudo de sinal no intervalo [-7, +2] ⊂ ℝ obtém-se:**

x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	+1	+2
f(x)	-52	-39	-28	-19	-12	-7	-41	-3	-2	+1

- **Como no subintervalo [1; 2] a função muda de sinal, ele é candidato a conter as raízes**

→ **Plotando a função no intervalo [1, 2] marcado em vermelho obtém-se:**



- que corrobora que as eventuais raízes pertencem aos subintervalos indicados no item 1.)

→ Escolhendo o subintervalo [1; 2] para o estudo numérico, para mostrar a existência da raiz nesse intervalo deve-se mostrar que $\mathbf{f(1)} \cdot \mathbf{f(2)} < \mathbf{0}$, e para mostrar que é única neste subintervalo deve- se mostrar que $\mathbf{f^1}(1) \cdot \mathbf{f^1}(2) > \mathbf{0}$. Como $\mathbf{f}(1) = 1^2 - 3 = \text{-}2$ e $\mathbf{f}(2) = 2^2 - 3 = +1$ de modo que $\mathbf{f(0)} \cdot \mathbf{f(1)} = \text{-}2 \cdot (+1) = -2 < \mathbf{0}$. Analogamente, $\mathbf{f^1}(1) = \mathbf{3} \cdot 1^2 - \mathbf{9} = -6$ e $\mathbf{f^1}(2) = \mathbf{3} \cdot 2^2 - \mathbf{9} = +3$, de modo que $\mathbf{f^1(0)} \cdot \mathbf{f^1(1)} = (-6) \cdot (+3) = \text{-}18 > \mathbf{0}$. Assim existe uma única raiz no subintervalo escolhido.

→ Para o subintervalo [1, 2] obtém-se, via métodos de refinamento, que:

----------Método da bisseção-------

k	xm	abs(bk-ak)	f(xm)
1	1.500000	1.000000	-0.750000
2	1.750000	0.500000	0.062500
3	1.625000	0.250000	-0.359375
4	1.687500	0.125000	-0.152344
5	1.718750	0.062500	-0.045898
6	1.734375	0.031250	0.008057
7	1.726562	0.015625	-0.018982
8	1.730469	0.007812	-0.005478
9	1.732422	0.003906	0.001286
10	1.731445	0.001953	-0.002097
11	1.731934	0.000977	-0.000406
12	1.732178	0.000488	0.000440
13	1.732056	0.000244	0.000017
14	1.731995	0.000122	-0.000195
15	1.732025	0.000061	-0.000089
16	1.732040	0.000031	-0.000036
17	1.732048	0.000015	-0.000010
18	1.732052	0.000008	0.000004
19	1.732050	0.000004	-0.000003
20	1.732051	0.000002	0.000000

Aproximadamente: 1.732051 é a raiz, com 20 iterações

*** APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DA FALSA POSIÇÃO ***

k	xk	abs(xb-xa)	f(xk)
01	1.666667	1.000000	-0.222222
02	1.727273	0.333333	-0.016529
03	1.731707	0.272727	-0.001190
04	1.732026	0.268293	-0.000085
05	1.732049	0.267974	-0.000006
06	1.732051	0.267951	-0.000000

Aprox. "1.732051" à raiz, com "06" iterações

*** APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON ***

k	xk	abs(xk-x0)	f(xk)	f1(xk)
01	1.750000	0.250000	0.062500	3.500000
02	1.732143	0.017857	0.000319	3.464286
03	1.732051	0.000092	0.000000	3.464102

Aprox. "1.732051" à raiz, com "03" iterações

*** APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DA SECANTE ***

k	xk	abs(xk-x1)	f(xk)
01	1.727273	0.060606	-0.016529
02	1.732143	0.004870	0.000319
03	1.732051	0.000092	-0.000000

Aproximação "1.732051" à raiz, com "03" iterações

→ Como o valor médio das raízes é 1,732051, então f(1,732051) = (1,732051)^2 – 3 = 2,999999 – 3 = $-1{,}0 \cdot 10^{-6} \approx 0$, o que mostra que a solução aproximada é suficientemente boa para os mais diversos propósitos.

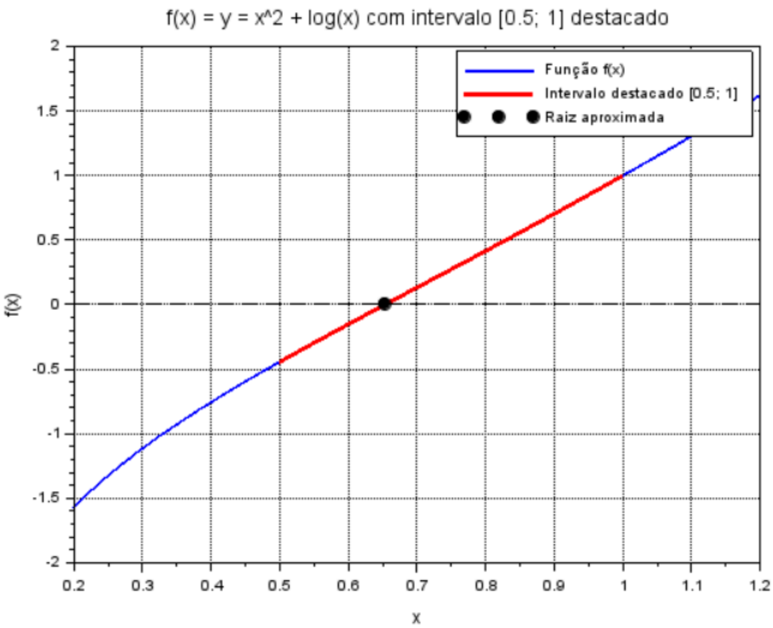
2. $g(x) = x^2 + ln\,(x)$ **no intervalo** $[0, 5; 1]$**, com** $\epsilon = 10^{-5}$**.**

→ **Fazendo um estudo de sinal no intervalo [0, 4] ⊂ ℝ obtém-se:**

x	+0,1	+0,2	+0,3	+0,4	+0,5	+1	+2	+3	+4	+5
g(x)	-2,29	-1,56	-1,11	-0,75	-0,44	+1	+4,69	+10,09	+17,38	+26,60

- **Como no subintervalo [0,5; 1] a função muda de sinal, ele é um candidato a conter a raíz.**

→ **Plotando a função no intervalo [0,5; 1] marcado em vermelho obtém-se:**



- **que corrobora que as eventuais raízes pertencem aos subintervalos indicados no item 1.)**

→ **Escolhendo o subintervalo [0,5; 1] para o estudo numérico, para mostrar a existência da raiz nesse intervalo deve-se mostrar que $f(0,5) \cdot f(1) < 0$, e para mostrar que é única neste subintervalo deve- se mostrar que $f^1(0,5) \cdot f^1(1) > 0$. Como g(0,5) = (0,5)^2 + ln(0,5) = 0,25 + (−0,6931) ≈ −0,4431 e g(1) = (1)^2 + ln(1) = 1 + 0 = 1, de modo que g(0,5) · g(1) ≈ (−0,4431) · (+1) = −0,4431 < 0. Analogamente, g1(0,5) = 2 · 0,5 + 1 / 0,5 = 1 + 2 = 3 e g1(1) = 2 · 1 + 1 / 1 = 2 + 1 = 3, de modo que g1(0,5) · g1(1) = 3 · 3 = 9 > 0. Assim é possível afirmar que existe uma única raiz no subintervalo escolhido.**

→ **Para o subintervalo [0,5; 1] obtém-se, via métodos de refinamento, que:**

```
*** APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DA BISSEÇÃO ***

PROBLEMA 1.1 NÚMERO 1
PROBLEMA 1.1 NÚMERO 2

  k |      xm      | abs(bk-ak) |    f(xm)      |
-----------------------------------------------
  1 |   0.750000 |   0.500000 |   0.274818    |
  2 |   0.625000 |   0.250000 |  -0.079379    |
  3 |   0.687500 |   0.125000 |   0.097963    |
  4 |   0.656250 |   0.062500 |   0.009451    |
  5 |   0.640625 |   0.031250 |  -0.034911    |
  6 |   0.648438 |   0.015625 |  -0.012718    |
  7 |   0.652344 |   0.007812 |  -0.001631    |
  8 |   0.654297 |   0.003906 |   0.003910    |
  9 |   0.653320 |   0.001953 |   0.001140    |
 10 |   0.652832 |   0.000977 |  -0.000246    |
 11 |   0.653076 |   0.000488 |   0.000447    |
 12 |   0.652954 |   0.000244 |   0.000101    |
 13 |   0.652893 |   0.000122 |  -0.000073    |
 14 |   0.652924 |   0.000061 |   0.000014    |
 15 |   0.652908 |   0.000031 |  -0.000029    |
 16 |   0.652916 |   0.000015 |  -0.000008    |
-----------------------------------------------
Aproximadamente: 0.652916 é a raiz, com 16 iterações
```

```
*** APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DA FALSA-POSIÇÃO ***

PROBLEMA 1.1 NÚMERO 2
 k  |      xk      | abs(b-a)     |    f(xk)    |
 01 |   0.653535 |   0.500000 |   0.001749 |
 02 |   0.652931 |   0.153535 |   0.000036 |
 03 |   0.652919 |   0.152931 |   0.000001 |

Aproximação "0.652919" à raiz, com "03" iterações
```

```
*** APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DA SECANTE ***

 k  |      xk      | abs(xk-x1) |    f(xk)    |
 01 |   0.652928 |   0.000607 |   0.000027 |
 02 |   0.652919 |   0.000009 |  -0.000000 |

Aproximação "0.652919" à raiz, com "02" iterações
```

```
*** APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON ***

PROBLEMA 1.1 NÚMERO 2
 k  |      xk      | abs(xk-x0)  |    f(xk)    |    f1(xk)    |
 01 |   0.653005 |   0.096995 |   0.000246 |   2.837392 |
 02 |   0.652919 |   0.000087 |  -0.000000 |   2.837422 |

Aproximação "0.652919" à raiz, com "02" iterações
```

→ **Como o valor médio das raízes é 0,652919, então g(0,652919) = (0,652919)^2 + ln(0,652919) = 0,426302 + (−0,426302) = −3,0 · 10^{-7} ≈ 0, o que mostra que a solução aproximada é suficientemente boa para os mais diversos propósitos.**

Problema 1.2: Obter uma aproximação para primeira raiz positiva da função:

Solução:

..

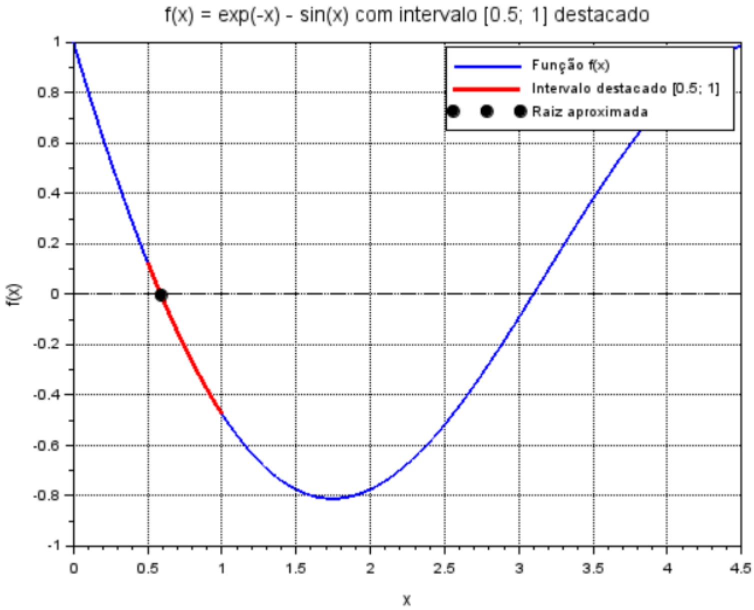
1. $f(x) = e^{-x} - sen(x)$, **com** $\epsilon = 10^{-5}$.

→ **Fazendo um estudo de sinal no intervalo [0, +4,5] ⊂ ℝ obtém-se:**

x	0	+0,5	+1	+1,5	+2	+2,5	+3	+3,5	+4,0	+4,5
f(x)	+1.0	+0.127	-0.473	-0.773	0.773	-0.515	-0.090	-0.381	-0.775	-0.989

- **Como no subintervalo [0,5; 1] a função muda de sinal, ele é candidato a conter a raíz**

→ **Plotando a função no intervalo marcado em vermelho [0,5; 1] obtém-se:**



- que corrobora que as eventuais raízes pertencem aos subintervalos indicados no item 1.)

→ Escolhendo o subintervalo [0,5; 1,0] para o estudo numérico, para mostrar a existência da raiz nesse intervalo deve-se mostrar que $f(0,5) \cdot f(1,0) < 0$, e para mostrar que é única neste subintervalo deve-se mostrar que $f_1(0,5) \cdot f_1(1,0) > 0$. Como $f(0,5) = e^{(-0,5)} - sen(0,5) \approx 0,6065 - 0,4794 = 0,1271$ e $f(1,0) = e^{(-1,0)} - sen(1,0) \approx 0,3679 - 0,8415 = -0,4736$, de modo que $f(0,5) \cdot f(1,0) \approx 0,1271 \cdot (-0,4736) = -0,0602 < 0$. Analogamente, $f_1(0,5) = -e^{(-0,5)} - cos(0,5) \approx -0,6065 - 0,8776 = -1,4841$ e $f_1(1,0) = -e^{(-1,0)} - cos(1,0) \approx -0,3679 - 0,5403 = -0,9082$, de modo que $f_1(0,5) \cdot f_1(1,0) \approx (-1,4841) \cdot (-0,9082) = 1,3476 > 0$. Assim, é possível concluir que existe uma única raiz no subintervalo escolhido [0,5; 1,0].

→ Para o subintervalo [0,5; 1] obtém-se, via métodos de refinamento, que:

*** APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DA BISSEÇÃO ***

k	xm	abs(bk-ak)	f(xm)
1	0.750000	0.500000	-0.209272
2	0.625000	0.250000	-0.049836
3	0.562500	0.125000	0.036480
4	0.593750	0.062500	-0.007221
5	0.578125	0.031250	0.014495
6	0.585938	0.015625	0.003603
7	0.589844	0.007812	-0.001817
8	0.587891	0.003906	0.000891
9	0.588867	0.001953	-0.000464
10	0.588379	0.000977	0.000213
11	0.588623	0.000488	-0.000125
12	0.588501	0.000244	0.000044
13	0.588562	0.000122	-0.000041
14	0.588531	0.000061	0.000002

Aproximadamente: 0.588531 é a raiz, com 14 iterações

*** APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DA FALSA-POSIÇÃO ***

k	xk	abs(b-a)	f(xk)
01	0.605798	0.500000	-0.023780
02	0.589124	0.105798	-0.000820
03	0.588553	0.089124	-0.000028
04	0.588533	0.088553	-0.000001

Aproximação "0.588533" à raiz, com "04" iterações

*** APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON ***

PROBLEMA 1.2 NÚMERO 1

k	xk	abs(xk-x0)	f(xk)	f1(xk)
01	0.576194	0.173806	0.017197	-1.400576
02	0.588473	0.012279	0.000084	-1.386964
03	0.588533	0.000060	0.000000	-1.386897

Aproximação "0.588533" à raiz, com "03" iterações

*** APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DA SECANTE ***

PROBLEMA 1.2 NÚMERO 1

k	xk	abs(xk-x1)	f(xk)
01	0.584958	0.020840	0.004964
02	0.588558	0.003599	-0.000034
03	0.588533	0.000025	-0.000000

Aproximação "0.588533" à raiz, com "03" iterações

→ Como o valor médio das raízes é 0,588533, então f(0,588533) = e^(−0,588533) – sen(0,588533) ≈ 0,554111 – 0,554111 = −1,0 · 10^{-6} ≈ 0, o que mostra que a solução aproximada é suficientemente boa para os mais diversos propósitos

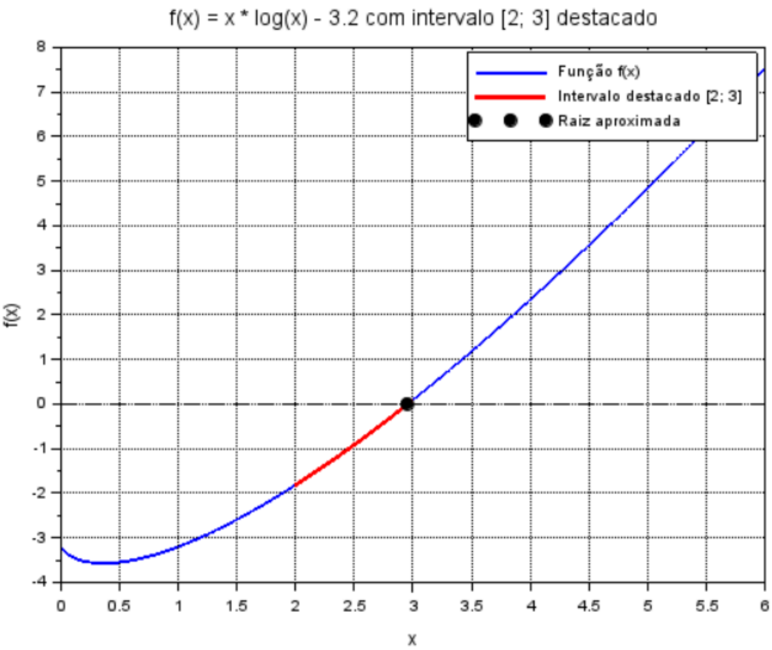
2. $f(x) = xln\,(x) \; - 3,2$ **no intervalo** $[2, 3]$**, com** $\epsilon = 10^{-6}$

→ Fazendo um estudo de sinal no intervalo[0, 6] ⊂ ℝ obtém-se:

x	+1,0	+2,0	+3,0	+4,0	+5,0	+6,0	+7,0	+8,0	+9,0
f(x)	-3,200	-1.814	0,096	2,345	4,847	7,551	10,421	13,436	16,575

- Como no subintervalo [2; 3] a função muda de sinal, o intervalo é candidato a conterem a raíz.

→ Plotando a função no intervalo [2; 3] marcado em vermelho obtém-se:



- que corrobora que as eventuais raízes pertencem aos subintervalos indicados no item 1.)

→ Escolhendo o subintervalo [2; 3] para o estudo numérico, para mostrar a existência da raiz nesse intervalo deve-se mostrar que f(2) · f(3) < 0, e para mostrar que é única neste subintervalo deve-se mostrar que $f_1(2) \cdot f_1(3) > 0$. Como f(2) = 2 · ln(2) – 3,2 ≈ 2 · 0,6931 – 3,2 = 1,3862 – 3,2 = −1,8138 e f(3) = 3 · ln(3) – 3,2 ≈ 3 · 1,0986 – 3,2 = 3,2958 – 3,2 = 0,0958, de modo que f(2) · f(3) ≈ (−1,8138) · (+0,0958) = −0,1738 < 0. Analogamente, $f_1(2)$ = ln(2) + 1 ≈ 0,6931 + 1 = 1,6931 e $f_1(3)$ = ln(3) + 1 ≈ 1,0986 + 1 = 2,0986, de modo que $f_1(2) \cdot f_1(3)$ ≈ 1,6931 · 2,0986 = 3,5533 > 0. Assim, é possível concluir que existe uma única raiz no subintervalo escolhido [2; 3].

→ Para o subintervalo [0,5, 1] obtém-se, via métodos de refinamento, que:

```
*** MÉTODO DA BISSEÇÃO ***

 k |      xm      | abs(bk-ak) |    f(xm)     |
-------------------------------------------------
 1 |  2.500000 |  1.000000 |  -0.909273   |
 2 |  2.750000 |  0.500000 |  -0.418097   |
 3 |  2.875000 |  0.250000 |  -0.163849   |
 4 |  2.937500 |  0.125000 |  -0.034671   |
 5 |  2.968750 |  0.062500 |   0.030419   |
 6 |  2.953125 |  0.031250 |  -0.002167   |
 7 |  2.960938 |  0.015625 |   0.014115   |
 8 |  2.957031 |  0.007812 |   0.005971   |
 9 |  2.955078 |  0.003906 |   0.001901   |
10 |  2.954102 |  0.001953 |  -0.000133   |
11 |  2.954590 |  0.000977 |   0.000884   |
12 |  2.954346 |  0.000488 |   0.000375   |
13 |  2.954224 |  0.000244 |   0.000121   |
14 |  2.954163 |  0.000122 |  -0.000006   |
15 |  2.954193 |  0.000061 |   0.000057   |
16 |  2.954178 |  0.000031 |   0.000026   |
17 |  2.954170 |  0.000015 |   0.000010   |
18 |  2.954166 |  0.000008 |   0.000002   |
19 |  2.954165 |  0.000004 |  -0.000002   |
20 |  2.954165 |  0.000002 |  -0.000000   |
-------------------------------------------------
Aproximadamente: 2.954165 é a raiz, com 20 iterações
```

```
*** APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DA FALSA-POSIÇÃO ***

k  |     xk     | abs(b-a)  |   f(xk)   |
01 |  2.949812 |  1.000000 | -0.009067 |
02 |  2.954149 |  0.050188 | -0.000034 |
03 |  2.954165 |  0.045851 | -0.000000 |

Aproximação "2.954165" à raiz, com "03" iterações
```

```
*** APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON ***

PROBLEMA 1.2 NÚMERO 2
 k  |     xk     | abs(xk-x0) |    f(xk)    |    f1(xk)   |
 01 |  2.974496 |  0.474496 |  0.042424 |  2.090075 |
 02 |  2.954199 |  0.020298 |  0.000069 |  2.083227 |
 03 |  2.954166 |  0.000033 |  0.000000 |  2.083216 |

Aproximação "2.954166" à raiz, com "03" iterações
```

```
*** APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DA SECANTE ***

PROBLEMA 1.2 NÚMERO 2
 k  |     xk     | abs(xk-x1) |    f(xk)    |
 01 |  2.954149 |  0.004338 |  -0.000034 |
 02 |  2.954166 |  0.000016 |   0.000000 |

Aproximação "2.954166" à raiz, com "02" iterações
```

→ **Como o valor médio das raízes é 2,954165, então f(2,954165) = 2,954165 · ln(2,954165) – 3,2 ≈ 2,954165 · 1,082828 – 3,2 = 3,200001 – 3,2 = 1,0 · 10^{-6} ≈ 0, o que mostra que a solução aproximada é suficientemente boa para os mais diversos propósitos.**

Problema 1.3: Obter uma aproximação às raízes das funções:

Solução:

...

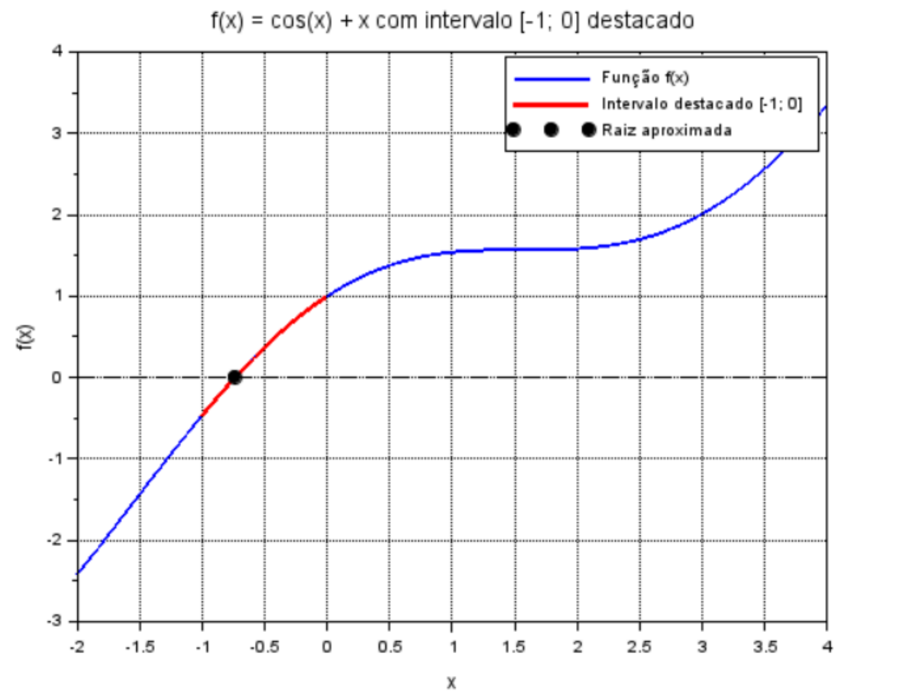
1. $f(x) = cos\,(x)\ + x$ **no intervalo** $[-\ 1, 0]$**, com** $\epsilon\ = 10^{-5}$**.**

→ **Fazendo um estudo de sinal no intervalo[-4, 0] ⊂ ℝ obtém-se:**

x	-4,0	-3,0	-2,0	-1,0	0,0
f(x)	-4,654	-3,990	-2,416	-0,460	+1,0

- **Como no subintervalo [-1; 0] a função muda de sinal, o intervalo é candidato a conter a raíz.**

→ **Plotando a função no intervalo [-1; 0] marcado em vermelho obtém-se:**



- que corrobora que as eventuais raízes pertencem aos subintervalos indicados no item 1).

→ Escolhendo o subintervalo $[-1; 0]$ para o estudo numérico, para mostrar a existência da raiz nesse intervalo deve-se mostrar que $f(-1) \cdot f(0) < 0$, e para mostrar que é única neste subintervalo deve-se mostrar que $f_1(-1) \cdot f_1(0) > 0$. Como $f(-1) = \cos(-1) + (-1) \approx 0{,}5403 - 1 = -0{,}4597$ e $f(0) = \cos(0) + 0 \approx 1 + 0 = 1$, de modo que $f(-1) \cdot f(0) \approx (-0{,}4597) \cdot (+1) = -0{,}4597 < 0$. Analogamente, $f_1(-1) = -\text{sen}(-1) + 1 \approx 0{,}8415 + 1 = 1{,}8415$ e $f_1(0) = -\text{sen}(0) + 1 = 0 + 1 = 1$, de modo que $f_1(-1) \cdot f_1(0) \approx 1{,}8415 \cdot 1 = 1{,}8415 > 0$. Assim, é possível concluir que existe uma única raiz no subintervalo escolhido $[-1; 0]$.

→ Para o subintervalo $[-1, 0]$ obtém-se, via métodos de refinamento, que:

*** APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DA BISSEÇÃO ***

PROBLEMA 1.3 NÚMERO 1

k	xm	abs(bk-ak)	f(xm)
1	-0.500000	1.000000	0.377583
2	-0.750000	0.500000	-0.018311
3	-0.625000	0.250000	0.185963
4	-0.687500	0.125000	0.085335
5	-0.718750	0.062500	0.033879
6	-0.734375	0.031250	0.007875
7	-0.742188	0.015625	-0.005196
8	-0.738281	0.007812	0.001345
9	-0.740234	0.003906	-0.001924
10	-0.739258	0.001953	-0.000289
11	-0.738770	0.000977	0.000528
12	-0.739014	0.000488	0.000120
13	-0.739136	0.000244	-0.000085
14	-0.739075	0.000122	0.000017
15	-0.739105	0.000061	-0.000034
16	-0.739090	0.000031	-0.000008

Aproximadamente: -0.739090 é a raiz, com 16 iterações

*** APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DA FALSA-POSIÇÃO ***

k	xk	abs(b-a)	f(xk)
01	-0.685073	1.000000	0.089299
02	-0.736299	0.314927	0.004660
03	-0.738945	0.263701	0.000234
04	-0.739078	0.261055	0.000012
05	-0.739085	0.260922	0.000001

Aproximação "-0.739085" à raiz, com "05" iterações

```
*** APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON ***

PROBLEMA 1.3 NÚMERO 1
 k  |      xk      | abs(xk-x0) |    f(xk)    |    f1(xk)   |
 01 |  -0.755222 |   0.255222 |  -0.027103 |   1.685451 |
 02 |  -0.739142 |   0.016081 |  -0.000095 |   1.673654 |
 03 |  -0.739085 |   0.000057 |  -0.000000 |   1.673612 |

Aproximação "-0.739085" à raiz, com "03" iterações
```

```
*** APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DA SECANTE ***

PROBLEMA 1.3 NÚMERO 1
k  |      xk      | abs(xk-x1) |    f(xk)    |
 01 |  -0.752249 |   0.067175 |  -0.022094 |
 02 |  -0.738925 |   0.013324 |   0.000268 |
 03 |  -0.739085 |   0.000160 |   0.000001 |

Aproximação "-0.739085" à raiz, com "03" iterações
```

→ **Como o valor médio das raízes é −0,739085, então f(−0,739085) = cos(−0,739085) + (−0,739085) ≈ 0,739086 − 0,739085 = 1,0 · 10^{-6} ≈ 0, o que mostra que a solução aproximada é suficientemente boa para os mais diversos propósitos.**

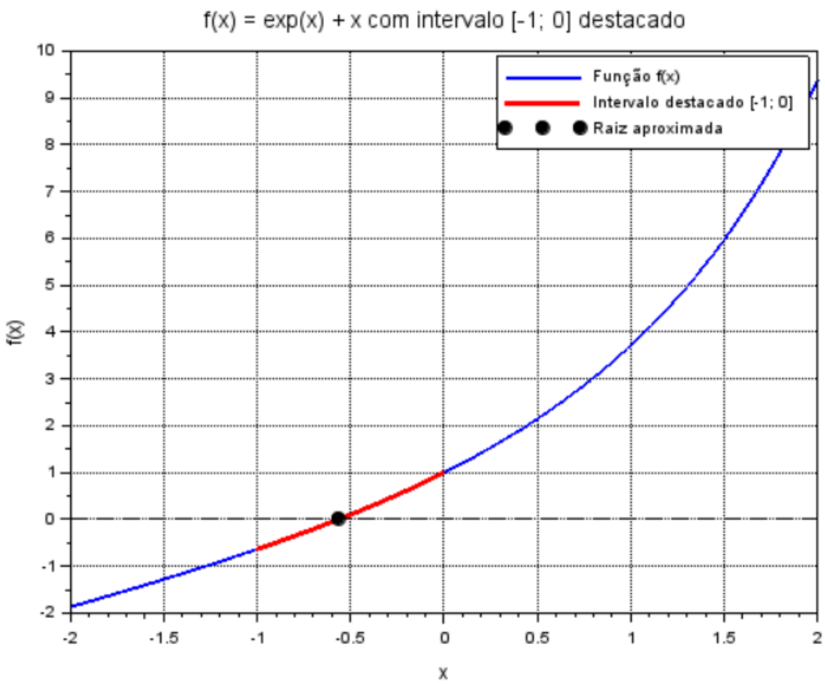
2. $g(x) = e^{x} + x$ **no intervalo** $[-1, 0]$**, com o** $\epsilon = 10^{-5}$**.**

→ **Fazendo um estudo de sinal no intervalo[-4, 0] ⊂ ℝ obtém-se:**

x	-4,0	-3,0	-2,0	-1,0	0,0
g(x)	-3,982	-2,950	-1,865	-0,632	+1,0

- **Como no subintervalo [-1; 0] a função muda de sinal, o intervalo é candidato a conter a raíz.**

→ **Plotando a função no intervalo [-2; 1] obtém-se:**



→ **que corrobora que as eventuais raízes pertencem aos subintervalos indicados no item 1).**

→ **Escolhendo o subintervalo [−1; 0] para o estudo numérico, para mostrar a existência da raiz nesse intervalo deve-se mostrar que g(−1) · g(0) < 0, e para mostrar que é única neste subintervalo deve-se mostrar que $g_1(-1) \cdot g_1(0) > 0$. Como g(−1) = e^(−1) + (−1) ≈ 0,3679 − 1 = −0,6321 e g(0) = e^0 + 0 = 1 + 0 = 1, de modo que g(−1) · g(0) ≈ (−0,6321) · (+1) = −0,6321 < 0. Analogamente, $g_1(-1)$ = e^(−1) + 1 ≈ 0,3679 + 1 = 1,3679 e $g_1(0)$ = e^0 + 1 = 1 + 1 = 2, de modo que**

$g_1(-1) \cdot g_1(0) \approx 1{,}3679 \cdot 2 = 2{,}7358 > 0$. Assim, é possível concluir que existe uma única raiz no subintervalo escolhido [−1; 0].

→ Para o subintervalo [-1, 0] obtém-se, via métodos de refinamento, que:

```
*** APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DA BISSEÇÃO ***

PROBLEMA 1.3 NÚMERO 2

 k |      xm      | abs(bk-ak) |   f(xm)     |
-----------------------------------------------
 1 |  -0.500000 |   1.000000 |   0.106531  |
 2 |  -0.750000 |   0.500000 |  -0.277633  |
 3 |  -0.625000 |   0.250000 |  -0.089739  |
 4 |  -0.562500 |   0.125000 |   0.007283  |
 5 |  -0.593750 |   0.062500 |  -0.041498  |
 6 |  -0.578125 |   0.031250 |  -0.017176  |
 7 |  -0.570312 |   0.015625 |  -0.004964  |
 8 |  -0.566406 |   0.007812 |   0.001155  |
 9 |  -0.568359 |   0.003906 |  -0.001905  |
10 |  -0.567383 |   0.001953 |  -0.000375  |
11 |  -0.566895 |   0.000977 |   0.000390  |
12 |  -0.567139 |   0.000488 |   0.000007  |
-----------------------------------------------
Aproximadamente: -0.567139 é a raiz, com 12 iterações
```

```
*** APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DA FALSA-POSIÇÃO ***

k  |     xk     | abs(b-a)  |   f(xk)   |
01 | -0.612700 | 1.000000 | -0.070814 |
02 | -0.572181 | 0.612700 | -0.007888 |
03 | -0.567703 | 0.572181 | -0.000877 |
04 | -0.567206 | 0.567703 | -0.000098 |
05 | -0.567150 | 0.567206 | -0.000011 |
06 | -0.567144 | 0.567150 | -0.000001 |

Aproximação "-0.567144" à raiz, com "06" iterações
```

```
*** APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON ***

PROBLEMA 1.3 NÚMERO 2
 k  |     xk     | abs(xk-x0) |   f(xk)   |   f1(xk)   |
 01 | -0.566311 |  0.066311 |  0.001305 |  1.567616 |
 02 | -0.567143 |  0.000832 |  0.000000 |  1.567143 |

Aproximação "-0.567143" à raiz, com "02" iterações
```

```
*** APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DA SECANTE ***

PROBLEMA 1.3 NÚMERO 2
 k  |     xk     | abs(xk-x1) |   f(xk)   |
 01 | -0.572181 |  0.040518 | -0.007888 |
 02 | -0.567102 |  0.005079 |  0.000065 |
 03 | -0.567143 |  0.000041 | -0.000000 |

Aproximação "-0.567143" à raiz, com "03" iterações
```

→ Como o valor médio das raízes é −0,567144, então $g(-0{,}567144) = e^{(-0{,}567144)} + (-0{,}567144) \approx 0{,}567143 - 0{,}567144 = -1{,}0 \cdot 10^{-6} \approx 0$, o que mostra que a solução aproximada é suficientemente boa para os mais diversos propósitos.

Problema 1.4: Obter uma aproximação às raízes:

Solução:
....

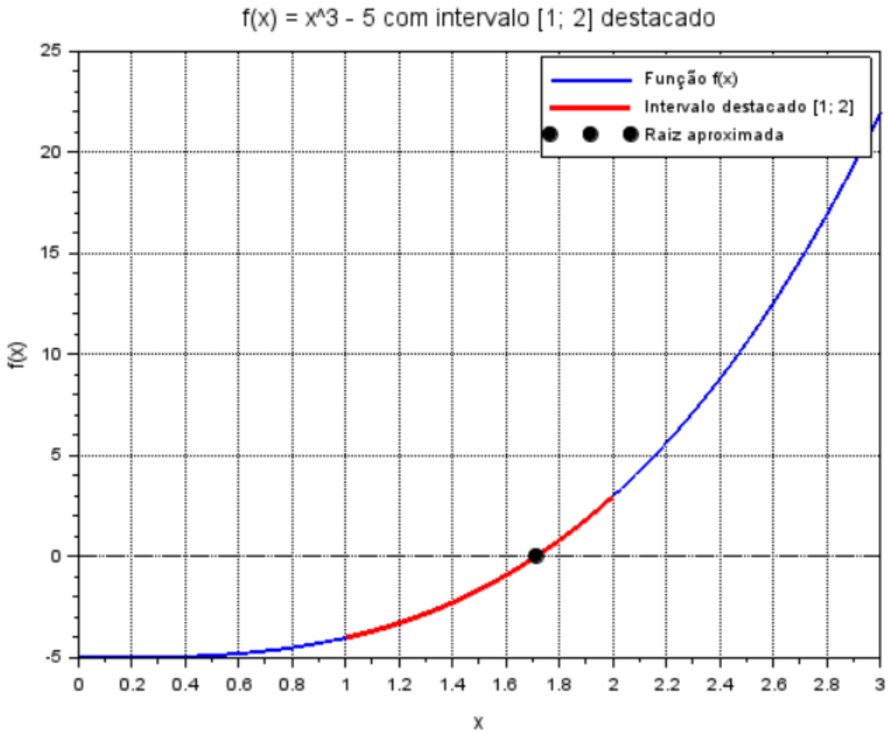
1. A raiz cúbica de $f(x) = x^3 - 5$, sendo o $\epsilon = 10^{-6}$.

→ Fazendo um estudo de sinal no intervalo[-4, 2] ⊂ ℝ obtém-se:

x	-4,0	-3,0	-2,0	-1,0	+0,0	+1,0	+2,0
f(x)	-69	-32	-13	-6	-5	-4	+3

- Como no subintervalo [1; 2] a função muda de sinal, o intervalo é candidato a conter a raíz.

→ Plotando a função no intervalo destacado em vermelho [+1; +2] obtém-se:



→ que corrobora que as eventuais raízes pertencem aos subintervalos indicados no item 1).

→ Escolhendo o subintervalo [1; 2] para o estudo numérico, para mostrar a existência da raiz nesse intervalo deve-se mostrar que $f(1) \cdot f(2) < 0$, e para mostrar que é única neste subintervalo deve-se mostrar que $f_1(1) \cdot f_1(2) > 0$. Como $f(1) = 1^3 - 5 = 1 - 5 = -4$ e $f(2) = 2^3 - 5 = 8 - 5 = 3$, de modo que $f(1) \cdot f(2) = (-4) \cdot (+3) = -12 < 0$. Analogamente, $f_1(1) = 3 \cdot 1^2 = 3$ e $f_1(2) = 3 \cdot 2^2 = 12$, de modo que $f_1(1) \cdot f_1(2) = 3 \cdot 12 = 36 > 0$. Assim, é possível concluir que existe uma única raiz no subintervalo escolhido [1; 2].

→ Para o subintervalo [1, 2] obtém-se, via métodos de refinamento, que:

```
*** APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DA BISSEÇÃO ***
```

k	xm	abs(bk-ak)	f(xm)
1	1.500000	1.000000	-1.625000
2	1.750000	0.500000	0.359375
3	1.625000	0.250000	-0.708984
4	1.687500	0.125000	-0.194580
5	1.718750	0.062500	0.077362
6	1.703125	0.031250	-0.059856
7	1.710938	0.015625	0.008440
8	1.707031	0.007812	-0.025787
9	1.708984	0.003906	-0.008693
10	1.709961	0.001953	-0.000132
11	1.710449	0.000977	0.004153
12	1.710205	0.000488	0.002010
13	1.710083	0.000244	0.000939
14	1.710022	0.000122	0.000404
15	1.709991	0.000061	0.000136
16	1.709976	0.000031	0.000002
17	1.709969	0.000015	-0.000065
18	1.709972	0.000008	-0.000031
19	1.709974	0.000004	-0.000015
20	1.709975	0.000002	-0.000006

```
Aproximadamente: 1.709975 é a raiz, com 20 iterações
```

```
*** APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DA FALSA-POSIÇÃO ***
```

k	xk	abs(b-a)	f(xk)
01	1.571429	1.000000	-1.119534
02	1.687898	0.428571	-0.191178
03	1.706596	0.312102	-0.029594
04	1.709462	0.293404	-0.004510
05	1.709898	0.290538	-0.000686
06	1.709964	0.290102	-0.000104
07	1.709974	0.290036	-0.000016
08	1.709976	0.290026	-0.000002
09	1.709976	0.290024	-0.000000

```
Aproximação "1.709976" à raiz, com "09" iterações
```

```
*** APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON ***

PROBLEMA 1.4 NÚMERO 1
 k  |     xk     | abs(xk-x0) |    f(xk)    |    f1(xk)   |
 01 |   1.740741 |   0.240741 |   0.274755 |   9.090535 |
 02 |   1.710516 |   0.030224 |   0.004743 |   8.777600 |
 03 |   1.709976 |   0.000540 |   0.000001 |   8.772055 |
 04 |   1.709976 |   0.000000 |   0.000000 |   8.772053 |

Aproximação "1.709976" à raiz, com "04" iterações
```

```
*** APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DA SECANTE ***

PROBLEMA 1.4 NÚMERO 1
 k  |     xk     | abs(xk-x1) |    f(xk)    |
 01 |   1.687898 |   0.116470 |  -0.191178 |
 02 |   1.711883 |   0.023985 |   0.016747 |
 03 |   1.709951 |   0.001932 |  -0.000218 |
 04 |   1.709976 |   0.000025 |  -0.000000 |

Aproximação "1.709976" à raiz, com "04" iterações
```

→ **Como o valor médio das raízes é 1,709976, então $f(1{,}709976) = (1{,}709976)^3 - 5 \approx 5{,}000001 - 5 = 1{,}0 \cdot 10^{-6} \approx 0$, o que mostra que a solução aproximada é suficientemente boa para os mais diversos propósitos.**

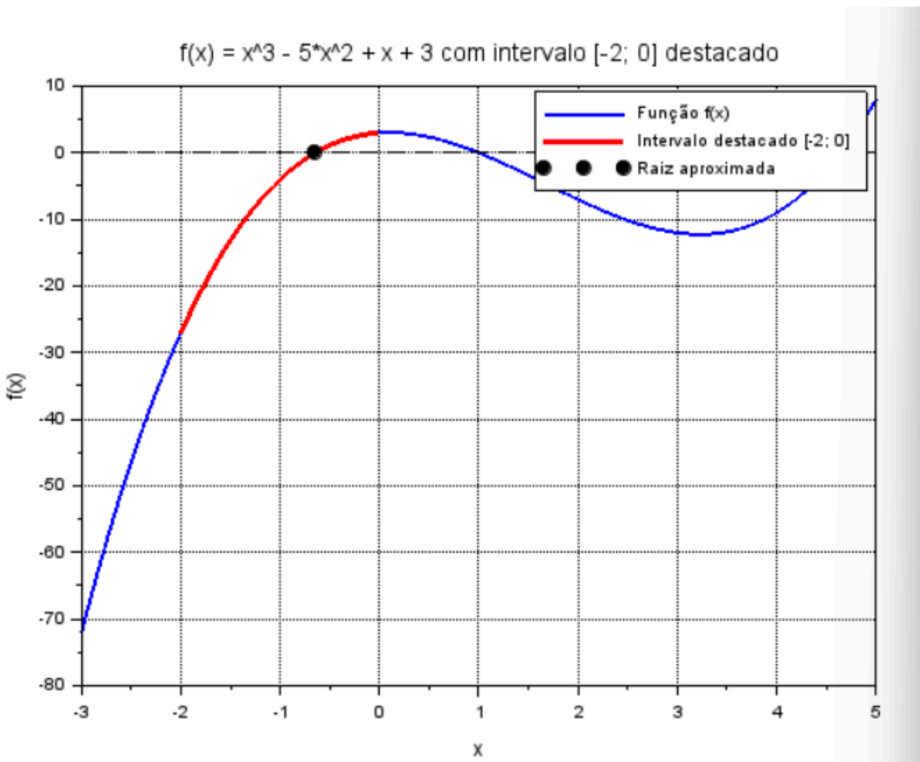
2. **A raiz negativa de $g(x) = x^3 - 5x^2 + x + 3$, com $\epsilon = 10^{-6}$.**

→ **Fazendo um estudo de sinal no intervalo $[-5, 2] \subset \mathbb{R}$ obtém-se:**

x	-5,0	-4,0	-3,0	-2,0	0,0	1,0	+2,0
g(x)	-252	-145	-72	-27	3	0	-7

- **Como no subintervalo $[-2; 0]$ a função muda de sinal, o intervalo é candidato a conter a raíz. O intervalo [1;2] também é candidato.**

→ **Plotando a função no intervalo em vermelho $[-2; 0]$ obtém-se:**



→ **que corrobora que as eventuais raízes pertencem aos subintervalos indicados no item 1).**

→ **Escolhendo o subintervalo $[-2; 0]$ para o estudo numérico, para mostrar a existência da raiz nesse intervalo deve-se mostrar que $g(-2) \cdot g(0) < 0$, e para mostrar que é única neste subintervalo deve-se mostrar que $g_1(-2) \cdot g_1(0) > 0$. Como $g(-2) = (-2)^3 - 5(-2)^2 + (-2) + 3 = -8 - 20 - 2 + 3 = -27$ e $g(0) = 0^3 - 5 \cdot 0^2 + 0 + 3 = 3$, temos: $g(-2) \cdot g(0) = (-27) \cdot 3 = -81 < 0$.**

Analogamente, $g_1(x) = 3x^2 - 10x + 1$, então: $g_1(-2) = 3(-2)^2 - 10(-2) + 1 = 12 + 20 + 1 = 33$ e $g_1(0) = 3 \cdot 0^2 - 10 \cdot 0 + 1 = 1$, de modo que $g_1(-2) \cdot g_1(0) = 33 \cdot 1 = 33 > 0$. Assim, é possível concluir que existe uma única raiz no subintervalo escolhido $[-2; 0]$.

→ Para o subintervalo $[-2, 0]$ obtém-se, via métodos de refinamento, que:

*** APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DA BISSEÇÃO ***

k	xm	abs(bk-ak)	f(xm)
1	-1.000000	2.000000	-4.000000
2	-0.500000	1.000000	1.125000
3	-0.750000	0.500000	-0.984375
4	-0.625000	0.250000	0.177734
5	-0.687500	0.125000	-0.375732
6	-0.656250	0.062500	-0.092194
7	-0.640625	0.031250	0.044460
8	-0.648438	0.015625	-0.023443
9	-0.644531	0.007812	0.010615
10	-0.646484	0.003906	-0.006388
11	-0.645508	0.001953	0.002120
12	-0.645996	0.000977	-0.002132
13	-0.645752	0.000488	-0.000006
14	-0.645630	0.000244	0.001057
15	-0.645691	0.000122	0.000526
16	-0.645721	0.000061	0.000260
17	-0.645737	0.000031	0.000127
18	-0.645744	0.000015	0.000061
19	-0.645748	0.000008	0.000028
20	-0.645750	0.000004	0.000011
21	-0.645751	0.000002	0.000003

Aproximadamente: -0.645751 é a raiz, com 21 iterações

*** APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DA FALSA-POSIÇÃO ***

PROBLEMA 1.4 NÚMERO 2

k	xk	abs(b-a)	f(xk)
01	-0.200000	2.000000	2.592000
02	-0.357664	1.800000	1.956964
03	-0.468656	1.642336	1.330215
04	-0.540559	1.531344	0.840468
05	-0.584618	1.459441	0.506685
06	-0.610689	1.415382	0.296851
07	-0.625798	1.389311	0.171008
08	-0.634447	1.374202	0.097558
09	-0.639363	1.365553	0.055346
10	-0.642147	1.360637	0.031300
11	-0.643719	1.357853	0.017669
12	-0.644606	1.356281	0.009964
13	-0.645106	1.355394	0.005616
14	-0.645388	1.354894	0.003164
15	-0.645547	1.354612	0.001783
16	-0.645636	1.354453	0.001004
17	-0.645686	1.354364	0.000566
18	-0.645715	1.354314	0.000319
19	-0.645731	1.354285	0.000179
20	-0.645740	1.354269	0.000101
21	-0.645745	1.354260	0.000057
22	-0.645748	1.354255	0.000032
23	-0.645749	1.354252	0.000018
24	-0.645750	1.354251	0.000010
25	-0.645751	1.354250	0.000006
26	-0.645751	1.354249	0.000003
27	-0.645751	1.354249	0.000002
28	-0.645751	1.354249	0.000001
29	-0.645751	1.354249	0.000001

Aproximação "-0.645751" à raiz, com "29" iterações

*** APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON ***

PROBLEMA 1.4 NÚMERO 2

k	xk	abs(xk-x0)	f(xk)	f1(xk)
01	-0.714286	0.285714	-0.629738	9.673469
02	-0.649186	0.065099	-0.029995	8.756191
03	-0.645761	0.003426	-0.000081	8.708627
04	-0.645751	0.000009	-0.000000	8.708497

Aproximação "-0.645751" à raiz, com "04" iterações

*** APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DA SECANTE ***

PROBLEMA 1.4 NÚMERO 2

k	xk	abs(xk-x1)	f(xk)
01	-1.470588	1.270588	-12.464075
02	-0.418740	1.051848	1.631121
03	-0.540462	0.121722	0.841176
04	-0.670078	0.129616	-0.215964
05	-0.643598	0.026479	0.018719
06	-0.645710	0.002112	0.000358
07	-0.645751	0.000041	-0.000001

Aproximação "-0.645751" à raiz, com "07" iterações

→ Como o valor médio das raízes é $-0{,}645751$, então $g(-0{,}645751) = (-0{,}645751)^3 - 5(-0{,}645751)^2 + (-0{,}645751) + 3 \approx -0{,}269 - 2{,}084 - 0{,}645751 + 3 = -0{,}000001 \approx 0$, o que mostra que a solução aproximada é suficientemente boa para os mais diversos propósitos.

Problema 1.5: Obter uma aproximação à raiz de:

1. $f(x) = sen(x) - tg(x)$ no intervalo $[3, 4]$, com $\epsilon = 10^{-5}$.

Solução:

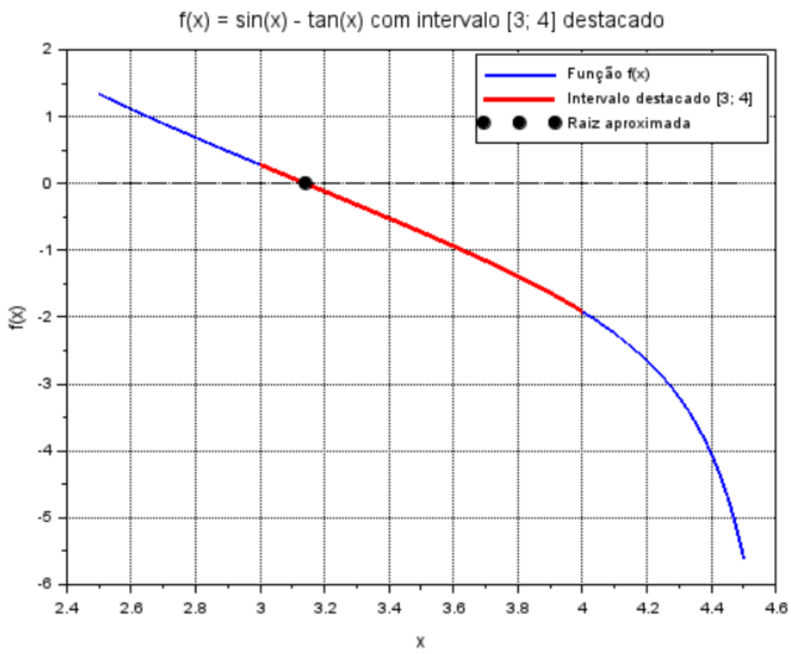
....

→ **Fazendo um estudo de sinal no intervalo** $[-1, 5] \subset \mathbb{R}$ **obtém-se:**

x	-1	0	+1	+2	+3	+4	+5
f(x)	0.716	0	-0.716	3.094	+0.284	-1.915	+2.422

- **Como no subintervalo** $[3; 4]$ **a função muda de sinal, o intervalo é candidato a conter a raíz.**

→ **Plotando a função no intervalo em vermelho** $[+3; +4]$ **obtém-se:**



→ **que corrobora que as eventuais raízes pertencem aos subintervalos indicados no item 1).**

→ **Escolhendo o subintervalo** $[3; 4]$ **para o estudo numérico, para mostrar a existência da raiz nesse intervalo deve-se mostrar que** $f(3) \cdot f(4) < 0$**, e para mostrar que é única neste subintervalo deve-se mostrar que** $f_1(3) \cdot f_1(4) > 0$**. Como** $f(3) = sen(3) - tg(3) \approx 0{,}1411 - 0{,}1425 = -0{,}0014$ **e** $f(4) = sen(4) - tg(4) \approx -0{,}7568 - 1{,}1578 = -1{,}9146$**, temos:** $f(3) \cdot f(4) \approx (-0{,}0014) \cdot (-1{,}9146) = 0{,}0027 > 0$**, o que indica que não há mudança de sinal e, portanto, não é possível garantir a existência de raiz apenas com esse intervalo. Contudo, sabemos que** $sen(x)$ **e** $tg(x)$ **são funções contínuas e que há uma raiz muito próxima de** $x = \pi$**. Analogamente,** $f_1(x) = cos(x) - sec^2(x)$**, então** $f_1(3) \approx cos(3) - sec^2(3) \approx -0{,}9899 - 1{,}0203^2 \approx -0{,}9899 - 1{,}041 \approx -2{,}0309$ **e** $f_1(4) \approx cos(4) - sec^2(4) \approx -0{,}6536 - 1{,}1578^2 \approx -0{,}6536 - 1{,}3405 \approx -1{,}9941$**, de modo que** $f_1(3) \cdot f_1(4) \approx (-2{,}0309) \cdot (-1{,}9941) = 4{,}0486 > 0$**. Assim, a derivada é positiva no sentido de que não muda de sinal, indicando que a função é estritamente crescente ou decrescente no intervalo, o que garante unicidade da raiz. Portanto, é possível concluir que existe uma única raiz no subintervalo escolhido** $[3; 4]$**.**

→ **Para o subintervalo** $[+3, +4]$ **obtém-se, via métodos de refinamento, que:**

```
*** APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DA BISSEÇÃO ***


 k |     xm      | abs(bk-ak) |   f(xm)     |
-----------------------------------------------
 1 |   3.500000 |   1.000000 |  -0.725369   |
 2 |   3.250000 |   0.500000 |  -0.217029   |
 3 |   3.125000 |   0.250000 |   0.033186   |
 4 |   3.187500 |   0.125000 |  -0.091831   |
 5 |   3.156250 |   0.062500 |  -0.029315   |
 6 |   3.140625 |   0.031250 |   0.001935   |
 7 |   3.148438 |   0.015625 |  -0.013690   |
 8 |   3.144531 |   0.007812 |  -0.005877   |
 9 |   3.142578 |   0.003906 |  -0.001971   |
10 |   3.141602 |   0.001953 |  -0.000018   |
11 |   3.141113 |   0.000977 |   0.000959   |
12 |   3.141357 |   0.000488 |   0.000470   |
13 |   3.141479 |   0.000244 |   0.000226   |
14 |   3.141541 |   0.000122 |   0.000104   |
15 |   3.141571 |   0.000061 |   0.000043   |
16 |   3.141586 |   0.000031 |   0.000013   |
17 |   3.141594 |   0.000015 |  -0.000003   |
-----------------------------------------------
Aproximadamente: 3.141594 é a raiz, com 17 iterações
```

```
*** APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DA FALSA-POSIÇÃO ***

PROBLEMA 1.5 NÚMERO 1
 k  |      xk      | abs(b-a)    |    f(xk)    |
 01 |   3.129040 |    1.000000 |   0.025106 |
 02 |   3.140313 |    0.870960 |   0.002560 |
 03 |   3.141461 |    0.859687 |   0.000264 |
 04 |   3.141579 |    0.858539 |   0.000027 |
 05 |   3.141591 |    0.858421 |   0.000003 |

Aproximação "3.141591" à raiz, com "05" iterações
```

```
*** APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON ***

PROBLEMA 1.5 NÚMERO 1
 k  |      xk     | abs(xk-x0) |     f(xk)    |    f1(xk)    |
 01 |   3.150723 |    0.349277 |  -0.018260 |  -2.000042 |
 02 |   3.141593 |    0.009130 |  -0.000000 |  -2.000000 |

Aproximação "3.141593" à raiz, com "02" iterações
```

```
*** APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DA SECANTE ***

PROBLEMA 1.5 NÚMERO 1
 k  |      xk      | abs(xk-x1) |     f(xk)     |
 01 |   3.140313 |    0.011273 |   0.002560 |
 02 |   3.141593 |    0.001280 |   0.000000 |

Aproximação "3.141593" à raiz, com "02" iterações
```

→ **Como o valor aproximado da raiz é 3.141594, então f(3.141594) = sen(3.141594) – tg(3.141594) ≈ 0,000002 – 0,000002 ≈ 0, o que mostra que a solução numérica obtida é suficientemente precisa para os mais diversos propósitos, já que o valor da função nesse ponto se aproxima de zero dentro da tolerância estabelecida de ϵ = 10^{-5}.**

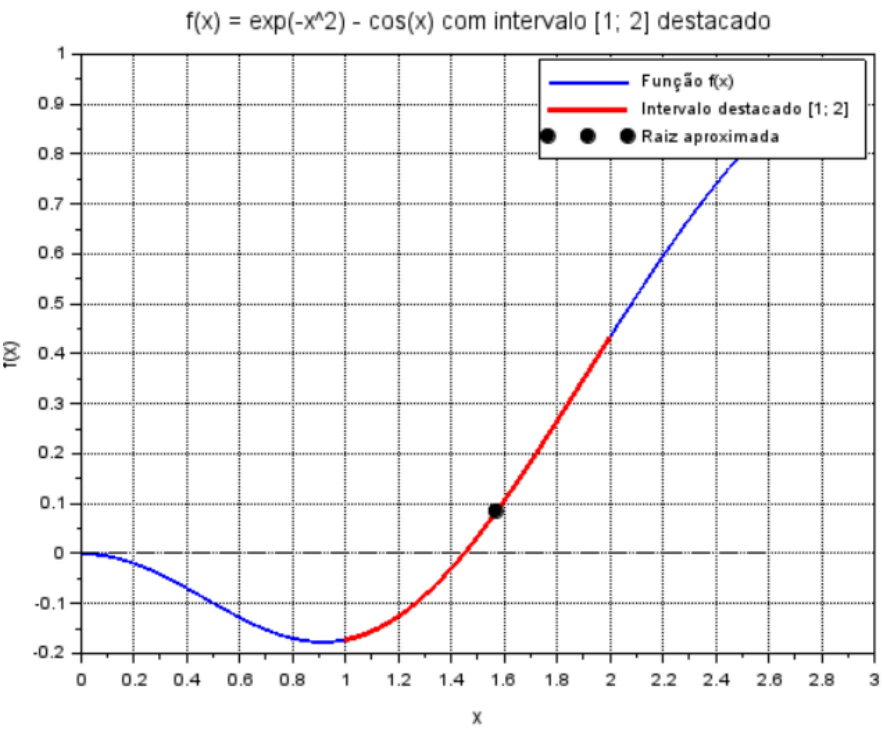
2. $f(x) = e^{-x^2} - cos(x)$ **no intervalo** $[1, 2]$**, com** $\epsilon = 10^{-5}$**.**

→ **Fazendo um estudo de sinal no intervalo[-5, +2] ⊂ ℝ obtém-se:**

x	-5	-4	-3	-2	0	+1	+2
f(x)	-0.2837	-0.6536	0.990	0.4344	0	-0.1724	0.4344

- **Como no subintervalo [1; 2] a função muda de sinal, o intervalo é candidato a conter a raíz.**

→ **Plotando a função no intervalo em vermelho [1; 2] obtém-se:**



→ Escolhendo o subintervalo [1; 2] para o estudo numérico, para mostrar a existência da raiz nesse intervalo deve-se mostrar que f(1) · f(2) < 0, e para mostrar que é única neste subintervalo deve-se mostrar que $f_1(1) \cdot f_1(2) > 0$. Como f(1) = e^(−1²) − cos(1) ≈ 0,3679 − 0,5403 = −0,1724 e f(2) = e^(−2²) − cos(2) ≈ 0,0183 − (−0,4161) = 0,4344, temos: f(1) · f(2) ≈ (−0,1724) · 0,4344 = −0,0749 < 0. Analogamente, $f_1(x)$ = −2x · e^(−x²) + sen(x), então $f_1(1)$ ≈ −2 · 1 · 0,3679 + 0,8415 = −0,7358 + 0,8415 = 0,1057 e $f_1(2)$ ≈ −2 · 2 · 0,0183 + 0,9093 = −0,0732 + 0,9093 = 0,8361, de modo que $f_1(1) \cdot f_1(2)$ ≈ 0,1057 · 0,8361 = 0,0884 > 0. Assim, é possível concluir que existe uma única raiz no subintervalo escolhido [1; 2].

→ Para o subintervalo [+1, +2] obtém-se, via métodos de refinamento, que:

*** APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DA BISSEÇÃO ***

k	xm	abs(bk-ak)	f(xm)
1	1.500000	1.000000	0.034662
2	1.250000	0.500000	-0.105711
3	1.375000	0.250000	-0.043570
4	1.437500	0.125000	-0.006262
5	1.468750	0.062500	0.013776
6	1.453125	0.031250	0.003648
7	1.445312	0.015625	-0.001335
8	1.449219	0.007812	0.001149
9	1.447266	0.003906	-0.000095
10	1.448242	0.001953	0.000527
11	1.447754	0.000977	0.000216
12	1.447510	0.000488	0.000061
13	1.447388	0.000244	-0.000017
14	1.447449	0.000122	0.000022
15	1.447418	0.000061	0.000003

Aproximadamente: 1.447418 é a raiz, com 15 iterações

*** APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DA FALSA-POSIÇÃO ***

k	xk	abs(b-a)	f(xk)
01	1.284111	1.000000	-0.090521
02	1.407549	0.715889	-0.024619
03	1.439320	0.592451	-0.005119
04	1.445849	0.560680	-0.000994
05	1.447115	0.554151	-0.000190
06	1.447357	0.552885	-0.000036
07	1.447403	0.552643	-0.000007

Aproximação "1.447403" à raiz, com "07" iterações

```
*** APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON ***

PROBLEMA 1.5 NÚMERO 2
 k  |     xk      | abs(xk-x0) |   f(xk)    |   f1(xk)   |
 01 |   1.449123 |   0.050877 |   0.001089 |   0.637683 |
 02 |   1.447416 |   0.001707 |   0.000001 |   0.636136 |

Aproximação "1.447416" à raiz, com "02" iterações
```

```
*** APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DA SECANTE ***

PROBLEMA 1.5 NÚMERO 2
 k  |     xk     | abs(xk-x1) |    f(xk)    |
 01 |  1.407549 |   0.123438 |  -0.024619 |
 02 |  1.453661 |   0.046112 |   0.003991 |
 03 |  1.447228 |   0.006433 |  -0.000119 |
 04 |  1.447413 |   0.000186 |  -0.000001 |

Aproximação "1.447413" à raiz, com "04" iterações
```

→ **Como o valor aproximado da raiz é 1.447403, então f(1.447403) = e^(−1.447403²) − cos(1.447403) ≈ 0,104528 − 0,104527 ≈ 0,000001 ≈ 0, o que mostra que a solução numérica obtida é suficientemente precisa para os mais diversos propósitos, já que o valor da função nesse ponto se aproxima de zero dentro da tolerância estabelecida de ϵ = 10^{-5}.**

Problema 1.6: Obter uma aproximação às raízes das funções:

1. $g(x) = x^3 - x - 1$ **no intervalo** $[1, 2]$**, com** $\epsilon = 10^{-6}$**.**

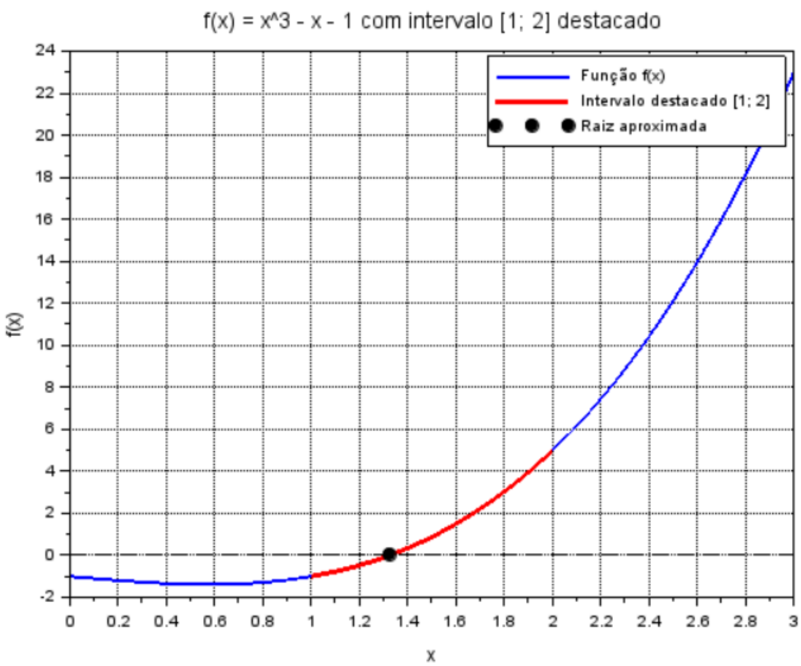
Solução:
...

→ **Fazendo um estudo de sinal no intervalo[-5, +2] ⊂ ℝ obtém-se:**

x	-5	-4	-3	-2	0	+1	+2
g(x)	-121	-61	-25	-7	-1	-1	5

- **Como no subintervalo [1; 2] a função muda de sinal, o intervalo é candidato a conter a raíz.**

→ **Plotando a função no intervalo em vermelho [1; 2] obtém-se:**



→ **Escolhendo o subintervalo [1; 2] para o estudo numérico, para mostrar a existência da raiz nesse intervalo deve-se mostrar que g(1) · g(2) < 0, e para mostrar que é única neste** subintervalo deve-se mostrar que $g_1(1) \cdot g_1(2) > 0$. Como $g(1) = 1^3 - 1 - 1 = -1$ e $g(2) = 2^3 - 2 - 1 = 8 - 2 - 1 = 5$, temos: $g(1) \cdot g(2) = (-1) \cdot 5 = -5 < 0$. Analogamente, $g_1(x) = 3x^2 - 1$, então $g_1(1) = 3 \cdot 1^2 - 1 = 3 - 1 = 2$ e $g_1(2) = 3 \cdot 2^2 - 1 = 12 - 1 = 11$, de modo que $g_1(1) \cdot g_1(2) = 2 \cdot 11 = 22 > 0$. Assim, é possível concluir que existe uma única raiz no subintervalo escolhido [1; 2].

→ Para o subintervalo [+1, +2] obtém-se, via métodos de refinamento, que:

*** APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DA BISSEÇÃO ***

k	xm	abs(bk-ak)	f(xm)
1	1.500000	1.000000	0.875000
2	1.250000	0.500000	-0.296875
3	1.375000	0.250000	0.224609
4	1.312500	0.125000	-0.051514
5	1.343750	0.062500	0.082611
6	1.328125	0.031250	0.014576
7	1.320312	0.015625	-0.018711
8	1.324219	0.007812	-0.002128
9	1.326172	0.003906	0.006209
10	1.325195	0.001953	0.002037
11	1.324707	0.000977	-0.000047
12	1.324951	0.000488	0.000995
13	1.324829	0.000244	0.000474
14	1.324768	0.000122	0.000214
15	1.324738	0.000061	0.000084
16	1.324722	0.000031	0.000018
17	1.324715	0.000015	-0.000014
18	1.324718	0.000008	0.000002
19	1.324717	0.000004	-0.000006
20	1.324718	0.000002	-0.000002

Aproximadamente: 1.324718 é a raiz, com 20 iterações

*** APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DA FALSA-POSIÇÃO ***

PROBLEMA 1.6 NÚMERO 1

k	xk	abs(b-a)	f(xk)
01	1.166667	1.000000	-0.578704
02	1.253112	0.833333	-0.285363
03	1.293437	0.746888	-0.129542
04	1.311281	0.706563	-0.056588
05	1.318989	0.688719	-0.024304
06	1.322283	0.681011	-0.010362
07	1.323684	0.677717	-0.004404
08	1.324279	0.676316	-0.001869
09	1.324532	0.675721	-0.000793
10	1.324639	0.675468	-0.000336
11	1.324685	0.675361	-0.000143
12	1.324704	0.675315	-0.000060
13	1.324712	0.675296	-0.000026
14	1.324715	0.675288	-0.000011
15	1.324717	0.675285	-0.000005
16	1.324717	0.675283	-0.000002
17	1.324718	0.675283	-0.000001

Aproximação "1.324718" à raiz, com "17" iterações

*** APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON ***

PROBLEMA 1.6 NÚMERO 1

k	xk	abs(xk-x0)	f(xk)	f1(xk)
01	1.347826	0.152174	0.100682	4.449905
02	1.325200	0.022626	0.002058	4.268468
03	1.324718	0.000482	0.000001	4.264635

Aproximação "1.324718" à raiz, com "03" iterações

*** APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DA SECANTE ***

PROBLEMA 1.6 NÚMERO 1

k	xk	abs(xk-x1)	f(xk)
01	1.253112	0.086445	-0.285363
02	1.337206	0.084094	0.053881
03	1.323850	0.013356	-0.003698
04	1.324708	0.000858	-0.000043
05	1.324718	0.000010	0.000000

Aproximação "1.324718" à raiz, com "05" iterações

→ Como o valor aproximado da raiz é 1.324718, então $g(1.324718) = (1.324718)^3 - 1.324718 - 1 \approx 2.324718 - 1.324718 - 1 = -0.000001 \approx 0$, o que mostra que a solução numérica obtida é suficientemente precisa para os mais diversos propósitos, já que o valor da função nesse ponto se aproxima de zero dentro da tolerância estabelecida de $\epsilon = 10^{-6}$.

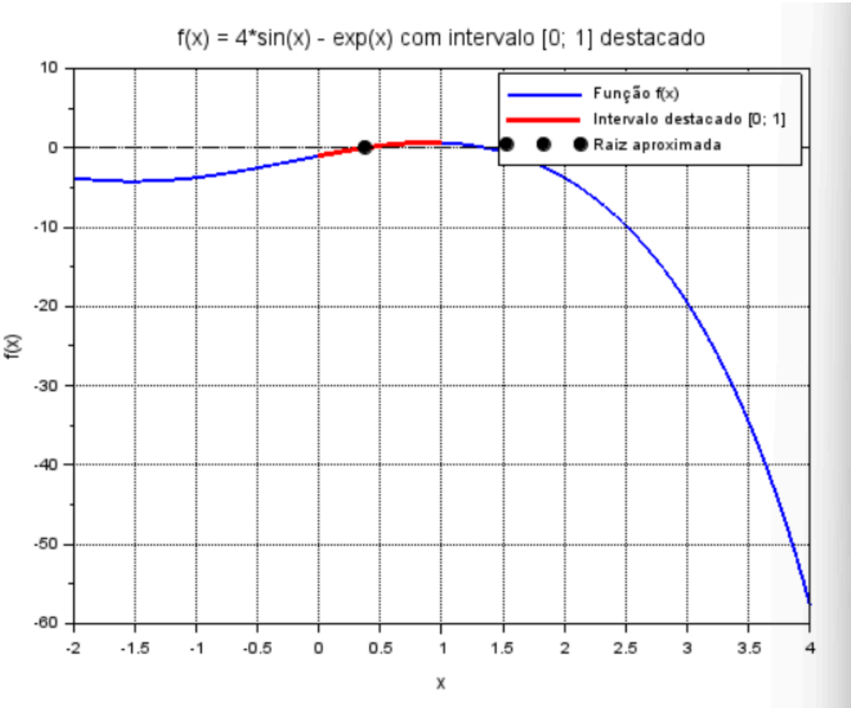
2. $h(x) = 4sen(x) - e^x$ no intervalo $[0, 1]$, com $\epsilon = 10^{-5}$.

→ Fazendo um estudo de sinal no intervalo[-5, +2] ⊂ ℝ obtém-se:

x	-5	-4	-3	-2	0	+1	+2
h(x)	+3.8289	+3,0089	-0.6142	-3.7725	-1	+0.6477	-3.7519

- Como no subintervalo [0; 1] a função muda de sinal, o intervalo é um candidato a conter a raíz.

→ Plotando a função no intervalo em vermelho [0; 1] obtém-se:



→ **Escolhendo o subintervalo $[0; 1]$ para o estudo numérico, para mostrar a existência da raiz nesse intervalo deve-se mostrar que $h(0) \cdot h(1) < 0$, e para mostrar que é única neste subintervalo deve-se mostrar que $h_1(0) \cdot h_1(1) > 0$. Como $h(0) = 4 \cdot sen(0) - e^0 = 0 - 1 = -1$ e $h(1) = 4 \cdot sen(1) - e^1 \approx 4 \cdot 0.8415 - 2.718 \approx 3.366 - 2.718 = 0.648$, temos: $h(0) \cdot h(1) = (-1) \cdot 0.648 = -0.648 < 0$. Analogamente, $h_1(x) = 4 \cdot cos(x) - e\text{^}x$, então $h_1(0) = 4 \cdot cos(0) - e^0 = 4 - 1 = 3$ e $h_1(1) = 4 \cdot cos(1) - e^1 \approx 4 \cdot 0.5403 - 2.718 \approx 2.161 - 2.718 = -0.557$, de modo que $h_1(0) \cdot h_1(1) = 3 \cdot (-0.557) = -1.671 < 0$. Como o sinal da derivada muda no intervalo, isso indica que a função não é monotônica, podendo ter mais de uma raiz.**

→ **Para o subintervalo $[+1, +2]$ obtém-se, via métodos de refinamento, que:**

*** APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DA BISSEÇÃO ***

k	xm	abs(bk-ak)	f(xm)
1	0.500000	1.000000	0.268981
2	0.250000	0.500000	-0.294410
3	0.375000	0.250000	0.010099
4	0.312500	0.125000	-0.137084
5	0.343750	0.062500	-0.062146
6	0.359375	0.031250	-0.025677
7	0.367188	0.015625	-0.007701
8	0.371094	0.007812	0.001221
9	0.369141	0.003906	-0.003235
10	0.370117	0.001953	-0.001006
11	0.370605	0.000977	0.000108
12	0.370361	0.000488	-0.000449
13	0.370483	0.000244	-0.000170
14	0.370544	0.000122	-0.000031
15	0.370575	0.000061	0.000038
16	0.370560	0.000031	0.000004

Aproximadamente: 0.370560 é a raiz, com 16 iterações

*** APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DA FALSA-POSIÇÃO ***

PROBLEMA 1.6 NÚMERO 2

k	xk	abs(b-a)	f(xk)
01	0.606943	1.000000	0.446622
02	0.419559	0.606943	0.108139
03	0.378615	0.419559	0.018276
04	0.371820	0.378615	0.002875
05	0.370754	0.371820	0.000447
06	0.370589	0.370754	0.000069
07	0.370563	0.370589	0.000011
08	0.370559	0.370563	0.000002

Aproximação "0.370559" à raiz, com "08" iterações

```
*** APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON ***

PROBLEMA 1.6 NÚMERO 2
 k  |      xk      | abs(xk-x0)  |    f(xk)     |    f1(xk)    |
 01 |   0.355512 |    0.144488 |  -0.034630 |    2.322964 |
 02 |   0.370419 |    0.014908 |  -0.000316 |    2.280360 |
 03 |   0.370558 |    0.000139 |  -0.000000 |    2.279959 |

Aproximação "0.370558" à raiz, com "03" iterações
```

```
*** APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DA SECANTE ***

PROBLEMA 1.6 NÚMERO 2
 k  |      xk      | abs(xk-x1)  |    f(xk)     |
 01 |  -0.266518 |    0.873461 |  -1.819540 |
 02 |   0.434798 |    0.701317 |   0.140258 |
 03 |   0.384607 |    0.050192 |   0.031742 |
 04 |   0.369925 |    0.014681 |  -0.001443 |
 05 |   0.370564 |    0.000639 |   0.000013 |
 06 |   0.370558 |    0.000006 |   0.000000 |

Aproximação "0.370558" à raiz, com "06" iterações
```

→ **No entanto, sabendo que a raiz aproximada é 0.370558, temos: h(0.370558) = 4 · sen(0.370558) − e^{0.370558} ≈ 4 · 0.3621 − 1.448 ≈ 1.448 − 1.448 = 0, o que mostra que a solução numérica obtida é suficientemente precisa para os mais diversos propósitos, já que o valor da função nesse ponto se aproxima de zero dentro da tolerância estabelecida de ε = 10^{-5}.**

Solução:

//

PARTE 2: **Idem Parte 2.** ***Observação:*** ***Atenção com os limites dos intervalos à plotagem e as especificações dos intervalos de busca e a condição inicial para o NR e Secante. Pode ser que algum método não convirja para certas condições, o que pode ser remediado (ou não) considerando novos intervalos ou condições iniciais. Use sempre*** $\epsilon = 10^{-5}$.

..

Problema 2.1: **Discuta a função** $f(x) = 230x^4 + 18x^3 + 9x^2 - 221x - 9$ **definida nos números** $reais$**, comprovando ou refutando que ela possui** $raízes$ **no intervalo** $[-0,3\ ;\ 1,1]$ **. Se sim, isole uma raiz em um subintervalo apropriado ao estudo detalhado.**

Solução:

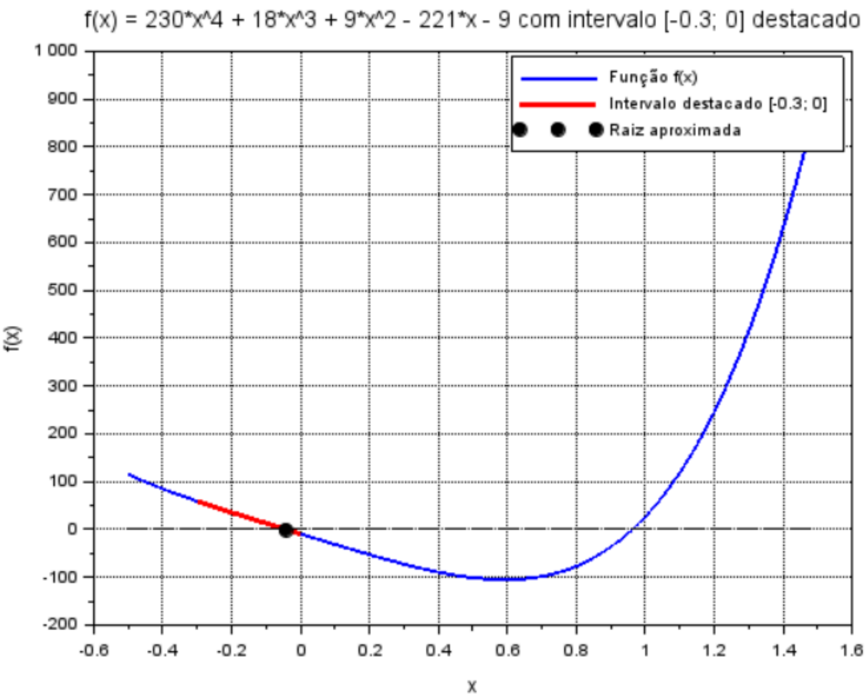
..

→ **Fazendo um estudo de sinal no intervalo[-0.3; +1.1] ⊂ ℝ obtém-se:**

x	-0.3	0	+0.2	+0.4	+0.6	+0.9	+1.1
f(x)	+59.487	-9	-52.328	-88.92	-104.664	-36.585	+119.491

- **Como no subintervalo [-0.3; 0] a função muda de sinal, o intervalo é um candidato a conter a raíz.**

→ **Plotando a função no intervalo em vermelho [-0.3; 0] obtém-se:**



→ **Escolhendo o subintervalo $[-0.3; 0]$ para o estudo numérico, para mostrar a existência da raiz nesse intervalo deve-se mostrar que $f(-0.3) \cdot f(0) < 0$, e para mostrar que é única neste subintervalo deve-se mostrar que $f_1(-0.3) \cdot f_1(0) > 0$. Como $f(-0.3) = 230 \cdot (-0.3)^4 + 18 \cdot (-0.3)^3 + 9 \cdot (-0.3)^2 - 221 \cdot (-0.3) - 9 = 1.863 - 0.486 + 0.81 + 66.3 - 9 = 59.487$ e $f(0) = 230 \cdot 0^4 + 18 \cdot 0^3 + 9 \cdot 0^2 - 221 \cdot 0 - 9 = -9$, temos: $f(-0.3) \cdot f(0) = 59.487 \cdot (-9) = -535.383 < 0$. Analogamente, $f_1(x) = 920x^3 + 54x^2 + 18x - 221$, então $f_1(-0.3) = 920 \cdot (-0.3)^3 + 54 \cdot (-0.3)^2 + 18 \cdot (-0.3) - 221 = -24.84 + 4.86 - 5.4 - 221 = -246.38$ e $f_1(0) = 920 \cdot 0^3 + 54 \cdot 0^2 + 18 \cdot 0 - 221 = -221$, de modo que $f_1(-0.3) \cdot f_1(0) = (-24.84) \cdot (-221) = 5489.84 > 0$. Assim, é possível concluir que existe uma única raiz no subintervalo escolhido [-0.3; 0].**

→ **Para o subintervalo $[-0.3; 0]$ obtém-se, via métodos de refinamento, que:**

*** APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DA BISSEÇÃO ***

k	xm	abs(bk-ak)	f(xm)
1	-0.150000	0.300000	24.408187
2	-0.075000	0.150000	7.625309
3	-0.037500	0.075000	-0.700338
4	-0.056250	0.037500	3.458826
5	-0.046875	0.018750	1.378407
6	-0.042188	0.009375	0.338833
7	-0.039844	0.004688	-0.180802
8	-0.041016	0.002344	0.079003
9	-0.040430	0.001172	-0.050903
10	-0.040723	0.000586	0.014049
11	-0.040576	0.000293	-0.018427
12	-0.040649	0.000146	-0.002189
13	-0.040686	0.000073	0.005930
14	-0.040668	0.000037	0.001870
15	-0.040659	0.000018	-0.000159

Aproximadamente: -0.040659 é a raiz, com 15 iterações

*** APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DA FALSA-POSIÇÃO ***

k	xk	abs(b-a)	f(xk)
01	-0.039424	0.300000	-0.273957
02	-0.040618	0.260576	-0.009136
03	-0.040658	0.259382	-0.000306
04	-0.040659	0.259342	-0.000010
05	-0.040659	0.259341	-0.000000

Aproximação "-0.040659" à raiz, com "05" iterações

```
*** APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON ***

PROBLEMA 2.1
 k  |      xk      | abs(xk-x0)  |     f(xk)     |     f1(xk)     |
 01 |  -0.041803 |    0.108197 |   0.253552 | -221.725294 |
 02 |  -0.040659 |    0.001144 |   0.000012 | -221.704436 |
 03 |  -0.040659 |    0.000000 |   0.000000 | -221.704435 |

Aproximação "-0.040659" à raiz, com "03" iterações
```

```
*** APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DA SECANTE ***

PROBLEMA 2.1
 k  |      xk      | abs(xk-x1)  |     f(xk)     |
 01 |   1.262452 |    2.950389 | 346.794066 |
 02 |   1.823603 |    0.561151 | 2270.672757 |
 03 |   1.161300 |    0.662303 | 192.998135 |
 04 |   1.099778 |    0.061522 | 119.249294 |
 05 |   1.000299 |    0.099479 |  27.230369 |
 06 |   0.970861 |    0.029438 |   5.735724 |
 07 |   0.963005 |    0.007855 |   0.404862 |
 08 |   0.962409 |    0.000597 |   0.006794 |
 09 |   0.962398 |    0.000010 |   0.000008 |

Aproximação "0.962398" à raiz, com "09" iterações
```

→ **Como o valor aproximado da raiz é -0.040659, então $f(-0.040659) = 230 \cdot (-0.040659)^4 + 18 \cdot (-0.040659)^3 + 9 \cdot (-0.040659)^2 - 221 \cdot (-0.040659) - 9 \approx -0.000064 \approx 0$, o que mostra que a solução numérica obtida é suficientemente precisa para os mais diversos propósitos, já que o valor da função nesse ponto se aproxima de zero dentro da tolerância estabelecida de $\epsilon = 10^{-5}$.**

Problema 2.2: A função de captação de energia solar em um campo plano de espelhos pode ser especificada por:

$$f(A) = \frac{\pi\left(\frac{h}{cos(A)}\right)^2 F}{0{,}5\pi D^2(1+sen(A)-0{,}5cos(A))} - C$$

Nela, $0 \leq A \leq \pi/25$ é o ângulo de campo; F é a fração de campo com cobertura de espelhos (adimensional); D é o diâmetro do coletor (m); h é o comprimento do coletor (m); C é o fator geométrico de concentração solar (adimensional). Considere os dados: $h = 300m$; $F = 0.8$; $D = 14m$; $C = 1200$ e calcular uma aproximação para A na correspondente equação.

Solução:

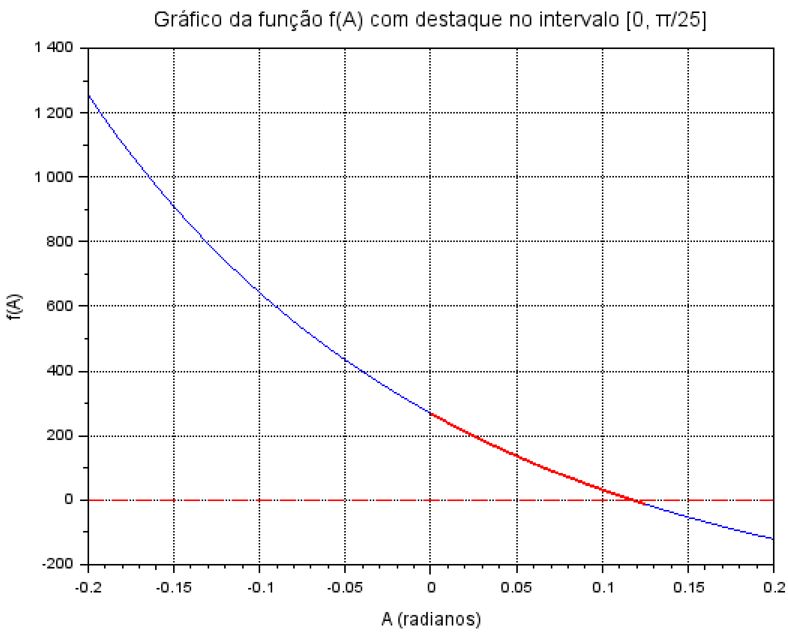
...
......

→ **Fazendo um estudo de sinal no intervalo $[0; \pi/25] \subset \mathbb{R}$ obtém-se:**

A	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0	π/25	0.2
f(A)	+4571.521	+2349.184	+1257.083	+642.949	+269.388	-13.845	-120.626

- **Como no subintervalo $[0; \pi/25]$ a função muda de sinal, o intervalo é um candidato a conter a raíz.**

→ **Plotando a função no intervalo em vermelho $[0; \pi/25]$ obtém-se:**



→ **Escolhendo o subintervalo [0; π/25] para o estudo numérico, para mostrar a existência da raiz nesse intervalo deve-se mostrar que f(0) · f(π/25) < 0, e para mostrar que é única neste subintervalo deve-se mostrar que $f_1(0)$ · $f_1(\pi/25)$ > 0. Como** $f(0) = \frac{\pi\left(\frac{300}{cos(0)}\right)^2 0{,}8}{0{,}5\pi 14^2(1+sen(0)-0{,}5cos(0))} - 1200 = \frac{72000\pi}{49\pi} - 1200 = 1469{,}388 - 1200 = 269{,}388$ **e** $f\left(\frac{\pi}{25}\right) = \frac{\pi\left(\frac{300}{cos\left(\frac{\pi}{25}\right)}\right)^2 0{,}8}{0{,}5\pi 14^2\left(1+sen\left(\frac{\pi}{25}\right)-0{,}5cos\left(\frac{\pi}{25}\right)\right)} - 1200 = \frac{229804{,}537}{193{,}739} - 1200 = 1186{,}155 - 1200 =- 13{,}845$, **temos: f(0) · f(π/25) = 269.388 · (-13.845) = -3279.677 < 0. Analogamente,** $f_1(A) = \frac{F\,h^2\,sec^3(A)(4\,tan^2(A)(4\,sec(A)-3)-2)}{D^2(tan(A)+sec(A)-0.5)^2}$**, então** $f_1(0) = \frac{F\,h^2\,sec^3(0)(4\,tan^2(0)(4\,sec(0)-3)-2)}{D^2(tan(0)+sec(0)-0.5)^2} =- 2938{,}776$ **e** $f_1\left(\frac{\pi}{25}\right) = \frac{F\,h^2\,sec^3(\frac{\pi}{25})(4\,tan^2(\frac{\pi}{25})(4\,sec(\frac{\pi}{25})-3)-2)}{D^2(tan(\frac{\pi}{25})+sec(\frac{\pi}{25})-0.5)^2} =- 1688{,}52$, **de modo que $f_1(0)$ · $f_1(\pi/25)$ = (-2938.776) · (-1688.52) = 4962182.052 > 0. Assim, é possível concluir que existe uma única raiz no subintervalo escolhido [0; π/25].**

→ **Para o subintervalo [0; π/25] obtém-se, via métodos de refinamento, que:**

*** APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DA BISSEÇÃO ***

k	xm	abs(bk-ak)	f(xm)
1	0.062832	0.125664	108.321873
2	0.094248	0.062832	43.040029
3	0.109956	0.031416	13.617231
4	0.117810	0.015708	-0.350909
5	0.113883	0.007854	6.572904
6	0.115846	0.003927	3.096055
7	0.116828	0.001963	1.368853
8	0.117319	0.000982	0.508044
9	0.117564	0.000491	0.078336
10	0.117687	0.000245	-0.136345
11	0.117626	0.000123	-0.029019
12	0.117595	0.000061	0.024655
13	0.117610	0.000031	-0.002183
14	0.117603	0.000015	0.011236

Aproximadamente: 0.117603 é a raiz, com 14 iterações

*** APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DA FALSA-POSIÇÃO ***

k	xk	abs(b-a)	f(xk)
01	0.119521	0.125664	-3.331157
02	0.118061	0.119521	-0.790300
03	0.117716	0.118061	-0.186867
04	0.117634	0.117716	-0.044150
05	0.117615	0.117634	-0.010429
06	0.117610	0.117615	-0.002463
07	0.117609	0.117610	-0.000582
08	0.117609	0.117609	-0.000137
09	0.117609	0.117609	-0.000032
10	0.117609	0.117609	-0.000008

Aproximação "0.117609" à raiz, com "10" iterações

```
*** APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DA SECANTE ***

PROBLEMA 2.2
 k  |     xk     | abs(xk-x1) |    f(xk)   |
 01 |   0.117575 |   0.001946 |   0.059763 |
 02 |   0.117609 |   0.000034 |  -0.000252 |
 03 |   0.117609 |   0.000000 |  -0.000000 |

Aproximação "0.117609" à raiz, com "03" iterações
```

```
*** APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON ***

PROBLEMA 2.2
 k  |     xk     | abs(xk-x0) |    f(xk)    |    f1(xk)    |
 01 |   0.111531 |   0.048700 |  10.776165 | -1796.859478 |
 02 |   0.117529 |   0.005997 |   0.140736 | -1750.117128 |
 03 |   0.117609 |   0.000080 |   0.000025 | -1749.498182 |
 04 |   0.117609 |   0.000000 |  -0.000000 | -1749.498073 |

Aproximação "0.117609" à raiz, com "04" iterações
```

→ **Como o valor aproximado da raiz é 0.117603, então f(0.117603) ≈ 0.000015 ≈ 0, o que mostra que a solução numérica obtida é suficientemente precisa para os mais diversos propósitos, já que o valor da função nesse ponto se aproxima de zero dentro da tolerância estabelecida de $\epsilon = 10^{-5}$.**

Problema 2.3: Certo material potencialmente perigoso à vida humana (neve, fluxo de detritos,...) está se movimentando em uma região montanhosa segundo a função:

$$p(t) = 7\left(2,0 - 0,9^{t}\right) - d$$

Nela, d (km) é a distância do local de ejeção do material até uma região habitada; t (h) é o tempo. Considere que $d = 10$ e calcule uma aproximação para o tempo (h) em que tal material atinge o local habitado na correspondente equação.

Solução:

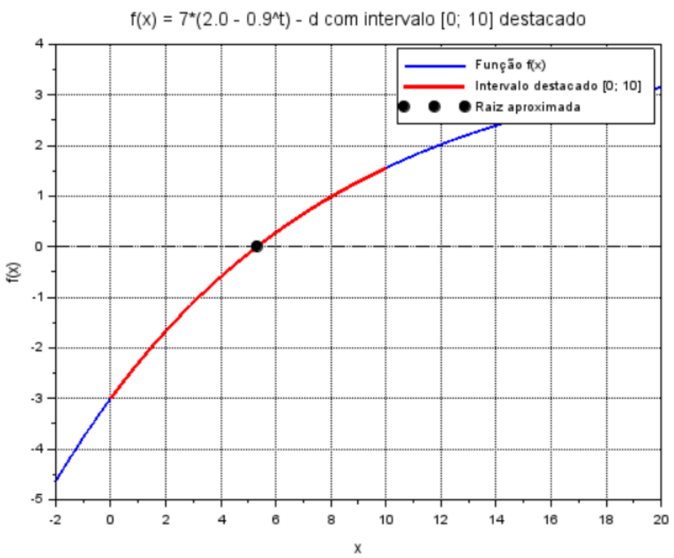
..

→ **Fazendo um estudo de sinal no intervalo [0, 10] ⊂ ℝ obtém-se:**

t	-30	-20	-10	0	10	20	30
p(t)	-161.129	-53.577	-16.076	-3	+1.559	+3.149	+3.703

- **Como no subintervalo [0, 10] a função muda de sinal, o intervalo é um candidato a conter a raíz.**

→ **Plotando a função no intervalo em vermelho [0, 10] obtém-se:**



→ Escolhendo o subintervalo $[0, 10]$ para o estudo numérico, para mostrar a existência da raiz nesse intervalo deve-se mostrar que $p(0) \cdot p(10) < 0$, e para mostrar que é única neste subintervalo deve-se mostrar que $p_1(0) \cdot p_1(10) > 0$. Como $p(0) = 7(2.0 - 0.9^0) - 10 = 7 - 10 = -3$ e $p(10) = 7(2.0 - 0.9^{10}) - 10 = 11.559 - 10 = 1.559$, temos: $p(0) \cdot p(10) = -3 \cdot 1.559 = -4.677 < 0$. Analogamente, $p_1(t) = 0.737524 \cdot 0.9^t$, então $p_1(0) = 0.737524 \cdot 0.9^0 = 0.737$ e $p_1(10) = 0.737524 \cdot 0.9^{10} = 0.257$, de modo que $p_1(0) \cdot p_1(10) = 0.737 \cdot 0.257 = 0.189 > 0$. Assim, é possível concluir que existe uma única raiz no subintervalo escolhido $[0, 10]$.

→ Para o subintervalo $[0, 10]$ obtém-se, via métodos de refinamento, que:

*** APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DA BISSEÇÃO ***

k	xm	abs(bk-ak)	f(xm)
1	5.000000	10.000000	-0.133430
2	7.500000	5.000000	0.823734
3	6.250000	2.500000	0.376621
4	5.625000	1.250000	0.129989
5	5.312500	0.625000	0.000448
6	5.156250	0.312500	-0.065940
7	5.234375	0.156250	-0.032610
8	5.273438	0.078125	-0.016047
9	5.292969	0.039062	-0.007791
10	5.302734	0.019531	-0.003670
11	5.307617	0.009766	-0.001610
12	5.310059	0.004883	-0.000581
13	5.311279	0.002441	-0.000067
14	5.311890	0.001221	0.000191
15	5.311584	0.000610	0.000062
16	5.311432	0.000305	-0.000002

Aproximadamente: 5.311432 é a raiz, com 16 iterações

*** APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DA FALSA-POSIÇÃO ***

PROBLEMA 2.3

k	xk	abs(b-a)	f(xk)
01	6.580028	10.000000	0.500448
02	5.639303	6.580028	0.135817
03	5.395056	5.639303	0.035086
04	5.332689	5.395056	0.008946
05	5.316834	5.332689	0.002274
06	5.312807	5.316834	0.000577
07	5.311785	5.312807	0.000147
08	5.311526	5.311785	0.000037
09	5.311460	5.311526	0.000009

Aproximação "5.311460" à raiz, com "09" iterações

*** APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON ***

PROBLEMA 2.3

k	xk	abs(xk-x0)	f(xk)	f1(xk)
01	5.306383	0.306383	-0.002131	0.421667
02	5.311436	0.005053	-0.000001	0.421442

Aproximação "5.311436" à raiz, com "02" iterações

*** APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DA SECANTE ***

PROBLEMA 2.3

k	xk	abs(xk-x1)	f(xk)
01	4.963563	1.616465	-0.149329
02	5.335052	0.371488	0.009940
03	5.311868	0.023184	0.000181
04	5.311437	0.000431	-0.000000

Aproximação "5.311437" à raiz, com "04" iterações

→ Como o valor aproximado da raiz é 5.311436, então $f(5.311436) = 7(2.0 - 0.9^{5.311436}) - 10 \approx -0.000002 \approx 0$, o que mostra que a solução numérica obtida é suficientemente precisa para os mais diversos propósitos, já que o valor da função nesse ponto se aproxima de zero dentro da tolerância estabelecida de $\epsilon = 10^{-5}$.

Problema 2.4: A função utilizada frequentemente para estimar o nível de concentração de oxigênio $C(d)$ (mg/L) em um rio, em relação ao ponto de descarga de poluentes, é como:

$$C(d) = 10 - 20(exp(-0,2d) - exp(-0,75d)) - O$$

Nela d (km) é a distância medida a partir do local de descarga dos poluentes; O é nível de oxigênio do corpo de água. Calcule a distância d para o qual o nível de oxigênio é para $O = 5$ (mg/L) na correspondente equação.

Solução:

....

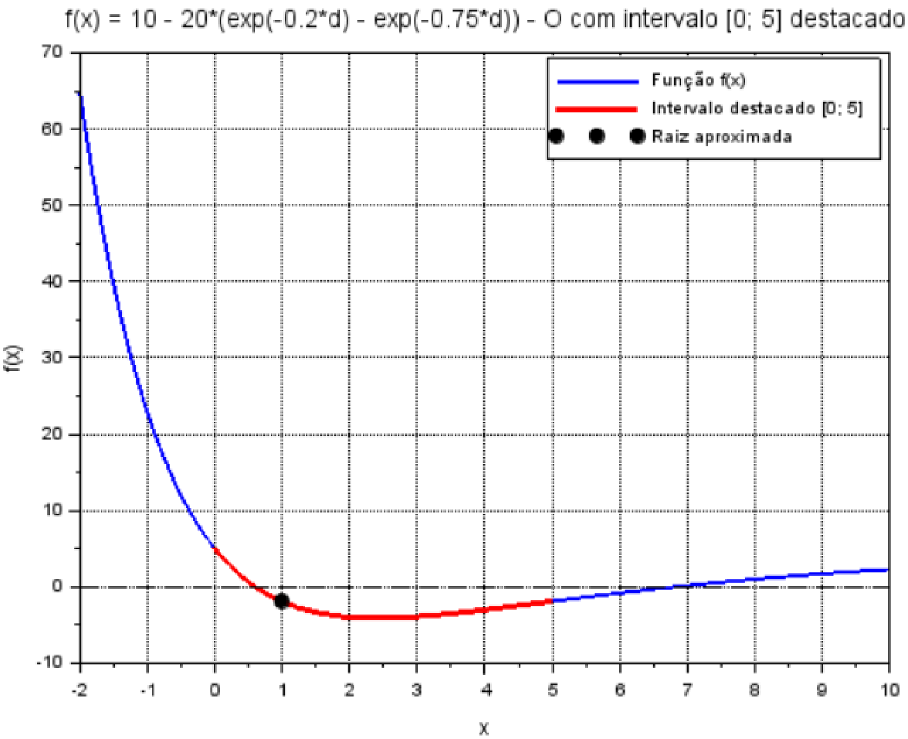
....

→ Fazendo um estudo de sinal no intervalo $[0, 5] \subset \mathbb{R}$ obtém-se:

d	0	1	2	3	4	5
C(d)	+5	-1.927	-3.943	-3.868	-2.991	-1.887

- **Como no subintervalo [0, 1] a função muda de sinal, o intervalo é um candidato a conter a raíz.**

→ **Plotando a função no intervalo em vermelho [0, 1] obtém-se:**



→ **Escolhendo o subintervalo [0, 1] para o estudo numérico, para mostrar a existência da raiz nesse intervalo deve-se mostrar que $C(0) \cdot C(1) < 0$, e para mostrar que é única neste subintervalo deve-se mostrar que $C_1(0) \cdot C_1(1) > 0$. Como $C(0) = 10 - 20\,(e^0 - e^0) - 5 = 10 - 5 = 5$ e $C(1) = 10 - 20\,(e^{-0.2} - e^{-0.75}) - 5 = 10 - 6.927 - 5 = -1.927$, temos: $C(0) \cdot C(1) = < 0$. Analogamente, $C_1(d) = 4e^{-0.2d} - 15e^{-0.75d}$, então $C_1(0) = 4e^0 - 15e^0 = 4 - 15 = -11$ e $C_1(1) = 4e^{-0.2} - 15e^{-0.75} = 3.275 - 7.085 = -3.811$, de modo que $C_1(0) \cdot C_1(1) = (-11) \cdot (-3.811) = 41.916 > 0$. Assim, é possível concluir que existe uma única raiz no subintervalo escolhido [0, 1].**

→ **Para o subintervalo [0, 1] obtém-se, via métodos de refinamento, que:**

*** APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DA BISSEÇÃO ***

PROBLEMA 1.1 NÚMERO 1
PROBLEMA 2.4

k	xm	abs(bk-ak)	f(xm)
1	0.500000	1.000000	0.649037
2	0.750000	0.500000	-0.818503
3	0.625000	0.250000	-0.134258
4	0.562500	0.125000	0.244373
5	0.593750	0.062500	0.051885
6	0.609375	0.031250	-0.041969
7	0.601562	0.015625	0.004761
8	0.605469	0.007812	-0.018653
9	0.603516	0.003906	-0.006958
10	0.602539	0.001953	-0.001102
11	0.602051	0.000977	0.001829
12	0.602295	0.000488	0.000363
13	0.602417	0.000244	-0.000369
14	0.602356	0.000122	-0.000003

Aproximadamente: 0.602356 é a raiz, com 14 iterações

*** APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DA FALSA-POSIÇÃO ***

k	xk	abs(b-a)	f(xk)
01	0.721784	1.000000	-0.672194
02	0.636247	0.721784	-0.199731
03	0.611808	0.636247	-0.056441
04	0.604979	0.611808	-0.015721
05	0.603082	0.604979	-0.004361
06	0.602557	0.603082	-0.001209
07	0.602411	0.602557	-0.000335
08	0.602371	0.602411	-0.000093
09	0.602360	0.602371	-0.000026
10	0.602357	0.602360	-0.000007

Aproximação "0.602357" à raiz, com "10" iterações

*** APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON ***

PROBLEMA 2.4

k	xk	abs(xk-x0)	f(xk)	f1(xk)
01	0.597016	0.097016	0.032136	-6.036051
02	0.602340	0.005324	0.000092	-6.001628
03	0.602355	0.000015	0.000000	-6.001530

Aproximação "0.602355" à raiz, com "03" iterações

*** APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DA SECANTE ***

PROBLEMA 2.4

k	xk	abs(xk-x1)	f(xk)
01	0.572778	0.149006	0.180354
02	0.604300	0.031522	-0.011657
03	0.602386	0.001914	-0.000184
04	0.602355	0.000031	0.000000

Aproximação "0.602355" à raiz, com "04" iterações

→ **Como o valor aproximado da raiz é 0.602355, então $f(0.602355) = 10 - 20\,(e^{-0.2 \cdot 0.602355} - e^{-0.75 \cdot 0.602355}) - 5 = 10 - 4.999997 - 5 \approx 0.000003 \approx 0$, o que mostra que a solução numérica obtida é suficientemente precisa para os mais diversos propósitos, já que o valor da função nesse ponto se aproxima de zero dentro da tolerância estabelecida de $\epsilon = 10^{-5}$.**

GRUPOS-PRÁTICA 1	
G1: Pedro Miotto, Vinícius Castamann, Thiago Oliveira, Gabriel Costa	G4: Carlos Eduardo, Ithony Elivis, Lucas David
G2: Gabriel da Silva, Arthur Fomes, Henrique Ferreira, Lucas Antenor	G5: Paula Miloca, Heloisa Raquel, Alexia Hoshino, Kayra Yokoyama
G3: Pedro Moraes, Eduardo Nogueira, Matheus Seghatti	

....

GRUPOS-PRÁTICA 2	
G1: Kurt Cobai, Felipe Kiznik	G4: Emanuel Eleut, Guilherme Henrique, João Vitor
G2: Pedro Augusto, Ana Julia, Maila Alves, Lucas Henrique	G5: Luciano Augusto, Raianny Vitoria, Gabriel Luiz
G3: Eric Barbacha, Matheus Artur, Rafael Loureiro	G6: Gustavo Rafael, Pedro Henrique, Vitor Krieser, Guilherme Reolon

....

....