Monitoria da Disciplina de PAA
Árvore de Recursão

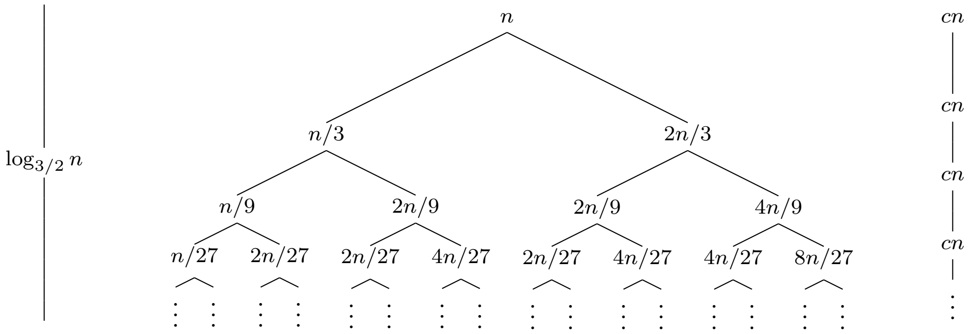
Universidade Federal do Ceará - Campus Quixadá

EXERCÍCIO: Use uma árvore de recursão para determinar a função de crescimento das recorrências acima e prove por indução.

- Exercício de Monitoria - 21/09/2016

1. $T(n) = T(n/3) + T(2n/3) + n$

   A altura da árvore é definida pelo caminho mais longe da raiz até uma folha, assim temos n->$(2/3)n$->$(2/3)^2n$->...->1.
   Logo temos que $(2/3)^k n = 1$ quando $k = \log_{3/2} n$, portanto a altura da árvore é $\log_{3/2} n$



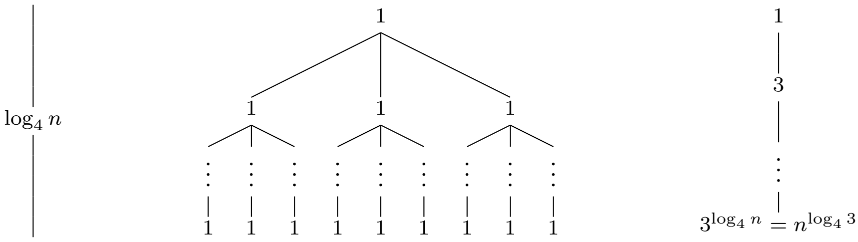
   $T(n) = \sum_{i=0}^{\log_{3/2} n} cn = cn.\log_{3/2} n$

   Neste caso analisamos um limite superior, dado que a árvore não cresce igual. Desconsiderando as constantes e como sabemos que o crescimento de um logarítmo não depende da base. Logo chutamos que $T(n) \in O(n.\log n)$

   Prova por Indução:
   H.I.: $T(m) \leq cm.\log m$ para todo $m < n$
   P.I.: Queremos provar que $T(n) \leq cn.\log n$
   $T(n) = T(n/3) + T(2n/3) + n \leq c(n/3).\log(n/3) + c(2n/3).\log(2n/3) + a.n$
   $= (cn/3).\log n - (cn/3).\log 3 + (c2n/3).\log n - (c2n/3).\log(3/2) + a.n$
   $= (c/3 + 2c/3)n.\log n - ((c/3).\log 3 + (2c/3).\log(3/2))n + a.n$
   $= cn.\log n - c.n(\log 3 - (2/3)) + a.n \leq cn.\log n$ para $c \leq a/(\log 3 - (2/3))$

   Como estamos calculando um limite superior, não tivemos de executar com toda a precisão do custo da árvore de recursão.
   Portanto temos que $T(n) \leq cn.\log n$, então $T(n) \in O(n.\log n)$

2. $T(n) = 3T(n/4) + 1$



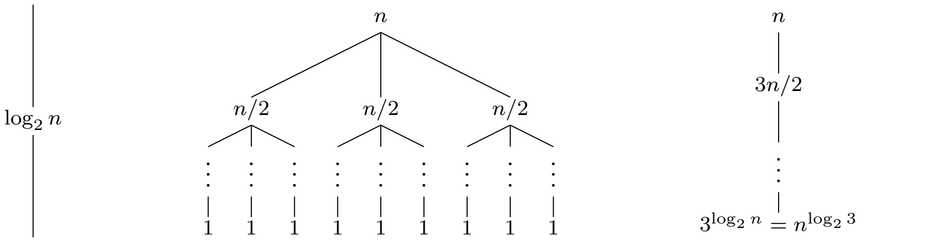
   Como os folhas seguem o padrão encontrado na árvore, tal que é 3^{nivel}, assim incluímos no somatório.

   $T(n) = \sum_{i=0}^{\log_4 n} 3^i = (3^{\log_4 n+1} - 1)/(3-1) = (3.n^{\log_4 3} - 1)/2 = (3/2).n^{\log_4 3} - (1/2)$

   Desconsiderando as constantes e pegando quem domina, logo chutamos que $T(n) \in \Theta(n^{\log_4 3})$

   Prova por Indução:
   H.I.: $T(m) = c.m^{\log_4 3} - c$ para todo $m < n$
   P.I.: Queremos provar que $T(n) = c.n^{\log_4 3} - c$
   $T(n) = 3T(n/4) + 1 = 3(c.(n/4)^{\log_4 3} - c) + 1 = (3.n^{\log_4 3}/3) - 3c + 1 = n^{\log_4 3} - 3c + 1$
   $T(n) = c.n^{\log_4 3} - c$ para $c = 1/2$
   Portanto temos que $T(n) = c.n^{\log_4 3} - c$, então $T(n) \in \Theta(nn^{\log_4 3})$

3. $T(n) = 3T(n/2) + n$



$T(n) = \sum_{i=0}^{\log_2 n - 1} (3/2)^i (n) + n^{\log_2 3} = n.[\sum_{i=0}^{\log_2 n - 1} (3/2)^i] + n^{\log_2 3} = n.[((3/2)^{\log_2 n} - 1)/((3/2) - 1)] + n^{\log_2 3}$
$T(n) = n.[((3^{\log_2 n}/n) - 1)/(1/2)] + n^{\log_2 3} = 2n(3^{\log_2 n}/n) - 2n + n^{\log_2 3} = 3.n^{\log_2 3} - 2.n$
Como $c.n^{\log_2 3}$ domina $c.n$. Logo chutamos que $T(n) \in \Theta(n^{\log_2 3})$

Prova por Indução:
H.I.: $T(m) = c.m^{\log_2 3} - c.m$ para todo $m < n$
P.I.: Queremos provar que $T(n) = c.n^{\log_2 3} - c.n$
$T(n) = 3T(n/2) + n = 3.[c.(n/2)^{\log_2 3} - c.(n/2)] + n = 3(c.n^{\log_2 3})/3 - (3/2)c.n + n = c.n^{\log_2 3} - (1/2)c.n$
$T(n) = c.n^{\log_2 3} - c.n$ para $c = 2$
Portanto temos que $T(n) = c.n^{\log_2 3} - c.n$, então $T(n) \in \Theta(n^{\log_2 3})$