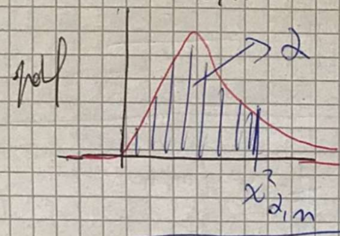
Quantili χ^2

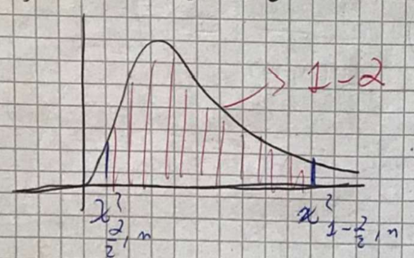
Se $W \sim \chi^2_n$. $\forall \alpha \in (0,1)$ il quantile d'ordine α si denota con $\chi^2_{\alpha,n}$.



Proprietà $\boxed{\forall \alpha \in (0,1) \quad P\left(\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n} \leq W \leq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n}\right) = 1-\alpha}$

Infatti $P\left(\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n} \leq W \leq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n}\right) = F_W\left(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n}\right) -$

$- F_W\left(\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 1 - \alpha$



IF PER LA VARIANZA DI UN CAMPIONE GAUSSIANO

Sia $X=(X_1,.., X_n)$ campione $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, con μ e σ^2 non note. Vogliamo IF per σ^2.

Fisso $\alpha \in (0,1)$ "piccolo" e cerco θ_1 e θ_2 t.c.

$$P(\theta_1 \leq \sigma^2 \leq \theta_2) = 1-\alpha$$

Ricordando che $(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$ e, fissato $\alpha \in (0,1)$ per una proprietà dei quantili χ^2:

$$\boxed{P\left(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \leq (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}\right) = 1-\alpha}$$

Allora:

$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}}\right) = 1-\alpha$$

Cioè $\theta_1 = \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}}$, $\theta_2 = \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}}$

Pertanto IF di livello α per σ^2:

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}}\right]$$

STIMATORI DI MASSIMA VEROSIMIGLIANZA (MV)

Anche gli stimatori MV sono del tipo puntuale.

Supponiamo di considerare il campione $X=(X_1,..,X_n)$ per il quale si osservano i dati $(x_1,..,x_n)$.

Supponiamo inoltre che $X_i \sim D(\vartheta)$, ϑ ignoto $\forall i=1..n$.

<u>Problema</u> Stimare ϑ a partire dai dati osservati.

In particolare, se abbiamo registrato questi dati, è lecito pensare che essi fossero i più probabili sotto quel parametro (da stimare) ~~xx~~ di ϑ

Cioè vogliamo costruire la stima di ϑ assumendo che i dati registrati fossero i più probabili di tutti

a) X discreto

Si chiama funzione di verosimiglianza l'applicazione

$$\boxed{L(\vartheta) := P(X_1 = x_1)\, P(X_2 = x_2) \cdots P(X_n = x_n)}$$

b) X a. c.

Si chiama funzione di verosimiglianza l'applicazione $\boxed{L(\vartheta) := f(x_1) \dots f(x_n)}$, dove f è la pdf del campione.

Oss Tale $L(\vartheta)$ dà informazioni, al variare di ϑ, su quanto è probabile osservare la serie di dati $(x_1, \dots, x_n)$. Cioè, crescendo $L(\vartheta)$ al variare di ϑ aumenta la probabilità che questi dati provengano da una distribuzione con parametro ϑ.

Quindi se voglio trovare la stima di ϑ che rende massima la probabilità (verosimiglianza) di osservare i dati ~~regi~~ registrati, devo rendere massima $L(\vartheta)$

Def. Sia $X = (X_1, \dots, X_n)$ campione $X_i \sim D(\vartheta)$ $\forall i = 1, \dots, n$, ϑ ignoto. Si chiama stimatore di massima verosimiglianza (MV) il valore, denotato con $\hat{\vartheta}$, che rende massima $L(\vartheta)$.

OSS $\hat{\theta}$ è punto di max per $L(\vartheta)$ $\iff$

$\hat{\vartheta}$ è punto di max per $\ln L(\vartheta)$.

(Infatti "ln" è strettamente crescente)